F 1812
F 1812

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI

SERIE NOUĂ

TOMUL XIV (XVIII)

FASC. 1–2

1968 NOV 12

1968

COLEGIUL DE REDACȚIE

Prof. emerit doc. dr. GH. ALEXA, prof. ing. D. ATANASIU, prof. ing. C. CALISTRU, prof. ing. T. GOLGOȚIU, prof. dr. doc. D. MANGERON (secretar), conf. ing. A. MARCHIȘ, prof. dr. doc. D. RUSU, prof. ing. A. ȘESAN, acad. prof. dr. doc. CRISTOFOR SIMIONESCU (președinte)

COMITETELE DE REDACȚIE ALE SECȚIILOR

MATEMATICI, MECANICĂ TEORETICĂ, FIZICĂ

Prof. dr. doc. Al. Climescu
Prof. Gh. Ciobanu
Prof. dr. doc. V. Petrescu

ELECTROTEHNICĂ, ELECTRONICĂ

Conf. dr. ing. D. Bărbulescu
Prof. dr. doc. N. Boțan
Conf. dr. ing. L. Sebastian

CONSTRUCȚII, HIDROTEHNICĂ

Prof. emerit ing. A. Cernătescu
Conf. ing. Vl. Boghian
Conf. ing. C. Ciobanu
Lector ing. A. Radu

CHIMIE

Prof. dr. doc. M. Dima
Prof. dr. ing. Gh. Chiriță
Conf. ing. Gh. Botez

MECANICĂ TEHNICĂ

Prof. dr. doc. T. Fărcaș
Prof. ing. G. d'Albon
Conf. ing. Cr. Linde

INDUSTRIE UȘOARĂ

Prof. ing. I. Ștefănescu
Conf. ing. V. Copilu
Conf. ing. V. Cociu

REDACȚIA

Prof. dr. doc. D. MANGERON (redactor responsabil)

Lector ing. H. ROSMAN (secretar)

J 88

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI

SERIE NOUĂ

TOMUL XIV (XVIII)

FASC. 1–2

1968

1989

COLEGIUL DE REDACȚIE

Prof. emerit dr. doc. GH. ALEXA, prof. ing. D. ATANASIU, prof. ing. C. CALISTRU, prof. ing. T. GOLGOȚIU, prof. dr. doc. D. MANGERON (secretar), conf. ing. A. MARCHIȘ, prof. dr. doc. D. RUSU, prof. ing. A. ȘESAN, acad. prof. dr. doc. CRISTOFOR SIMIONESCU (președinte)

BME KÖZPONTI KÖNYVTÁRA
F
1812
FOLYÓIRAT OSZTÁLY

120/1965

COMITETELE DE REDACȚIE ALE SECȚIILOR

MATEMATICI, MECANICĂ TEORETICĂ, FIZICĂ

Prof. dr. doc. Al. Climescu
Prof. Gh. Ciobanu
Prof. dr. doc. V. Petrescu

CHIMIE

Prof. dr. doc. M. Dima
Prof. dr. ing. Gh. Chiriță
Conf. ing. Gh. Botez

ELECTROTEHNICĂ, ELECTRONICĂ

Conf. dr. ing. D. Bărbulescu
Prof. dr. doc. N. Boțan
Conf. dr. ing. L. Sebastian

MECANICĂ TEHNICĂ

Prof. dr. doc. T. Fărcaș
Prof. ing. G. d'Albon
Conf. ing. Cr. Linde

CONSTRUCȚII, HIDROTEHNICĂ

Prof. emerit ing. A. Cernătescu
Conf. ing. Vl. Boghian
Conf. ing. C. Ciobanu
Lector ing. A. Radu

INDUSTRIE UȘOARĂ

Prof. ing. I. Ștefănescu
Conf. ing. V. Copilu
Conf. ing. V. Cociu

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

REDACȚIA

Prof. dr. doc. D. MANGERON (redactor responsabil)

Lector ing. H. ROSMAN (secretar)

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Vol. XIV (XVIII), fasc. 1—2 1968

SUMAR

Pag.

REDACŢIONALE XXI

A. JEANRENAUD, La a XX-a aniversare a proclamării republicii . . XXIII

MATEMATICĂ. MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

CH. EHRESMANN (Franţa), Schiţări şi tipuri de structuri algebrice (franc., rez. rom.) 1

F. S. ROSSI (Italia), Asupra principiului lui Zermelo şi aplicarea sa la o teoremă fundamentală de analiză matematică (ital., rez. rom.) . 15

AL. CLIMESCU, O teoremă de transfer pentru ecuaţii funcţionale (franc., rez. rom.) 19

A. MAJEED (Pakistan), Teoreme de existenţă pentru produse libere generalizate de grupuri (I) 23

I. POP, Asupra determinării grupurilor de omologie ale sferei, spaţiului proiectiv real şi torului, considerate ca C.W.-complexe (franc., rez. rom.) 27

I. ENESCU, Asupra unei clase de algebre de ordin $8n$ (franc., rez. rom.) 31

AL. CLIMESCU, O problemă de programare inversă (franc., rez. rom.) 37

M. N. OĞUZTÖRELI (Canada), O clasă de ecuaţii integro-diferenţiale neliniare de tip parabolic cu argument întîrziat (engl., rez. rom.) 43

PH. GATIGNOL (Franţa), Asupra formei şi studiului densităţilor invariante asociate la unele ecuaţii cu derivate parţiale neliniare (franc., rez. rom.) 51

W. J. COLES şi D. H. TUCKER (S.U.A.), Zerourile soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale complexe (engl., rez. rom.) 61

N. A. PARTINOVA şi D. D. BAINOV (R. P. Bulgaria), Observaţii pe marginea unei ecuaţii diferenţiale de tip parabolic (rus., rez. rom.) 69

V. MURGESCU, Integrarea unei ecuaţii cu diferenţe (franc., rez. rom.) 75

A. CORDUNEANU, Despre spectrul operatorului Volterra (franc., rez. rom.) 79

M. PICONE (Italia), D. MANGERON (România), Teoreme de unicitate pentru soluţii ale unor ecuaţii funcţionale şi separarea autovalorilor unui parametru de care depind aceste ecuaţii (ital., rez. rom.) . . 83

M. W. MÜLLER (R.F.G.), Asupra aproximării oblice stîngi prin serii de puteri ale lui Bernstein (germ., rez. rom.) 89

A. M. KRALL (S.U.A.), Marginile pentru zerourile polinoamelor şi a derivatelor lor (engl., rez. rom.) 93

H. KNAPP (Austria), Metoda lui Gröbner şi aplicaţiile ei la calculul numeric al orbitelor interesînd mecanica cerească (II) (germ., rez. rom.) 97

D. T. HAIMO (S.U.A.), Transformarea redusă a lui Poisson-Hankel (II) (engl., rez. rom.) 105
PH. NOËL (Franța), O metodă de rezolvare a sistemelor liniare mari prin supraiterație polinomială (II) (franc., rez. rom.) 111
D. V. IONESCU, Formulă de cubatură cu un număr redus de noduri (II) (franc., rez. rom.) 115
F. MARCUS, Asupra sistemelor triple de curbe în spațiul proiectiv (franc., rez. rom.) 123
Ș. RÎMER, O reprezentare vectorială a cuadricelor de rotație (II) (franc., rez. rom.) 125
C. TRUESDELL (S.U.A.), Probleme ale mecanicii deformației și curgerii (II) (engl., rez. rom.) 131
S. NIANG (Senegal), Ecuații generale ale dinamicii analitice a sistemelor constante și funcția R (II) (franc., rez. rom.) 137
C. ACKER, Curgeri într-o varietate liniară (LA_3) a spațiului E_3 definită de un cîmp cu direcții asimptotice nedeterminate (franc., rez. rom.) 145
A. BRAIER, Compunerea oscilațiilor coliniare modulate în amplitudine (engl., rez. rom.) 149
L. de BROGLIE (Franța), Asupra discuțiilor relative la formula $Q=Q_0\sqrt{1-\beta^2}$ și definiția presiunii în termodinamica relativistă (franc., rez. rom.) 155
E. SCHMID (Austria), Întărirea prin ultrasunete și revenirea termică (germ., rez. rom.) 159
V. D. GHERȘUN, S. S. SANNIKOV (U.R.S.S.), Modelul cu două componente al lui Thomas-Fermi (rus., rez. rom.) 165
J. GOTTLIEB, E, TEREJA, Notă asupra expresiei semi-relativist generalizate a forței de interacțiune dintre două particule punctiforme (franc., rez. rom.) 171
R. V. DEUTSCH, I. BĂLAN, Studiul propagării undelor Alfven în sisteme neomogene în cadrul magnetohidrodinamicii relativiste (engl., rez. rom.) 175
N. CALINICENCO, S. MELINTE, V. MIHU, Studiul proprietăților optice ale straturilor subțiri de telur (rom., rez. franc.) 179

CHIMIE

M. ȘCHIOPU, V. ONU, M. APOSTOLESCU, L. SILBERMAN, O metodă de dozare colorimetrică a nicotinei din tutunul fermentat (franc., rez. rom.) 185
A. LUCA, J. LINDE, T. GOLGOȚIU, I. HÎNCU, M. URSU, Considerații asupra unor factori ce determină agresivitatea solurilor (I) (rom., rez. franc.) 189
I. ANTONESCU, M. CARAMLĂU, O metodă fotometrică extractivă pentru dozarea unor oxidanți (II) (rom., rez. engl.) 195
C. LEONTE, M. GABURICI, Densitatea și viscozitatea unor soluții din sistemul $H_2SO_4 - H_3PO_4 - H_2O$ (rom., rez. engl.) 201
ȘT. IVĂȘCANU, I. ICHIM, Cercetări privind coroziunea aliajelor OL 38, V_2A și V_4A în acid fosforic și protecția lor prin inhibitori (franc., rez. rom.) 205
R. VASILIU, Descompunerea amalgamului de sodiu în pilă (franc., rez. rom.) 213
C. CALISTRU, C. LEONTE, Modelarea macrocinetică a proceselor chimice industriale (rom., rez. franc.) 221

I. CURIEVICI, ŞT. UNGUREANU, Modelarea analogică a reactorului de oxidare catalitică a amoniacului (engl., rez. rom.) . . . 229
T. SĂVEANU, M. VASILIU, AL. STANCU, Studii în distilarea peliculară (germ., rez. rom.) 237
I. MATEI, T. LIXANDRU, Reacţii ale acenaftenonelor cu compuşi Grignard (rom., rez. franc.) 245
E. A. SMIRNOV, L. N. KIRICENKO (U.R.S.S.), Structura şi coloraţia produşilor salicilidenanilinei. Eterii acizilor 5-clorsalicilidenşi 3,5-diclorsaliciliden-*n*-aminobenzoici (rus., rez. rom.) 249
I. MATEI, E. COMANIŢĂ, O nouă metodă de ciclizare a acil-tiosemicarbazidelor 4-substituite (IV) (rom., rez .franc.) 255
GH. LUPUŞOR, S. IFRIM, Prepararea unor noi coloranţi de sulf (franc., rez. rom.) 259
S. IFRIM, Prepararea unor amine aromatice prin reducere de coloranţi azoici (engl., rez. rom.) 265
S. DUMITRESCU, C. GHIRVU, CR. SIMIONESCU, V. SAHINI, Studiul polimerizării derivaţilor acetilenici (II), (franc., rez. rom.) . . 271
EM. POPPEL, S. PETROVAN, CR. SIMIONESCU, Obţinerea hîrtiilor neutre prin utilizarea aluminatului de sodiu (germ., rez. rom.) . . . 277
V. I. IVANOV, N. I. KUZNEŢOVA (U.R.S.S.), Structura moleculelor de celuloză şi destrucţia lor (rus., rez. rom.) 287
A. CERNĂTESCU-ASANDEI, M. GRIGORAŞ, Dinamica şi structura componentelor chimice principale ale ţesuturilor vegetale normale şi tumorale (III) (franc., rez. rom.) 293
GH. CHIRIŢĂ, A. CHIRIŢĂ, E. IVĂŞCANU, Cercetări asupra difuziei taninurilor vegetale şi sintetice în tăbăcirile combinate (franc., rez. rom.) 299
CH. POPESCU, Influenţa îngrăşămintelor minerale asupra producţiei de cartofi pe terenuri în pantă (franc., rez. rom.) 307
I. POPESCU, M. DIMA, Posibilităţi de valorificare a prafului de clincher în agricultură (franc., rez. rom.) 313

ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ

EM. LUCA, V. SCUTARU, Fotoelectreţi din dielectrină (franc., rez. rom.) 323
GH. VASILIU, Rezultate noi în legătură cu „efectul Procopiu" (franc., rez. rom.) 329
H. ROSMAN, Asupra teoremei transferului puterii active maxime (rom., rez. franc.) 335
GH. SAVIN, S. MITREA, I. POPESCU, E. SIMION, N. ZITRON, Circuit ferorezonant multistabil (franc., rez. rom.) 341
EM. SIMION, Circuit paralel dublu ferorezonant, cu parametrii variabili (franc., rez. rom.) 347
AL. VALACHI, C. HARJA, Sumator serie tranzistorizat (franc., rez. rom.) 355
C. GHIBU, Convertor analogic digital pentru aplicaţii în reglaj automat (engl., rez. rom.) 359
V. PETRESCU, M. CREŢU, Asupra unei metode de măsurare a unghiului dintre două tensiuni alternative prin folosirea diodelor semiconductoare (franc., rez. rom.) 363
D. BĂRBULESCU, Defazor de tensiune utilizînd un circuit serie inductiv cu reactanţe semicompensate (rom., rez. franc.) 369

N. V. BOȚAN, A. OPREA, E. BALABAN, I. GHEORGHIU, D. BĂRBULESCU, Cercetări în legătură cu reducerea efectelor inerțiale (fiziologice) în sisteme de acționare electrică prin folosirea unor diagrame speciale de viteză (rus., rez. rom.) 381
C. SAAL, Comportarea energetică a acționărilor electromecanice cu motoare oscilante liniare (engl., rez. rom.) 387
M. Z. HAMUDHANOV, N. M. USMANHODJAEV (U.R.S.S.), Metodă grafo-analitică de calcul a principalelor caracteristici și de determinare a proprietăților de reglaj ale motorului asincron monofazat cu condensator la frecvență variabilă (rus., rez. rom.) 397
I. BERGMAN, Considerații privind acționarea electrică cu un motor asincron alimentat de la un generator trifazat cu colector autoexcitat (germ.. rez. rom.) 409
M. VOICU, Contribuție la determinarea influenței parametrilor inductivi și capacitivi ai bobinelor cilindrice, asupra solicitărilor izolației transversale a bobinei supuse la unda de impuls de tensiune (franc., rez. rom.) 417

MECANICĂ TEHNICĂ

M. N. OĞUZTÖRELI (Canada), O teoremă referitoare la fenomene generalizate de transfer de căldură (II) (engl., rez. rom.) . . 429
D. MANGERON, Noi metode de determinare a soluțiilor modelelor matematice referitoare la sisteme polivibrante (I) (engl., rez. rom.) 433
D. K. SINHA (India), Deformații ale unui disc subțire heterogen din material piezoelectric (engl., rez. rom.) 437
W. KECS, Reprezentarea matematică a unor limite de grupe de sarcină și aplicații în mecanica corpurilor deformabile (I) (franc., rez. rom.) 443
M. KONSTANTINOV, P. ȚENOV (R. P. Bulgaria), Pendule izocrone ale curbelor de rostogolire (germ., rez. rom.) 449
N. IRIMICIUC, I. IBĂNESCU, E. RUSU, Asupra problemei legăturilor olonome impuse sistemelor de solide rigide (II) (franc., rez. rom.) 461
B. I. KANTOR (U.R.S.S.), Stări critice ale pînzelor subțiri conice flexibile în cîmpuri de temperatură (rus., rez. rom.) 469
I. I. KAPUSTIN, D. I. ILINSKI (U.R.S.S.), Probleme de proiectare optimală a autooperatorilor mașinilor și liniilor tehnologice (rus., rez. rom.) 475
GH. DELIU, Asupra cinematicii masei suspendate a automobilelor (franc., rez. rom.) 483
D. PERETZ, Asupra unui model al detonației în motoare cu aprindere prin scînteie (germ., rez. rom.) 493
C. CIOBANU, P. MATEI, Determinarea forțelor rezistente produse de vibrația transversală a unui disc care se rotește într-un fluid vîscos (franc., rez. rom.) 509

CONSTRUCȚII. HIDROTEHNICĂ

A. ȘESAN, A. VULPE, N. TUTOȘ, Utilizarea teoriei grafelor în formularea matricială a metodei momentelor active (rom., rez. franc.) . . 515
M. DIACONU, Contribuții la problema compresiunii excentrice cînd eforturile de întindere sînt luate în considerare sau sînt neglijate (franc., rez. rom.) 523
I. GOIA, Determinarea eforturilor unitare normale la încovoierea oblică a barelor curbe (germ., rez. rom.) 535

AL. EFTIMIE, Contribuții la studiul eforturilor și deplasărilor în terenurile de fundații (franc., rez. rom.) 541
C. LEONTE, A. MIHUL, Considerațiuni asupra cupolelor sferice pleoștite cu inelul de rezemare precomprimat (franc., rez. rom.) . . . 551
A. NEGOIȚĂ, GR. MUNTEANU, Observații privind betoanele ușoare de zgură expandată și utilizarea lor la fabricarea panourilor mari de pereți (franc., rez. rom.) 561
V. FOCȘA, A. RADU, M. POPPEL, N. BOȚI, I. GAVRILAȘ, L. BIBOROSCH, Nivelul zgomotului exterior și mijloacele de reducere a acestuia (germ., rez. rom.) 567
D. ATANASIU, V. CIUBOTARU, D. GANJULA, H. ZAROJANU, B. COSOSCHI, N. VLAD, C. PLĂCINTĂ, Asupra corelației dintre trafic și deformații în cazul a două sisteme rutiere flexibile realizate cu materiale locale (rom., rez. franc.) 575
L. ESCANDE (Franța), Cercetări asupra stabilității camerelor de echilibru (franc., rez. rom.) 587
C. JURA, M. GIURCONIU, TR. NICOARĂ, GH. CREȚU, I. MIREL, Studiul tehnico-economic al rezervoarelor în sistemele centrale de distribuție a apei (rom., rez. germ.) 597

INDUSTRIE UȘOARĂ

I. VLAD, H. MAURUS, Contribuții la studiul dimensiunii transversale și proprietăților tensionale ale părului de iepure folosit la fabricarea pălăriilor (germ., rez. rom.) 605
F. REICHER, Determinarea rațională a seriei de roți dințate schimbătoare la regulatoare negative de urzeală (germ., rez. rom.) . . . 613
V. COCIU, L. DUMA, D. CROITORU, G. MĂLUREANU, Metodă de tensometrie electrică rezistivă pentru stabilirea deformației materialelor elasto-plastice (rom., rez. rus.) 617

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Vol. XIV (XVIII), fasc. 1—2 1968

CONTENTS

	Pag.
EDITORSHIP'S ANNOUNCEMENTS	XXI
A. JEANRENAUD, Au XX-e anniversaire de la République	XXIII
MATHEMATICS. THEORETICAL MECHANICS. PHYSICS	
CH. EHRESMANN (France), Esquisses et types des structures algébriques (french, rom. summ.)	1
F. S. ROSSI (Italia), Sul principio di Zermelo e la sua applicazione a un teorema fondamentale di analisi (ital., rom. summ.)	15
AL. CLIMESCU, Un théorème de transfert pour certaines équations fonctionelles (french, rom. summ.)	19
A. MAJEED (Pakistan), Existence Teorems for Generalised Free Products of Groups (I) (english, rom. summ.)	23
I. POP, Sur la détermination des groupes d'homologie pour la sphère, l'espace projectif réel et le thore, considérés comme C.W.-complexes (french, rom. summ.)	27
I. ENESCU, Sur une classe d'algèbres d'ordre $8n$ (french, rom. summ.)	31
AL. CLIMESCU, Un problème de programmation inverse (french, rom. summ.)	37
M. N. OĞUZTÖRELI (Canada), A Class of Nonlinear Integro-differential Equations of Parabolic Type with a Delayed Argument (english, rom. summ.)	43
PH. GATIGNOL (France), Sur la forme et la recherche des densités invariantes asociées à certaines equations aux dérivées partielles non-linéaires (french, rom. summ.)	51
W. J. COLES, D. H. TUCKER (U.S.A.), Zeros of Solutions of Complex Differential Equations (english, rom. summ.)	61
N. A. PARTINOVA, D. D. BAINOV (Bulgaria), Some Remarks concerned with a Parabolic Differential Equation (russ., rom. summ.)	69
V. MURGESCU, L'integration d'une équation linéaire aux différences (french, rom. summ.)	75
A. CORDUNEANU, Sur le spectre de l'opérateur Volterra (french, rom. summ.)	79
M. PICONE (Italia), D. MANGERON (Romania), Teoremi di unicità per le soluzioni di talune equazioni funzionali e separazione degli autovalori di un parametro da cui quelle dipendono (ital., rom. summ.)	83
M. W. MÜLLER (R.F.G.), Von links schräge Approximation durch Bernsteinche Potenzreihen (germ., rom. summ.)	89

A. M. KRALL (U.S.A.), Bounds for the Zeros of a Polynomial and its Derivatives (english, rom. summ.) 93
H. KNAPP (Austria), Die Gröbnersche Methode und ihre Anwendung auf die numerische Bahnberechnung in der Himmelmeckanik (II) (germ., rom. summ.) 97
D. T. HAIMO (U.S.A.), The Reduced Poisson-Hankel Transform (II) (english, rom. summ.) 105
PH. NOËL (France), Une méthode de résolution des grandes systèmes linéaires par suritération polynômiale (II) (french, rom. summ.) . 111
D. V. IONESCU, Formules de cubature avec un petit nombre de noeuds (II) (french, rom. summ.) 115
F. MARCUS. Sur les systèmes triples de courbes dans l'espace projectil (french, rom. summ.) 123
Ş. RIMER, Représentation vectorielle des quadriques de rotation (II) (french, rom. summ.) 125
C. TRUESDELL (U.S.A.), Rational Mechanics of Deformation and Flow (II) (english, rom. summ.) 131
S. NIANG (Sénégal), Équations générales de dynamique analytique des systèmes constants et fonction R (II) (french, rom. summ.) . . 137
C. ACKER, Écoulements au long d'une variété linéaire (LA_i) de l'espace E_3 dont les directions asymptotiques sont indeterminées (french, rom. summ.) 145
A. BRAIER, Composition of Colinear Oscillations with Amplitude Modulation (english, rom. summ.) 149
L. de BROGLIE (France), Sur les discussions relatives à la formule $Q=Q_0\sqrt{1-\beta^2}$ et la définition de la pression en thermodynamique relativiste (french, rom. summ.) 155
E. SCHMID (Austria), Verfestigung durch Ultraschall und ihr thermischer Abbau (germ., rom. summ.) 159
V. D. GERSHUN, S. S. SANNIKOV (U.R.S.S.), A Thomas-Fermi Bicomponents Model (russ., rom. summ.) 165
J. GOTTLIEB, E. TEREJA, Note sur l'expression demi-relativiste généralisée de la force d'interaction entre deux particules ponctuelles (french, rom. summ.) 171
R. V. DEUTSCH, L. BĂLAN, The Propagation of the Alfven Waves in Nonhomogeneous Systems in the Relativistic Magnetohydrodynamics (english, rom. summ.) 175
N. CALINICENCO, S. MELINTE, V. MIHU, Étude des propriétés optiques des couches minces de tellure (rom., french summ.) 179

CHEMISTRY

M. ŞCHIOPU, V. ONU, M. APOSTOLESCU, L. SILBERMAN, Une méthode de dosage colorimétrique de la nicotine du tabac fermenté (french, rom. summ.) 185
A. LUCA, J. LINDE, T. GOLGOŢIU, I. HÎNCU, M. URSU, Considérations concernant les facteurs qui déterminent l'agressivité du sol (I) (rom., french summ.) 189
I. ANTONESCU, M. CARAMLĂU, Extractive Photometric Method for the Determination of Several Oxidants (II) (rom., english summ.) . . 195
C. LEONTE, M. GABURICI, Density and Viscosity of Some Solutions from the System $H_2SO_4 - H_3PO_4 - H_2O$ (rom., english summ.) . . 201
ST. IVĂŞCANU, I. ICHIM, Recherches sur la corrosion des alliages OL 38, V_2A et V_4A dans l'acide phosphorique et les possibilités de protection par inhibiteurs (french, rom. summ.) 205

R. VASILIU, Décomposition de l'amalgame de sodium en pile (french, rom. summ.) 213
C. CALISTRU, C. LEONTE, Modèles macrocinétiques des processus chimiques industriels (rom., french summ.) 221
I. CURIEVICI, ŞT. UNGUREANU, Analogical Model of a Reactor for Ammonia Catalytic Oxidation (english, rom. summ.) . . . 229
T. SĂVEANU, M. VASILIU, AL. STANCU, Studien in der Rieselfilmdestillation (germ., rom. summ.) 237
I. MATEI, T. LIXANDRU, Réactions d'acénaphtenones avec les réactifs de Grignard (rom., french summ.) 245
E. A. SMIRNOV, L. N. KIRICENKO (U.R.S.S.), Structure et coloration des produits de la salicilidenaniline. Esthères des acides 5-chlorsaliciden- et 3.5-dichlorsaliciden *n*-aminobenzoiques (russ., rom. summ.) 249
I. MATEI, E. COMANIŢĂ, Une nouvelle méthode de cyclisation des acyl-thiosemicarbazides substituées (IV) (rom., french summ.) . 255
GH. LUPUŞOR, S. IFRIM, Préparation de nouveaux colorants de soufre (II) (french, rom. summ.) 259
S. IFRIM, Preparation of some Aromatic Amines by Reductions of the Azoic Stuffs (english, rom. summ.) 265
S. DUMITRESCU, C. GHIRVU, CR. SIMIONESCU, V. SAHINI, Étude de la polymérisation des dérivés acétyléniques (II) (french, rom. summ.) 271
EM. POPPEL, S. PETROVANU, CR. SIMIONESCU, Verwendung von Natriumaluminat zur Erzeugung von neutralen Papieren (germ., rom. summ.) 277
V. I. IVANOV, N. I. KOUZNETSOVA-LENCHINA (U.R.S.S.), Structures des molécules de cellulose et leur destruction (russ., rom. summ.) 287
A. CERNĂTESCU-ASANDEI, M. GRIGORAŞ, Dynamique et structure des principaux constituants chimiques des tissus végétaux normaux et des tumeurs (III) (french, rom. summ.) 293
GH. CHIRIŢĂ, A. CHIRIŢĂ, E. IVĂŞCANU, Recherches sur la diffusion des tanins végétaux et synthétiques dans la peau, pendant les tannages combines (french, rom. summ.) 299
CH. POPESCU, Influence des engrais minéraux sur la production des pommes de terre sur terrains en pente (french, rom. summ.) . . 307
I. POPESCU, M. DIMA, Les possibilités de l'utilisation de la poudre de clinker en agriculture (french, rom. summ.) 313

ELECTRICAL ENGINEERING. ELECTRONICS

E. LUCA, V. SCUTARU, Photo-électrètes en diélectrine (french, rom. summ.) 323
GH. VASILIU, Résultats nouveaux concernant „l'effet Procopiu" (french, rom. summ.) 329
H. ROSMAN, Sur le théorème de transfert de la puissance active maximum (rom., french summ.) 335
GH. SAVIN, S. MITREA, I. POPESCU, E. SIMION, N. ZITRON, Circuit ferrorésonant multistable (french, rom. summ.) 341
E. SIMION, Circuit parallèle double ferrorésonant, avec des paramètres variables (french, rom. summ.) 347
AL. VALACHI, C. HARJA, Additionneur série à transistors (french, rom. summ.) 355
C. GHIBU, Analog to Digital Converter for Control Applications (english, rom. summ.) 359

V. PETRESCU, M. CREȚU, Sur une méthode de mesure de l'angle entre deux tensions alternatives en employant les diodes semiconductrices (french, rom. summ.) 363

D. BĂRBULESCU. Déphaseur de tension qui utilise un circuit série inductif à réactances semicompensées (rom., french summ.) . . . 369

N. V. BOȚAN, A. OPREA, E. BALABAN, I. GHEORGHIU, D. BALAURESCU, Recherches concernant la diminution des effets inertiaux dans les systèmes de commande électrique par l'utilisation des diagrammes spéciaux de vitesse (russ., rom. summ.) 381

C. SAAL, Power Behaviour of the Electromechanical Drive Devices with Oscillating Linear Motors (english, rom. summ.) 387

M. Z. KHAMOUDKHANOV, N. M. OUSMANKHODJAEV (U.R.S.S.), Méthode graphoanalytique de calcul des principales caractéristiques de réglage du moteur asynchrone monophasé à condensateur, à fréquence variable (russ., rom. summ.) 397

I. BERGMAN, Betrachtungen über den elektrischen Antrieb mit einen selbsterregten Drehstromstromwendergenerator gespeisten Asynchronmotor (germ., rom. summ.) 409

M. VOICU, Contribution à la détermination de l'influence des paramètres inductifs et capacitifs des bobines cylindriques, sur les sollicitations de l'isolement transversal de la bobine soumise à l'onde de choc de tension (french, rom. summ.) 417

MECHANICAL ENGINEERING

M. N. OĞUZTÖRELI (Canada), A Theorem Concerned with Generalized Heat Transfer Phenomena (II) (english, rom. summ.) 429

D. MANGERON, New Methods for Determining Solutions of Mathematical Models Governing Polyvibrating Phenomena (I) (english, rom. summ.) 433

D. K. SINHA (India), Deformations of a Composite Thick Disk of Piezoelectric Material (english, rom. summ.) 437

W. KECS, Représentation mathématique de certaines limites de groupes de charges et leurs applications dans la mécanique du corps déformable (I) (french, rom. summ.) 443

M. KONSTANTINOFF, P. ZENOFF (Bulgaria), Isochronische Wälzkurvenpendel (germ., rom. summ.) 449

N. IRIMICIUC, I. IBĂNESCU, E. RUSU, Sur le problème des liaisons holonomes imposées aux systèmes de solides rigides (II) (french, rom. summ.) 461

B. I. KANTOR (U.R.S.S.), Critical States of Flexible Shallow Conical Shells in the Temperature Field (russ., rom. summ.) 469

I. I. KAPOUSTINE, D. I. ILINSKI (U.R.S.S.), Problèmes de calcul optimum des autoopérateurs des machines et des lignes technologiques (russ., rom. summ.) 475

GH. DELIU, Sur la cinématique de la masse suspendue des automobiles (french, rom. summ.) 483

D. PERETZ, Über ein Modell der Klopfenden Verbrennung in Ottomotoren (germ., rom. summ.) 493

C. CIOBANU, P. MATEI, Détermination des forces résistantes produites par la vibration transversale d'un disque qui tourne dans un fluide visqueux (french, rom. summ.) 509

CONSTRUCTIONS. HYDROTECHNICS

A. ŞEŞAN, A. VULPE, N. TUTOŞ, Utilisation de la théorie des graphes dans l'expression matricéale de la méthode des moments actifs (rom., french summ.) 515

M. DIACONU, Contributions au problème de la compression excentrique, envisageant l'hypothèse qui considère les efforts de traction et l'hypothèse qui les en néglige (french, rom. summ.) . . . 523

I. GOIA, Bestimmung der Normalspannungen bei schiefer Biegung gekrümmter Stäbe (germ., rom. summ.) 535

AL. EFTIMIE, Contributions à l'étude des efforts et des déplacements dans les terrains des fondations (french, rom. summ.) . . . 541

C. LEONTE, A. MIHUL, Considérations sur les coupoles sphériques aplaties avec l'anneau d'appui précontraint (french, rom. summ.) 551

AL. NEGOIŢĂ, GR. MUNTEANU, Observations concernant les bétons légers à laitier expansé et leur utilisation à la fabrication des grands panneaux pour parois (french, rom. summ.) 561

V. FOCŞA A. RADU, M. POPPEL, N. BOŢI, I. GAVRILAŞ, L. BIBOROSCH, Zum äusseren Lärmpegel und dessen Verwinderungsmassnahmen (germ., rom. summ.) 567

D. ATANASIU, V. CIUBOTARU, D. GANJULA, H. ZAROJANU, B. COSOSCHI, N. VLAD, C. PLĂCINTĂ, Sur la corrélation du trafic aux déformations de deux systèmes routiers souples (rom., french summ.) 575

L. ESCANDE (France), Quelques recherches sur la stabilité des cheminées d'équilibre (french, rom. summ.) 587

C. JURA, M. GIURCONIU, TR. NICOARĂ, GH. CREŢU, I. MIREL, Technisches und wirtschaftliches Studium der Behalter in Zentralsystemen der Wasseverteilung (rom., germ. summ.) 597

LIGHT INDUSTRY ENGINEERING

I. VLAD, H. MAURUS, Beitrag zum Studium der transversalen Dimensionen und der tensionalen Eigenschaften der Hasenhaare, welche in der Hutfabrikation verwendet werden (germ., rom. summ.) . 605

F. REICHER, Rationelle Bestimmung der Reihe von Wechselrädern für negative Kettablassgetriebe (germ., rom. summ.) 613

V. COCIU, L. DUMA, D. CROITORU, G. MĂLUREANU, Méthode de tensométrie électrique résistive pour l'établissement des déformations des matériaux élastoplastiques (rom., french summ.) . 617

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Том XIV (XVIII), вып. 1—2 1968 г

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

ОТ РЕДАКЦИИ XV

А. ЖАНРЕНО, К XX-летию Румынской Социалистической Республики XXIII

МАТЕМАТИКА. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. ФИЗИКА

Ш. ЭРЕСМАН (Франция), Эскизы и типы алгебраических структур (франц., рез. рум.) 1
Ф. С. РОССИ (Италия), О принципе Цермело и его применении к одной фундаментальной теореме математического анализа (итал., рез. рум.) 15
АЛ. КЛИМЕСКУ, Теорема трансфера для некоторых функциональных уравнений (франц., рез. рум.) 19
А. МАЖИД (Пакистан), Теоремы существования для обобщенных свободных произведений групп (I) (англ., рез. рум.) . . . 23
И. ПОП, К определению гомологических групп для сферы, вещественного проэктивного пространства и торы учитываемых как комплексные *C. W.* (франц., рез. рум.) 27
И. ЕНЕСКУ, Об одном классе алгебр $8n$-го порядка (франц., рез. рум.) 31
АЛ. КЛИМЕСКУ, Задача инверсного программирования (франц., рез. рум.) 37
М. Н. ОГЮСТОРЕЛИ (Канада), Класс нелинейных интегро-дифференциальных уравнений параболического типа с запаздывающим аргументом (англ., рез. рум.) 43
Ф. ГАТИНЬОЛ (Франция), Форма и исследование инвариантных плотностей относящихся к некоторым нелинейным дифференциальным уравнениям в частных производных (франц., рез. рум.) . . 51
В. Ж. КОЛС и Д. Х. ТУККЕР (США), Нули решений комплексных дифференциальных уравнений (англ., рез. рум.) . . . 61
Н. А. ПАРТИНОВА и Д. Д. БАЙНОВ (Болгария), Некоторые замечания относительно одного дифференциального уравнения параболического типа (русск., рез. рум.) 69
В. МУРДЖЕСКУ, Интегрирование одного уравнения в конечных разностях (франц., рез. рум.) 75
А. КОРДУНЯНУ, О спектре оператора Вольтерра (франц., рез. рум.) . 79
М. ПИКОНЕ (Италия), Д. МАНЖЕРОН (Румыния), Теоремы единственности для решения некоторых функциональных уравнений и отделение характеристических чисел параметра от которого они зависят (итал., рез. рум.) 83

М. В. МЮЛЛЕР (ГФР), О левом нак онном приближении бернштейнова ряда степеней (нем., рез. рум.) 89
А. М. КРАЛЛ (США), Окаймление нулей многочленов и их производных (англ., рез. рум.) 93
Г. КНАПП (Австрия), Метод Гребнера и его применение для вычисления орбит небесных тел (II) (нем., рез. рум.) 97
Д. Т. ГАИМО (США), Приведенное преобразование Пуассона-Ганкеля (II) (англ., рез. рум.) 105
Ф. НОЭЛЬ (Франция), Метод решения больших линейных систем многочленной сверхитерацией (II) (франц., рез. рум.) 111
Д. В. ИОНЕСКУ, Кубатурные формулы с малым числом узлов (II) (франц., рез. рум.) 115
Ф. МАРКУС, О тройной системе кривых в проэктивном простанстве (франц., рез. рум.) 123
Ш. РИМЕР, Векторное представление квадрик вращения (II) (франц., рез. рум.) 125
К. ТРЮСДЕЛЛ (США), Задачи механики деформации и текучести (II) (англ., рез. рум.) 131
С. НИАНГ (Сенегал), Общие уравнения ана итической динамики постоянных систем и функция R (II) (франц., рез. рум.) 137
К. АКЕР, Течения на неголономной плоскости (франц., рез. рум.) . 145
А. БРАЙЕР, Сложение однолинейных колебаний модулированных по амплитуде (анг ., рез. рум.) 149
Л. де БРОЛЬИ (Франция), Рассуждения относящиеся к формуле $Q = Q_0\sqrt{1-\beta^2}$ и определение давления в релятивистской термодинамике (франц., рез. рум.) 155
Э. ШМИД (Австрия), Укрепление при помощи ультразвуков и его термический отпуск (нем., рез. рум.) 159
В. Д. ГЕРШУН, С. С. САННИКОВ (СССР), Двухкомпонентная модель Томаса-Ферми (русск., рез. рум.) 165
И. ГОТТЛИЕБ, Е. ТЕРЕЖА, О полурелятивистском обобщенном выражении силы взаимодействия между двумя точечными частицами (франц., рез. рум.) 171
Р. В. ДЕЙТЧ, Л. БЭЛАН, Расспространение альфеновских волн в неоднородных системах в рамках релятивистской магнитной гидродинамики (англ., рез. рум.) 175
Н. КАЛИНИЧЕНКО, С. МЕЛИНТЕ, В. МИХУ, Исследование оптических свойств тонких слоев теллура (рум., рез. франц.) . . . 179

ХИМИЯ

М. ШКИОПУ, В. ОНУ, М. АПОСТОЛЕСКУ, Л. ЗИЛЬБЕРМАН, Метод колометрической дозировки никотина из ферментированного табака (франц., рез. рум.) 185
А. ЛУКА, Ж. ЛИНДЕ, Т. ГОЛГОЦИУ, И. ХЫНКУ, М. УРСУ, О некоторых факторах вызывающих агрессивность почв (I) (рум., рез. франц.) 189
И. АНТОНЕСКУ, М. КАРАМЛЭУ, Фотометрический экстрактивный метод для дозировки некоторых окислителей (II) (рум., рез. англ.) 195
К. ЛЕОНТЕ, М. ГАБУРИЧ, Плотность и вязкость некоторых растворов из системы $H_2SO_4 - H_3PO_4 - H_2O$ (рум., рез. англ.) . . . 201
ШТ. ИВЭШКАНУ, И. ИКИМ, Исследование коррозии сплавов OL 38, V_2A и V_4A в фосфорной кислоте и защита их действием ингибиторов (франц., рез. рум.) 205
Р. ВАСИЛИУ, Разложение амальгам натрия в батерее (франц., рез. рум.) 213
К. КАЛИСТРУ, К. ЛЕОНТЕ, Макрокинетическое моделирование химических процессов в производстве (рум., рез. франц.) . . . 221

И. КУРЬЕВИЧ, ШТ. УНГУРЯНУ, Аналогическое моделирование реактора для каталитического окисления аммиака (англ., рез. рум.) . . 229
Т. СЭВЯНУ, М. ВАСИЛИУ, АЛ. СТАНЧУ, Исследования в пленочной дестилляции (нем., рез. рум.) 237
И. МАТЕЙ, Т. ЛИКСАНДРУ, Реакции аценафтенонов с соединениями Гриньяра (рум., рез. франц.) 245
Е. А. СМИРНОВ, Л. Н. КИРИЧЕНКО (СССР), Строение и цветность производных салицилиденанилина. Эфиры 5-хлорсалицилиден- и 3.5-дихлорсалицилиден-*н*-аминобензойной кис оты (русск., езр. рум.) 249
И. МАТЕЙ, Е. КОМАНИЦЭ, Новый метод циклизации ацил-тиосемикарбазидов-4-замещенных (рум., рез. франц.) 255
Г. ЛУПУШОР, С. ИФРИМ, Изготовление новых сульфитных красителей (франц., рез. рум.) 259
С. ИФРИМ, Изготовление некоторых аминов восстановлением азокрасителей (англ., рез. рум.) 265
С. ДУМИТРЕСКУ, К. ГИРВУ, КР. СИМИОНЕСКУ, В. САХИНИ, Исследование полимеризации ацетиленовых производных (II) (франц., рез. рум.) 271
Э. ПОППЕЛ, С. ПЕТРОВАН, КР. СИМИОНЕСКУ, Получение нейтральных бумаг при помощи алюмината натрия (нем., рез. рум.) . 277
В. И. ИВАНОВ, Н. Я. КУЗНЕЦОВА-ЛЕНШИНА (СССР), Строение молекул целлюлозы и их деструкция (русск., рез. рум.) . . 287
А. ЧЕРНЭТЕСКУ-АСАНДЕЙ, М. ГРИГОРАШ, Динамика и структура главных химических составляющих в норма ьных растительных тканях и в опухолевых (III) (франц., рез. рум.) . . . 293
Г. КИРИЦЭ, А. КИРИЦЭ, Е. ИВЭШКАНУ, Исследование диффузии растительных и искусственных танидов в комбинированном дублении (франц., рез. рум.) 299
К. ПОПЕСКУ, Влияние минеральных удобрений на продукцию картофеля и пшеницы на склонах (франц., рез. рум.) . . . 307
И. ПОПЕСКУ, М. ДИМА, Возможности использования клинкерного порошка в сельском хозяйстве (франц., рез. рум.) . . . 313

ЭЛЕКТРОТЕХ[illegible]ИКА. ЭЛЕКТРОНИКА

Э. ЛУКА, В. СКУТАРУ, Фотоэлектреты из диэлектрина (франц., рез. рум.) 323
Г. ВАСИЛИУ, Новые результаты в связи с „эффектом Прокопиу" (франц., рез. рум.) 329
Г. РОСМАН, О теореме трансфера максимальной активной мощности (рум., рез. франц.) 335
Г. САВИН, С. МИТРЕА, И. ПОПЕСКУ, Э. СИМИОН, Н. ЦИТРОН, Феррорезонантные многоустойчивые цепи 341
Э. СИМИОН, Параллельная дважды феррорезонантная цепь с переменными параметрами (франц., рез. рум.) 347
АЛ. ВАЛАКИ, К. ХАРЖА, Последовательный сумматор с транзисторами (франц., рез. рум.) 355
К. ГИБУ, Аналогичный цифровой конвертор для пользования в автоматическом регулировании (франц., рез. рум.) 359
В. ПЕТРЕСКУ, М. КРЕЦУ, О методе измерения уг а между двумя переменными напряжениями пользуя полупроводниковые диоды (франц., рез. рум.) 363
Д. БЭРБУЛЕСКУ, Дефазор напряжения пользуя индуктивную серийсную цепь с семикомпенсированными реактанцами (рум., рез. франц.) . 369
Н. В. БОЦАН, А. ОПРЯ, Е. БАЛАБАН, И. ГЕОРГИУ, Д. БАЛАУРЕСКУ, Исследования в связи с уменьшением инерционных эффектов в системах электропривода применением специальных диаграмм скорости (русск., рез. рум.) 381

К. ЗААЛ, Энергетическое поведение электромеханических приводов с инейными колебательными двигателями (англ., рез. рум.) . 387
М. З. ХАМУДХАНОВ, Н. М. УСМАНХОДЖАЕВ (СССР), Графоаналитический способ расчета основных характеристик и выявление регулировочных свойств однофазного конденсатора асинхронного двигателя п и переменной частоте (русск., рез. рум.) . . 397
И. БЕРГМАН, Заключения об электрическом приводе с асинхронным двигателем питаемым трехфазным генератором с самовозбуждающим коллектором (нем., рез. рум.) 409
М. ВОЙКУ, К определению влияния индуктивных и капацитивных параметров цилиндрических катушек на нагрузки трансверсальной изоляции катушки подверженной импульсной волне напряжения (франц., рез. рум.) 417

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

М. Н. ОГЮЗТОРЕЛИ (Канада), О теореме относящейся к обобщенным феноменам теплопередачи (I) (англ., рез. рум.) . . . 429
Д. МАНЖЕРОН, Новые методы определения решений математических моделей относящихся к поливибрантным системам (I) (англ., рез. рум.) 433
Д. К. СИНГА (Индия), Деформации гетерогенного тонкого диска из пьезоэлектрического материала (англ., рез. рум.) . . . 437
В. КЕЧ, Математические выражения некоторых пределов групп воздействий и приложения к механике деформируемых тел (I) (фоанц., рез. рум.) 443
М. КОНСТАНТИНОВ, П. ЦЕНОВ (Н. Р. Болгария), Изохронные маятники тяжелых катящихся кривых (нем., рез. рум.) . . . 449
Н. ИРИМИЧУК, И. ИБЭНЕСКУ, Е. РУСУ, К задаче голономных связей необходимых системам твердых тел (франц., рез. рум.) . 461
Б. Я. КАНТОР (СССР), Критические состояния гибкой пологой конической оболочки в температурном поле (русск., рез. рум.) . . 469
И. И. КАПУСТИН, Д. Я. ИЛЬИНСКИЙ (СССР), Вопросы оптимального проектирования автооператоров технологических машин и линий (русск., рез. рум.) 475
Г. ДЕЛИУ, О кинематике подвесной массы автомобилей (франц., рез. рум.) 483
Д. ПЕРЕЦ, Об одной модели детонации в моторах с искровым зажиганием (нем., рез. рум.) 493
К. ЧОБАНУ, Определение силы сопротивления при осевой вибрации диска вращающегося в кожухе с жидкостью (франц., рез. рум.) . 509

СТРОИТЕЛЬСТВО. ГИДРОТЕНИКА

А. ШЕСАН, А. ВУЛПЕ, Н. ТУТОШ, Использование теории графов в матрициальной формуле метода активных моментов (рум., рез. франц.) 515
М. ДИАКОНУ, К задаче об эксцентричном сжатии, учитывая усилия на растяжение и пренебрегая ими (франц., рез. рум.) . . . 523
И. ГОЯ, Определение нормальных унитарных усилий при косом изгибе кривых балок (нем., рез. рум.) 535
А. ЕФТИМИЕ, К исследованию напряжений и смещений в основаниях грунтов (франц., рез. рум.) 541
К. ЛЕОНТЕ, А. МИХУЛ, О сферических сплющенных куполах с предварительно напряженным опорным кольцом (франц., рез. рум.) . 551
АЛ. НЕГОИЦЭ, Г. МУНТЯНУ, О легких шлаковых бетонах и использование их в крупнопанельном производстве (франц., рез. рум.) . 561
В. ФОКША, А. РАДУ, М. ПОППЕЛ, Н. БОЦИ, И. ГАВРИЛАШ, Л. БИБОРОШ, Сила уличного шума и способы его уменьшения (нем., рез. рум.) 567

Д. АТАНАСИУ, В. ЧУБОТАРУ, Д. ГАНЖУЛА, Х. ЗАРОЖАНУ, Б. КОСОСКИ, Н. ВЛАД, К. ПЛЭЧИНТЭ, О корреляции между грузооборотом и деформацией в случае двух нежестких дорожных систем из местных материалов (рум., рез. франц.) 575
Л. ЕСКАНД (Франция), К исследованиям устойчивости камер равновесия (франц., рез. рум.) 587
К. ЖУРА, М. ДЖУРКОНИУ, Т. НИКОАРЭ, Г. КРЕЦУ, Технико-экономическое исследование водохранилищ в центральных системах водоснабжения (рум., рез. нем.) 597

ЛЕГКАЯ ПРОМЫШЛЕННОСТЬ

И. ВЛАД, Х. МАУРУС, К исследованию поперечных размеров и свойств напряжения кроличьего меха употребляемого в шляпочном производстве (нем., рез. рум.) 605
Ф. РЕЙХЕР, Рациональное определение серии сменных шестерен негативных регуляторов подачи основы (нем., рез. рум.) 613
В. КОЧУ, Л. ДУМА, Д. КРОИТОРУ, Г. МЭЛУРЯНУ, Электрорезистивнотензометрический метод для определения деформаций эластопластических материалов (рум., рез. русск.) 617

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

REDACŢIONALE

EDITORSHIP'S ANNOUNCEMENTS

ОТ РЕДАКЦИИ

Articole ale colaboratorilor externi primite la redacţia revistei *Buletinului Institutului politehnic din Iaşi*

Papers received from the external colaborators by the Editorial Staff of the *Bulletin of the Polytechnic Institute of Jassy*

Статы внеинститутских сотрудников полученные редакцией журнала *Известия Ясского политехнического института*

СМИРНОВ Е. А., КИРИЧЕНКО Л. Н., (Московский текстильный институт, СССР), *Строение и цветность производных салицилиденанилина. Эфиры 5-хлорсалицилиден- и 3.5-дихлорсалицилиден-н-аминобензойной кислоты.*

GHOSHAL S., (Jalpaiguri Engineering College, India), *Note on the Deflection of Inhomogeneous Annular Plates.*

GHOSHAL S., (Jadavpur University, Calcutta, India), *Boundary Layer on a Flat Plate with a Fluctuation in the Main-stream Velocity.*

L. GODEAUX, (Académie Royale, Liège, Belgique), *Surfaces et variétés algébriques transformées rationelles de la surface de Steiner.*

E. KREYSZIG, (Technische Hochschule, Graz, Österreich), *Zur Theorie der Exponentialoperatoren und der Bergmann-Operatoren 1. Art.*

K. K. RAY, (City College, Calcutta, India), *Stresses in a Finite Non-homogeneous Cylindrical Shell Twister by Shearing Stresses on the outer Boundary.*

N. C. DAS, (Jadavpur University, Calcutta, India), *A Note on Disturbances in a Magnetostrictive Transducer of Variable Cross-section.*

M. C. BARAL, (Tripura Engineering College, Agartala, India), *Note on the Flow of Hidromagnetic Fluid between two Parallel Plates.*

Х. И. АРЕШИДЗЕ,, Г. О. ЧИВАДЗЕ, (Институт физической и органической химии им. П. Г. Меликишвили АН Груз. ССР, Тбилиси, СССР), *Повышение антидетонационных свойств бензинов с помощью синтетического цеолита.*

Б. ЧЕШАНКОВ, В. ПОПОВ, (София, Болгария), *Периодические движения и физических маятников, вращающихся вокруг непараллельных осей.*

С. Г. РЫЖАНОВ, (Кишиневский Университет, СССР), *Нижняя граница энергии связи экситона в некоторых кристаллах.*

Б. СЕМАК, (Львовский Торгово-экономический институт, СССР), *Исследование воздухопроницаемости бельевого трикотажа.*

J. KOŽESNIK, (Czekoslovak Academy of Sciences, Prague, Czekoslovakia), *Complex Linear Oscillating Systeme.*

M. L. LAPLAZA, (University of Puerto Rico, Mayaguez, U.S.A.), *Arithmetical Normality in Algebraic Correspondences.*

G. CĂLUGĂREANU, (Cluj, Académie de la République Socialiste de Roumanie), *Sur les automorphismes du groupe fondamental d'une surface fermée orientable.*

R, AŠKOVIČ, (Institut Polytechnique, Béograd, Jugoslavie), *Une contribution à l'étude de la couche limite tridimensionelle laminaire incompressible en régime instationnaire.*

H. SINHA, (Calcutta, India), *Note on the Longitudinal Vibration of a Paraboloidal Bar Placed in a Magnetic Field.*

A. S. N. CHARLU, A. A. KAYANDE, V. LAKSHMIKANTHAN, (University of Rhode Island, Kingston, U.S.A.), *Stability of Motion in Tube-like Domains.*

R. J. FRANCEY and A. G. FENTON, (University of Tasmania, Hobart) and J. R. HARRIES and K. G. McCRACKEN, (University of Adelaide, South Australia), *The Variability of Centaurus XR-2.*

R. WALKUS, (Lodz, Poland), *State of Racking and Elongation of Ferrocement under Axial Tesile Load.*

M. M. STANIŠIĆ, (School of Aeronautics, Astronautics and Engineering Sciences, Lafayette, Indiana, USA), *On the Development of a Compressible Turbulent Boundary Layer at the Interface between Subsonic and Supersonic Flow.*

C. P. TSOKOS and V. LAKSHMIKANTHAM, (University of Rhode Island, USA), *Application of Topological Principle of Wazewski to Control Systems.*

D. K. SINHA, (Jadavpur University, Calcutta, India), *Note on Magnetoelastic Disturbances in a Conducting Plate.*

M. L. LAPLAZA, (University of Puerto Rico, Mayaguez, USA), *Green's Relations and Categories.*

M. L. LAPLAZA, (University of Puerto Rico, Mayaguez, USA), *Some Results in the Theory of Algebraic Correspondences.*

В. В. ЕВДОКИМОВ, И. И. КАПУСТИН, (Всесоюзный заочный институт текстильной и легкой промышленности, Москва, СССР), *Пневматические системы управления тормозными механизмами рулоноразмоточных устройств.*

R. G. MÜLLER, (Dunedin, New Zealand), *The General Solution of Ordinary Differential Equations of First or Second Order Deduced from Either One Particular Solution or from a Group of such Solutions.*

S. K. BISWAS (Calcutta, India), *Note on Torsional Vibration of a Finite Non-homogeneous Circular Cylinder Fixed at One End by the Application of a Shering Force at the Free End.*

P. ROY, (Victoria College, Cooch Behar, West Bengal, India), *Note on Torsional Disturbances in a Visco-elastic Bar Subjected to a Magnetic Field.*

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

LA A XX-a ANIVERSARE A PROCLAMĂRII REPUBLICII

Douăzeci de ani au trecut de cînd desfăşurarea ascendentă a revoluţiei populare din ţara noastră a dus la instaurarea Republicii, revendicare a poporului muncitor strîns legată de lupta de eliberare socială şi naţională. Subliniind importanţa acestui moment crucial în istoria poporului român, tov. N. Ceauşescu spunea: „Proclamarea Republicii Populare Române a însemnat începutul puterii democrat-populare, trecerea României într-o nouă etapă a dezvoltării sociale — etapa revoluţiei socialiste"[1]).

Această realizare istorică nu poate fi despărţită de activitatea neostenită desfăşurată de Partidul Comunist Român, exponentul intereselor vitale ale clasei muncitoare, care a unit în jurul ţelurilor acesteia pe toţi oamenii muncii şi i-a condus în lupta pentru victoria revoluţiei şi prin aceasta la instaurarea statului republican.

Proclamarea Republicii a marcat încheierea procesului de cucerire a întregii puteri de către clasa muncitoare, aliată cu ţărănimea şi cu celelalte pături ale oamenilor muncii. Ea a marcat instaurarea deplinei suveranităţi a poporului, a celei mai democratice forme de guvernămînt din istoria sa, a unui nou tip de democraţie — democraţia pentru masele populare.

Douăzeci de ani este o perioadă istorică scurtă. Dar ce conţinut bogat are perioada aceasta din viaţa poporului nostru. Ea egalează şi întrece, prin prefacerile la care au fost martoră, sute de ani din istoria multor popoare. A fost lichidată în aceşti ani exploatarea omului de către om, înfăptuindu-se astfel visul din totdeauna al celor ce n-au putut munci pentru ei înşişi. S-a dezvoltat an de an proprietatea socialistă, ducînd la instaurarea relaţiilor de producţie socialiste

---

1) N. Ceauşescu, *Partidul Comunist Român — continuator al luptei revoluţionare şi democratice a poporului român, al tradiţiilor mişcării muncitoreşti şi socialiste din România*, Edit. politică, Buc., 1966, p. 59.

în toată economia națională. Socialismul a învins astfel definitiv, atît la orașe cît și la sate. Forțele de producție s-au dezvoltat vertiginos, schimbînd fața României. Condițiile de trai au urcat continuu treptele belșugului iar cultura s-a răspîndit larg în mase, devenind un bun al tuturor.

„Privind drumul parcurs de poporul român în acești ani — sublinia tov. N. Ceaușescu în Raportul la Conferința Națională a P.C.R. — avem imaginea marilor progrese făcute de România într-o perioadă istorică scurtă, în toate domeniile vieții economice și sociale".

Astăzi republica noastră se numește Republica Socialistă România. Constituția proclamă Republica noastră stat al oamenilor muncii de la orașe și sate, suveran, independent și unitar, al cărui teritoriu este inalienabil și indivizibil. Formulare laconică, dar care sintetizează esența unor transformări revoluționare cu adevărat uriașe. Ea evocă victoriile repurtate de popor, sub conducerea partidului, pe toate planurile existenței sociale.

A douăzecea aniversare a instaurării republicii a coincis cu un eveniment important din viața țării — Conferința Națională a P.C.R. Coincidență deloc întîmplătoare, căci un program de acțiune de o asemenea bogăție nu ar fi fost posibil decît în condițiile Republicii Socialiste. Acest program are la rîndul său menirea să ridice republica noastră pe noi culmi ale progresului, să-i dobîndească succese tot mai mari pe calea desăvîrșirii construcției socialiste.

Conferința Națională este o nouă dovadă a faptului că partidul are în centrul politicii sale științifice grija pentru dezvoltarea continuă a patriei, pentru dezvoltarea armonioasă a forțelor de producție, pentru perfecționarea continuă a relațiilor de producție socialiste, pentru îmbunătățirea continuă a conducerii și planificării economiei naționale.

Care sînt perspectivele pe care le făuresc României Socialiste cei 20 de ani de existență a Republicii ?

Pe tărîmul economiei, o industrie tot mai înfloritoare, bazată pe tot ce a realizat și va realiza știința și tehnica mai înaintat ; o agricultură socialistă de o înaltă productivitate, bazată și ea pe tehnica modernă și pe știință ; creșterea neîntreruptă a nivelului de trai, ceea ce va situa țara noastră în rînd cu cele mai avansate țări din lume. O cultură înfloritoare, care va ridica mai sus bogăția spirituală a poporului nostru, dezvoltarea multilaterală a personalității umane. O unitate tot mai strînsă a întregului popor, înflorirea continuă a națiunii noastre socialiste. Un partid comunist mai puternic, un conducător tot mai viguros al poporului pe drumul către comunism.

Succesele celor douăzeci de ani de republică sînt totodată succese în afirmarea suverană a României pe plan mondial. România Socialistă este unul din cei mai activi factori în lumea socialistă, contribuind la întărirea continuă a acesteia, o dată cu progresele sale

proprii. România este însă un factor activ în întreaga lume, situîndu-se în rîndurile cele dintîi ale celor ce se străduiesc să instaureze un climat de pace, condiţii pentru dezvoltarea liberă a popoarelor.

Dacă Republica Socialistă România are astăzi relaţii diplomatice cu 80 de state şi relaţii economice cu peste 100 de state, dacă România se numără printre ţările care întreprind iniţiative valoroase în viaţa internaţională, dacă ea se bucură de un înalt prestigiu pe arena internaţională — Partidului Comunist Român îi revine meritul de a fi arătat poporului drumul just, de a-l fi condus pe drumul acesta.

Perspectivele României pe plan internaţional sînt tot atît de luminoase ca şi perspectivele sale interne. România îşi va dezvolta nelimitat colaborarea frăţească cu ţările socialiste ; ea va continua să-şi dezvolte relaţiile cu toate ţările lumii, fără deosebire de orînduire ; ea va continua să-şi aducă o contribuţie sporită la cauza colaborării şi prieteniei între popoare.

„Sîntem convinşi — spunea tov. N. Ceauşescu în Expunerea cu privire la politica externă a partidului şi guvernului — că obţinînd noi şi noi victorii în opera de construcţie socialistă, poporul român îşi îndeplineşte o importantă obligaţie internaţională ,contribuind la întărirea forţei materiale, politice şi morale a sistemului socialist mondial, la creşterea şi dezvoltarea mişcării antiimperialiste, la triumful cauzei socialismului, progresului şi păcii în întreaga lume".

Alfred Jeanrenaud

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

Matematici, Mecanică teoretică, Fizică

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том XIV (XVIII), вып. 1—2, 1968

Математика, Теоретическая механика, физика

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

Mathematics, Theoretical Mechanics, Physics

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2. 1968

C. D. 518 56

ESQUISSES ET TYPES DES STRUCTURES ALGÉBRIQUES

PAR

CHARLES EHRESMANN

1. Introduction

Une esquisse $\bar{\sigma}$ est la donnée d'un graphe multiplicatif U et de certaines transformations naturelles entre néofoncteurs à valeurs dans U, vérifiant quelques axiomes. Une structure algébrique d'espèce $\bar{\sigma}$ est une „réalisation" de U, c'est-à-dire un néofoncteur de U vers une catégorie d'applications qui applique les transformations naturelles données en des limites projectives ou inductives naturalisées. Il existe une „plus grande" esquisse $T(\bar{\sigma})$, appelée type de $\bar{\sigma}$, prolongeant $\bar{\sigma}$ et telle que les structures d'espèce $\bar{\sigma}$ s'identifient aux structures d'espèce $T(\bar{\sigma})$.

Dans le § 2 sont définies les esquisses des graphes, des classes multiplicatives et des catégories; l'étude des catégories et des catégories structurées comme réalisations d'esquisses a fait l'objet du mémoire [3]. Le § 3 généralise aux graphes multiplicatifs les théorèmes de complétion des catégories de [2]. Les notions d'esquisse, de prototype et de type d'une esquisse sont introduites dans le § 4; les définitions adoptées ici sont un peu différentes de celles proposées dans [4], mais elles permettent d'obtenir des résultats analogues à ceux de [4] et aussi de résoudre les problèmes indiqués à la fin de cet article.

La terminologie et les notations (en particulier relativement aux transformations naturelles) sont ceux du livre [1].

2. Exemples de définition d'une structure comme réalisation d'une esquisse

Rappelons qu'un graphe multiplicatif est un couple $(C, \varkappa)$ d'une classe C et d'une application $\varkappa$ d'une partie M de $C \times C$ dans C vérifiant les axiomes suivants, où l'on pose $\varkappa(g, f) = g.f$:

1. Pour tout $f \in C$, il existe une et une seule unité à droite, notée $\alpha(f)$, telle que $(f, \alpha(f)) \in M$ et une et une seule unité à gauche $\beta(f)$ telle que $(\beta(f), f) \in M$.

2. Si $(g, f) \in M$, on a

$$\alpha(g) = \beta(f), \quad \alpha(g.f) = \alpha(f) \text{ et } \beta(g.f) = \beta(g).$$

Les applications α, β et $\varkappa$ sont appelées source, but et loi de composition de $(C, \varkappa)$ et le couple $(C, \varkappa)$ est souvent noté $C^\cdot$; dans ce cas, on écrit $M = C^\cdot \times C^\cdot$, et on désigne par $C_0^\cdot$ la classe $\alpha(C) = \beta(C)$ des unités de $C^\cdot$.

Remarquons que cette définition utilise seulement la composition des applications.

Si $C^\cdot$ et $\hat{C}^\cdot$ sont deux graphes multiplicatifs, on appelle *néofoncteur* de $C^\cdot$ vers $\hat{C}^\cdot$ un triplet $(\hat{C}^\cdot, \varphi, C^\cdot)$, où φ est une surjection de C sur $\varphi(C) \subset \hat{C}$, tel que:

1. Si $(g, f) \in C^\cdot \times C^\cdot$, on a $(\varphi(g), \varphi(f)) \in \hat{C}^\cdot \times \hat{C}^\cdot$ et $\varphi(g).\varphi(f) = \varphi(g.f)$;

2. Si $e \in C_0^\cdot$, alors $\varphi(e) \in \hat{C}_0^\cdot$.

a) *Esquisses des graphes et des classes multiplicatives*

Un graphe est un triplet $(C, \beta, \alpha) = [C]$, où C est une classe, α et β deux rétractions de C sur une partie $[C]_0$ de C. Cette définition est équivalente à la suivante: Soit $U_{\mathcal{G}}^\cdot$ le graphe multiplicatif ayant deux unités u et u_0 et 3 autres morphismes a et b de u vers u_0 et i de u_0 vers u (fig. 1), les composés autres que le composé d'un élément avec ses unités à droite et à gauche étant

$$a.i = u_0 \quad \text{et} \quad b.i = u_0.$$

Si $[C]$ est un graphe, la surjection

$$u \to C, \quad u_0 \to [C]_0, \quad a \to \alpha, \quad b \to \beta \quad \text{et} \quad i \to (C, \iota, [C]_0)$$

définit un néofoncteur F de $U_{\mathcal{G}}^\cdot$ vers la catégorie $\mathfrak{M}$ des applications. On voit que l'application $(C, \beta, \alpha) \to F$ est une bijection de la classe $\mathcal{G}_0$

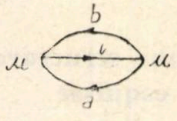


Fig. 1

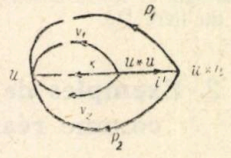


Fig. 2

des graphes (C, β, α) tels que $C \in \mathfrak{M}_0$ sur la classe des néofoncteurs F de $U^\cdot$ vers $\mathfrak{M}$ tels que $F(i) \in M^\iota$ = classe des injections canoniques. Cette bijection s'étend en un isomorphisme de la catégorie $\mathcal{G}$ des morphismes entre graphes sur la sous-catégorie pleine de la catégorie longitudinale $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, U^\cdot)^{\text{III}}$ des

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

C. D. 515 56

ESQUISSES ET TYPES DES STRUCTURES ALGÉBRIQUES

PAR

CHARLES EHRESMANN

1. Introduction

Une esquisse $\bar{\sigma}$ est la donnée d'un graphe multiplicatif U et de certaines transformations naturelles entre néofoncteurs à valeurs dans U, vérifiant quelques axiomes. Une structure algébrique d'espèce $\bar{\sigma}$ est une „réalisation" de U, c'est-à-dire un néofoncteur de U vers une catégorie d'applications qui applique les transformations naturelles données en des limites projectives ou inductives naturalisées. Il existe une „plus grande" esquisse $T(\bar{\sigma})$, appelée type de σ, prolongeant $\bar{\sigma}$ et telle que les structures d'espèce $\bar{\sigma}$ s'identifient aux structures d'espèce $T(\bar{\sigma})$.

Dans le § 2 sont définies les esquisses des graphes, des classes multiplicatives et des catégories; l'étude des catégories et des catégories structurées comme réalisations d'esquisses a fait l'objet du mémoire [3]. Le § 3 généralise aux graphes multiplicatifs les théorèmes de complétion des catégories de [2]. Les notions d'esquisse, de prototype et de type d'une esquisse sont introduites dans le § 4; les définitions adoptées ici sont un peu différentes de celles proposées dans [4], mais elles permettent d'obtenir des résultats analogues à ceux de [4] et aussi de résoudre les problèmes indiqués à la fin de cet article.

La terminologie et les notations (en particulier relativement aux transformations naturelles) sont ceux du livre [1].

2. Exemples de définition d'une structure comme réalisation d'une esquisse

Rappelons qu'un graphe multiplicatif est un couple $(C, \varkappa)$ d'une classe C et d'une application $\varkappa$ d'une partie M de $C \times C$ dans C vérifiant les axiomes suivants, où l'on pose $\varkappa(g, f) = g.f$:

1. Pour tout $f \in C$, il existe une et une seule unité à droite, notée $\alpha(f)$, telle que $(f, \alpha(f)) \in M$ et une et une seule unité à gauche $\beta(f)$ telle que $(\beta(f), f) \in M$.

2. Si $(g, f) \in M$, on a

$$\alpha(g) = \beta(f), \quad \alpha(g.f) = \alpha(f) \text{ et } \beta(g.f) = \beta(g).$$

Les applications α, β et $\varkappa$ sont appelées source, but et loi de composition de $(C, \varkappa)$ et le couple $(C, \varkappa)$ est souvent noté $C^{\cdot}$; dans ce cas, on écrit $M = C^{\cdot} \times C^{\cdot}$, et on désigne par $C_0^{\cdot}$ la classe $\alpha(C) = \beta(C)$ des unités de $C^{\cdot}$.

Remarquons que cette définition utilise seulement la composition des applications.

Si $C^{\cdot}$ et $\hat{C}^{\cdot}$ sont deux graphes multiplicatifs, on appelle *néofoncteur* de $C^{\cdot}$ vers $\hat{C}^{\cdot}$ un triplet $(\hat{C}^{\cdot}, \varphi, C^{\cdot})$, où φ est une surjection de C sur $\varphi(C) \subset \hat{C}$, tel que:

1. Si $(g, f) \in C^{\cdot} \times C^{\cdot}$, on a $(\varphi(g), \varphi(f)) \in \hat{C}^{\cdot} \times \hat{C}^{\cdot}$ et $\varphi(g).\varphi(f) = \varphi(g.f)$;
2. Si $e \in C_0^{\cdot}$, alors $\varphi(e) \in \hat{C}_0^{\cdot}$.

a) *Esquisses des graphes et des classes multiplicatives*

Un graphe est un triplet $(C, \beta, \alpha) = [C]$, où C est une classe, α et β deux rétractions de C sur une partie $[C]_0$ de C. Cette définition est équivalente à la suivante: Soit $U_{\mathcal{G}}^{\cdot}$ le graphe multiplicatif ayant deux unités u et u_0 et 3 autres morphismes a et b de u vers u_0 et i de u_0 vers u (fig. 1), les composés autres que le composé d'un élément avec ses unités à droite et à gauche étant

$$a.i = u_0 \quad \text{et} \quad b.i = u_0.$$

Si $[C]$ est un graphe, la surjection

$$u \to C, \quad u_0 \to [C]_0, \quad a \to \alpha, \quad b \to \beta \quad \text{et} \quad i \to (C, \iota, [C]_0)$$

définit un néofoncteur F de $U_{\mathcal{G}}^{\cdot}$ vers la catégorie $\mathfrak{M}$ des applications. On voit que l'application $(C, \beta, \alpha) \to F$ est une bijection de la classe $\mathcal{G}_0$

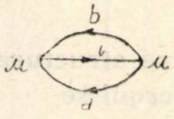


Fig. 1

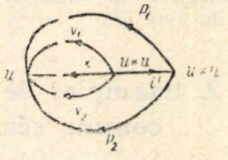


Fig. 2

des graphes (C, β, α) tels que $C \in \mathfrak{M}_0$ sur la classe des néofoncteurs F de $U^{\cdot}$ vers $\mathfrak{M}$ tels que $F(i) \in M^{\iota}$ = classe des injections canoniques. Cette bijection s'étend en un isomorphisme de la catégorie $\mathcal{G}$ des morphismes entre graphes sur la sous-catégorie pleine de la catégorie longitudinale $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, U^{\cdot})^{\square}$ des

transformations naturelles entre néofoncteurs F de $U^{\cdot}$ vers $\mathfrak{M}$ tels que $F(i) \in \mathfrak{M}^{\iota}$. Donc la „structure de graphe" est obtenue comme „réalisation" $U_{\mathcal{G}}$.

De même, on peut définir une classe multiplicative comme une „réalisation" du graphe multiplicatif $U_{\mathfrak{M}}$ ayant 3 unités u, $u \divideontimes u$ et $u \times u$, les autres morphismes étant (fig. 2)

$$\begin{cases} v_1, v_2 \text{ et } k \text{ de } u \divideontimes u \text{ vers } u, \\ p_1, p_2 \text{ de } u \times u \text{ vers } u, \\ i' \text{ de } u \divideontimes u \text{ vers } u \times u, \end{cases}$$

les composés de deux éléments différents d'une unité étant

$$p_1 . i' = v_1 \quad \text{et} \quad p_2 . i' = v_2 .$$

Si $(C, \varkappa)$ est une classe multiplicative, soit F le néofoncteur de $U_{\mathfrak{M}}$ vers $\mathfrak{M}$ tel que $F(p_i)$ soit la i-ème projection canonique de $C \times C$ sur C et que

$$F(k) = \varkappa \quad \text{et} \quad F(i') = (C \times C, \iota, C^{\cdot} \divideontimes C^{\cdot}).$$

La surjection $(C, \varkappa) \to F$ définit une bijection de la classe $\mathfrak{M}_0$ des classes multiplicatives telles que $C \in \mathfrak{M}_0$ sur la classe des néofoncteurs F de $U_{\mathfrak{M}}$ vers $\mathfrak{M}$ tels que $F(i') \in \mathfrak{M}^{\iota}$ et que $F(p_i)$ soit la projection canonique de $F(u) \times F(u)$.

b) *Esquisse d'une catégorie*

Soit $[U_1]$ le graphe ayant 4 sommets u, u_0, $u \divideontimes u$, $(u \divideontimes u) \divideontimes (u \divideontimes u)$ et dont les seules flèches sont

$$\begin{cases} a \text{ et } b \text{ de } u \text{ vers } u_0, \\ i \text{ de } u_0 \text{ vers } u, \\ v_1, v_2 \text{ et } k \text{ de } u \divideontimes u \text{ vers } u, \\ v(u, i.a) \text{ et } v(i.b, u) \text{ de } u \text{ vers } u \divideontimes u, \\ w_1, w_2, k_1 \text{ et } k_2 \text{ de } (u \divideontimes u) \divideontimes (u \divideontimes u) \text{ vers } u \divideontimes u. \end{cases}$$

Nous désignerons par $U_{\mathcal{T}}$ le graphe multiplicatif défini comme suit: $[U_1]$ est un sous-graphe du graphe $[U_{\mathcal{T}}]$ sous-jacent à $U_{\mathcal{T}}$, contenant toutes les unités de $U_{\mathcal{T}}$ (fig. 3); les éléments de $U_{\mathcal{T}}$ sont ceux de U_1 et 11 autres morphismes g_i, où $1 \leqslant i \leqslant 11$; la loi de composition est telle que les seuls composés soient les composés d'un élément avec ses

unités à droite et à gauche, et les composés explicitement indiqués dans les formules ci-dessous; de plus deux composés sont égaux si, et seulement si, l'égalité figure parmi les relations suivantes:

(1) $$u_0 = a\,.\,i = b\,.\,i,$$

(2) $$g_1 = a\,.\,v_1 = b\,.\,v_2,\ g_2 = a\,.\,v_2 = a\,.\,k,\ g_3 = b\,.\,v_1 = b\,.\,k,$$

(3) $$u = v_1\,.\,v\,(u, i\,.\,a) = v_2\,.\,v\,(i\,.\,b,\ u),\ g_4 = i\,.\,a = v_2\,.\,v\,(u,\ i\,.\,a),\ g_5 = i\,.\,b = v_1\,.\,v\,(i\,.\,b, u),$$

(4) $$k\,.\,v\,(u,\ i\,.\,a) = u = k\,.\,v\,(i\,.\,b,\ u),$$

(5) $$g_6 = v_2\,.\,w_1 = v_1\,.\,w_2,\ g_7 = k\,.\,w_1 = v_1\,.\,k_1,\ g_8 = v_2\,.\,w_2 = v_2\,.\,k_1,$$
$$g_9 = k\,.\,w_2 = v_2\,.\,k_2,\ g_{10} = v_1\,.\,w_1 = v_1\,.\,k_2,$$

(6) $$g_{11} = k\,.\,k_1 = k\,.\,k_2\,.$$

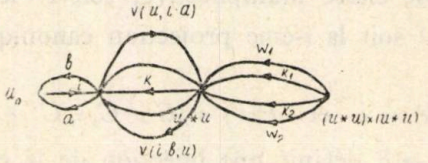


Fig. 3

(Ainsi $U_{\mathcal{F}}$ est engendré par $[U_1]$ et une relation, i. e. c'est un quotient d'un sous-graphe multiplicatif de la catégorie libre des chemins associée à $[U_1]$.

Soit $\eta = (H^{\cdot}, \mu, H^{\iota})$ un triplet formé d'une categorie $H^{\cdot}$, d'une classe H^{ι} de monomorphismes de $H^{\cdot}$ et d'une application produit fibré naturalisé fini μ sur $H^{\cdot}$ [1, déf. 10-IV]. Désignons par $\mathcal{F}(\eta)_0$ la classe de néofoncteurs F de $U_{\mathcal{F}}$ vers $H^{\cdot}$ vérifiant les conditions suivantes:

1° $F(i) \in H^{\iota}$,

2° $((F(a),\ F(v_1)),\ (F(b),\ F(v_2))) = \mu\,((F(a),\ F(b))$,

3° $((F(v_2),\ F(w_1)),\ (F(v_1),\ F(w_2))) = \mu\,((F(v_2),\ F(v_1))$.

On montre que deux éléments F et F' de $\mathcal{F}(\eta)_0$ ayant mêmes restrictions à l'ensemble $\{a, b, i, k\}$ sont égaux. Un élément de $\mathcal{F}(\eta)_0$ est appelé *catégorie η-structurée*. En particulier, supposons $\eta_{\mathfrak{M}} = (\mathfrak{M}, \mu_{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M}^{\iota})$, où $\mu_{\mathfrak{M}}$ est l'application produit fibré naturalisé canonique sur $\mathfrak{M}$ (i. e. on a

$$\mu_{\mathfrak{M}}(f_1,\ f_2) = ((f_1,\ v_1),\ (f_2,\ v_2)),$$

si f_i sont deux applications de même but et si v_i est la restriction de la projection canonique du produit $\alpha(f_1) \times \alpha(f_2)$ vers $\alpha(f_i)$ à la classe des

couples (x_1, x_2) tels que $f_1(x_1) = f_2(x_2)$). Soit $\mathfrak{T}(\eta_{\mathfrak{M}})$ la sous-catégorie pleine de la catégorie $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, U_{\mathfrak{T}})^{\square}$ des transformations naturelles ayant $\mathfrak{T}(\eta_{\mathfrak{M}})_0$ pour classe de ses unités. On montre que $\mathfrak{T}(\eta_{\mathfrak{M}})$ *est isomorphe à la catégorie* $\mathfrak{T}$ *des foncteurs,* l'isomorphisme associant à $F \in \mathfrak{T}(\eta_{\mathfrak{M}})_0$ la catégorie $C^{\cdot} = (F(u), F(k))$.

Si p est un foncteur d'homomorphismes saturé de $H^{\cdot}$ vers $\mathfrak{M}$, résolvant à droite et à produits finis [1, déf. 19-II, 8-III, 6-IV] et si $\eta = (H^{\cdot}, \mu, \overline{p}^{1}(\mathfrak{M}^{\cdot}))$ où μ est l'application produit fibré naturalisé sur $H^{\cdot}$ appliquée par p sur $\mu_{\mathfrak{M}}$ [1, déf. 3-IV], on prouve que la *catégorie* $\mathfrak{T}(p)$ *des foncteurs p-structurés est isomorphe à* $\mathfrak{T}(\eta)$ (voir [3]), ce qui justifie la terminologie.

Remarque. L'esquisse d'une catégorie définie dans [3] est légèrement différente de celle construite ici, l'axiome d'associativité n'étant pas „représenté" de la même façon. Les structures associées aux deux esquisses (i. e. les catégories) s'dentifient, car les deux esquisses déterminent le même type (voir plus loin).

Pour définir d'une manière générale les notions d'esquisse et de structure associée, il nous faudra utiliser certains résultats sur la complétion des graphes multiplicatifs.

3. Complétion d'une base de catégorie

Dans la fin de cet article, nous désignons par $\mathfrak{M}_0$ et par $\hat{\mathfrak{M}}_0$ deux univers tels que $\mathfrak{M}_0 \in \hat{\mathfrak{M}}_0$ et $\mathfrak{M}_0 \subset \hat{\mathfrak{M}}_0$, par $\mathfrak{M}$ et $\hat{\mathfrak{M}}$, par $\mathfrak{M}'$ et $\hat{\mathfrak{M}}'$, par $\mathfrak{T}$ et $\hat{\mathfrak{T}}$ respectivement les catégories pleines d'applications, les catégories des néofoncteurs et les catégories des foncteurs correspondant à $\mathfrak{M}_0$ et à $\hat{\mathfrak{M}}_0$.

Soit $U^{\cdot}$ un graphe multiplicatif. A $U^{\cdot}$ est associée „universellement" une catégorie $N(U^{\cdot})$ et un néofoncteur $\nu(U^{\cdot})$ de $U^{\cdot}$ vers $N(U^{\cdot})$ vérifiant la condition: Si F est un néofoncteur de $U^{\cdot}$ vers une catégorie $C^{\cdot}$, il existe un et un seul foncteur $\bar{F}$ de $N(U^{\cdot})$ vers C tel que $F = \bar{F}.\nu(U^{\cdot})$. Autrement dit: $\nu(U^{\cdot})$ est un $(\mathfrak{T}, N')$-projecteur, si $U^{\cdot} \in \mathfrak{N}'_0$ [1, théorème 10-III].

Définition. Si $\nu(U^{\cdot})$ est injectif, on dira que $U^{\cdot}$ est *une base de catégorie.*

Dans ce cas, on identifie $U^{\cdot}$ à un sous-graphe multiplicatif de $N(U^{\cdot})$. Les bases de catégories sont les sous-graphes multiplicatifs des catégories.

a) *Complétion $\mathfrak{J}$-projective*

Nous partons d'une partie $\mathfrak{J}$ de la classe $\mathfrak{T}_0$ telle que $\mathfrak{J}$ appartienne à la saturante $\hat{\mathfrak{M}} = \hat{\mathfrak{M}}_{\Upsilon}.\mathfrak{M}.\hat{\mathfrak{M}}_{\Upsilon}$ [1, déf. 16-I] de $\mathfrak{M}$ dans $\hat{\mathfrak{M}}$. Soit $\mathfrak{S}'_0 = \mathfrak{S}'_0(\mathfrak{J})$ la classe des couples $(U^{\cdot}, \mu)$, où $U^{\cdot} \in \mathfrak{N}'_0$ et où μ est une surjection asso-

ciant à certains néofoncteurs Φ de $I^{\cdot} \in \mathcal{J}$ vers $U^{\cdot}$ une transformation naturelle $\mu(\Phi)$ définie par un triplet $(\Phi, \tau, \hat{e})$, où $\hat{e}$ note le néofoncteur „constant" sur $e \in U^{\cdot}_0$. Soit $\mathbb{S}' = \mathbb{S}'(\mathcal{J})$ la classe des triplets

$$\bar{F} = ((\bar{U}^{\cdot}, \bar{\mu}), f, (U^{\cdot}, \mu))$$

vérifiant les conditions:

1° On a $(U^{\cdot}, \mu) \in \mathbb{S}'_0$ et $(\bar{U}^{\cdot}, \bar{\mu}) \in \mathbb{S}'_0$;

2° $F = (\bar{U}^{\cdot}, f, U^{\cdot}) \in \mathfrak{U}'$; si $\mu(\Phi)$ est défini, $\bar{\mu}(F.\Phi)$ est défini et [1, prop. 46-II]

$$\bar{\mu}(F.\Phi) = F\mu(\Phi) = \bar{F}.\mu(\Phi).$$

$\mathbb{S}'$ est une catégorie pour la loi de composition

$$((\bar{U}^{\cdot}, \bar{\mu}), f', (\tilde{U}^{\cdot}, \tilde{\mu})).((\bar{U}^{\cdot}, \bar{\mu}), f, (U^{\cdot}, \mu)) = ((\bar{\bar{U}}^{\cdot}, \bar{\bar{\mu}}), f'f, (U^{\cdot}, \mu))$$

si, et seulement si, $\bar{U}^{\cdot} = \tilde{U}^{\cdot}$ et $\bar{\mu} = \tilde{\mu}$. Nous identifions $\mathbb{S}'_0$ à la classe des unités de $\mathbb{S}'$. Soit $p''^{\mathcal{J}}$ le foncteur de $\mathbb{S}'$ vers $\mathfrak{U}'$ associant F à $\bar{F}$.

$\mathbb{S}'$ admet pour sous-catégorie pleine la catégorie $\mathfrak{F}'^{\mathcal{J}}$ dont les unités sont les couples $(U^{\cdot}, \mu) \in \mathbb{S}'_0$ tels que $U^{\cdot} \in \mathfrak{F}_0$ et que μ soit une application $\mathcal{J}$-limite projective partielle sur $U^{\cdot}$. Ceci signifie que, si $\eta(\Phi)$ est défini par la triplet $(\Phi, \tau, \hat{e})$, alors e est une limite projective de Φ et la projection canonique de e vers $\Phi(i)$ est $\tau(i)$ pour tout $i \in \alpha(\Phi)_0$. Soit $\mathfrak{F}^{\mathcal{J}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{F}'^{\mathcal{J}}$ ayant pour unités les couples $(U^{\cdot}, \mu) \in \mathfrak{F}'^{\mathcal{J}}_0$ tels que μ soit une application $\mathcal{J}$-limite projective (totale) sur $U^{\cdot}$, c'est-à-dire tels que $\mu(\Phi)$ soit défini pour tout néofoncteur Φ de $I^{\cdot} \in \mathcal{J}$ vers $U^{\cdot}$. Soient $p'^{\mathcal{J}}$ et $p^{\mathcal{J}}$ les foncteurs de $\mathfrak{F}'^{\mathcal{J}}$ et de $\mathfrak{F}^{\mathcal{J}}$ respectivement vers $\mathfrak{U}'$ restrictions de $p''^{\mathcal{J}}$.

Proposition 1. *$p''^{\mathcal{J}}$ est un foncteur fidèle à $\mathfrak{F}_0$-limites projectives, $\mathfrak{F}'^{\mathcal{J}}$ et $\mathfrak{F}^{\mathcal{J}}$ sont des sous-catégories saturées de $\mathbb{S}'$, et les foncteurs $(\mathbb{S}', \iota, \mathfrak{F}'^{\mathcal{J}})$ et $(\mathbb{S}', \iota, \mathfrak{F}^{\mathcal{J}})$ sont à $\mathfrak{F}_0$-limites projectives.*

La demonstration est analogue à celle de la proposition (20) [2].

Soit $p_{\mathfrak{U}'}$ le foncteur canonique de $\mathfrak{U}'$ vers $\mathfrak{M}$ et posons

$$q'^{\mathcal{J}} = p_{\mathfrak{U}'} . p'^{\mathcal{J}} \quad \text{et} \quad q^{\mathcal{J}} = p_{\mathfrak{U}'} . p^{\mathcal{J}}.$$

Désignons par $\hat{\mathbb{S}}'$, par $\hat{\mathfrak{F}}'^{\mathcal{J}}$ et par $\hat{\mathfrak{F}}^{\mathcal{J}}$ les catégories, par $Q^{\mathcal{J}}$ et par $Q'^{\mathcal{J}}$ les foncteurs, obtenus de même à partir de l'univers $\mathfrak{M}_0$. Soit $X^{\mathcal{J}}$ la classe des $Q'^{\mathcal{J}}$-monomorphismes [1, déf. 5-III] $((H^{\cdot}, \mu), f, (C^{\cdot}, \mu'))$ tels que $f(C)^{\cdot}$ soit une sous-catégorie de $H^{\cdot}$ stable pour μ, i. e. vérifiant la condition:

Si $\mu(\Phi)$ est défini par $(\Phi, \tau_\Phi, \hat{e})$ et si le néofoncteur Φ de $I^\cdot$ vers $H^\cdot$ applique I dans $f(C)$, on a $\tau_\Phi(i) \in C$ pour tout $i \in I_0^\cdot$; si de plus Ψ est une transformation naturelle définie par $(\Phi, \psi, \hat{e}')$ où $\Psi(I_0^\cdot) \subset f(C)$, on a $\lim^\mu \Psi \in f(C)$, en notant $\lim^\mu \Psi$ l'unique $h \in H$ tel que $\tau_\Phi(i) \,.\, h = \psi(i)$ pour tout i.

Théorème 1. *Le foncteur* $Q'^{\mathcal{J}}$ est $(\mathfrak{M}\hat{\mathfrak{l}} \,.\, \mathfrak{M}_0, X^{\mathcal{J}}, \mathcal{F}'^{\mathcal{J}})$ *-engendrant et les foncteers* $Q^{\mathcal{J}}$ et $Q'^{\mathcal{J}}$ *sont* $\not/$*- engendrants pour* $\mathfrak{M}$ [2, déf. 2-I].

Preuve. Soient $(H^\cdot, \mu) \in \hat{\mathcal{F}}_0'^{\mathcal{J}}$ et K une partie de H appartenant à $\mathfrak{M}\hat{\mathfrak{l}}$. L'intersection de toutes les sous-catégories de $H^\cdot$ stables pour μ et contenant K est notée $\hat{K}^\cdot$; évidemment $\hat{K}^\cdot$ est stable pour μ, et la $(X^{\mathcal{J}}, \hat{\mathcal{F}}'^{\mathcal{J}})$-sous-structure de $(H^\cdot, \mu)$ engendrée [2, déf. 2-I] par K est $(\hat{K}^\cdot, \hat{\mu})$, où $\hat{\mu}$ est l'application „induite" par μ sur $\hat{K}^\cdot$. On montre que $\hat{K} \in \mathfrak{M}\hat{\mathfrak{l}}$, en construisant $\hat{K}$ par récurrence transfinie. Cette construction est en tout point analogue à celle faite dans la démonstration du théorème 5 [2] (pour prouver que $Q^{\mathcal{J}}$ est $\not/$ - engendrant pour $\mathfrak{M}$). La première affirmation en résulte. Comme $(\hat{K}^\cdot, \hat{\mu})$ appartient à $\hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{J}}$ si $(H^\cdot, \mu) \in \hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{J}}$, et comme tout $Q^{\mathcal{J}}$-monomorphisme appartient à $X^{\mathcal{J}}$, il s'ensuit que $Q^{\mathcal{J}}$ est $\not/$ - engendrant pour $\mathfrak{M}$ (résultat démontré dans [2]). Enfin, $Q'^{\mathcal{J}}$ est $\not/$ - engendrant pour $\mathfrak{M}$ en vertu de la proposition 12 [2], puisque $Q'^{\mathcal{J}}$ est à $\mathfrak{M}\hat{\mathfrak{l}}_0$-produits fibrés et que $(\hat{K}^\cdot, \hat{\mu})$ est une $Q'^{\mathcal{J}}$-sous-structure de $(H^\cdot, \mu)$ vérifiant $\hat{K} \in \mathfrak{M}\hat{\mathfrak{l}}$.

Théorème 2. $\mathbb{S}'$ *est une cathégorie à* $\mathcal{F}'^{\mathcal{J}}$*-projections et une cathégorie à* $\mathcal{F}^{\mathcal{J}}$*-projections* [1, déf. 16-III].

Preuve. Soit $\sigma = (U^\cdot, \mu) \in \mathbb{S}'_0$. Posons $\mathcal{H} = \mathcal{F}'^{\mathcal{J}}$ (resp. $= \mathcal{F}^{\mathcal{J}}$) et $Y = \mathcal{H}_0 \,.\, \mathbb{S}' \,.\, \sigma$. La surjection associant (μ, f) à $((H^\cdot, \mu), f, \sigma) \in Y$ définit une bijection de Y sur une partie de $\bigcup_{H^\cdot \in \mathcal{F}_0} Y_H \times Y'_H$, où

$$Y_H = \bigcup_{I^\cdot \in \mathcal{J}} (\square H^\cdot \,.\, \mathcal{F} \,.\, I^\cdot) \,.\, \mathfrak{M} \,.\, (H^\cdot \,.\, \mathcal{F} \,.\, I^\cdot)) \in \mathfrak{M}\hat{\mathfrak{l}}_0 \text{ et } Y'_H = H \,.\, \mathfrak{M} \,.\, U \in \mathfrak{M}\hat{\mathfrak{l}}_0 \,.$$

Comme $\mathcal{F} \in \mathfrak{M}\hat{\mathfrak{l}}_0$ et que $\mathfrak{M}\hat{\mathfrak{l}}_0$ est un univers, on a $Y \in \mathfrak{M}\hat{\mathfrak{l}}_0$. Le foncteur $P''^{\mathcal{J}}$ relatif à $\mathfrak{M}\hat{\mathfrak{l}}_0$ étant à $\mathfrak{M}\hat{\mathfrak{l}}_0$-produits (d'après la proposition 1), il existe un produit

$$S = (\hat{H}^\cdot, \hat{\mu}) = \prod_{F \in Y} \beta(F) \quad \text{et} \quad [F]_{F \in Y} = ((\hat{H}^\cdot, \hat{\mu}), \hat{f}, \sigma)$$

dans $\hat{\mathbb{S}}'$, et l'on a $S \in \hat{\mathcal{H}}$. D'après le théorème 1, $\hat{f}(U) \in \mathfrak{M}\hat{\mathfrak{l}}$ engendre une

$(X^{\mathcal{J}}, \hat{\mathcal{K}})$-sous-structure $S' = (C', \hat{\mu}')$ de (H', μ) (à savoir C' est la sous-catégorie stable pour $\hat{\mu}$ engendrée par $\hat{f}(v)$), et il existe un $\bar{G} = (s, g, S') \in \mathcal{H}_0 . \hat{\mathcal{H}}_\gamma$. Alors $\bar{j} = (S, \iota, S') . \bar{G}^{-1}$ est $(Q'^{\mathcal{J}}, X^{\mathcal{J}}, \mathcal{K})$-engendré par $[F]_{F \in Y}$ et, *a fortiori*, $\bar{j}$ est $(P''^{\mathcal{J}}, X^{\mathcal{J}} . \mathcal{K}_0, \mathcal{K})$-engendré par $[F]_{F \in Y}$. Du théorème d'existence de structures libres [2, théorème 1] il résulte que s est une $(\mathcal{K}, \mathbb{S}')$-projection de σ, car tout noyau dans $\mathcal{F}'^{\mathcal{J}}$ appartient à $X^{\mathcal{J}}$.

Corollaire. *$p^{\mathcal{J}}$ admet un adjoint.*

En effet, pour que (H', μ) soit une $p^{\mathcal{J}}$-structure libre engendrée par $U' \in \mathcal{U}'_0$, il faut et il suffit que (H', μ) soit une $(\mathcal{F}^{\mathcal{J}}, \mathbb{S}')$-projection de $(U', \varnothing)$, où $\varnothing$ est la surjection vide. Donc le corollaire résulte du théorème précédent.

Définition. Si $U' \in \mathcal{U}'_0$, une $p^{\mathcal{J}}$-structure libre engendrée par U' est appelée une *complét on $\mathcal{J}$-projective libre de U'.*

Théorème 3. *Soit U' une base de catégorie. Alors U' admet une complétion $\mathcal{J}$-projective libre (H', μ) telle que H' admette $N(U')$ pour sous-catégorie pleine et que le foncteur limite projective associé a μ soit injectif. H' est solution du problème universel du plongement, à une équivalence près, de U' dans une catégorie à $\mathcal{J}$-limites projectives.*

Preuve. $N(U')$ étant le plongement universel de U' dans une catégorie, la complétion $\mathcal{J}$-projective de U' est identique à celle de $N(U')$, d'après le théorème 7-III [1] de transitivité des projections. Par suite la première affirmation se déduit du théorème 6 [2]. Soit $\mathcal{U}'_\sim$ la catégorie quotient de $\mathcal{U}'$ par la relation d'équivalence r: $F \sim F'$ s'il existe une équivalence naturelle de F sur F'. Notons $\mathcal{F}_\sim$ et $\mathcal{F}^{\mathcal{J}}_\sim$ les sous-catégories de $\mathcal{U}'_\sim$ dont les éléments sont les classes $F \bmod r$, où F est un foncteur et un foncteur à $\mathcal{J}$-limites projectives respectivement. En vertu du théorème 8 [2], H' est une $(\mathcal{F}^{\mathcal{J}}_\sim, \mathcal{F}_\sim)$-projection de $N(U')$; comme $N(U')$ est aussi une $(\mathcal{F}_\sim, \mathcal{U}'_\sim)$-projection de U', il s'ensuit que H' est une $(\mathcal{F}^{\mathcal{J}}_\sim, \mathcal{U}'_\sim)$-projection de U', ce qui précise la dernière affirmation.

b) *Complétion $\mathcal{J}$-projective et $\mathcal{J}'$-inductive*

Nous supposons que $\mathcal{J}$ et $\mathcal{J}'$ sont deux parties de $\mathcal{F}_0$ appartenant à la saturante $\widetilde{\mathcal{M}}$ de $\mathcal{M}$ dans $\hat{\mathcal{M}}$.

Notons $\mathbb{S}_0^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ la classe des triplets (U', μ, μ') tels que :

1° $(U', \mu) \in \mathbb{S}'_0 = \mathbb{S}'_0(\mathcal{J})$;

2° μ' est une surjection associant à certains néofoncteurs Φ de $I' \in \mathcal{J}'$ vers

$U^{\cdot}$ une transformation naturelle $\mu'(\Phi)$ définie par un triplet $(\hat{e}, \tau, \Phi)$, où $\hat{e} \in U_0^{\cdot}$.

Si $(U^{\cdot}, \mu, \mu')$ vérifie ces conditions, soit $\mu'^{\star}$ l'application associant au néofoncteur $\Phi^{\star}$ dual de Φ la transformation naturelle $\mu'^{\star}(\Phi^{\star})$ définie par $(\Phi^{\star}, \tau, \hat{e})$, lorsque $\mu'(\Phi)$ est défini par $(\hat{e}, \tau, \Phi)$. Alors $(U^{\star}, \mu'^{\star})$ appartient à la catégorie $\mathbb{S}'(\mathcal{J}'^{\star})$ construite à partir de la classe $\mathcal{J}'^{\star}$ des catégories duales des éléments de $\mathcal{J}$. Soit $\mathbb{S}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ la catégorie dont les éléments sont les triplets $F = ((\bar{U}^{\cdot}, \bar{\mu}, \mu'), f, (U^{\cdot}, \mu, \mu'))$ tels que

1° $(U^{\cdot}, \mu, \mu')$ et $(\bar{U}^{\cdot}, \bar{\mu}, \bar{\mu}')$ appartiennent à $\mathbb{S}_0'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$;

2° $((\bar{U}^{\cdot}, \mu), f, (U^{\cdot}, \mu)) \in \mathbb{S}'(\mathcal{J})$ et $((U^{\star}, \mu'^{\star}), f, (U^{\star}, \mu'^{\star})) \in \mathbb{S}'(\mathcal{J}'^{\star})$.

Soit $p''^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ son foncteur projection canonique vers $\mathfrak{N}'$.

$\mathbb{S}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ admet pour sous-catégorie pleine la catégorie $\mathfrak{F}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ (resp. $\mathfrak{F}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$) ayant pour unités les $(U^{\cdot}, \mu, \mu') \in \mathbb{S}_0'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ tels que

$$(U^{\cdot}, \mu) \in \mathfrak{F}'^{\mathcal{J}} \text{ (resp. } \in \mathfrak{F}^{\mathcal{J}}) \text{ et } (U^{\star}, \mu'^{\star}) \in \mathfrak{F}'^{\mathcal{J}'^{\star}} \text{ (resp. } \in \mathfrak{F}^{\mathcal{J}'^{\star}});$$

pour un tel élément, on appelle μ' une application $\mathcal{J}'$-limite inductive partielle (resp. inductive) sur $U^{\cdot}$. Soit $q'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ le foncteur de $\mathfrak{F}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ vers $\mathfrak{M}$ associant (U, f, U) à $\bar{F}$ et soit $q^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ sa restriction à $\mathfrak{F}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$. Soient $Q'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ et $Q^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ les foncteurs associés de même à l'univers $\mathfrak{M}_0$. Nous désignons par $X^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ la classe des $Q'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$-monomorphismes de la forme $((H^{\cdot}, \mu, \mu'), f, (C^{\cdot}, \nu, \nu'))$, où $f(C)^{\cdot}$ est une sous-catégorie de $H^{\cdot}$ stable pour μ et pour μ'. La classe $X^{\mathcal{J}\mathcal{J}'} \cap \hat{\mathfrak{F}}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ est formée de tout les $Q^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$-monomorphismes. Soit $p^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ le foncteur de $\mathfrak{F}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ vers $\mathfrak{N}'$ restriction de $p''^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$.

Théorème 4. *$\mathbb{S}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ est une catégorie à $\mathfrak{F}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$-projections et à $\mathfrak{F}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ projections. Le foncteur $p^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ admet un adjoint. Si $U^{\cdot}$ est une base de catégorie, la $p^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$-structure libre $(\hat{H}^{\cdot}, \hat{\mu}, \hat{\mu}')$ engendrée par $U^{\cdot}$ est telle que $U^{\cdot}$ soit isomorphe à un sous-graphe multiplicatif de $\hat{H}^{\cdot}$ et que $\hat{H}^{\cdot}$ soit solution du problème universel du plongement de $U^{\cdot}$, à une équivalence près, dans une catégorie à $\mathcal{J}$-limites projectives et à $\mathcal{J}$-limites inductives.*

Preuve. Si $\sigma = (H^{\cdot}, \mu, \mu') \in \hat{\mathfrak{F}}_0'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ et si $K \subset H$ appartient à $\tilde{\mathfrak{M}}$, on voit qu'il existe une $(X^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}, \hat{\mathfrak{F}}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'})$-sous-structure $(\hat{K}^{\cdot}, \hat{\mu}, \hat{\mu}')$ de σ engendrée par K, où $\hat{K}^{\cdot}$ est l'intersection de toutes les sous-catégories de $H^{\cdot}$ contenant K et stables pour μ et pour μ'. En construisant $\hat{K}$ par récurrence transfinie comme dans la démonstration du théorème 12 [2], on obtient

$\hat{K} \in \widehat{\mathfrak{M}}$. Il s'ensuit que $Q'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ est un foncteur $(\widehat{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M}_0, X^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}, \mathcal{F}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'})$-engendrant et que $Q^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ est $/$—- engendrant pour $\mathfrak{M}$. La première affirmation se prouve d'un façon analogue au théorème 2, à l'aide du théorème d'existence de structures libres et en utilisant le fait que $Q^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ et $Q'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ sont des foncteurs à $\hat{\mathcal{F}}_0$-limites projectives. Les autres affirmations se déduisent des théorèmes 13 et 14 [2], appliquées à $N(U^{\cdot})$.

Remarque. Les résultats du § 3a) peuvent être déduits du § 3b), en identifiant $(U^{\cdot}, \mu) \in \mathbb{S}'_0(\mathcal{J})$ à $(U^{\cdot}, \mu, \varnothing) \in \mathbb{S}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}_0$, où $\varnothing$ désigne la surjection vide.

4. Type et prototype d'une esquisse

Les notations sont celles du § 3. On suppose encore que $\mathcal{J}$ et $\mathcal{J}'$ sont des parties de $\mathcal{F}_0$ appartenant à la saturante $\widetilde{\mathfrak{M}}$ de $\mathfrak{M}$ dans $\widehat{\mathfrak{M}}$.

Définition. Si $\sigma = (U^{\cdot}, \mu, \mu') \in \mathbb{S}_0^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ et si $U^{\cdot}$ est une base de catégorie, on appelle σ *une préesquisse $\mathcal{J}$-projective et $\mathcal{J}'$-inductive*, ou une $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-*préesquisse*. Une $(\mathcal{H}, \mathbb{S}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'})$-projection de σ est appelée $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-*prototype de* σ si $\mathcal{H} = \mathcal{F}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ (resp. $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-*type de* σ, si $\mathcal{H} = \mathcal{F}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$).

Le prototype et le type de σ sont définis à un isomorphisme près. Si $\sigma \in \mathcal{F}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ son $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-prototype est identique à σ; par suite les éléments de $\mathcal{F}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$, seront appelés des $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-prototypes et ceux de $\mathcal{F}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ des $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-types.

Soit $\sigma = (U^{\cdot}, \mu, \mu')$ une $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-préesquisse et $\nu(U^{\cdot})$ le néofoncteur injectif de $U^{\cdot}$ vers $N(U^{\cdot})$. Soit $\lambda = \mu$ (resp. $= \mu'$); désignons par $\bar{\lambda}$ la surjection obtenue en associant $\exists\, \nu(U^{\cdot}).\lambda(\Phi)$ à tout Φ tel que $\lambda(\Phi)$ soit défini. On voit que $N(\sigma) = (N(U^{\cdot}), \bar{\mu}, \bar{\mu}')$ est une $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-préesquisse, qui admet même $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-prototype et même $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-type que σ.

Théorème 5. *Soit $\sigma = (U^{\cdot}, \mu, \mu')$ une $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-préesquisse et $\tilde{\sigma} = (\tilde{H}^{\cdot}, \tilde{\mu}, \tilde{\mu}')$ un $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-type de σ. Alors $\tilde{\sigma}$ est une $q^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$-structure quasi-quotient d'une $p^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$-structure libre $\hat{\sigma} = (\hat{H}^{\cdot}, \hat{\mu}, \hat{\mu}')$ engendrée par $U^{\cdot}$. Si σ est un $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-prototype, $U^{\cdot}$ s'identifie à une sous-catégorie de $\tilde{H}^{\cdot}$.*

Preuve. La première affirmation se démontre par un raisonnement analogue à celui utilisé pour prouver le théorème 15 [2]. D'après le théorème 4, $U^{\cdot}$ peut être identifié à un sous-graphe multiplicatif de $\hat{H}^{\cdot}$. Dans ce cas, $\tilde{\sigma}$ est la $q^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$-structure quasi-quotient de $\hat{\sigma}$ par la relation d'équivalence engendrée par la classe des couples $(\tau_{\Phi}(i), \hat{\tau}_{\Phi}(i))$, où $\mu(\Phi)$ (resp. $\mu'(\Phi)$) est défini par le triplet $(\hat{\Phi}, \hat{\tau}_{\Phi}, \hat{e})$ resp. $(\hat{e}, \hat{\tau}_{\Phi}, \hat{\Phi})$, où $i \in \alpha(\Phi)_0$

et $\hat{\mu}(\Phi)$ (resp. $\hat{\mu}'(\Phi)$) est défini par le triplet $(\hat{\Phi}, \hat{\tau}_\Phi, \hat{e})$ (resp. $(\hat{e}, \hat{\tau}_\Phi, \hat{\Phi})$). La deuxième affirmation est une conséquence du théorème 15 [2].

Soit $\sigma = (U^\cdot, \mu, \mu')$ une $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-préesquisse, $\breve{\sigma} = (\breve{U}^\cdot, \breve{\mu}, \breve{\mu}')$ son $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-prototype et $\tilde{\sigma} = (\tilde{H}^\cdot, \tilde{\mu}, \tilde{\mu}')$ son $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-type. Le type de $\breve{\sigma}$ est isomorphe à $\tilde{\sigma}$ et $\breve{U}^\cdot$ peut être identifié à une sous-catégorie de $\tilde{H}^\cdot$ d'après le théorème 5. Mai si $G = (\breve{\sigma}, g, \sigma)$ est un $(\mathcal{T}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}, \mathcal{S}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'})$-projecteur, en général g n'est pas injective. On est conduit à considérer les préesquisses particulières telles que g soit une injection, c'est-à-dire telles que $U^\cdot$ s'identifie à un sous-graphe multiplicatif de $\breve{U}^\cdot$ (et par suite de $\tilde{H}^\cdot$); dans ce cas, nous dirons que $U^\cdot$ s'identifie à un sous-graphe multiplicatif de $\breve{\sigma}$.

Définition. On appelle $(\mathcal{J}\mathcal{J}')$-*esquisse* un couple (σ, M) vérifiant les conditions :

1° $\sigma = (U^\cdot, \mu, \mu')$ est une $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-préesquisse et $M \subset U$;

2. $U^\cdot$ s'identifie à un sous-graphe multiplicatif de son $(\mathcal{J}\mathcal{J}')$-prototype.

Soit $\mathcal{S}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ la catégorie des morphismes entre $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-esquisses, dont les éléments sont les triplets $F = ((\sigma', M',), f, (\sigma, M))$ tels que

$$i(F) = (\sigma', f, \sigma) \in \mathcal{S}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'} \text{ et } f(M) \subset M'.$$

Soient $\mathcal{T}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ et $\mathcal{T}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ les sous-catégories pleines de $\mathcal{S}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ ayant pour unités les $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-types et les $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-prototypes pointés respectivement, i. e. les $(\sigma, M) \in \mathcal{S}_0^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ tels que $\sigma \in \mathcal{T}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ et $\sigma \in \mathcal{T}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$. Des théorèmes précédents, on déduit :

Théorème 6. $(\mathcal{S}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}, i, \mathcal{S}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'})$ *est un foncteur à* $\mathcal{T}_0$*-limites projectives et à* $\mathcal{T}_0$*-limites inductives.* $\mathcal{S}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ *est une catégorie à* $\mathcal{T}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$*-projections et à* $\mathcal{T}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$*-projections.*

On peut choisir deux foncteurs $(\mathcal{T}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}, \mathcal{S}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'})$-projection T' et $(\mathcal{T}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}, \mathcal{S}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'})$-projection T de sorte que, si $(\sigma, M) \in \mathcal{S}_0^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ et $\sigma = (U^\cdot, \mu, \mu')$, on ait :

1° $T'(\sigma, M) = ((\breve{U}^\cdot, \hat{\mu}, \hat{\mu}'), M)$ et $T(\sigma, M) = ((\tilde{H}^\cdot, \tilde{\mu}, \tilde{\mu}'), M)$;

2° $U^\cdot$ est un sous-graphe multiplicatif de $\breve{U}^\cdot$ et $\breve{U}^\cdot$ une sous-catégorie de $\tilde{H}^\cdot$;

3° $T(T'(\sigma, M)) = T(\sigma, M)$.

Définition. $T'(\sigma, M)$ et $T(\sigma, M)$ sont respectivement appellés $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-*prototype et* $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-*type pointés de* (σ, M).

Remarque. Une esquisse (σ, M) telle que $\sigma = (U^\cdot, \mu, \varnothing)$, où $\varnothing$ est la surjection vide, peut être appelée esquisse $\mathcal{J}$-projective et représentée

par le couple $((U^\cdot, \mu), M)$. Les esquisses algébriques projectives auxquelles un type a été associé dans [4] correspondent aux esquisses $\mathcal{J}$-projectives (en ce sens) $\bar{\sigma} = (\sigma, M)$ telles que $N(\sigma)$ soit un $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-prototype et que M soit formée de monomorphismes.

Supposons donné un $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-type pointé $\bar{\sigma}(H^\cdot) = ((H^\cdot, \mu_H, \mu'_H), M_H)$ et une $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-esquisse $\bar{\sigma} = (\sigma, M)$, où $\sigma = (U^\cdot, \mu, \mu')$.

Définition. On appelle $\bar{\sigma}(H^\cdot)$-*structure d'espèce* $\bar{\sigma}$ un néofoncteur F de $U^\cdot$ vers $H^\cdot$ tel que $(\bar{\sigma}(H^\cdot), F, \bar{\sigma}) \in \mathbb{S}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$. Si $\bar{\sigma}(\mathfrak{M}) = ((\mathfrak{M}, \mu_{\mathfrak{M}}, \mu'_{\mathfrak{M}}), \mathfrak{M}^\cdot)$, où $\mu_{\mathfrak{M}}$ et $\mu'_{\mathfrak{M}}$ sont les applications $\mathcal{J}$-limite projective et $\mathcal{J}'$-limite inductive usuelles sur la catégorie $\mathfrak{M}$ des applications, une $\bar{\sigma}(\mathfrak{M})$-structure d'espèce $\bar{\sigma}$ sera appellée *structure algébrique d'espèce* $\bar{\sigma}$.

Soit $\mathbb{S}(\bar{\sigma}(H^\cdot), \bar{\sigma})$ la catégorie des morphismes entre $\bar{\sigma}(H^\cdot)$-structures d'espèce $\bar{\sigma}$, c'est-à-dire la sous-catégorie pleine de la catégorie $\mathfrak{N}(H^\cdot, U^\cdot)^\square$ des transformations naturelles ayant pour objets les $\bar{\sigma}(H^\cdot)$-structures d'espèce $\bar{\sigma}$. On définit un foncteur fidèle Σ de $\mathbb{S}(\bar{\sigma}(H^\cdot), \bar{\sigma})$, vers la catégorie produit $(H^\cdot)^{U_0^\cdot}$ en associant à la transformation naturelle $\Gamma \in \mathbb{S}(\bar{\sigma}(H^\cdot), \bar{\sigma})$ définie par le triplet (F', γ, F) la famille $(\gamma(u))_{u \in U_0^\cdot}$.

Théorème 7. *Si l'application somme de* $\alpha^\square \mu$ *et de* $\beta^\square \mu'$ *est injective et si* M_H *est saturée dans* $H^\cdot$ (*i. e. si* $H^\cdot_\gamma . M_H . H^\cdot_\gamma \subset M_H$), *les catégories* $\mathbb{S}(\bar{\sigma}(H^\cdot), \bar{\sigma})$ *et* $\mathbb{S}(\bar{\sigma}_1(H^\cdot), \bar{\sigma})$ *sont isomorphes pour tout* $\bar{\sigma}_1(H^\cdot)$ *de la forme* $((H^\cdot, \mu_1, \mu'_1), M_H) \in \mathfrak{T}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$. *Les catégories* $\mathbb{S}(\bar{\sigma}(H^\cdot), \bar{\sigma})$, $\mathbb{S}(\bar{\sigma}(H^\cdot), T'(\bar{\sigma}))$ *et* $\mathbb{S}(\bar{\sigma}(H^\cdot), T(\bar{\sigma}))$ *sont toujours isomorphes.*

La dernière affirmation résulte du théorème 6. Nous ne démontrerons pas la première affirmation.

4. Cas particuliers. Problèmes

1° Supposons $\mathcal{J} = \mathcal{J}' = \emptyset$. Comme $\mathbb{S}^{\emptyset\emptyset}$ s'identifie à $\mathcal{U}'$ et que $\mathfrak{T}^{\emptyset\emptyset}$ et $\mathfrak{T}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ s'identifient alors à $\mathfrak{T}$, une $(\emptyset, \emptyset)$-esquisse s'identifie à un couple $\bar{\sigma} = (U^\cdot, M)$ d'une base de catégorie $U^\cdot$ et d'une partie M de $U^\cdot$ Ainsi, avec les notations du § 1, le couple $\bar{\sigma}_{\mathcal{G}} = (U^\cdot_{\mathcal{G}}, \{i\})$ est une telle esquisse. Les structures algébriques d'espèce $\sigma_{\mathcal{G}}$ s'identifient aux graphes.

2° Supposons que $\mathcal{J}'$ soit la classe vide et que $\mathcal{J}$ soit la classe formée de la catégorie discrète I^0 ayant deux unités 1 et 2. Soit $U^\cdot_m$ la catégorie ayant deux unités u et $u \times u$ et trois morphismes k, p_1 et p_2 de source $u \times u$ et de but u. Soit $\sigma_m = (U^\cdot_m, \mu)$, où $\mu(\Phi)$ existe pour le seul foncteur Φ de $I^\cdot$ vers $U^\cdot_m$ constant sur u, le triplet définissant $\mu(\Phi)$ étant

$(\Phi, \tau, \overset{\wedge}{u \times u})$, avec $\tau(i) = p_i$ pour $i = 1$ et 2. On voit que σ_m est un $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-prototype (mais non un $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-type). Une structure algébrique d'espèce $(\sigma_m, \emptyset)$ s'identifie à un magma (= classe munie d'une loi de composition partout définie). Plus généralement tout type au sens de [7] est un $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-type.

3° Supposons encore $\mathcal{J}' = \emptyset$ et $\mathcal{J} = \{I^0\}$, où $I = \{1, 2\}$. À partir de la catégorie $U_{\mathfrak{X}}$ du § 1, on définit comme dans l'exemple précédent l'application μ et l'on obtient une $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-esquisse $\bar{\sigma}_{\mathfrak{X}} = (\{U_{\mathfrak{X}}^{\cdot}, \mu), \{i'\})$. Une structure algébrique d'espèce $\bar{\sigma}_{\mathfrak{X}}$ s'identifie à une classe multiplicative.

4° Soit $I^{\cdot}$ la catégorie ayant trois unités 0, 1 et 2 et deux morphismes d_1 et d_2 de source 0, de but 1 et 2 respectivement. Supposons $\mathcal{J} = \{I^{\cdot}\}$ et $\mathcal{J}' = \emptyset$. On définit une $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-esquisse $\bar{\sigma}_{\mathfrak{F}} = ((U_{\mathfrak{F}}^{\cdot}, \mu_{\mathfrak{F}}), \{i\})$ comme suit: soient Φ_1 et Φ_2 les néofoncteurs de $I^{\cdot}$ vers $U_{\mathfrak{F}}^{\cdot}$ tels que $\Phi_1(d_1) = a$, $\Phi_1(d_2) = b$, $\Phi_2(d_1) = v_2$, $\Phi_2(d_2) = v_1$; soit $\mu(\Phi_i)$ la transformation naturelle définie par le triplet $(\Phi_i, \tau_i, \hat{e}_i)$, où $\tau_1(j) = v_j$ et $\tau_2(j) = w_j$ pour $j = 1$ et 2. Une structure algébrique d'espèce $\bar{\sigma}_{\mathfrak{F}}$ s'identifie à une catégorie (voir § 1).

5° Les quasi-catégories (resp. les catégories non associatives) [3] sont les structures algébriques d'espèce $\bar{\sigma}$, l'esquisse $\bar{\sigma}$ étant la sous-esquisse de $\bar{\sigma}_{\mathfrak{F}}$ obtenue en supprimant de $U_{\mathfrak{F}}^{\cdot}$ les éléments $v(i.b, u)$ et $v(u, i.a)$ (resp. tous les morphismes de source $(u \curlywedge u) \curlywedge (u \curlywedge u)$). D'une façon analogue, on peut construire des esquisses dont les structures n-aires (définies dans [6]) sont des réalisations.

Ces exemples montrent que les structures algébriques usuelles peuvent être définies comme des structures algébriques au sens précis indiqué plus haut. Par suite, on obtient une méthode de construction des structures de même espèce „relatives à une catégorie $H^{\cdot}$“ (exemple: les catégories η-structurées du § 1).

Nous n'avons pas la place d'étudier ici les propriétés catégoriques des structures d'espèce $\bar{\sigma}$. Dans un prochain article nous considérerons les problèmes suivants:

1° Construction et étude d'un foncteur „d'oubli“ de $\mathbb{S}(\bar{\sigma}(H^{\cdot}), \bar{\sigma})$ vers $\mathfrak{M}$, qui est $\not$—-engendrant pour $\mathfrak{M}$ et à limites projectives (généralisant les résultats de [4]). Autres foncteurs d'oubli obtenus en „isolant“ certaines unités de $U^{\cdot}$. Application à l'existence de structures quasi-quotient et de problèmes universels.

2° Définition d'esquisses „minimales“ ayant même type qu'une esquisse donnée; ceci conduit à la notion d'idée d'une structure, qui précise les idées définies dans [3]: l'idée d'une catégorie est formée des éléments a, b, k, i.

3° Comparaison des structures d'espèce $\bar{\sigma}$ et d'espèce $\bar{\sigma}'$, où $\bar{\sigma}'$ est une sous-esquisse de $\bar{\sigma}$: ceci mène à des théorèmes de projections entre structures de diverses espèces, analogues aux théorèmes de projections entre structures n-aires considérés dans [5].

Reçue le 26 X 1967

Faculté de Sciences, Paris, France

BIBLIOGRAPHIE

1. Ehresmann C., *Catégories et Structures*. Dunod, Paris, 1965.
2. — *Sur l'existence de structures libres et de foncteurs adjoints*. Cahiers de Topologie et Géométrie différentielle, **IX**, Paris, Dunod, 1967, pp. 33—181.
3. — *Introduction to the Theory of structured Categories*. University of Kansas, Technical Report *10*, 1966, 95 pp.
4. — *Sur les structures algébriques*. C. R. Ac. Sci., Paris, **264**, série A, 1967, (sous presse).
5. — *Problèmes universels relatifs aux catégories n-aires*. C. r. Aci., Paris, 1967, **264**, série A, p. 273.
6. Topentcharov V., *Éléments d'une théorie de catégories*. C. r. Ac. Sci., Paris, 1967, **264**, p. 269.
7. Benabou J., *Structures algébriques dans les catégories*. Cahiers de Topologie et Géométrie différentielle, **IX**, Paris, Dunod, 1967.

SCHIŢĂRI ŞI TIPURI DE STRUCTURI ALGEBRICE

(Rezumat)

Se arată modul în care teoremele de completare [2] ale unei categorii prin adjuncţia unor limite proiective şi inductive pot fi utilizate pentru construirea anumitor structuri, numite „algebrice", care cuprind de exemplu structurile algebrice uzuale (definite de legile de compoziţie peste tot definite) precum şi cele definite de legi de compoziţie parţiale (clase multiplicative, cvasi-categorii, categorii etc.).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

C. D. 519.52

SUL PRINCIPIO DI ZERMELO E LA SUA APPLICAZIONE A UN TEOREMA FONDAMENTALE DI ANALISI

DI

FRANCESCO SAVERIO ROSSI

1. In una sua recente pubblicazione il M e s c h k o w s k i espone [1] alcune interessanti vedute intorno all'assioma delle scelte o altrimenti detto *Principio di Zermelo* sulla teoria degli insiemi, additando i pericoli e i vantaggi della sua applicazione incondizionata. Conviene richiamarlo così come è ivi formulato: *Sia M un insieme di insiemi I_n fra di loro non intersecantisi; esisterà un insieme Z che contiene esattamente un elemento, e non altri, per ciascuno degli insiemi $I^{"}$. Z* è denominato *l'insieme delle scelte*. Ora, in certe dimostrazioni matematiche, tale Principio appare quanto mai valido se si impongono ad esso delle limitazioni, tenendo presente il fatto che il problema di fondo è quello di decidere se sia lecito farne un uso indiscriminato o meno.

Da un esame approfondito della questione risulta che la composizione di Z dipende sostanzialmente da due operazioni fondamentali $\Omega_1 \in \Omega_2$, di cui la prima riguarda la costituzione degli insiemi I_n e la seconda dalla scelta, per ogni I_n, dell'elemento rappresentativo di esso [1]). Sia l'una che l'altra si presentano quanto mai delicate: la prima comporta una precisa conscenza della struttura degli insiemi I_n (loro proprietà e natura); la seconda, una legge ordinatrice per una retta applicazione del Principio. Se, ad esempio, I_n è costituito da un numero finito di enti $l_1, l_2, ..., l_n$ — le cui caratteristiche siano state ben definite preliminarmente — si possono prospettare n alternative di scelta (un numero finito quindi), ma se I_n è costituito da infiniti enti, infinite dovrebbero essere le possibilità di scelta che si presentano, con l'assurdo di una legge con infinite alternative [2]. E'noto che il Principio di Zermelo conduce talvolta a conseguenze paradossali, che non sempre collimano con le conscenze abituali possedute in ordine all'educazione scientifica ricevuta dalla Scuola [3]. L'accento che si pone solitamente sulla libertà di scelta tocca una delle caratteristiche del Principio, e, se per caso, questa libertà dovesse essere limitata da qualche condizione, esso verrebbe a perdere, nell'uso applicativo, l'importanza che molti gli attribuiscono. Ora questa libertà, contemplata dal Principio nella specie delle infinite scelte *in senso lato*, è un aspetto interessante della questione, ma non meno importante è l'altro che deriva dalla operazione Ω_1, che condiziona la stessa

---

[1]) L'esempio che viene riportato dal Meschkowski, utile per noi, è il seguente: „L'insieme M degli insiemi I_n dei numeri razionali compresi fra due numeri naturali consecutivi r e $r+1$, $M \equiv (I_0, I_1, ..., I_n, ...)$ in cui sia $p/q \in I_r$ e $r < p/q \leqslant r+1$ può dar luogo a un insieme Z formato da tutti i numeri naturali r, $(r = 0, 1, ...)$, ciascuno contenuto in I_r e non in I_{r+1}".

scelta anche per delle alternative in numero finito, compiute, come afferma il Severi [4], *„con un numero finito di atti di pensiero"*. Il rischio di scegliere nell'insieme I_n un ente non ben definito nei preliminari può condurre fatalmente a qualche errore che potrebbe incidere sulla conclusione della verità da dimostrare.

2. L'esempio che illustra quanto sopra è detto è il seguente [4, pp. 170–184], in apparenza banale: *Sia $I(a, b)$ un segmento contenente infiniti punti che costituiscano un insieme A; determinare un intervallo parziale di I, di ampiezza minore o uguale a δ assegnato ad arbitrio, in cui cadano ancora infiniti punti di A.* Intanto, se A coincide con I, ogni intervallo parziale risponde al quesito, che potrebbe non porsi, tanto è evidente. Altrimenti, detto n_1 un numero naturale arbitrario maggiore di I, si suddivida I in n_1 parti uguali o disuguali, e sia $X_i \equiv (x_{i-1}^{(i)}, x_i^{(1)})$ uno degli intervalli parziali e sia inoltre (γ) il gruppo di punti appartenente a X_i. Per il rispetto della indipendenza degli intervalli X_i si stabilisca che $x_{i-1}^{(1)} < (\gamma) \leqslant x_i^{(1)}$. Nel complesso di questi insiemi costituenti I, si troverà con n_1 alternative, un I_1 rispondente a un gruppo infinito di punti (γ). Con una suddivisione di I in n_2 parti, $(n_2 > 1)$, con analogo criterio, si otterrà un successivo intervallo con la medesima proprietà scelto con $n_1 n_2$ alternative. Con tale procedimento si perverrà alla costruzione dell'insieme delle scelte $Z \equiv (I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots)$. Nell'insieme delle operazioni $S(\omega)$ ordinato è possibile determinarne una ω_k relativa alla k-ma suddivisione in $n_1 n_2 \ldots n_k$ parti dell'intervallo I, per la quale sia $(b - a)/n_1 n_2 \ldots n_k < \delta$. L'ausilio del Principio è stato, in questo caso particolare, molto opportuno, ma non si può dire la stessa cosa passando dalla retta al piano o a uno spazio a r dimensioni, per r qualunque, proprio perchè l'operazione Ω_1 di cui al § 1 vuole essere strutturata con maggiore circospezione. Intanto il problemo è ovvio se $A \equiv I$. Sia perciò $A \subset I$.

Una divisione in domini rettangolari può comportare la presenza di alcuni fra essi contenenti internamente infiniti punti (γ), la cui caratteristica sia quella di ritrovarsi *definitivamente*[2]) in un S_r (e può avvenire, tra l'altro, che uno solamente ne abbia infiniti internamente); ovvero che gli stessi γ punti appartengano definitivamente (o esclusivamente) a un S_h con $h < r$.

Ora non si può affatto escludere che nella prima suddivisione di I in domini rettangolari parziali R_i non capitino tali infiniti punti in una regione di uno spazio appartenente alla frontiera di uno di essi R_1, cioè a FR_I; e il caso vuole che non venga scelto proprio questo dominio, privato di quella parte stessa di FR_I, quale rappresentante degli R_i, per l'insieme Z[3]): cioè infiniti punti sfuggirebbero per l'arbitrarietà della scelta. Del resto anche individuando un elemento R_1 dotato di infiniti punti γ sulla frontiera solamente, qualunque divisione eseguita nello spazio S_r non risolverebbe il quesito di circoscrivere quei punti o un sottoinsieme infinito di essi con un dominio rettangolare di diametro minore di δ. La scelta è dunque condizionata dal fatto che l'insieme A è contenuto in un S_h dello S_r, essendo h minore di r.

Il problema allora ha senso solo se si amplia in quest'altro: „Designato con A un insieme infinito di punti contenuto in un dominio I dello S_r, determinare in S_r, o in uno spazio in esso contenuto S_h, un insieme limitato H, avente un diametro minore di un assegnato δ, che contenga ancora infiniti punti di A"[4]).

---

[2]) Con questa locuzione si vuole intendere che, almeno da un certo punto in poi la coordinata x_h, $(h = 1, 2, \ldots, r)$, dei punti γ dell'insieme A non sia costante. Ciò si potrebbe anche esprimere nel linguaggio operativo formale.

[3]) Nella specie $r = 2$, ad esempio, può accadere che infiniti punti di A appartengano alla frontiera di un R_i arbitrario e solo un numero finito alla regione interna.

[4]) Un insieme H quindi che potrebbe non essere privato dell'intera frontiera o di parte di essa.

3. La dimostrazione del teorema di Bolzano-Weierstrass è strettamente collegata alla costruzione degli insiemi di cui si è discorso al § 2 [4, p. 126], [5, pp. 51—52]. Per quanto concerne l'esistenza di un punto di accumulazione di un insieme A di punti, limitato o illimitato, composto di infiniti punti, ciò può essere assicurato nello S_1 mediante l'applicazione del Principio di Zermelo. Le operazioni consecutive di suddivisione dell'intervallo (a, b) contenente A in $n_1 n_2 \ldots n_k$ parti (questo dopo k operazioni del genere), al variare comunque di k determinano due successioni convergenti dei primi e dei secondi estremi degli insiemi aperti a sinistra che formano Z, il cui limite indicheremo con ξ. Risulta inoltre, in corrispondenza a k arbitrariamente scelto, un'operazione ω_k, per cui, per qualsiasi operazione ad essa seguente ω_k sussiste la limitazione $|x_i^{(k')} - x_{i-1}^{(k')}| < \delta$, e perciò per un punto dell'intervallo $(x_{i-1}^{(k')}, x_i^{(k')})$ *a fortiori*, $|\xi - \gamma| < \delta$.

Passando a un insieme A di S_r dotato di infiniti punti, occorre stabilire innanzitutto se: a) A appartenga, in tutto o in parte, *definitivamente* a S_r; b) A appartenga, sia pure in parte, definitivamente a un S_h, con h minore di r. Sia A comunque limitato.

Nel caso a) il dominio I contenente A, ove questo non sia coincidente con una parte di I (allora il problema posto sarebbe senz'altro risolubile), scelto nell'insieme ordinato di operazione $S(\omega)$ una di esse ω_1 venga suddiviso in domini rettangolari parziali $R_i(x, x, \ldots, x)$. L'operazione consiste nel suddividere ciascuno intervallo (a_h, b_h) in n_h parti, $(n_h > 1)$, ind nell'ordinare queste in maniera che $x_{h,i} < (\gamma) \leqslant x_{h,i+1}$, essendo (γ) un gruppo di punti di A contenuto nell'intervallo sull asse coordinato h-mo (gruppo che potrebbe risultare anche vuoto), nel selezionarne uno con infiniti punti e nel fissare infine il dominio rettangolare R_{i_1} di punti estremi $(x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ri})$, $(x_{1,i+1}, x_{2,i+1} \ldots x_{r,i+1})$ privandolo di parte della frontiera corrispondente all'estremo inferiore e iniziare la costruzione dell'*insieme delle scelte* Z con un primo elemento R_{i_1}. Succesivamente si eseguisca l'operazione ω_2: nuova divisione e nuova scelta di un certo R_{i_2}, che rappresenti il secondo elemento di Z. Si finirà, col procedimento detto, col costruire l'insieme Z con gli elementi R privati di parte della loro frontiera $Z \equiv (R_{i_1}, R_{i_2}, \ldots, R_{i_n}, \ldots)$. Esisterà un punto limite contenuto in tutti gli insiemi di Z: $P(\xi_1^*, \xi_2^*, \ldots, \xi_r^*)$. Si accerta poi che in qualunque intorno del punto P di diametro δ arbitrario esiste qualche punto γ. Se l'insieme è illimitato la dimostrazione è ovvia. Ora, se i punti di A sono definitivamente contenuti in un S_h, $(h < r)$ — a mò di esempio, $h = r - 1$ — operata la suddivisione solita dell'insieme I contenente A (limitato, in un primo tempo) in domini rettangolari R_i, privati poi di una parte della loro frontiera, per costituire il primo insieme finito di insiemi non intersecantisi, da cui estrarre il primo elemento di Z, la scelta potrebbe cadere proprio su un particolare R_i privato del gruppo infinito di punti γ capitati sulla sua frontiera. Ne consegue che Z potrebbe contenere una serie di insiemi privati di infiniti punti di A e non servirebbe il Principio di Zermelo a stabilire l'esistenza di un punto di accumulazione di A: la dimostrazione del Teorema di Bolzano in simili casi, con questo mezzo, sarebbe ambigua ed inconsistente. La conclusione non sarebbe diversa per h minore di $r-1$. L'esigenza di una dimostrazione completa di questa proprietà fondamentale dell'Analisi porta al necessario collegamento di un insieme di infiniti punti con la dimensione dello spazio al quale essi definitivamente appartengono. Precisato tale spazio e la sua dimensione h, si applichi in esso il procedimento seguito innanzi per lo spazio S_r, estraendo dall'insieme delle operazioni $S(\omega)$ l'insieme di operazioni $S'(\omega)$ che non tengano affatto conto delle suddivisioni (inutili) di a_k, b_k (per $k = h + 1, h + 2, \ldots, r$). Per quanto sopra è detto, esisterà in A un punto di accumulazione in S_h e perciò in S_r. La cosa si estende anche agli insiemei A illimitati.

Il Teorema di Bolzano-Weierstrass si estende: *In uno spazio S ogni insieme costituito da infiniti insiemi distinti di punti, ammette sempre qualche punto di accumulazione.*

Sia I l'insieme degli insiemi $I \equiv (K_1, K_2, \ldots, K_n)$, devesi dimostrare l'esistenza di un punto O di accumulazione per I, cioè far vedere che in un intorno qualunque di O cadono punti appartenenti a infiniti insiemi distinti K.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

Se I è limitato e ogni K sia chiuso e limitato, si presentano due alternative: a) infiniti K contengano infiniti punti; b) un numero finito degli insiemi K_i contengano infiniti punti. Nel caso a) si scelga un punto che non sia isolato da ciascuno dei K. Si otterrà allora un insieme Z di scelte costituito da infiniti punti, il quale, per il Teorema di Bolzano-Weierstrass limitato a un insieme (dimostrazione precedente) di ∞ punti γ, ammetterà un punto O di accumulazione che è di accumulazione per lo stesso I. Se Z contiene un numero finito di punti, vi sarà in esso un punto appartenente a ∞ insiemi K e si conclude parimenti che esso sarà di accumulazione per I.

Se I è composto da infiniti insiemi K distinti contenenti un numero finito di punti, con essi si può costituire un insieme $K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_n$ formato da infiniti punti e perciò si avrà un punto di accumulazione per I.

Se gli insiemi K non risultano chiusi si aggiungano tutti i punti di accumulazione che fanno parte di essi e si ragioni come sopra: un punto O di accumulazione per I_1 formato dagli insiemi $\bar{K}_1, \bar{K}_2, \ldots, \bar{K}_n, \ldots$ chiusi dedotti dai K precedenti, sarà pure di accumulazione per $K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots$ e quindi per I [6]. Se I è illimitato il Teorema è ancora valido. Le eccezioni rilevate prima circa la presenza di eventuali punti frontiera in numero infinito vengono superate con la considerazione delle regioni limitate o illimitate di spazi ben definiti alle quali appartengano tali particolari insiemi.

Pervenuta il 15 III 1966

Ministero di Pubblica Istruzione,,
Roma, Italia

BIBLIOGRAFIA

1. Meschkowski H., *Mutamenti del pensiero matematico.* Ed. Borghieri, Torino, 1964, pp. 64–74.
2. Hilbert D., Ackermann, *Grundzüge der Theoretischen Logik.* Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1928.
3. Russel B., *Introduction to the Mathematical Philosophy.* Trad. di L. Pavolini, Ediz. Longanesi, Milano, 1962.
4. Severi F., *Lezioni di Analisi.* Vol. I, Zanichelli, Bologna, 1938, p. 172.
5. Picone M., *Lezioni di Analisi Infinitesimale.* P. I, Ed. Circolo Matematico di Catania, 1923, pp. 51–52.
6. Severi F., *Conferenze di Geometria Algebrica.* Zanichelli, Bologna, 1930, pp. 172—173.

ASUPRA PRINCIPIULUI LUI ZERMELO ŞI APLICAREA SA LA O TEOREMĂ FUNDAMENTALĂ DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

(Rezumat)

Autorul, luînd ca punct de plecare conţinutul recentului volum al lui H. Meschkowski [1] referitor la principiul lui Zermelo, expune unele aplicaţii ale acestui principiu la o serie de teoreme de analiză matematică, oprindu-se îndeosebi asupra demonstraţiei teoremei fundamentale a lui Bolzano-Weierstrass [4], [5].

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

C. D. 517.948

UN THÉORÈME DE TRANSFERT POUR CERTAINES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES

PAR

AL. CLIMESCU

Communication présentée dans la session scientifique de l'Institut Polytechnique de Jassy, 28—30 Septembre 1967

1. Une attitude assez répandue parmi les algébristes les fait regarder d'un oeil méfiant et sceptique les opérations qui ne sont pas partout définies. Nous nous proposons de montrer ici qu'à l'aide d'une construction naturelle et en partant d'opérations partout définies on peut réaliser le transfert de certaines structures algébriques, les opérations correspondantes obtenues n'étant pas toujours partout définies, sans pourtant que les propriétés algébriques soient perdues; il s'agit de structures algébriques satisfaisant à des lois polynômiales — au sens de l'algèbre universelle — d'où le titre de la Note. Pour éviter l'emploi de la lourde machinerie logique, nous ne formulerons le résultat que pour certains cas particuliers, qui nous semblent typiques; de même nous évitons les opérations nullaires qui sont dans ce cas, comme presque toujours, une source de difficultés.

2. Soit $f: A \to B$, $\varphi: B_1 \to A$, $B_1 \subset B$, deux applications données; si $(f\varphi)(y) = y$ pour tout $y \in B_1$, φ sera appelée une inverse droite de f; on observe que φf peut même ne pas être toujours définie. On a la

Proposition I. *Soit B_1 tel que $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ pour tout $y \in B_1$. Si l'on choisit dans chaque classe $f^{-1}(y)$ un certain élément x et si l'on pose $\varphi(y) = x$, on obtient une inverse droite et réciproquement.*

La démonstration est évidente.

3. Soit B un ensemble donné, $g(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ une opération n-aire partout définie sur B et soit $f: A \to B$ et φ une inverse droite de f. On dira que $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est l'opération transférée de g sur A si l'on pose par définition

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi[g(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n))]$$

lorsque le second membre est défini; si le second membre n'existe pas, G reste indéfinie pour le point $(x_1, \ldots, x_n)$ en question.

On a alors la proposition suivante (théorème de transfert), étant entendu que la vérification de l'équation fonctionnelle après le transfert est conditionnée par l'existence de tous les termes qui y figurent.

Proposition II. *Soient* $f: A \to B$, $\varphi: B_1 \to A$, φ *inverse à droite de* f. *Désignons par des minuscules les opérations sur* B *et par les majuscules correspondantes leurs transférées sur* A, *les opérations sur* B *étant partout définies. Alors les solutions des équations* (1)...(6) *sont transférées sur des solutions des mêmes équations* :

(1) $$g(x,y) = g(y,x), \quad G(x,y) = G(y,x), \text{ (commutativité)},$$

(2) $$g(x,g(y,z)) = g(g(x,y),z), \quad G(x,G(y,z)) = G(G(x,y),z), \text{ (associativité)},$$

(3) $$g(x,g(x,x)) = g(g(x,x),x), \quad G(x,G(x,x)) = G(G(x,x),x),$$

(4) $$g^2(x) = g(x), \quad G^2(x) = G(x), \quad (g^2 = g(g)),$$

(5) $$g(x,h(y,z)) = h(g(x,y),g(x,z)), \quad G(x,H(y,z)) = H(G(x,x),G(x,z)),$$
(distributivité),

(6) $$g(h(x,g(x)) = k(x,g(x)), \quad G(H(x,G(x)) = K(x,G(x)),$$
(l'équation des courbes invariantes, [1, p, 28]).

La démonstration se réduit à une vérification patiente. On a, par exemple, pour l'équation (3) :

$$G(x,G(x,x)) = \varphi[g(f(x),f\varphi g(f),f(x))] = \varphi g(f(x),g(f(x),f(x))$$

et de même

$G(G(x,x),x)) = \varphi[g(g(f(x),f(x)),f(x))]$, ce qui démontre le résultat.

Pour (4) on a

$$G(x) = (\varphi gf)(x), \quad G(G(x)) = (\varphi gf)(\varphi gf(x)) = \varphi g^2 f(x) = \varphi gf(x) = G(x).$$

Des calculs similaires démontrent les autres cas.

4. Donnons quelques exemples.

(a) Soit $A = \{a,b,c\}$, $B = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$, B étant organisée comme groupe cyclique

$-$	α	β	γ	δ
α	α	β	γ	δ
β	β	γ	δ	α
γ	γ	δ	α	β
δ	δ	α	β	γ

La f est l'application $\begin{pmatrix} a & b & c \\ \beta & \gamma & \delta \end{pmatrix}$, $\varphi\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ . & a & b & c \end{pmatrix}$ est une inverse droite et on a la loi de composition sur A par les définitions

$$aa = \varphi(f(a)f(a)) = \varphi(\beta\beta) = \varphi(\gamma) = b,$$
$$ab = \varphi(f(a)f(b)) = \varphi(\beta\gamma) = \varphi(\delta) = c,$$
$$ac = \varphi(f(a)f(c)) = \varphi(\beta\delta) = \varphi(\alpha),$$

qui n'est pas définie, donc ac reste indéfini. Sous forme de tableau

	a	b	c
a	b	c	.
b	c	.	a
c	.	a	b

le point signifiant l'absence de définition. On a par exemple $a(bc) = aa = b$, $(ab)c = cc = b$, donc l'associativité est gardée.

Cet exemple offre ceci de particulier qu'on ne peut pas remplacer les points par des lettres, donc compléter la définition de l'opération sur A sans perdre l'associativité. En effet si $ac = a$, on aurait $a(ab) = aa = b$, $(aa)c = bc = a$; $ac = b$ donnerait $a(ac) = ab = c$, $(aa)c = a$; enfin $ac = c$ donnerait $a(ac) = ac = c$, $(ac)c = a$.

(b) Même situation, mais

$$f\begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \alpha & \gamma \end{pmatrix}, \quad \varphi\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ a & . & c & . \end{pmatrix};$$

$$aa = \varphi(f(a)f(a)) = \varphi(\alpha\alpha) = \varphi(\alpha) = a,$$
$$ab = \varphi(f(a)f(b)) = \varphi(\alpha\alpha) = \varphi(\alpha) = a,$$
$$ac = \varphi(f(a)f(c)) = \varphi(\alpha\gamma) = \varphi(\alpha) = c,$$

$$ba = \varphi(f(b)f(a)) = \varphi(\alpha\alpha) = a, \quad bb = \varphi(f(b)f(b)) = \varphi(\alpha\alpha) = a,$$
$$bc = \varphi(f(b)f(c)) = \varphi(\alpha\gamma) = \varphi(\gamma) = c, \quad ca = ac = c, \quad cb = bc = c,$$
$$cc = \varphi(f(c)f(c)) = \varphi(\gamma\gamma) = \varphi(\alpha) = a,$$

qui est partout définie, donc certainement pas isomorphe, même partiellement, avec la précédente.

(c) $A = (a, b, c, d, e)$, $B = (\alpha, \beta, \gamma)$, $f\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ \alpha & \alpha & \beta & \beta & \gamma \end{pmatrix}$, $\varphi\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a & c & e \end{pmatrix}$,

B étant le groupe (noté additivement) donné par

	α	β	γ
α	α	β	γ
β	β	γ	α
γ	γ	α	β

L'opération $+$ sur A sera partout définie et donnée par

	a	b	c	d	e
a	a	a	c	c	e
b	a	a	c	c	e
c	c	c	e	e	a
d	c	c	e	e	a
e	e	e	a	a	c

On voit que (a,c,e) est une sous-algébre isomorphe à B. Comme $f(x+y)=f(x)+f(y)$, la construction revient à une espèce de construction inverse d'un homomorphisme.

5. Il serait facile de multiplier les exemples. Il est plus intéressant de remarquer ce qui suit:

1° Les exemples (a) et (b) ont montré que des inverses différentes donnent des résultats très différents, en partant de la même structure. Le transfert donne donc une posibilité de détermination de solutions non isomorphes, tout en partant d'une seule solution, qui peut être banale ou facile à obtenir.

2° L'exemple (a) conduit tout naturellement au probléme suivant:

Quelles sont les conditions que doit verifier une solution pas partout définie (par ex. de l'équation de l'associativité) pour qu'elle puisse être complétée et si cela est possible quand la complétée est unique?

Il serait par exemple très intéressant de savoir si une catégorie considérée comme semi-groupe pas partout défini, pourrait être complétée et ce qu'on pourrait dire de la nouvelle formation obtenue; de tels cas sont évidemment facilement réalisables, mais leur interprétation concrète posera certainement des problèmes difficiles.

Institut Polytechnique de Jassy,
Chaire de Mathématiques I

BIBLIOGRAFIE

1. Kuczma M., *A Survey of the Theory of Functional Equations.* Univ. u Beogradu, Publikacije Elektrotehničkogo Fakulteta, 1964, *130.*

O TEOREMĂ DE TRANSFER PENTRU UNELE ECUAŢII FUNCŢIONALE

(Rezumat)

Cu ajutorul inversei drepte a unei aplicaţii se demonstrează o teoremă de transfer de soluţii pentru unele ecuaţii funcţionale şi se dau cîteva aplicaţii.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

C. D. 512.8

EXISTENCE THEOREMS FOR GENERALISED FREE PRODUCTS OF GROUPS (I)[1])

BY

ABDUL MAJEED[2])

1. Introduction

While every amalgam of two groups, by Schreier's theorem, is embeddable in a group F — the generalised free product of the amalgam — a corresponding statement for an amalgam of more than two groups does not hold in general. Even for an amalgam of three groups, not much is known as regards its embeddability, only some sufficient conditions for the existence of the generalised free product of such amalgams are given in [3]. We establish here two necessary and sufficient criteria for the embeddability of such amalgams.

The existence of the generalised free product of an amalgam of three dihedral groups represented in a special form and that of an „amalgam of type S" is also proved.

The latter result generalises theorem 9.0 of [3].

2. Notations and some known Facts

Most of the notations used in this paper are taken from [8]. Following are the exceptions.

An amalgam of two groups with an amalgamated subgroup H shall be denoted by $\mathbf{A} = \mathrm{am}(A, B; H)$. The free and direct products of $\mathbf{A}$ are

---

[1]) This paper forms a part of a thesis submitted to the Australian National University for the degree of Master of Arts, 1966.

[2]) The author is indebted to Professor B. H. Neumann, F. A. A, F. R. S. and Professor Hanna Neumann, for the general supervision and constant encouragement. Thanks are due also to the Australian National University for a research scholarship and to the University of the Panjab, Lahore, for study leave.

represented by $\{A^*B; H\}$ and $\{A \times B; H\}$ respectively. $P(\mathbf{A}; S, T)$ shall denote the permutational product of $\mathbf{A}$ using S and T as transversals (cf. [1]).

We mention here some of the known results on embeddings to make the paper reasonably self-contained. Let G_α be a family of groups with the subgroups $H_{\alpha\beta} = G_\alpha \cap G_\beta$ amalgamated α, β, belonging to some index set I. Denote by H_α the group generated by $H_{\alpha\beta}$,($\alpha, \beta \in I$, α fixed). Then the groups H_α also form an amalgam called — the reduced amalgam of G_α — with the same amalgamations. A necessary and sufficient condition for the existence of the generalised free product of G_α, $\alpha \in I$, is that the generalised free product of H_α exists (cf. [3]). In what follows, therefore, we shall discuss the reduced amalgams only as regards their embeddability.

We shall also need the following concept: let G be the generalised free product of the groups G_α with amalgamated $H_{\alpha\beta}$. Following Hanna Neumann, we call a subgroup N of G „tidy" if it has the following two properties: i) $G_\alpha \cap N = 1$ for all α; ii) N does not contain any element of the form $g_\alpha g_\beta, g_\alpha \neq 1 \in G_\alpha$, $g_\beta \neq 1 \in G_\beta$.

Thus if N is a normal subgroup of G that is tidy with respect to G then the factor group G/N contains groups G_α', G_β' isomorphic to G_α, G_β respectively with their intersections in G/N isomorphic to $H_{\alpha\beta}$. G/N, therefore, also embeds the amalgam.

The following lemma used subsequently in the proof of theorem 3.1, is from the theory of permutational products of groups (cf. [1], [9]):

Lemma P^*. *Let the groups A and B be the extensions of a normal subgroup S of A by H and of a normal subgroups T of B by H respectively. Then the permutational product $P(A; S, T)$ of the amalgam $\mathbf{A} = \mathrm{am}(A, B; H)$ belongs to the least „variety"* [3]) *containing both A and B and in P, $\rho(S)$ and $\rho(T)$ commute element-wise.*

The easy proof of this lemma is omitted.

3. Results

With these preliminaries in mind, we shall examine the following problem:

Given a reduced amalgam of groups G_α with amalgamated subgroups $H_{\alpha\beta}$, ($\alpha, \beta \in I$), under what conditions does their generalised free product exist?

This problem is considered here for some special cases only.

We begin with the consideration of an amalgam of three groups. Some of the examples of non-embeddable amalgams mentioned in [2] and [3] consist of only three groups which is the least possible number, since by Schreier's theorem [7], an amalgam of two groups is always embeddable. Even in this case no necessary and sufficient conditions are known, only some sufficient ones, (see [3]). We prove here a different sufficient con-

[3]) A variety is a class of groups closed under the operations of taking subgroups, epimorphic images and cartesian products.

dition. Since we need take only the reduced amalgam, we write these groups as:

$$A = \text{gp}\{K, L\},\ B = \text{gp}\{K, M\},\ C = \text{gp}\{L, M\}.$$

The intersections $K \cap L$, $L \cap M$, $M \cap K$ are assumed to be isomorphic in view of the theorem 3.0 [3]. We now prove:

Theorem 3.1. *Let $A = K \times L$ be the direct product of K and L and $B = \text{gp}\{K, M\}$, $C = \text{gp}\{L, M\}$, where K and L are normal subgroups of B and C respectively. Then the generalised free product of A, B, C exists.*

Proof. We have only to show that there is a group embedding the amalgam of A, B, C. Since K is normal in B, L is normal in C; by Lemma P^*, K and L serve as transversals of M in these groups and in the permutational product $P(A; K, L)$ of the amalgam $\mathbf{A} = \text{am}(B, C; M)$, $\rho(K)$ and $\rho(L)$ centralise each other and so generate a group isomorphic to A. P, therefore, embeds A also and hence the amalgam. Thus the generalised free product of A, B, C exists.

However, we can show a little more, namely that the generalised free product F of A, B, C is isomorphic to $P(A; K, L)$. Since F is freely generated by K, L, M and M normalises both K and L, the group generated by these, that is, the group A is normal in F. The factor group F/A must then be isomorphic to M. Thus F is an extension of A by M. Since P also is an extension of $\rho(A)$ by $\rho(M)$ and a homomorphic image of F of the same order as of F, it is isomorphic to F. As the permutational product of two finite groups is always finite, so is F and we have:

Corollary 3.1.1. *The generalised free product of any three finite groups satisfying the conditions in theorem* 3.1. *is finite.*

It may be mentioned here that the conclusions of theorem 3.1 still hold if A is taken as the generalised direct product of K and L amalgamating a central subgroup Z. In that case $K \cap M$, $L \cap M$ must also be Z (cf. [3]).

That it is not sufficient by itself that K and L are normalised by M in B and C is shown by the following

EXAMPLE 3.1.2

Take K and L as the elementary abelian groups of order 4 and M as the cyclic group of order 3. A, B, C are then taken as the splitting extensions of L by K, K by M and L by M respectively, so that

$$A = \text{gp}\{a, b, c, d; a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = (ab^2) = (cd^2) = 1,\ c^a = d,\ d^a = c,\ c^b = d,\ d^b = c\},$$

$$B = \text{gp}\{a, b, f; a^2 = b^2 = f^3 = (ab)^2 = 1,\ a^f = ab,\ b^f = a\},$$

$$C = \text{gp}\{c, d, f;\ c^2 = d^2 = f^3 = (cd)^2 = 1,\ c^f = cd,\ d^f = c\}.$$

If

$$F = \text{gp}\{a, b, c, d, f;\ R_1 \cup R_2 \cup R_3\},$$

where R_1, R_2 and R_3 are sets of defining relations of A, B and C respectively and the amalgam embeddable, then this group, being the group freely generated by it must embed it. But in $Fa \subset ad = 1$, hence, using the fact that $(cd)^{ab} = cd$, we have,

$$1 = (acad)^f = a^f c^f a^f d^f = ab.cd.ab.c = d.$$

From $d^f = c$ with $d = 1$ follows that $c = 1$ so that in F the group C has collapsed. Consequently F does not embed the amalgam, that is the generalised free product of this amalgam does not exist.

Similarly if, instead of K and L being normal in B and C respectively, M is normal in both B and C while A remains the direct product of K and L then, in general, the generalised free product of three such groups does not exist, (example 11.1 of [2], suffices). However if we add further the requirement that the automorphisms induced by K and L in M respectively are permutable, we obtain a necessary and sufficient criterion for the existence of the generalised free product of an amalgam of this type.

Received the 15 XI 1967

University of the Panjab,
Lahore, West Pakistan,

REFERENCES

1. Neumann B. H., *Permutational Products of Groups.* J. Austral. Math. Soc., 1960, **1**, pp. 299–310.
2. — *An Essay on Free Products of Groups with Amalgamations.* Phil. Trans. Roy. Soc. London, 1954, **246 A**, pp. 503—554.
3. Neumann H., *Generalised Free Products of Groups with Amalgamated Subgroups. I.* Am. J. Math., 1948, **70**, pp. 590—625.
4. Головин О. Н., Мат. сб., 1950, **27 (69)**, стр. 427—454.
5. Coxeter H. S. M., *The Abstract Group* $G^{m,n,p}$. Trans. Amer. Math. Soc., 1939, **45**, pp. 73—150.
6. Coxeter H. S. M., Moser J., *Generators and Relations for Discrete Groups.* Springer Verlag, 1957.
7. Schreier O., *Die Untergruppen der freien Grouppen.* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 1927, **5**, S. 161—183.
8. Kurosh A. G., *The Theory of Groups.* 2nd ed., Chelsea Publ. Co. N. Y., 1955, (transl. from Russian).
9. Majeed A., *Permutational Products of Groups and Embedding Theory of Groups Amalgams.* M. A. Thesis presented to the Australian National University, 1966.

TEOREME DE EXISTENȚĂ PENTRU PRODUSE LIBERE GENERALIZATE DE GRUPURI (I)

(Rezumat)

Autorul, luînd ca punct de plecare o serie de rezultate fundamentale datorite lui B. H. Neumann [1], [2] şi H. Neumann [3], referitoare la produse libere generalizate de grupuri, stabileşte unele teoreme de existenţă.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

C. D. 517.54

SUR LA DÉTERMINATION DES GROUPES D'HOMOLOGIE POUR LA SPHÈRE, L'ESPACE PROJECTIF RÉEL ET LE THORE, CONSIDÉRÉS COMME C. W.-COMPLEXES

PAR

I. POP

Communication présentée à la session scientifique de l'Institut Polytechnique de Jassy, 28—30 Septembre 1967

1. Introduction

Dans cette Note nous allons étudier le procédé de calcul de groupes d'homologie des espaces topologiques indiqués dans le titre. Dans ce but nous utiliserons les deux résultats ci-dessous, établis dans [1]:

a) Les groupes d'homologie relative $H_p(X^p, X^{p-1})$ et les homomorphismes $\delta: H_p(X^p, X^{p-1}) \to H_{p-1}(X^{p-1}, X^{p-2})$ constituent un complexe de chaînes dont les groupes d'homologie sont isomorphes aux groupes d'homologie du C. W.-complexe X.

b) Les groupes d'homologie relative $H_q(X^p, X^{p-1})$ sont triviaux pour $q \neq p$ et le groupe $H_p(X^p, X^{p-1})$ est isomorphe au groupe abélien libre généré par l'ensemble des cellules de dimension p.

X^p représente le squelette de dimension p du C. W.-complexe X et δ signifie la composition d'homomorphisme d'inclusion $j: H_{p-1}(X^{p-1}) \to$ $\to H_{p-1}(X^{p-1}, X^{p-2})$ avec l'homomorphisme de frontière $\partial: H_p(X^p, X^{p-1}) \to$ $\to H_{p-1}(X^{p-1})$.

2. Les groupes d'homologie de la sphère S^n

On sait que la sphère S^n est un C. W.-complexe à deux cellules σ_n de dimension n et respectivement σ^0 de dimension 0 [1].

Alors $X^0 = \sigma^0, X^1 = \sigma^0, \ldots, X^{n-1} = \sigma^0, X^n = \sigma^0 \cup \sigma^n$, $X^k = \sigma^n \cup \sigma^0$ pour $k > n$.

En considérant le complexe de chaînes

$$\dots \to H_{q+1}(X^{q+1}, X^q) \xrightarrow{\delta^{q+1}} H_q(X^q, X^{q-1}) \xrightarrow{\delta^q} H_{q-1}(X^{q-1}, X^{q-2}) \to$$

$$\dots \to H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \xrightarrow{\delta^{n+1}} H_n(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{\delta^n} H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-1}) \to$$

$$\dots \to H_2(X^2, X^1) \xrightarrow{\delta^2} H_1(X^1, X^0) \xrightarrow{\delta^1} H_0(X^0, 0) \to 0$$

et en utilisant les résultats a) et b) on obtient le

Théorème 1. *Les groupes d'homologie de la sphère sont*

$$H_q(S^n) = \frac{\operatorname{Ker} \delta^q}{\operatorname{Im} \delta^{q+1}} = 0 \text{ pour } q \neq 0, n,$$

$$H_n(S^n) = \frac{\operatorname{Ker} \delta^n}{\operatorname{Im} \delta^{n+1}} = Z/0 = Z, \qquad H_0(S^n) = \frac{\operatorname{Ker} \delta^0}{\operatorname{Im} \delta^{-1}} = Z/0 = Z.$$

3. Les groupes d'homologie de l'espace projectif réel P^n

Compte tenu que l'espace projéctif réel à n dimensions est un C. W.-complexe ayant $n+1$ cellules [1]:

$$P^n = \sigma^n \cup \sigma^{n-1} \cup \dots \cup \sigma^1 \cup \sigma^0, \quad \sigma^k = P^k - P^{k-1},$$

nous faisons la remarque, essentielle pour notre but, que le squelette de dimension $p \leqslant n$ est l'espace projectif P^p, comme on peut facilement le constater.

Selon b) en résulte:

$$H_q(P^p, P^{p-1}) = 0 \quad \text{si} \quad q \neq p \quad \text{et} \quad H_p(P^p, P^{p-1}) = \begin{cases} 0 \text{ si } p > n, \\ Z \text{ si } p \leqslant n. \end{cases}$$

Si l'on construit le complexe de chaînes

$$\dots H_{q+1}(P^{q+1}, P^q) \xrightarrow{\delta^{q+1}} H_q(P^q, P^{q-1}) \xrightarrow{\delta^q} H_{q-1}(P^{q-1}, P^{q-2}) \to \dots$$

en vertu de a) il en résulte que $H_q(P^n) = 0$ pour $q > n$.

Pour calculer les groupes $H_q(P^n)$ avec $q \leqslant n$ nous allons utiliser une double induction selon q et n.

Compte tenu que P^1 est homéomorphe à S^1 il en résulte

$$H_0(P^1) \simeq H_1(P^1) \simeq Z \text{ et } H_q(P^1) = 0 \text{ si } q > 1.$$

Puis, en considérant P^2 comme un polièdre simpliciel on obtient $H_1(P^2) \simeq Z_2$ (le groupe cyclique d'ordre deux) et $H_2(P^2) = 0$.

Nous allons maintenant démontrer le

Théorème 2. *Les groupes d'homologie pour l'espace projectif réel P^n sont:*

(1) $H_q(P^n) = 0$ *si* $q > n$, (2) $H_q(P^n) = Z_2$ *si* $q = 2p-1 \leqslant n-1$,

(3) $H_q(P^n) = 0$ *si* $q = 2p \leqslant n-1$, (4) $H_n(P^n) = 0$ *si* $n = 2p$,

(5) $$H_n(P^n) = Z \text{ si } n = 2p - 1.$$

Remarquons que (1) a été déjà démontré.

En supposant que le théorème ait été démontré pour P^{n-1} considérons la suite d'homologie du couple des espaces topologiques (P^{p+1}, P^p):

$$\dots \to H_{q+1}(P^p) \to H_{q+1}(P^{p+1}) \to H_{q+1}(P^{p+1}, P^p) \to H_q(P^p) \to H_q(P^{p+1}) \to$$

$$\to H_q(P^{p+1}, P^p) \to \dots$$

Si $p > q$ il en résulte $H_{q+1}(P^{p+1}, P^p) = 0$ et $H_q(P^{p+1}, P^p) = 0$ et donc

$$H_q(P^p) \simeq H_q(P^{p+1}).$$

Soit $q = 2p - 1 < n - 1$, alors $H_{2p-1}(P^{n-1}) \simeq H_{2p-1}(P^n)$ d'où si $2p - 1 < n - 1$, il s'ensuit que $H_{2p-1}(P^n) \simeq Z_2$.

Mais parce que (2) a été considéré comme étant démontré pour $q < n - 1$ il en résulte:

$$H_{2p-1}(P^{2p}) \simeq H_{2p-1}(P^{2p+1}), \quad H_{2p-1}(P^{2p}) \simeq Z_2,$$

ce qui démontre effectivement le résultat (2).

Soit maintenant $q = 2p < n - 1$. Alors $H_{2p}(P^{n-1}) \simeq H_{2p}(P^n)$, donc $H_{2p}(P^n) = 0$ et par conséquent $H_{2p}(P^{2p+1}) \simeq H_{2p}(P^{2p+2})$; compte tenu que $2p < 2p - 1$, il s'ensuit que $H_{2p}(P^{2p+2}) = 0$, donc $H_{2p}(P^{2p+1}) = 0$ ce qui démontre le cas (3).

Soit maintenant la suite exacte d'homologie du couple (P^{2p}, P^{2p-1})

$$0 \to H_{2p}(P^{2p}) \xrightarrow{\alpha} Z \xrightarrow{\beta} H_{2p-1}(P^{2p-1}) \xrightarrow{\gamma} H_{2p-1}(P^{2p}) \to 0.$$

Compte tenu de l'exactitude de la suite il s'ensuit que $H_{2p}(P^{2p})$ est isomorphe à un sous-groupe du Z, donc $H_{2p}(P^{2p})$ est trivial ou isomorphe à Z.

Supposons que $H_{2p}(P^{2p}) \simeq Z$. Alors $\operatorname{Im}\alpha$ est un sous-groupe du Z isomorphe a Z, donc $\operatorname{Ker}\beta \neq 0$; mais, par hypothèse, $H_{2p-1}(P^{2p-1})$ étant isomorphe à Z, ne contient par d'éléments périodiques et donc $\operatorname{Ker}\beta = Z$ et $\operatorname{Im}\beta = 0$ et par conséquent $\operatorname{Ker}\gamma = 0$ d'où il en résulte que $H_{2p-1}(P^{2p-1}) \simeq$ $\simeq H_{2p-1}(P^{2p})$ ce qui n'est pas possible car $H_{2p-1}(P^{2p-1}) \simeq Z$ et $H_{2p-1}(P^{2p}) \simeq Z_2$ et par conséquent $H_{2p}(P^{2p}) = 0$, en résultant (4).

La démonstration du cas (5) résulte de la suite exacte d'homologie du couple des espaces topologiques (P^{2p-1}, P^{2p}):

$$0 \to H_{2p}(P^{2p-1}) \to Z \to H_{2p}(P^{2p}) \to \dots;$$

compte tenu que $H_{2p}(P^{2p}) = 0$ il en résulte $H_{2p}(P^{2p-1}) \simeq Z$.

4. Les groupes d'homologie du thore D_n

Dans [1] on démontre que le thore D_n est un C. W.-complexe à $2n + 2$ cellules: $D_n = \sigma^2 \cup \sigma_1^1 \cup \sigma_2^1 \cup \dots \cup \sigma_{2n}^1 \cup \sigma^0$, où σ^2 est une cellule de dimension deux, σ_i^1 sont cellules de dimension un, $(i = 1, \dots, 2n)$, et σ^0 est une cellule de dimension zéro.

Il en résulte

$X^p = \sigma^2 \cup \sigma_1^1 \cup \ldots \cup \sigma_{2n}^1 \cup \sigma^0$ si $p \geqslant 2$, $X^1 = \sigma_1^1 \cup \ldots \cup \sigma_{2n}^1 \cup \sigma^0$ et $X^0 = \sigma^0$,

d'où en utilisant b) nous avons

$$H_q(X^p, X^{p-1}) = 0 \text{ pour } q \neq p, \quad H_p(X^p, X^{p-1}) = \begin{cases} 0 & \text{si } p > 2, \\ Z & \text{si } p = 2, \\ Z^{2n} & \text{si } p = 1 \end{cases}$$

(z^{2n} est le produit direct de $2n$ groupes isomorphes à Z).

En considérant le complexe de chaînes

$$\ldots \to H_{q+1}(X^{q+1}, X^q) \xrightarrow{\delta^{q+1}} H_q(X^q, X^{q-1}) \xrightarrow{\delta^q} H_{q-1}(X^{q-1}, X^{q-2}) \to \ldots$$

il en résulte que, pour $q > 2$, $H_q(D_n) = 0$.

Soit maintenant le complexe de chaînes

$$\ldots \to H_3(X^3, X^2) \xrightarrow{\delta^3} H_2(X^2, X^1) \xrightarrow{\delta^2} H_1(X^1, X^0) \xrightarrow{\delta^1} H_0(X^0, 0) \xrightarrow{\delta^0} 0.$$

Parce que $\delta^2 = j\partial$ et j est un monomorphisme, il en résulte que $\operatorname{Ker} \delta^2 = \operatorname{Ker} \partial = \operatorname{Ker}[H_2(X^2, X^1) \to H_1(X^1)]$ et alors on peut facilement démontrer que $\operatorname{Ker} \partial \simeq Z$ donc $\operatorname{Ker} \delta^2 \simeq Z$.

De la même manière on peut démontrer que

$$\operatorname{Ker} \delta^1 = \operatorname{Ker}[H_1(X^1, X^0) \to H_0(X^0)] \simeq Z^{2n}.$$

Mais, si $\operatorname{Ker} \delta^2 = Z$ il en résulte $\operatorname{Im} \delta^2 = 0$ et si $\operatorname{Ker} \delta^1 \simeq Z^{2n}$ alors $\operatorname{Im} \delta^1 = 0$ ce qui démontre le

Théoreme 3. *Les groupes d'homologie du thore D_n sont*

$$H_2(D_n) = \operatorname{Ker} \delta^2 / \operatorname{Im} \delta^3 = \operatorname{Ker} \delta^2 \simeq Z, \quad H_1(D_n) = \operatorname{Ker} \delta^1 / \operatorname{Im} \delta^2 = \operatorname{Ker} \delta^1 \simeq Z^{2n},$$

$$H_0(D_n) = \operatorname{Ker} \delta^0 / \operatorname{Im} \delta^1 \simeq Z, \quad H_q(D_n) = 0 \text{ si } q > 2.$$

Institut Polytehnique de Jassy,
Chaire de Mathématiques II

BIBLIOGRAPHIE

1. Teleman C., *Elemente de topologie şi varietăţi diferenţiabile.* EDP, Buc., 1964.

ASUPRA DETERMINĂRII GRUPURILOR DE OMOLOGIE ALE SFEREI, SPAŢIULUI PROIECTIV REAL ŞI TORULUI, CONSIDERATE CA C. W.-COMPLEXE

(Rezumat)

Se prezintă modul de determinare a grupurilor de omologie ale sferei, spaţiului proiectiv real şi torului, considerate ca C. W.-complexe.

S-au utilizat rezultatele a) şi b) din [1] şi o descompunere celulară a celor trei spaţii topologice prezentată de asemenea în [1].

Pentru spaţiul proiectiv P^n s-a folosit o dublă inducţie, după dimensiunea spaţiului şi după dimensiunea grupului de omologie.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

C. D. 519.4

SUR UNE CLASSE D'ALGÈBRES D'ORDRE $8n$

PAR

I. ENESCU

Communication présentée à la session scientifique de l'Institut Polytechnique de Jassy, 28–30 Septembre 1967

Dans cette Note nous allons construire une classe d'algèbres d'ordre $8n$, à scalaires réels, qui constitue une extension du type d'algèbre polynômiale génerée par un polynôme de la forme $\varphi(\lambda) = (\lambda^2 + 1)^n$.

1. Considérons l'ensemble des couples ordonnées, (a, b), des quaternions réels, où $a = a_1 + ia_2 + ja_3 + ka_4$ et $b = b_1 + ib_2 + jb_3 + kb_4$, a_s, b_s, $(s = 1,..,4)$, étant nombres réels arbitraires et $1, i, j, k$ constituant une base pour l'algèbre Q des quaternions réels, dont la table de multiplication est

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	−1	k	−j
j	j	−k	−1	i
k	k	j	−i	−1

Définissant la somme des deux couples par $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ et la multiplication à un scalaire réel par $\lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b)$, l'ensemble considéré devient un espace linéaire de dimension 8, soit-il V_8, sur le corps réel.

En effet, le couple (a, b) a la forme:

$$(a, b) = (a_1 + ia_2 + ja_3 + ka_4,\ b_1 + ib_2 + jb_3 + kb_4)$$

et la correspondance $(a, b) \rightleftarrows (a_1, a_2, a_3, a_4; b_1, b_2, b_3, b_4)$ est biunivoque et satisfait aux conditions d'isomorphisme quant à l'addition des couples et la multiplication par scalaires réels.

Alors une base pour V_8 est formée par :

$$u_1 = (1, 0, ..., 0), \quad u_2 = (0, 1, 0, ..., 0), ..., \quad u_8 = (0, ..., 0, 1)$$

et elle correspond évidemment aux couples des quaternions

$$u_1 \to (1, 0), \quad u_2 \to (\mathrm{i}, 0), \quad u_3 \to (\mathrm{j}, 0), \quad u_4 \to (\mathrm{k}, 0),$$
$$u_5 \to (0, 1), \quad u_6 \to (0, \mathrm{i}), \quad u_7 \to (0, \mathrm{j}), \quad u_8 \to (0, \mathrm{k}).$$

2. Nous définissons le produit des couples de quaternions par

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc). \tag{1}$$

On peut vérifier pour la multiplication (1), toutes les axiomes d'une algèbre associative à unité principale ($u_1 = (1, 0)$), d'ordre 8 à scalaires réels.

En utilisant la définition (1), les produits $u_l u_s$, $(l, s = 1, ..., 8)$, fournissent la table de multiplication

(2)

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
u_1	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
u_2	u_2	$-u_1$	u_4	$-u_3$	u_6	$-u_5$	u_8	$-u_7$
u_3	u_3	$-u_4$	$-u_1$	u_2	u_7	$-u_8$	$-u_5$	u_6
u_4	u_4	u_3	$-u_2$	$-u_1$	u_8	u_7	$-u_6$	$-u_5$
u_5	u_5	u_6	u_7	u_8	$-u_1$	$-u_2$	$-u_3$	$-u_4$
u_6	u_6	$-u_5$	u_8	$-u_7$	$-u_2$	u_1	$-u_4$	u_3
u_7	u_7	$-u_8$	$-u_5$	u_6	$-u_3$	u_4	u_1	$-u_2$
u_8	u_8	u_7	$-u_6$	$-u_5$	$-u_4$	$-u_3$	u_2	u_1

Soit maintenant le produit direct entre le corps complexe $\mathcal{C}$, considéré comme algèbre polynômiale générée par le polynôme $\lambda^2 + 1$, et l'algèbre Q des quaternions réels. En notant par ε_h, $(h = 1, ..., 8)$, la base du produit direct, formée avec $1e_1$, $1e_2$, ie_1, ie_2, je_1, je_2, ke_1, ke_2, (e_1, e_2 étant une base pour $\mathcal{C}$ ainsi que $e_1 e_2 = e_2 e_1$ et $e_2^2 = -e_1$), tous calculs effectués on constate que les produits $\varepsilon_h \varepsilon_q$, $(h, q = 1, ..., 8)$, s'expriment par une table identique à (2) ce qui démontre que l'algébre définie par (1) est le produit direct $\mathcal{C} \times Q$.

3. Nous étudierons la structure d'algèbre (2) et en ce but chercherons les idempotents orthogonaux.

On constate que les éléments $w_1 = \frac{1}{2}(u_1 + u_6)$, $w_7 = \frac{1}{2}(u_1 - u_6)$ satisfont à la propriété : $w_1 w_7 = w_7 w_1 = 0$, $w_1^2 = w_1$, $w_7^2 = w_7$, $w_1 + w_7 = u_1$. L'existence de ces deux idempotents orthogonaux, suggère le changement de base :

$$(3)\quad \begin{cases} w_1 = \frac{1}{2}(u_1 + u_6), & w_2 = \frac{1}{2}(u_2 - u_5), & w_3 = \frac{1}{2}(u_3 + u_8), & w_4 = \frac{1}{2}(u_4 - u_7), \\ w_5 = \frac{1}{2}(u_3 - u_8), & w_6 = \frac{1}{2}(u_4 + u_7), & w_7 = \frac{1}{2}(u_1 - u_6), & w_8 = \frac{1}{2}(u_2 + u_5), \end{cases}$$

qui provient de la multiplication de w_1 et w_7 par i, j, k respectivement (on considère i, j, k comme couples ordonnés de quaternions avec une composante nulle).

Dans la base $w_q, (q = 1, \ldots, 8)$, la table de multiplication est

(2′)

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8
w_1	w_1	w_2	w_3	w_4	0	0	0	0
w_2	w_2	$-w_1$	w_4	$-w_3$	0	0	0	0
w_3	0	0	0	0	$-w_1$	w_2	w_3	$-w_4$
w_4	0	0	0	0	$-w_2$	$-w_1$	w_4	w_3
w_5	w_5	$-w_6$	$-w_7$	w_8	0	0	0	0
w_6	w_6	w_5	$-w_8$	$-w_7$	0	0	0	0
w_7	0	0	0	0	w_5	w_6	w_7	w_8
w_8	0	0	0	0	w_6	$-w_5$	w_8	$-w_7$

La table (2′) montre que les éléments $w_1, -w_3, w_5, w_7$ forment une sous-algèbre d'ordre 4, donnée par la table

(4)

	w_1	$-w_3$	w_5	w_7
w_1	w_1	$-w_3$	0	0
$-w_3$	0	0	w_1	$-w_3$
w_5	w_5	w_7	0	0
w_7	0	0	w_5	w_7

En posant

$$(5)\qquad w_1 = e_{11}, \quad -w_3 = e_{12}, \quad w_5 = e_{21}, \quad w_7 = e_{22},$$

la table (4) peut être écrite sous la forme

$$(6)\qquad e_{pq}\, e_{rs} = \begin{cases} e_{ps} & \text{si} \quad q = r, \\ 0 & \text{si} \quad q \neq r, \end{cases} \qquad (p, q, r, s = 1, 2),$$

ce qui démontre le

Lemme 1. *L'algèbre* (2) *contient comme sous-algèbre l'algèbre complète de matrices d'ordre* 4.

Soit maintenant l'ensemble des éléments d'algèbre (2) qui ont la forme $e_{11}\, a e_{11}$, où a est un élément quelconque de l'algèbre; par conséquent les scalaires α_i de l'expression $a = \sum_1^8 \alpha_i\, w_i$, sont des nombres réels arbitraires.

Nous avons :

$$e_{11}a = w_1(\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_8 w_8) = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3 + \alpha_4 w_4 \text{ et}$$

$$(e_{11}a)\,e_{11} = (\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_4 w_4)\,w_1 = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 .$$

Mais w_1 et w_2 forment une base pour le corps complexe contenu dans (2) et α_1 et α_2 sont des scalaires réels arbitraires, ce qui démontre le

Lemme 2. *L'ensemble des éléments de la forme* $e_{11}ae_{11}$ avec *a arbitraire dans l'algèbre* (2), *forme le corps complexe contenu dans l'algèbre considérée.*

Nous attacherons à chaque élément $e_{11}ae_{11}$, l'élément $e_{11}ae_{11} + e_{21}ae_{12}$, où a est arbitraire dans (2). Cette correspondance est un isomorphisme, parce que : a) elle est biunivoque : en effet, à chaque élément $e_{11}ae_{11} + e_{21}ae_{12}$ correspond un élément unique du corps complexe, telle comme la démontre la relation $e_{11}(e_{11}ae_{11} + e_{21}ae_{12}) = e_{11}ae_{11}$, la réciproque étant évidente ; b) à la somme des deux éléments, $e_{11}ae_{11} + e_{11}be_{11}$, correspond

$$(e_{11}ae_{11} + e_{21}ae_{12}) + (e_{11}be_{11} + e_{21}be_{12}) = e_{11}(a+b)\,e_{11} + e_{21}(a+b)e_{12} ;$$

c) au produit $(e_{11}ae_{11})(e_{11}be_{11})$ correspond

$$(e_{11}ae_{11} + e_{21}ae_{12})(e_{11}be_{11} + e_{21}be_{12}) = (e_{11}ae_{11})(e_{11}be_{11}) + (e_{11}ae_{11})(e_{21}be_{12}) +$$

$$+ (e_{21}ae_{12})(e_{11}be_{11}) + (e_{21}ae_{12})(e_{21}be_{12}) = e_{11}ae_{11}e_{11}be_{11} + e_{11}ae_{11}e_{21}be_{12} +$$

$$+ e_{21}ae_{12}e_{11}be_{11} + e_{21}ae_{12}e_{21}be_{12} = e_{11}ae_{11}e_{11}be_{11} + e_{21}(e_{11}ae_{11}e_{11}be_{11})\,e_{12} ,$$

parce que, en utilisant les relations (6), on peut écrire

$$(e_{21}ae_{12})(e_{21}be_{12}) = (e_{21}e_{11})\,a\,(e_{11}e_{12})\,e_{21}be_{11}e_{12} = e_{21}(e_{11}ae_{11}e_{11}be_{11})\,e_{12} .$$

Nous avons ainsi démontré le

Lemme 3. *Dans l'algèbre d'ordre* 8, *donnée par la table* (2), *il existe un corps* $\mathcal{K}$ *isomorphe au corps complexe, formé par l'ensemble des éléments de la forme* $e_{11}ae_{11} + e_{21}ae_{12}$, *où a est un élément arbitraire de l'algèbre considérée.*

On peut facilement constater que tous les éléments du corps $\mathcal{K}$ sont permutables avec les éléments e_{pq}, $(p,q = 1,2)$:

$$(e_{11}ae_{11} + e_{21}ae_{12})\,e_{pq} = e_{p1}ae_{1q}, \quad e_{pq}(e_{11}ae_{11} + e_{21}ae_{12}) = e_{p1}ae_{1q}, \quad (p,q = 1,2).$$

Les résultats acquis permettent la construction du produit direct entre le corps $\mathcal{K}$ et l'algèbre complète de matrices d'ordre 4, soit elle $\mathcal{M}_4$, toutes les deux contenues dans l'algèbre (2). Nous prenons pour $\mathcal{K}$ une base formée par les éléments qui correspondent aux $w_1 = e_{11}$ *et* $w_2 = e_{11}w_2e_{11}$, à savoir :

$$v_1 = e_{11}w_1e_{11} + e_{21}w_1e_{12} = w_1w_1w_1 + w_5w_1(-w_3) = w_1 + w_7,$$

$$v_2 = e_{11}w_2e_{11} + e_{21}w_2e_{12} = w_1w_2w_1 + w_5w_2(-w_3) = w_2 - w_8.$$

En notant par $x_p, (p=1,\dots,8)$, une base de $\mathcal{K} \times \mathcal{M}_4$, nous avons:

$$x_1 = v_1 e_{11}, \quad x_2 = v_1 e_{12}, \quad x_3 = v_1 e_{21}, \quad x_4 = v_1 e_{22},$$

$$x_5 = v_2 e_{11}, \quad x_6 = v_2 e_{12}, \quad x_7 = v_2 e_{21}, \quad x_8 = v_2 e_{22}.$$

Exprimés dans la base w_p, les éléments x_p ont la forme

$$(7) \qquad \begin{cases} x_1 = w_1, & x_2 = -w_3, \quad x_3 = w_5, \quad x_4 = w_7, \\ x_5 = w_2 - w_8, & x_6 = -w_4, \quad x_7 = -w_6, \quad x_8 = -w_8. \end{cases}$$

Les éléments x_p constituent une base pour le produit direct $\mathcal{K} \times \mathcal{M}_4$ et, parce qu'ils peuvent être obtenus de la base w_p de l'algèbre (2), par la transformation (7), on voit que le produit $\mathcal{K} \times \mathcal{M}_4$ recouvre toute l'algèbre (2), en démontrant le

Théorème 1. *L'algèbre* (2) *est le produit direct de l'algèbre complète de matrices d'ordre* 4 *et le corps* $\mathcal{K}$.

Alors, selon un théorème classique de J. H. Wedderburne [1], il suit le résultat fondamental pour l'algèbre (2), exprimé par le

Théorème 2. *L'algèbre donnée par la table* (2) *est simple.*

4. Les propriétés de l'algèbre polynômiale générée par $\varphi(\lambda) = (\lambda^2+1)^n$, soit elle $\mathcal{H}_{2n}$, démontrent qu'elle est indécomposable et formée avec la somme du corps complexe et de son radical [2].

Soient $e_1, e_2, e_3, \dots, e_{2n}$ une base pour $\mathcal{H}_{2n}$, e_1, e_2 une base pour le corps complexe et $e_3, e_4, \dots, e_{2n}$ une base pour le radical; ont lieu les relations

$$(8) \qquad e_r e_s = e_q, \quad (r = 1, 2;\ s, q = 3, 4, \dots, 2n).$$

Si nous désignons par h l'indice de nilpotence du radical de $\mathcal{H}_{2n}$, il en résulte que le produit formé avec h éléments quelconques de la forme $\sum_3^{2n} \alpha_l e_l$, est égal à zéro.

En considérant pour Q la base 1, i, j, k, nous considérons le produit direct $\mathcal{H}_{2n} \times Q$ qui a une base formée avec les éléments

$$1e_1, ie_1, je_1, ke_1; \ 1e_2, ie_2, je_2, ke_2 \ \text{ et } \ 1e_q, ie_q, je_q, ke_q, (q = 3, 4, \dots, 2n).$$

Plaçons ces éléments en deux classes, g_1 et g_2, telles que $1e_1, ie_1, je_1, ke_1$ et $1e_2, ie_2, je_2, ke_2$ forment la classe g_1 et tous les autres la classe g_2.

On voit que les éléments de la classe g_1 forment une base pour une sous-algèbre d'ordre 8, contenue dans $\mathcal{H}_{2n} \times Q$, dont la table de multiplication est (2). Puis, la permutabilité de i, j, k avec tous les e_m, $(m = 1, 2, \dots, 2n)$, [1], et les relations (8), démontrent que les éléments de g_2 forment une base d'une algèbre $\mathcal{R}$, d'ordre $4(2n-2)$, qui est un idéal de $\mathcal{H}_{2n} \times Q$.

Compte tenu que le produit de h éléments quelconques de l'ensemble $(e_3, e_4, \dots, e_{2n})$ est égal à zéro, il en résulte aussi la même propriété pour les éléments de la classe g_2.

En effet, la permutabilité des i, j, k avec tous les e_m, conduit aux relations :

$$(\Gamma e_m)^h = (e_m \Gamma)^h = \Gamma^h e_m^h = 0,$$

$$(\Gamma_{m_1} e_{m_1})(\Gamma_{m_2} e_{m_2}) \dots (\Gamma_{m_h} e_{m_h}) = (\Gamma_{m_1} \Gamma_{m_2} \dots \Gamma_{m_h})(e_{m_1} e_{m_2} \dots e_{m_h}) = 0,$$

où

$$\Gamma, \Gamma_{m_1}, \Gamma_{m_2}, \dots, \Gamma_{m_h} = \pm 1, \pm i, \pm j, \pm k \text{ et } m, m_1, \dots, m_h = 3, 4, \dots, 2n.$$

Nous avons ainsi démontré le

Théorème 3. *L'idéal $\mathcal{R}$ est le radical de l'algèbre $\mathcal{H}_{2n} \times Q$.*

Ayant en vue que le seul élément commun pour l'algèbre (2) et le radical $\mathcal{R}$ est le zéro de $\mathcal{H}_{2n} \times Q$, il en résulte le

Théorème 4. *L'algèbre d'ordre $8n$ obtenue comme produit direct du corps des quaternions réels et de l'algèbre polynômiale générée par $\varphi(\lambda) = (\lambda^2 + 1)^n$, est la somme formée par l'algèbre simple d'ordre 8 donnée par (2) et son radical.*

On peut aussi démontrer que $\mathcal{H}_{2n} \times Q$ ne contient pas des idempotents principaux (en exceptant l'unité principale et le zéro), ce qui démontre qu'elle est indécomposable.

Enfin, nous remarquons que l'ordre du radical est égal au produit formé avec les ordres de Q et du radical de $\mathcal{H}_{2n}$ et que l'indice de nilpotence de $\mathcal{R}$ est égal à h, c'est-à-dire à celui de l'algèbre polynômiale à l'aide de laquelle a été formé le produit direct $\mathcal{H}_{2n} \times Q$.

Institut Polytechnique de Jassy,
Chaire de Mathématiques II

BIBLIOGRAFIE

1. Curtis C., Reiner I., *Représentation Theory of Finite Groups and Associative Algebras.* Interscience publ., New York, London, 1962.
2. Enescu I., *Asupra algebrelor polinomiale (II).* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1966, **XII (XVI)**, *1–2*, pp. 17–20.

ASUPRA UNEI CLASE DE ALGEBRE DE ORDIN $8n$

(Rezumat)

Considerînd mulţimea perechilor ordonate de cuaternioni reali aceasta se organizează într-o algebră de ordin 8 în care produsul este definit prin (1). Se arată că această algebră este simplă şi se foloseşte apoi la cercetarea structurii produsului direct dintre corpul cuaternionilor reali şi algebra polinomială generată de polinomul $\varphi(\lambda) = (\lambda^2 + 1)^n$.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1–2, 1968

C. D. 517.27

UN PROBLÈME DE PROGRAMMATION INVERSE

PAR

AL. CLIMESCU

Communication présentée à la session scientifique de l'Institut Polytehnique de Jassy, 28—30 Septembre 1967

1. Schématiquement un problème de programmation comporte comme données une fonction et des restrictions et comme inconnues les valeurs extrémales et les points où elles sont atteintes. Nous proposons ici la dénomination „programmation inverse" pour tout problème dont les inconnues contiendraient soit la fonction, soit les (ou partie des) restrictions, par contre certaines des inconnues étant données. En employant un appareil formel assez lourd il est possible de préciser la définition, mais nous préférons traiter un cas particulier qu'on peut presque complètement résoudre et qui montrera que les problèmes de programmation inverse peuvent présenter quelque intérêt. Nous avons été conduit à ce type de problèmes, que nous croyons nouveaux, par des considérations théoriques, mais nous croyons que des problèmes d'optimation économique avec des conditions extra-économiques (par ex. égale répartition de la main d'oeuvre dans une aire étendue) peuvent donner lieu à des problèmes de programmation inverse.

2. Les éléments du problème sont les suivants: (a) une suite dénombrable $x_1,\ldots, x_n,\ldots$ de variables non-négatives; (b) une suite de fonctions $f_1(x_1)$, $f_2(x_1, x_2),\ldots, f_n(x_1, x_2,\ldots, x_n),\ldots$ inconnues, mais qui existent pour $x_i \geqslant 0$, $(i = 1, 2,\ldots)$; (c) une suite de restrictions du type $b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \ldots + b_{nn}x_n = c_n$ notées $L_n(x_1,\ldots, x_n) = c_n$; (d) une suite de relations du type $x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{n,n-1}x_{n-1}$; (e) une suite de points $P_1 = (d_{11})$, $P_2 = (d_{21}, d_{22}),\ldots, P_n = (d_{n1}, d_{n2},\ldots, d_{nn}),\ldots$

Sachant que $L_n(x_1, x_2,\ldots,x_{n-1}, a_{n1}x_1 + \ldots + a_{n,n-1}x_{n-1}) = L_{n-1}(x_1, x_2,\ldots, x_{n-1})$, $(n=2,3,\ldots)$, et que $f_1(x_1,\ldots,x_{n-1}, a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{n,n-1}x_{n-1}) = f_{n-1}(x_1, x_2,\ldots,x_{n-1})$, $(n = 2,\ldots)$, trouver les fonctions f_n de façon que le minimum de f_n avec la restriction $L_n = c_n$ soit atteint en P_n.

Le cas particulier que nous traiterons est le suivant:

(i) $f(x)$ fonction inconnue définie pour $0 \leqslant x \leqslant 1$;

(ii) $f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_1 + x_2) + ... + x_n f(x_1 + x_2 + ... + x_n)$;

(ii) $L_n = c_n \Leftarrow\Rightarrow x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$;

(iv) $X_n = 0$ comme relations $(a_{n1} = a_{n2} = ... = a_{n,n-1} = 0)$;

(v) $$P_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n}\right).$$

3. Les propriétés suivantes ont lieu:

(a) $f(x) \equiv b$, $f(x) = ax$, $(a \geqslant 0)$, sont des solutions, $f_n = b(x_1 + ... + x_n) = b$, donc vérification banale.

Si $f = ax$, $f_n = a[x_1^2 + x_2(x_1 + x_2) + ... + x_n(x_1 + ... + x_n)]$, $f_n(P_n) = a\dfrac{n+1}{2n}$,

$2nf_n - a(n+1) = 2nf_n - a(n+1)(x_1 + ... + x_n)^2 = a[(n-1)(x_1^2 + ... + x_n^2) -$

$- 2(x_1 x_2 + ... + x_{n1} x_n)] = a\sum_{i,j}(x_i - x_j)^2$, avec $i < j$, donc le minimum est atteint en P_n et seulement en ce point.

(b) Si f est une solution, af, $(a \geqslant 0)$, est une solution; si f_1, f_2 sont des solutions, $f_1 + f_2$ est une solution.

(c) $f(x)$ est croissante pour les rationnels de l'intervalle $(0, 1]$.

Prenons en $f_n, x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{2}{n}$, $x_3 = ... = x_n = \dfrac{1}{n}$, donc $\dfrac{2}{n} f\left(\dfrac{2}{n}\right) +$

$+ \dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{3}{n}\right) + ... + \dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{n}{n}\right) \geqslant \dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{1}{n}\right) + \dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{2}{n}\right) + ... + \dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{n}{n}\right)$ ou $f\left(\dfrac{2}{n}\right) \geqslant f\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

En prenant $x_1 = \dfrac{1}{n}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \dfrac{2}{n}$, $x_4 = ... = \dfrac{1}{n}$ on trouve de même

$f\left(\dfrac{3}{n}\right) \geqslant f\left(\dfrac{2}{n}\right)$ etc. et en définitive $f\left(\dfrac{1}{n}\right) \leqslant f\left(\dfrac{2}{n}\right) \leqslant ... \leqslant f\left(\dfrac{n-1}{n}\right) \leqslant f\left(\dfrac{n}{n}\right)$.

Si $0 < \dfrac{p}{q} \leqslant \dfrac{r}{s}$ on a $\dfrac{ps}{qs} \leqslant \dfrac{qr}{qs}$ et en prenant $n = qs$, on trouve $f\left(\dfrac{qr}{qs}\right) \geqslant ... \geqslant f\left(\dfrac{ps}{qs}\right)$.

4. En supposant $f(x)$ croissante sur l'intervalle fermé $[0, 1]$ et en la remplaçant par $f(x) - f(0)$, on voit qu'il suffit d'étudier les $f(x)$ avec $f(0) = 0$. Supposons d'abord $f(1) = 0$, donc $f(x) \equiv 0$ sur les rationnels. On peut prendre $f(x) \geqslant 0$ pour tout x irrationnel et alors $x_1 f(x_1) + x_2 f(x_1 + x_2) +$

$+ ... + x_n f(x_1 + x_2 + ... + x_n) \geqslant 0 = \dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{1}{n}\right) + \dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{2}{n}\right) + ... + \dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{n}{n}\right)$, donc

$f(x)$ est une solution du problème.

Si pour x irrationnel on avait $f(x) < 0$, alors, $(x_1 = x,\ x_2 = 1 - x)$, $xf(x) + (1 - x)f(1) = xf(x) < 0$, c'est-à-dire $f(x)$ ne pourrait atteindre son minimum pour $x_1 = x_2$. On a donc la

Proposition I. *La solution la plus générale du problème, sous la condition* $f(x) \equiv 0$ *sur les rationnels de* $[0, 1]$, *est constituée par les fonctions qui, pour chaque* x *irrationnel, prennent n'importe quelle valeur* $\geqslant 0$.

5. Si $f(1) > 0$, on peut supposer $f(1) = 1$, en multipliant par une constante positive convenable. Nous supposerons en outre $f(x)$ continue et dérivable sur les rationnels de $[0, 1)$, ce qui entraîne $f'(x) \geqslant 0$, la dérivabilité partielle sur les rationnels de chaque f_n et l'annulation de ces dérivées au point P_n (par la condition de minimum).

En annuant l les dérivées de $f_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1 - x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-1})$ pour $x = 1/n$ on trouve

$$\frac{1}{n} f'\left(\frac{p}{n}\right) = f\left(\frac{p+1}{n}\right) - f\left(\frac{p}{n}\right), \quad (p = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{1}$$

et en changeant n en nq et p en pq on a encore la relation

$$\frac{1}{nq} f'\left(\frac{p}{n}\right) = f\left(\frac{pq+1}{nq}\right) - f\left(\frac{p}{n}\right). \tag{2}$$

Pour n donné posons $f'\left(\frac{1}{n}\right) = a$, $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{a}{n} + b$, ce qui, d'après (1) et (2), donne

$$f\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{2a}{n} + b, \quad f\left(\frac{q+1}{nq}\right) = a\frac{q+1}{nq} + b$$

et en particulier pour $q = n - 2$ et $n - 1$,

$$f\left(\frac{n-1}{n(n-2)}\right) = a\frac{n-1}{n(n-2)} + b, \quad f\left(\frac{1}{n-1}\right) = \frac{a}{n-1} + b.$$

Comme on a

$$\frac{n-1}{n(n-2)} = \frac{n}{n(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)(n-2)}$$

il en résulte

$$\frac{1}{n(n-1)(n-2)} f'\left(\frac{n(n-2)}{n(n-1)(n-2)}\right) = f\left(\frac{n(n-2)+1}{n(n-1)(n-2)}\right) - f\left(\frac{n(n-2)}{n(n-1)(n-2)}\right)$$

ou

$$\frac{1}{n(n-1)(n-2)} f'\left(\frac{1}{n-1}\right) = f\left(\frac{n-1}{n(n-2)}\right) - f\left(\frac{1}{n-1}\right) =$$

$$= a\frac{n-1}{n(n-2)} + b - \frac{a}{n-1} - b = \frac{a}{n(n-1)(n-2)} \text{ ou } f'\left(\frac{1}{n-1}\right) = a;$$

de proche en proche on aura

$$f\left(\frac{1}{n-2}\right) = \frac{a}{n-2} + b, \quad f'\left(\frac{1}{n-2}\right) = a, \ldots, f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{2} + b, \quad f'\left(\frac{1}{2}\right) = a,$$

$$f(1) = a + b = 1.$$

b et a étant déterminées par $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f'\left(\frac{1}{2}\right)$, il en résulte qu'on a

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{a}{n} + b, \quad (n = 1, 2, \ldots), \quad f'\left(\frac{1}{n}\right) = a, \quad (n = 2, 3, \ldots);$$

par continuité $f(0) = b = 0$, donc $a = 1$ et finalement,

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}, \quad (n = 1, 2, \ldots), \quad f(0) = 0, \quad f'\left(\frac{1}{n}\right) = 1, \quad (n = 2, \ldots).$$

Supposons qu'on ait démontré pour n quelconque et p déterminé, les égalités $f\left(\frac{q}{n}\right) = \frac{q}{n}$, $f'\left(\frac{q}{n}\right) = 1$, $(q = 1, 2, \ldots, p-1)$, valables initialement pour $q = 1, (p = 2)$. (1) appliquée pour $p - 1$ donne $f\left(\frac{p}{n}\right) = \frac{p}{n}$. En tenant compte de la forme de n par rapport à p, on peut avoir $n = pn_1$, $pn_1 + 1, \ldots, pn_1 + p - 1$, donc

$$\frac{p}{n} = \frac{p}{pn_1}, \quad \frac{p}{pn_1 + 1}, \ldots, \frac{p}{pn_1 + p - 1} = \frac{1}{n_1}, \quad \frac{p}{pn_1 + 1}, \ldots, \frac{p}{pn_1 + p - 1},$$

si p et k ne sont pas premiers entre eux, $p/(pn + k) = q/(qn + k_1)$, donc on revient à un cas antérieur et $f'\left(\frac{p}{pn + k}\right) = 1$. Si $(p, k) = 1$, écrivons l'équation diophantique $k\alpha - p\beta = 1$, qui a des solutions (α, β) positives et au moins une avec $\alpha < p$; choisissons cette solution et écrivons

$$\frac{p}{pn + k} = \frac{p(\alpha n + \beta)}{(pn + k)(\alpha n + \beta)}, \text{ donc}$$

$$\frac{1}{(pn + k)(\alpha n + \beta)} f'\left(\frac{p}{pn + k}\right) = f\left(\frac{p\alpha n + p\beta + 1}{(pn + k)(\alpha n + \beta)}\right) - f\left(\frac{p}{pn + q}\right) =$$

$$= f\left(\frac{p\alpha n + k\alpha}{(pn+k)(\alpha n+\beta)}\right) - f\left(\frac{p}{pn+q}\right) = f\left(\frac{\alpha}{\alpha n+\beta}\right) - f\left(\frac{p}{pn+k}\right) =$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha n+\beta} - \frac{p}{pn+q} = \frac{1}{(pn+k)(\alpha n+\beta)}$$

$\left(\text{d'après le fait que } 0<\alpha<p \text{ et } f\left(\frac{p}{n}\right)=\frac{p}{n}\right)$, donc $f'\left(\frac{p}{pn+k}\right) = 1$. En résumé $f'\left(\frac{p}{n}\right) = 1$.

Il est évident d'après cela que $f(x) = x, f'(x) = 1$ pour tous les rationnels et il suffit de prendre arbitrairement $f(x) \geqslant x$, (x irrationnel), pour obtenir une solution du problème, comme il est bien évident. En tenant compte des transformations initiales, on peut donc énoncer la

Proposition II. *Si $f(x)$ est une solution du problème, continue et dérivable sur les rationnels, alors $f(x) = ax + b$, pour tout x rationnel, $(a \geqslant 0)$, et on peut compléter les valeurs pour les x irrationnels en les soumettant à la seule condition $f(x) \geqslant ax + b$, (x irrationnel).*

Il est clair qu'on a aussi la

Proposition III. *Si la solution $f(x)$ est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur les rationnels, alors $f(x) = ax + b$, $(a \geqslant 0)$.*

Les changements à faire pour obtenir la solution du problème correspondant de maximum sont insignifiants et évidents. Bornons nous à observer que le polynôme des propositions II et III devient $ax + b$, $(a \leqslant 0)$.

Il est probable que les solutions indiquées dans la proposition II sont les seules possibles de leur classe. On peut facilement donner des exemples quand $f(x) < ax + b$ pour un seul irrationnel fait perdre à la fonction sa qualité de solution. Soit par ex. $f(x) = x$ si $x \neq \alpha$ irrationnel $> \frac{1}{4}$ et $f(\alpha) = 0$. Alors

$$f_2(x_1, x_2) = x_1 f(x_1) + (1 - x_1) = \begin{cases} x_1^2 - x_1 + 1 \text{ si } x_1 \neq \alpha, \\ 1 - \alpha < \frac{3}{4} \text{ si } x_1 = \alpha. \end{cases}$$

Comme $f_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$, on voit que le minimum n'est pas atteint en P_2.

5. Ce qui précède suggère quelques remarques.

1° Il est intéressant de trouver la caractérisation extrémale des polynômes $ax + b$, avec $a \geqslant 0$, respectivement $a \leqslant 0$.

2° La fonction de Dirichlet est une solution du problème et c'est probablement le seul problème élémentaire connu qui l'admette comme solution.

3° Les solutions forment un espace à scalaires $\geqslant 0$, dont j'ai esquissé l'axiomatique dans un travail antérieur.

4° La présence de l'équation (1) analogue à $f'(x) = [f(x+h) - f(x)]/h$ montre que le problème est à sa place dans une théorie des équations différentielles ou mixtes sur les rationnels, le codomaine étant l'axe réel ou même le corps rationnel; cette théorie est encore à fonder, de même que les chapitres correspondants de l'analyse fonctionnelle, qui devra sans doute prendre en considération comme corps de scalaires le corps des nombres algébriques et d'une manière plus générale, faire plus de place à des considérations arithmétiques, qui ont été décisives pour la démonstration de la proposition II.

5° L'investigation du même problème reste intéressante dans l'analyse non-standard, par exemple dans celle qu'on peut édifier à partir du modèle de Henkin.

Institut Polytechnique de Jassy,
Chaire de Mathématiques I

O PROBLEMĂ DE PROGRAMARE INVERSĂ

(Rezumat)

Se introduce noţiunea de problemă de programare inversă şi se rezolvă în condiţii destul de largi problema definită, prin condiţiile (i)...(v) din § 2.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

D. C. 517.948.34

A CLASS OF NONLINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF PARABOLIC TYPE WITH A DELAYED ARGUMENT

BY

M. N. OĞUZTÖRELI

1. Introduction

In a previous paper [1], we investigated a new class of linear integro-partial differential equations of parabolic type with a delayed argument, subject to certain initial and boundary conditions. In the present paper, we investigate a class of nonlinear integro-partial differential equations of parabolic type with a delayed argument.

Let Ω be a domain in n-dimensional Euclidean space E^n, bounded by a smooth surface $\partial\Omega$ satisfying the conditions of Liapunov. Let $\bar{\Omega} = \Omega + \partial\Omega$. We denote the coordinates of a point x in E^n by $x_1, x_2, \ldots, x_n$, time by t, the volume element at a point $x \in \Omega$ by dV_x and the surface element at a point $x \in \partial\Omega$ by dS_x.

Let t_0 and t_1 be two fixed time instants, $t_0 < t_1 < \infty$, and h_i, $(i = 0, 1, \ldots, \nu)$, be certain given numbers such that

$$0 = h_0 < h_1 < h_2 < \ldots < h_\nu \ (< \infty). \tag{1.1}$$

We define the intervals

$$I_0 = [t_0 - h_\nu, t_0], \quad I_1 = [t_0, t_1], \quad I_2 = [t_0 - h_\nu, t_1]. \tag{1.2}$$

Let $C_k^{1,2}$, $(k = 0, 1, 2)$, be Banach spaces of real valued functions $u = u(t, x)$ continuously differentiable in t and continuously twice differentiable in x for $(t, x) \in I_k \times \bar{\Omega}$ with norms

$$\| u \|_k^{(1,2)} = \sup_{\substack{(t,x) \in I_k \times \bar{\Omega} \\ 1 \leq i,j \leq n}} \left\{ |u|, \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|, \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|, \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right| \right\}, \quad (k = 0, 1, 2), \tag{1.3}$$

all partial derivatives on $\partial\Omega$ being one-sided. Further, let C_k^0 be the Banach space of all real valued functions continuous on $I_k \times \overline{\Omega}$ with the uniform norm

$$\|u\|_k^0 = \sup_{(t,x) \in I_k \times \overline{\Omega}} |u|, \quad (k = 0, 1, 2). \tag{1.4}$$

Now we define the operators T_λ, depending on a real parameter λ, from $C_1^{1,2}$ into C_2^0 by the equation

$$\begin{aligned} T_\lambda(u)(t,x) = &\sum_{i=0}^{\nu} a_i(t,x)\, u(t-h_i, x) \int_{t_0}^{t} K_0(t,x,\tau)\, u(\tau,x)\, \mathrm{d}\tau + \\ &+ \Delta_x u(t,x) + P_x u(t,x) + \int_{\Omega} H_0(t,x;\xi)\, u(t,\xi)\, \mathrm{d}V_\xi + \\ &+ \lambda \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{t} K_1(t,x;\sigma,\tau)\, u(\sigma,x)\, u(\tau,x)\, \mathrm{d}\sigma\, \mathrm{d}\tau, \end{aligned} \tag{1.5}$$

where

$$\Delta_x = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}, \quad P_x = \sum_{j=1}^{n} b_j(t,x) \frac{\partial}{\partial x_j}, \tag{1.6}$$

and $a_i(t,x)$, $(i = 0,1,\ldots,\nu)$, and $b_j(t,x)$, $(j = 1,\ldots,n)$, are functions belonging to $C_1^{1,2}$; $K_0(t,x;\tau)$ and $K_1(t,x;\sigma,\tau)$ are certain given functions twice continously differentiable in x and continuously differentiable in t, τ and σ for $(t,\sigma,\tau,x) \in \in I_1 \times I_1 \times \overline{\Omega}$ and $(t,\sigma,\tau,x) \in I_1 \times I_1 \times I_1 \times \overline{\Omega}$ respectively. $H_0(t,x;\xi)$ is a given function continuously differentiable in t and continuously twice differentiable in x and ξ for $(t,x,\xi) \in I_1 \times \overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$.

Let $f(t,x)$ be a given function belonging to $C_1^{1,2}$.

Now we consider the following nonlinear delayed integro-partial differential equation of parabolic type:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = T_\lambda(u)\,(t,x) + f(t,x), \tag{1.7}$$

for $(t,x) \in I_1 \times \Omega$, subject to the initial condition

$$u(t,x) = \varphi(t,x) \text{ for } (t,x) \in I_0 \times \overline{\Omega}, \tag{1.8}$$

and the boundary condition

$$u(t,x)\big|_{\partial\Omega} = \psi(t,x) \text{ for } (t,x) \in I_0 \times \partial\Omega, \tag{1.9}$$

where $\varphi(t,x) \in C_0^{1,2}$ and $\psi(t,x)$ is a given function continuous on $I_1 \times \partial\Omega$. The expression $u(t,x)|_{\partial\Omega} = (t,x)$ means, as usual, that

$$u(t,x)|_{\partial\Omega} = \psi \lim_{\substack{\xi \to x \\ \xi \in \Omega, x \in \partial\Omega}} u(t,\xi) = \psi(t,x) \text{ for } t \in I_1 . \tag{1.10}$$

The mixed problem of finding the solution of Eq. (1.7) satisfying the conditions (1.8) and (1.9) will be called *Problem M.*

2. Formal Solution

Consider the following *linear* equation

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = T_0(u)(t,x) + f(t,x), \tag{2.1}$$

for $(t,x) \in I_1 \times \Omega$, where T_0 is the operator obtained from T_λ putting $\lambda = 0$.

In [1] we demonstrated that Eq. (2.1) has a unique solution in $C_1^{1,2}$, say $u_0(t,x)$, satisfying the conditions (1.8) and (1.9). We have also shown in [1] that this solution $u_0(t,x)$ can be represented in the form

$$\begin{aligned} u_0(t,x) = &\int_{t_0}^{t} \int_{\Omega} L_1(t,\theta;x,\eta)\, f(\theta,\eta)\, dV_\eta\, d\theta + \\ &+ \int_{t_0-h_\nu}^{t_0} \int_{\Omega} L_2(t,\theta;x,\eta)\, \varphi(\theta,\eta)\, dV_\eta\, d\theta + \int_{t_0}^{t} \int_{\partial\Omega} L_3(t,\theta;x,\eta)\, \psi(\theta,\eta)\, dS_\eta\, d\theta , \end{aligned} \tag{2.2}$$

for $(t,x) \in I_1 \times \bar{\Omega}$, where L_i, $(i = 1,2,3)$, are certain functions uniquely determined by Eq. (2.1), of bounded variation in $(\tau,\xi) \in I_1 \times \bar{\Omega}$, $I_0 \times \bar{\Omega}$ and $I_1 \times \bar{\Omega}$, respectively, and of class $C_1^{1,2}$ in (t,x) for $t \neq \tau$ and $x \neq \eta$.

The right-hand side of Eq. (1.7) depends on the parameter λ, it is natural to search for a solution to *Problem M* in the form

$$u(t,x) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j u_j(t,x) , \tag{2.3}$$

for $(t,x) \in I_1 \times \bar{\Omega}$, where $u_0(t,x)$ is given by Eq. (2.2) — which satisfies Eq. (2.1) and the conditions (1.8) and (1.9) — and

$$u_j(t,x) = 0 \text{ for } (t,x) \in I_0 \times \bar{\Omega},\ u_j(t,x)|_{\partial\Omega} = 0 \text{ for } (t,x) \in I_i \times \Omega, \tag{2.4}$$

for $j = 1,2,3,\ldots$

We construct each $u_j(t,x)$, $(j=1,2,3,\ldots)$. To do so, observe that

$$u(\sigma,x)\,u(\tau,x)=\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j\left[\sum_{k=0}^{j}u_k(\sigma,x)u_{j-k}(\tau,x)\right]. \tag{2.5}$$

Substituting (2.3) and (2.5) into Eq. (1.7), and comparing the coefficients of λ^j in both sides of the identity so obtained, we find sucessively,

$$\frac{\partial u_0(t,x)}{\partial t}=T_0(u_0)(t,x)+f(t,x), \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial u_1(t,x)}{\partial t}=T_0(u_1)(t,x)+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t}K_1(t,x;\sigma,\tau)\,u_0(\sigma,x)\,u_0(\tau,x)\,d\sigma\,d\tau, \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_2(t,x)}{\partial t}&=T_0(u_2)(t,x)+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t}K_1(t,x;\sigma,\tau)\,[u_0(\sigma,x)\,u_1(\tau,x)+\\&+u_1(\sigma,x)\,u_0(\tau,x)]\,d\sigma\,d\tau,\end{aligned} \tag{2.8}$$

and in general,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_{j+1}(t,x)}{\partial t}&=T_0(u_{j+1})(t,x)+\\&+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t}K_1(t,x;\sigma,\tau)\left[\sum_{k=0}^{j}u_k(\sigma,x)\,u_{j-k}(\tau,x)\right]d\sigma\,d\tau,\end{aligned} \tag{2.9}$$

for $j=0,1,2,\ldots$ The solution of Eq. (2.9) satisfying the conditions (2.4) can be represented in the form

$$\begin{aligned}u_{j+1}(t,x)&=\\&=\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{0}\int_{t_0}^{0}\int_{\Omega}L_1(t,0;x,\eta)\,K_1(0,\eta;\sigma,\tau)\left[\sum_{k=0}^{j}u_k(\sigma,\eta)\,u_{j-k}(\tau,\eta)\right]dV_\eta\,d\sigma\,d\tau\,d\theta,\end{aligned} \tag{2.10}$$

for $(t,x)\in I_1\times\bar{\Omega}$ (Cf. [1]). It is quite clear that $u_{j+1}(t,x)$ is completely determined if the functions $u_0(t,x)$, $u_1(t,x),\ldots,u_j(t,x)$ are known. Since the function $u_0(t,x)$ is given by Eq. (2.2), all the functions $u_j(t,x)$ can be successively determined by the recurrent relation (2.10).

3. Convergence of the Formal Solution

We now prove the convergence of the series (2.3). First we establish certain estimates for the functions $u_j(t,x)$, $(j=1,2,3,\ldots)$. For this purpose put

$$\text{(3.1)}\qquad \begin{cases} M = \max\limits_{(t,x)\in I_1\times\bar{\Omega}} |u_0(t,x)|, \\ N = \max\limits_{(t,x,\sigma,\tau)\in I_1\times\bar{\Omega}\times I_1\times I_1} |K_1(t,x;\sigma,\tau)|. \end{cases}$$

Let $G(t,\theta;x,\eta)$ be the Green's function in Ω of the parabolic equation

$$\text{(3.2)}\qquad \left[\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x - P_x - a_0(t,u)\right](u)(t,x) = 0.$$

It is well known that

$$|G(t,\theta;x,\eta)| \leq \frac{\text{const.}}{(t-\theta)^{\gamma}} \cdot \frac{1}{|x-\eta|^{n-2\gamma}},$$

for $x, \eta \in \bar{\Omega}$ and $t_0 \leq \theta < t < t_1$, where γ is a number such that $0 < \gamma < 1$, and $|x-\eta|$ is the distance between the points x and η (Cf. [2]). Further the functions $L_1(t,\theta;x,\eta)$ and $G(t,\theta;x,\eta)$ have the same singularity at $x=\eta$ and $t=\theta$; therefore

$$\text{(3.4)}\qquad |L_1(t,\theta;x,\eta)| \leq \frac{L^*}{(t-\theta)^{\gamma}\,|x-\eta|^{n-2\gamma}},$$

for $x, \eta \in \bar{\Omega}$ and $t_0 \leq \theta < t \leq t_1$, where L^* is a positive constant. Since the improper integral $\int_{\Omega} |x-\eta|^{-n+2\gamma}\,dV_{\eta}$, $(x \in \bar{\Omega})$, is absolutely convergent, the number

$$\text{(3.5)}\qquad L = \max_{x\in\bar{\Omega}} \int_{\Omega} \frac{L^*}{|x-\eta|^{n-2\gamma}}\,dV_{\eta}$$

is finite.

Now, since

$$\text{(3.6)}\qquad u_1(t,x) = \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\theta}\int_{t_0}^{\theta}\int_{\Omega} L_1(t,\theta;x,\eta)K_1(\theta,\eta;\sigma,\tau)u_0(\sigma,\eta)\,u_0(\tau,\eta)\,dV_{\eta}\,d\sigma\,d\tau\,d\theta,$$

for $(t,x) \in I_1 \times \bar{\Omega}$ by Eq. (2.10), we may write

$$\text{(3.7)}\qquad |u_1(t,x)| \leq \delta L M^2 N (t-t_0)^{3-\gamma},$$

for $(t,x) \in I_1 \times \bar{\Omega}$, where $\delta = (1-\gamma)^{-1}$, by (3.1), (3.4) and (3.6).

Likewise, since

(3.8) $$u_2(t,x) =$$

$$= \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\theta}\int_{t_0}^{\theta}\int_{\Omega} L_1(t,\theta;x,\eta)K_1(\theta,\eta;\sigma,\tau)[u_0(\sigma,\eta)u_1(\tau,\eta)+u_1(\sigma,\eta)u_0(\tau,\eta)]\,dV_\eta d\sigma d\tau d\theta,$$

for $(t,x)\in I_1\times\bar{\Omega}$ by Eq. (2.10), we may write

(3.9) $$|u_2(t,x)|\leq \delta^2 L^2 M^3 N^2 (t-t_0)^{2(3-\gamma)},$$

for $(t,x)\in I_1\times\bar{\Omega}$.

Generally, let us suppose that the inequality

(3.10) $$|u_k(t,x)|\leq \delta^k L^k M^{k+1} N^k (t-t_0)^{k(3-\gamma)},$$

is true for $(t,x)\in I_1\times\bar{\Omega}$ and $k=0,1,2,\ldots,j$. Then, by Eq. (2.10), (3.1), (3.5) and (3.10), we may write

(3.11) $$u_{j+1}(t,x)\leq S_{j+1}\,\delta^{j+1}L^{j+1}M^{j+2}N^{j+1}(t-t_0)^{(j+1)(3-\gamma)},$$

for $(t,x)\in I_1\times\bar{\Omega}$, where

(3.12) $$S_{j+1}=\sum_{k=0}^{j}\frac{1}{(2k+1)(2j-2k+1)}.$$

Since

$$S_{j+1}=\frac{1}{2(j+1)}\sum_{k=0}^{j}\left(\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2j-2k+1}\right),$$

we immediately see that

(3.13) $$0<S_{j+1}<1 \text{ for } j=0,1,2,\ldots$$

Thus, omitting the factor S_{j+1} in inequality (3.11), we obtain inequality (3.10) for $k=j+1$. Since we have already established inequalities (3.7) and (3.9), the induction process is complete. Hence inequality (3.10) is valid for all $k=0,1,2,\ldots$

Note that the series

(3.14) $$\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j\delta^j L^j M^{j+1}N^j(t-t_0)^{j(3-\gamma)},$$

which majorizes the series (2.3), is absolutely and uniformly convergent in λ and t if

(3.15) $$|\lambda(t-t_0)^{3-\gamma}|\leq\frac{1-\varepsilon}{\delta LMN},$$

where ε is an arbitrarily small positive number. Hence, by the M-test of Weierstrass, the series (2.3) is absolutely and uniformly convergent in t, x and λ for $(t, x) \in I_1 \times \bar{\Omega}$ and λ satisfying the inequality

$$|\lambda| \leq \frac{1-\varepsilon}{\delta L M N h^{3-\gamma}}, \tag{3.16}$$

where $h = t_1 - t_0$, the length of the interval I_1.

Consequently, the sum $u(t, x)$ of the series (2.3) is a generalized solution of *Problem M*. We can easily show that this solution is unique.

The exposed results are to be related with D. Mangeron's and L. E. Krivoshein's investigations [3] concerned with „well posed" boundary value problems with caloric and hereditary operators and delayed arguments as well as with the author's papers [4] written in collaboration with the above mentioned scientists and published in the same *Bulletin*.

Acknowledgement. This work was sponsored by the National Research Council of Canada under Grant No. NRC A-4345 (1957-68), through the University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada.

Received the 28 X 1967

The University of Alberta, Edmonton, Canada

REFERENCES

1. Oğuztöreli M. N., *A Mixed Problem for an Integro-differential Equation of Parabolic Type with a Delayed Argument.* Univ. of Alberta, Edmonton, Dept. of Math., Series A, 1967, **3**, *27*.
2. Pogorzelski W., *Premier problème de Fourier pour l'équation parabolique dont les coefficients dépendent de la fonction inconnue.* Ann. Polonici Math., 1959, *6*, pp. 15—40.
3. Mangeron D., Krivoshein L. E., *New Methods by studying Equations of Mathematical Physics. II.* Rev. Roum. Sci. Techn. Série Méc. apl., 1966, *11*, pp. 3—22.
4. Mangeron D., Oğuztöreli M. N., Krivoshein L. E., *A Theorem concerned with generalized Heat Transfer Phenomena.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1967, **XIII** (**XVII**), *3—4*, pp. 419—422.
5. Picone M., Mangeron D., *Teoremi di unicità per le soluzioni di talune equazioni funzionali e separazione degli autovalori di un parametro da cui quelle dipendono.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1968, **XIV** (**XVIII**), *1—2*, pp.

O CLASĂ DE ECUAŢII INTEGRO-DIFERENŢIALE NELINIARE DE TIP PARABOLIC CU ARGUMENT ÎNTÎRZIAT

(Rezumat)

Se studiază o clasă de ecuaţii integro-diferenţiale neliniare de tip parabolic cu argument întîrziat.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

C. D. 517.946.6

SUR LA FORME ET LA RECHERCHE DES DENSITÉS INVARIANTES ASSOCIÉES A CERTAINES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES NON-LINÉAIRES

PAR

PHILIPPE GATIGNOL

1. Introduction

Parmi le équations conservatrices de la forme:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\{f(u)\} + \frac{\partial^p u}{\partial x^p} = 0, \quad (p \geqslant 2), \tag{1}$$

figurent l'équation de la chaleur et l'équation de Burgers ainsi que l'équation de Korteweg-de Vries:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \tag{2}$$

Cette dernière constitue l'un des exemples les plus simples d'équation non-linéaire dispersive; à ce titre, elle a été récemment étudiée par G. B. Whitham [1], [2] et par M. D. Kruskal et N. J. Zabusky [3]. Les équations de conservation qui lui sont associées et les invariants correspondants semblent devoir jouer un rôle important dans l'étude de ses solutions.

2. Problème de la recherche des densités invariantes

Nous cherchons s'il existe un polynôme T des $f^{(\lambda)}$ et des u_i; avec $u_i = \partial^i u/\partial x^i$, $f^{(\lambda)} = \mathrm{d}^\lambda f/\mathrm{d}u^\lambda$, auquel on puisse associer un polynôme X des mêmes variables tel que toute solution $u(x,t)$ de l'équation (1) soit aussi solution de l'équation de conservation :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial x} = 0. \tag{3}$$

Autrement dit, T et X doivent être tels que (3) soit identiquement vérifié lorsqu'on considère $\partial T/\partial t$ comme fonction des u_i par l'intermédiaire de l'équation (1) et de ses dérivées en x.

Pratiquement, nous cherchons T sous la forme d'un polynôme des $u_1, u_2, \ldots$, dont les coefficients sont des fonctions de u à déterminer:

$$T(u, \ldots, u_n) = \sum m(u, \ldots, u_k), \tag{4}$$

où m est un monôme dont la forme générale s'écrit:

$$m(u, \ldots, u_k) = a(u)\, u_1^{\alpha_1} \ldots u_k^{\alpha_k}. \tag{5}$$

L'ordre de T est l'ordre de la dérivée u_n d'ordre maximum qui figure explicitement dans T. Si $f(u)$ est un polynôme en u, on cherche directement T comme somme de monômes de la forme:

$$m_0(u, \ldots, u_k) = a_0\, u^{\alpha_0} u_1^{\alpha_1} \ldots u_k^{\alpha_k}. \tag{6}$$

Si T est une densité invariante, quel que soit $Y(u, u_1, \ldots)$, T' défini par:

$$T' = T + \frac{\partial Y}{\partial x}, \tag{7}$$

est aussi une densité invariante. Nous dirons que T et T', liés par (7), sont $(\partial/\partial x)$-équivalents. La recherche des densités invariantes se fera modulo cette relation d'équivalence (et à un facteur près).

Un monôme m défini par (5) sera dit irréductible s'il est d'ordre minimal dans sa classe d'équivalence. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que $K=0$ ou $\alpha_k \geqslant 2$. Un polynôme T défini par (4) sera dit irréductible (ou $(\partial/\partial x)$-irréductible) si tous ses monômes le sont. On voit facilement qu'un polynôme irréductible est équivalent à zéro si et seulement s'il est identique à zéro et que tout monôme (5), et par suite tout polynôme (4), est équivalent à un polynôme irréductible déterminé de manière unique. Nous chercherons donc les densités invariantes sous forme de polynômes irréductibles.

3. Choix des monômes irréductibles dans T

Nous adopterons les définitions suivantes: à un monôme m défini par (5) on peut associer, en plus de son ordre k, son degré d'homogénéité en $\partial/\partial x$, que nous appellerons *niveau* de m, donné par:

$$j = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + k\alpha_k. \tag{8}$$

Si le monôme a la forme particulière (6), nous définirons de plus son degré par:

$$i = \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_k \tag{9}$$

et nous dirons que m_0 est de type (i/j).

Si l'on définit le tableau arithmétique $N(i,j)$, $(i,j \geqslant 0)$, par:

$$N(0,0) = 1, \quad N(0,j) = 0, \quad (j = 1,2,\ldots), \tag{10}$$

et par la loi de récurrence diagonale:

$$N(i,j) = N(0,j) + N(1,j-1) + \cdots + N(h,j-h), \quad h = \inf(i,j), \tag{11}$$

on montre par des raisonnements élémentaires, que le nombre de monômes de la forme (6) (avec $a_0 = 1$) de type (i/j) est donné par $N(i/j)$ tandis que le nombre de monômes irréductibles de ce type est donné par:

$$M(i,j) = N(i,j) - N(i,j-1). \tag{12}$$

De même, le nombre de monômes de la forme (5) de niveau j est $N(j,j)$; le nombre de ces monômes irréductibles est $M(j,j)$.

Le problème de la recherche des densités invariantes T, sous forme d'un polynôme irréductible (4), consiste en la détermination des coefficients $a(u)$ de telle sorte que $\partial T/\partial t$ considéré comme ayant la forme (4) par l'intermédiaire de l'équation (1) et de ses dérivées, soit équivalent à zéro; autrement dit de telle sorte que les coefficients du polynôme irréductible déduit de $\partial T/\partial t$, qui s'expriment en fonction des $a(u)$ et de leurs dérivées, soient tous nuls.

Or, il est clair que le polynôme irréductible déduit d'un monôme de niveau j est un polynôme de niveau j (tous ses monômes sont de même niveau j). Par ailleurs un même monôme de T, de niveau j, donne dans $\partial T/\partial t$ des monômes de niveaux $j+1$ et $j+p$. Par suite, nous ne considérerons dans T que des monômes irréductibles dont les niveaux diffèrent entre eux d'un multiple entier de $p-1$. Autrement dit, nous cherchons T sous la forme:

$$T = S_{j_0} + S_{j_0+p-1} + \cdots + S_{j_1}, \quad j_1 = j_0 + h_1(p-1), \tag{13}$$

où S_j, $(j = j_0 + h(p-1)\,;\ h = 0,\ 1,\ldots,\ h_1)$, est un polynôme irréductible de niveau j.

Tout ce qui précède s'applique au cas plus général où l'équation étudiée a la forme:

$$\mu_t + P_\alpha + P_\beta = 0,$$

où P_α et P_β sont des polynômes de la forme (4) de niveaux α et β respectivement, et s'étend aisément au cas d'un plus grand nombre de polynômes dans l'équation.

4. Forme de S_{j0}

Théorème 1. *Si l'équation* (1) *n'est pas linéaire* ($f'' \neq 0$)*, une condition nécessaire pour que T, donné par* (13)*, soit une densité invariante de* (1)*, est qu'on ait* $j_0 = 0$.

En effet, si (13) représente une densité invariante pour l'équation (1), S_{j0} est une densité invariante de l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\{f(u)\} = 0. \tag{14}$$

Il est clair que les fonctions de u sont des densités invariantes pour l'équation (14). Nous montrons à présent que ce sont les seules si $f'' \neq 0$. Nous poserons :

$$\frac{\partial^i}{\partial x^i}\{f' u_1\} = r_i(u,\ldots,u_i) + f' u_{i+1} = \tag{15}$$

$$= s_i(u,\ldots,u_{i-1}) + \eta_i f'' u_1 u_i + f' u_{i+1}, \tag{16}$$

avec :

$$\eta_0 = 0, \quad \eta_1 = 1, \quad \eta_i = i+1 \text{ pour } i \geqslant 2.$$

Supposons que $T(u,\ldots,u_k)$ soit une densité invariante de (14) d'ordre $k \geqslant 1$. On peut l'écrire sous la forme :

$$T = A_0(u,\ldots,u_{k-1}) + \cdots + A_\alpha(u,\ldots,u_{k-1})\, u_k^\alpha, \tag{17}$$

$$A_\alpha(u,\ldots,u_{k-1}) \not\equiv 0, \quad \alpha \geqslant 2. \tag{18}$$

Par hypothèse, il existe $x(u,\ldots,u_k)$ telle que l'identité suivante soit satisfaite :

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{\partial T}{\partial u_i}(r_i + f' u_{i+1}) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\partial X}{\partial u_i} u_{i+1}. \tag{19}$$

L'identification de (19) par rapport à u_{k+1} donne :

$$\frac{\partial X}{\partial u_k} = \frac{\partial T}{\partial u_k} f'(u), \tag{20}$$

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial T}{\partial u_i} r_i + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\partial T}{\partial u_i} f' u_{i+1} = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\partial X}{\partial u_i} u_{i+1}. \tag{21}$$

Compte tenu de (20), qui s'intègre sous la forme $X = Tf' + X_1(u,\ldots,u_{k-1})$, (21) s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial T}{\partial u_i} r_i - Tf'' u_1 = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\partial X_1}{\partial u_i} u_{i+1},$$

où le second membre est linéaire en u_k. L'identification à zéro du coefficient de u_k^α dans le premier membre donne :

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\partial A_\alpha}{\partial u_i} r_i + (\alpha \eta_k - 1) A_\alpha f'' u_1 = 0. \tag{22}$$

Soit l l'ordre effectiv de $A_\alpha(u,...,u_l)$. Si $l=0$ et si $f'' \neq 0$, (22) conduit à la nullité de A_α, ce qui contredit l'hypothèse (18). Si $l \geqslant 1$, A_α s'écrit :

$$A_\alpha = B_0(u,...,u_{l-1}) + \cdots + B_\beta(u,...,u_{l-1})\, u_l^\beta, \tag{23}$$

$$B_\beta(u,...,u_{l-1}) \not\equiv 0, \quad \beta \geqslant 1. \tag{24}$$

Compte tenu de (23), l'identification de (22) donne, pour le coefficient de u_l^β :

$$\sum_{i=1}^{l-1} \frac{\partial B_\beta}{\partial u_i} r_i + (\beta \eta_l + \alpha \eta_k - 1) B_\beta f'' u_1 = 0,$$

qui a la même forme que (22) avec $l < k$, ce qui achève la démonstration.

Ainsi, si l'équation (1) n'est pas linéaire, la recherche de ses densités invariantes se fera nécessairement sous la forme :

$$T = S_0(u) + S_{p-1} + \cdots + S_{j_1}, \quad j_1 = h_1(p-1), \tag{25}$$

où $S_0(u)$ est une fonction non identiquement nulle à déterminer et où S_{j_1}. $(j = h(p-1)\,;\ h = 1,...,h_1)$, est un polynôme irréductible de niveau j,

5. Forme de S_{j_1}

Théorème 2. *Si T, sous la forme* (13), *est une densité invariante de l'équation* (1), *le polynôme de niveau maximum S_{j_1} est nécessairement égal à u si p est pair ; à u ou à u_k^2, $(k = 0, 1,...)$, si p est impair.*

En effet, si T est une densité invariante de l'équation (1) S_{j_1} est une densité invariante de l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^p u}{\partial x^p} = 0. \tag{26}$$

Nous étudions les densités invariantes de cette équation. Si $T(u,...,u_k)$ est une telle densité, il existe $X(u,...,u_{k+p-1})$ telle qu'on ait l'identité :

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{\partial T}{\partial u_i} u_{i+p} = \sum_{i=0}^{k+p-1} \frac{\partial X}{\partial u_i} u_{i+1}. \tag{27}$$

L'identification de (27) par rapport à u_{k+p} donne :

$$\frac{\partial X}{\partial u_{k+p-1}} = \frac{\partial T}{\partial u_k}, \tag{28}$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} \frac{\partial T}{\partial u_i} u_{i+p} = \sum_{i=0}^{k+p-2} \frac{\partial X}{\partial u_i} u_{i+1}. \tag{29}$$

L'intégration de (28) ($p \geqslant 2$) :

$$X = \frac{\partial T}{\partial u_k} u_{k+p-1} + X_1 (u, ..., u_{k+p-2})$$

permet d'écrire (29) :

$$\sum_{i=0}^{k-1} \frac{\partial T}{\partial u_i} u_{i+p} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial u_k}\right) u_{k+p-1} + \sum_{i=0}^{k+p-2} \frac{\partial X_1}{\partial u_i} u_{i+1}.$$

Si $p > 2$, l'identification de cette équation par rapport à u_{k+p-1} donne deux équations analogues à (28) et (29). En répétant ce procédé, on obtient, pour $2l \leqslant p + 1$:

$$\frac{\partial X_{l-1}}{\partial u_{k+p-l}} = L_{k-l+1}, \tag{30}$$

$$\sum_{i=0}^{k-l} \frac{\partial T}{\partial u_i} u_{i+p} = \sum_{i=0}^{k+p-l-1} \frac{\partial X_{l-1}}{\partial u_i} u_{i+1}, \tag{31}$$

où X_{l-1} dépend de $u, ..., u_{k+p-l}$ et où l'on a posé :

$$L_{k-l} (u, ..., u_{k+l}) = \frac{\partial T}{\partial u_{k-l}} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial u_{k-l+1}}\right) + ... + (-1)^l \frac{\partial^l}{\partial x^l}\left(\frac{\partial T}{\partial u_k}\right). \tag{32}$$

Le premier membre de (31) et les premiers termes de L_{k-l} sont nuls pour $k - l < 0$.

On a :

$$\frac{\partial L_{k-l}}{\partial u_{k+l}} = (-1)^l \frac{\partial^2 T}{\partial u_k^2}$$

et pour $l \geqslant 1$:

$$L_{k-l} = M_{k-l} (u, ..., u_{k+l-1}) + (-1)^l \frac{\partial^2 T}{\partial u_k^2} u_{k+l},$$

avec

$$\frac{\partial M_{k-l}}{\partial u_{k+l-1}} = (-1^l)\, l \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial u_k^2}\right).$$

Si p est pair ($p = 2q$), (30) et (31) peuvent s'écrire pour $l \leqslant q$. Pour $l = q$, (30) s'intègre sous la forme :

$$X_{q-1} = L_{k-q+1}\, u_{k+q} + X_q\,(u,\ldots,u_{k+q-1})$$

et (31) s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{k-q} \frac{\partial T}{\partial u_i}\, u_{i+2q} = \frac{\partial}{\partial x}\,(L_{k-q+1})\, u_{k+q} + \frac{\partial X_q}{\partial x}. \tag{33}$$

L'identification de (33) par rapport à u_{k+q}, donne, pour le terme en u_{k+q}^2 qui apparait au second membre, la condition :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial u_k^2} = 0.$$

Par suite, si $k \geqslant 1$, T est indépendant de u_k modulo $(\partial/\partial x)$ et si $k = 0$, T est linéaire en u.

Ainsi, lorsque p est pair, l'unique densité invariante de l'équation (26) et par suite de l'équation (1) est $T = u$. On ne peut associer à l'équation (1) aucune autre équation de conservation qu'elle-même ; en particulier il n'existe pas d'équation de conservation d'énergie, ce qui caractérise les équations dissipatives.

Si p est impair, ($p = 2q + 1$), on peut écrire (30) et (31) pour $l \leqslant q+1$. Pour $l = q + 1$, (30) s'intègre sous la forme :

$$X_q = M_{k-q}\, u_{k+q} + (-1)^q \frac{1}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial u_k^2}\, u_{k+q}^2 + X_{q+1}\,(u,\ldots,u_{k+q-1})$$

et (31) donne :

$$\sum_{i=1}^{k-q-1} \frac{\partial T}{\partial u_i}\, u_{i+2q+1} = \frac{\partial M_{k-q}}{\partial x}\, u_{k+q} + (-1)^q \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial u_k^2} \right) u_{k+q}^2 + \frac{\partial X_{q+1}}{\partial x}. \tag{34}$$

L'identification à zéro des coefficients des termes en u_{k+q} (si $q = 1$) et en u_{k+q}^2 qui apparaissent au second membre de (34), conduit à la condition :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial u_k^2} \right) = 0.$$

Par suite, T peut s'écrire modulo $(\partial/\partial x)$, pour $k \geqslant 1$:

$$T = T'\,(u,\ldots,u_{k-1}) + a_k\, u_k^2,$$

où a_k est une constante. On vérifie par ailleurs immédiatement que u_k^2 est une densité invariante de (26) et par suite il en est de même de T'. Ainsi les densités invariantes de (26) pour p impair sont u et les u_k^2, ($k=0, 1,\ldots$), et le théorème 2 est démontré.

Conséquences. La recherche d'une densité invariante du niveau maximum $j_1 = 2h_1q$ pour l'équation (1) avec $p = 2q + 1$ se fera sous la forme :

$$T = S_0(u) + S_{2q} + \cdots + S_{2(h_1-1)q} + a_{h_1} u^2_{h_1 q}, \tag{35}$$

où a_{h_1} est une constante non nulle. Si une telle densité existe, elle est unique modulo $(\partial/\partial x)$ et à une combinaison près des densités de niveaux maximum inférieurs.

6. Densités invariantes des équations d'ordre impair

Les théorèmes 1 et 2 montrent qu'il existe deux densités invariantes de niveau 0 : $T_1 = u$ et $T_2 = u^2$; cette dernière est associée à une équation de conservation d'énergie dont l'existence caractérise les équations dispersives.

Si l'équation (1) est linéaire, u_k en est solution avec u et par suite les densités de niveaux supérieurs existent et sont égales à u_k^2.

Par ailleurs, on montre aisément que la densité invariante de niveau maximum $2q$ existe toujours et qu'elle peut s'écrire :

$$T_3 = 2F(u) + (-1)^q u_q^2 \text{ avec } F(u) = \int_0^u f(u')\,du'. \tag{36}$$

Pour $p \geqslant 5$ il ne semble pas exister de densité invariante de niveau maximum supérieur à $2q$. Ce résultat a été démontré dans les cas $p = 5$ et $p = 7$ à partir de la forme (35).

Pour $p = 3$ la recherche des densités invariantes de niveau maximum supérieur à 2, sous la forme (35), conduit à la condition nécessaire :

$$f^{(4)}(u) = 0. \tag{37}$$

Ainsi, en général, il n'existe que trois densités invariantes.

La condition (37) est satisfaite en particulier pour l'équation (2) ainsi que pour :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \tag{38}$$

On trouve, pour l'équation (38), les trois densités suivantes :

$$T_4 = \frac{u^6}{6} - 5u^2 u_1^2 + 3u_2^2, \qquad T_5 = \frac{u^8}{8} - \frac{21}{2} u^4 u_1^2 + \frac{63}{5} u^2 u_2^2 - \frac{63}{10} u_1^4 - \frac{27}{5} u_3^2,$$

$$T_6 = \frac{u_{10}}{10} - 18u^6 u_1^2 + \frac{162}{5} u^4 u_2^2 - \frac{342}{5} u^2 u_1^4 - \frac{972}{35} u^2 u_3^2 + \frac{432}{7} u u_2^3 +$$

$$+ \frac{5508}{35} u_1^2 u_2^2 + \frac{324}{35} u_4^2.$$

Dans le cas de l'équation de Korteweg-de Vries, en raison de l'homogénéité de $f(u)$ et d'après (35), on cherche directement T sous la forme d'une somme de monômes m_0 de types (i/j) avec $2i+j$ constant. Par ailleurs, on peut montrer que si T est une densité invariante associée à une équation de conservation écrite sous la forme :

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(uT+Z)=0,$$

$\partial T/\partial u$ est également une densité invariante associée à l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial T}{\partial u}+\frac{\partial Z}{\partial u}\right)=0.$$

On déduit de ces deux remarques et du théorème 1 que si la densité invariante de niveau maximum $2h_1$ n'existe pas pour l'équation (2), les densités invariantes de niveaux maximum supérieurs n'existent pas non plus. D'autre part, du calcul de la densité de niveau maximum $2h_1$, on déduit les densités de niveaux maximum inférieurs par dérivation. La densité de niveau maximum 16 a été calculée :

$$T_{10}=\frac{u^{10}}{10}-36\,u^7u_1^2-630\,u^4u_1^4+\frac{756}{5}u^6u_2^2-1\,512\,uu_1^6+9\,072\,u^3u_1^2u_2^2+2\,160\,u^4u_2^3-$$

$$-\frac{1\,944}{5}u^5u_3^2+13\,608\,u_1^4u_2^2+\frac{238\,464}{5}uu_1^2u_2^3+13\,608\,u^2u_2^4-11\,664\,u^2u_1^2u_3^2-$$

$$-12\,960\,u^3u_2u_3^2+648\,u_1^4u_4^2+\frac{178\,848}{11}u_2^5-\frac{334\,368}{5}u_1^2u_2u_3^2-$$

$$-\frac{4\,906\,656}{55}uu_2^2u_3^2-\frac{1\,524\,096}{55}uu_1u_3^3+7\,776\,uu_1^2u_4^2+\frac{163\,296}{11}u^2u_2u_4^2-$$

$$-\frac{7\,776}{11}u^3u_5^2-\frac{11\,045\,808}{715}u_3^4+\frac{26\,570\,592}{715}u_2^2u_4^2+\frac{22\,208\,256}{715}u_1u_3u_4^2+$$

$$+\frac{5\,878\,656}{715}uu_4^3-\frac{23\,328}{11}u_1^2u_5^2-\frac{1\,306\,368}{143}uu_2u_5^2+\frac{69\,984}{143}u^2u_6^2-$$

$$-\frac{5\,878\,656}{715}u_4u_5^2+\frac{1\,679\,616}{715}u_2u_6^2-\frac{139\,968}{715}uu_7^2+\frac{419\,904}{10\,755}u_8^2.$$

Reçue le 15 X 1967

Institut Henri Poincaré, Paris, France

BIBLIOGRAPHIE

1. Whitham G. B., *Non-linear Dispersive Waves*. Proc. Roy. Soc., 1965, **283 A**, pp. 238–261.
2. — *Non-linear Dispersion of Water Waves*. J. Fl. Mech., 1967, **27**, *2*, pp. 399–412.
3. Zabusky N. J., *A Synergetic Approach to Problems of Non-linear Dispersive Wave Propagation and Interaction*. Presented at the Advanced Science Seminar, *Nonlinear Partial Differential Equations*, University of Delaware, Dec. 27–29, 1965.

ASUPRA FORMEI ŞI STUDIULUI DENSITĂŢILOR INVARIANTE ASOCIATE LA UNELE ECUAŢII CU DERIVATE PARŢIALE NELINIARE

(Rezumat)

Se studiază forma şi proprietăţile densităţilor invariante asociate la ecuaţia cu derivate parţiale (1) şi în particular la ecuaţia lui Korteveg-de Vries (2).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

D. C. 517.93 ; 517.53

ZEROS OF SOLUTIONS OF COMPLEX DIFERENTIAL EQUATIONS

BY

W. J. COLES and D. H. TUCKER

1. Introduction

Let t be a real variable, and let $p_{ij}(t)$, $(0 \leqq j \leqq i \leqq n)$, be complex-valued functions of t. Shin [1] has defined quasi-differential forms

$$(1)\qquad \begin{cases} u_p^{[0]}(t) = p_{00}(t)\, u(t), \\ u_p^{[k]}(t) = \mathrm{i} p_{kk}(t) \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u^{[k-1]}(t) + \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} p_{kj}(t)\, u^{[j]}(t), \quad 1 \leqq k \leqq n; \end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} v_p^{[0]}(t) = \overline{p_{nn}(t)}\, v(t), \\ v_p^{[k]}(t) = \mathrm{i}\, \overline{p_{n-k,\,n-k}(t)} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v^{[k-1]}(t) + \\ \quad + \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \frac{\overline{p_{n-j,\,n-k}(t)}\ \overline{p_{n-k,\,n-k}(t)}}{\overline{p_{n-j,\,n-j}(t)}}\, v_p^{[j]}(t), \quad 1 \leqq k \leqq n. \end{cases}$$

The operators $u^{[n]}$ and $v^{[n]}$ are adjoint in the sense that a Green's formula holds:

$$(3)\qquad \int_a^b [\bar{v}(t)\, u^{[n]}(t) - \overline{v^{[n]}(t)}\, u(t)]\, \mathrm{d}t = \mathrm{i} \sum_{k=0}^{n-1} v^{[k]}(t) \cdot u^{[n-k-1]}(t) \Big|_a^b .$$

The conditions that (1) and (2) be self-adjoint are

$$(4)\qquad p_{kj}(t) = \frac{\overline{p_{n-j,\,n-k}(t)}\ \overline{p_{n-k,\,n-k}(t)}}{\overline{p_{n-j,\,n-j}(t)}}, \quad 0 \leqq k, j \leqq n.$$

If (4) holds and

$$u^{[n]}(t) = p(t)\,u(t), \tag{5}$$

then, since $u^{\{k\}}(t) \equiv u^{[n]}(t)$, we may take $u(t) \equiv v(t)$ in (3) to get

$$\int_a^b (p(t) - \bar{p}(t))\,|u(t)|^2\,dt = i\sum_{k=0}^{n-1} \overline{u^{[k]}(t)}\,.\,u^{[n-k-1]}(t)\Big|_a^b. \tag{6}$$

Hence, if $\mathcal{I}m\,p(t)$ is one-signed, the real part of the right-hand side of (6) cannot be one-signed of opposite signe to $\mathcal{I}m\,p(t)$. For example, if $\mathcal{I}m\,p(t)$ is one-signed and not identically zero $u(t)$ cannot have a zero of order $1 + [(n-1)/2]$ at both a and b.

2. Equations in a Complex Variable

In this paper we adapt the foregoing technique to the complex plane. We can of course define operators (1) and (2) for a complex variable z; however, $\overline{v^{\{k\}}(z)}$ is in general not an analytic function, and we do not get a Green's function. Hence we parameterize our problem in terms of a real parameter.

Let C: $z = z(t)$ be a $C^{(n)}$ curve in the complex plane. Let

$$q_{00}(t) = p_{00}(z(t)),\ q_{ii}(t) = \frac{p_{ii}(z(t))}{z'(t)},\ 1 \leqq i \leqq n,\ q_{ij}(t) = p_{ij}(z(t)) \text{ otherwise.} \tag{7}$$

Let $r(t) = u(z(t))$. The operators $r_q^{[k]}(t)$, $1 \leqq k \leqq n$, are defined by (1), since the $q_{ij}(t)$'s are given. Further,

$$r_q^{[k]}(t) \equiv u_p^{[k]}(z(t)), \quad 0 \leqq k \leqq n. \tag{8}$$

Indeed, we have first that

$$u_p^{[0]}(z(t)) = p_{00}(z(t))\,u(z(t)) = q_{00}(t)\,r(t) = r_q^{[0]}(t).$$

Next, suppose that (8) holds for $k = 0, \ldots, m-1$, with $m \leqq n$. Then

$$u_p^{[m]}(z(t)) = i\frac{p_{mm}(z(t))}{z'(t)}\frac{d}{dt}u_p^{[m-1]}(z(t)) + \sum_{j=0}^{m-1} p_{kj}(z(t))\,u_p^{[j]}(z(t)) =$$

$$= i\,q_{mm}(t)\frac{d}{dt}r_q^{[m-1]}(t) + \sum_{j=0}^{m-1} q_{kj}(t)\,r_q^{[j]}(t) = r_q^{[m]}(t).$$

Now, corresponding to the set of operators $r_q^{[k]}(t)$, $0 \leqq k \leqq n$, there is an adjoint set given by (2) with p changed to q, say $s_q^{\{k\}}(t)$, $0 \leqq k \leqq n$. The condition for the operators $r_q^{[n]}(t)$ to be self-adjoint is

$$q_{kj} = \frac{\bar{q}_{n-j,\,n-k}\,\bar{q}_{n-k,\,n-k}}{q_{n-j,\,n-j}}\,.$$

In terms of C and the $p_{ij}(t)$'s, this is

$$(9)\qquad \begin{cases} z' = \dfrac{p_{nn}(z)}{\bar{p}_{00}(z)}, \quad p_{kk}(z)\,.\,\bar{z}' = p_{n-k,\,n-k}(z)\,.\,z', \quad 0<k<n; \\ p_{kj}(z) = \begin{cases} \dfrac{\bar{p}_{n-j,\,n-k}(z)\,.\,p_{n-k,\,n-k}(z)}{\bar{p}_{n-j,\,n-j}(z)}, & 0 \leqq j<k<n, \\ \dfrac{\bar{p}_{n-j,\,0}(z)\,.\,\bar{p}_{00}(z)\,.\,\bar{z}'}{\bar{p}_{n-j,\,n-j}(z)}, & 0 \leqq j<k=n. \end{cases} \end{cases}$$

We can eliminate z' and $\bar{z}'$ from all but the first of these conditions:

$$(10)\qquad \begin{cases} z' = \dfrac{p_{nn}(z)}{\bar{p}_{00}(z)}, \quad p_{kj}(z) = \dfrac{\bar{p}_{n-j,\,n-k}(z)\,.\,\bar{p}_{n-k,\,n-k}(z)}{\bar{p}_{n-j,\,n-j}(z)}, \quad 0 \leqq j<k<n, \\ \dfrac{\bar{p}_{nn}(z)\,\bar{p}_{00}(z)}{p_{00}(z)\,p_{nn}(z)} = \dfrac{\bar{p}_{n-k,\,n-k}(z)}{p_{kk}(z)}, \quad 0<k<n, \\ p_{nj}(z) = \dfrac{p_{nn}(z)\,.\,\bar{p}_{00}(z)\,.\,\bar{p}_{n-j,\,0}(z)}{\bar{p}_{n-j,\,n-j}(z)}, \quad 0 \leqq j<n. \end{cases}$$

Now, if $u(z)$ is a solution of (5), then

$$(11)\qquad r_q^{[n]}(t) \equiv q(t)\,r(t),$$

where $q(t) = p(z(t))$. Also, if (10) holds, then $r_q^{[n]}$ is self-adjoint, so that (6) holds. Hence, if $\mathcal{I}m\,q$ is one-signed and $\not\equiv 0$, and if

$$R_z(t) = \mathcal{R}e \sum_{k=0}^{n-1} r_q^{[k]}(t)\, r_q^{[n-k-1]}(t),$$

then $R_z(t) - R_z(s)$ cannot be zero or of sign opposite to $(t-s)\,.\,\mathcal{I}m\,q$. Thus we have the following theorem.

Theorem 1. *Let all but the first condition of* (10) *hold. Let* $u(z)$ *be a nontrivial solution of* (5). *Then no* $C^{(n)}$*-trajectory of the differential equation*

(12) $$z' = \frac{p_{nn}(z)}{p_{00}(z)},$$

has more than one zero of $u(z)$, *of order* $\geqq 1 + [(n-1)/2]$.

Theorem 1 can be applied to find zero-free (i. e., zeros of order $\geqq 1 + [(n-1)/2]$ regions for solutions of (5). For example, if (12) has a one-parameter family $z_c(t)$ of solution curves filling a region, and if $\exists\, t_0 \ni R_{z_c}(t_0)$ is zero or has sign different from (the same as) $\mathcal{I}m\, q$ for each c, then the set of points $\{z_c(t)\}$ with $t < t_0$ $(t > t_0)$ forms a zero-free region.

3. An Integration Formula and a Green's Transform

Instead of taking the natural adjoint of the parameterized diffferential equation, we proceed as follows. Let f and z be complex-valued functions of a real variable t, with differentiability properties as needed. Let

(13) $$D_0 f = z' \cdot f, \quad D_k f = \left(\frac{1}{z'} \cdot D_{k-1} f\right)', \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Let g be a function of t such that $D_h g$, $(1 \leqq h \leqq k)$, is defined. Since

$$z' \cdot \int D_k f = D_{k-1} f,$$

we have

(14) $$\int g\, D_n f = \int \left(\frac{1}{z'} \cdot D_0 g \cdot D_n f\right) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j}{z'^2} \cdot D_j g \cdot D_{n-j-1} f + \\ + (-1)^k \int \left(\frac{1}{z'} \cdot D_k g \cdot D_{n-k} f\right).$$

Indeed,

$$\int g D_n f = \int \left(\frac{1}{z'} \cdot D_0 g \cdot D_n f\right)$$

by definition of D_0. Also, integration by parts gives

$$\int \left(\frac{1}{z'} \cdot D_0 g \cdot D_n f\right) = \left(\frac{1}{z'} \cdot D_0 g \cdot \frac{1}{z'} \cdot D_{n-1} f\right) - \int \left(\frac{1}{z'} \cdot D_1 g \cdot D_{n-1} f\right),$$

which is (14) for $k = 1$. Finally, if (14) holds for k, the identity

$$\int\left(\frac{1}{z'}\,.\,D_k g\,.\,D_{n-k} f\right)=\left(\frac{1}{z'}\,.\,D_k g\,.\,\frac{1}{z'}\,.\,D_{n-k-1} f\right)-\int\left(\frac{1}{z'}\,.D_{k+1} g\,.\,D_{n-k-1} f\right)$$

gives (14) for $k+1$.

Now let $p(z)$ be analytic. We restrict our attention to the equation

$$w^{(n)}(z)-p(z)\,w(z)=0\,; \tag{15}$$

more general equations can be considered. Let $C: z=z(t)$ be a differentiable curve with $z'(t)\neq 0$. Let

$$f(t)=w(z(t)),\quad q(t)=p(z(t)).$$

Then

$$w(z)=\frac{1}{z'}\,.\,D_0 f.$$

Suppose that

$$w^{(k)}(z)=\frac{1}{z'}\,.\,D_k f. \tag{16}$$

Then, differentiating,

$$w^{(k+1)}(z)\,.\,z'=\left(\frac{1}{z'}\,.\,D_k f\right)'=D_{k+1} f.$$

Hence, by induction, (16) holds for $k=0,1,2,\ldots$ Thus, by (15),

$$D_n f(t)-z'(t)\,q(t)\,f(t)=0. \tag{17}$$

Now let $g(t)\equiv\bar{f}(t)$ in (14); integration with respect to t gives

$$\int_g D_n f=\int\bar{f}\,.\,z'\,qf=\int z'\,q\,|f|^2,$$

so that

$$\int z'\,q\,|f|^2=M_k f+(-1)^k\int\left(\frac{1}{z'}\,.\,D_k\bar{f}\,.\,D_{n-k} f\right), \tag{18}$$

where

$$M_k f=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(-1)^j}{z'^2}\,.\,D_j\bar{f}\,.\,D_{n-j-1} f. \tag{19}$$

4. Boundary Conditions on f

If we integrate from t_1 to t_2, (18) becomes

$$(19)\quad \int_{t_1}^{t_2} z'(t)\, q(t)\, |f(t)|^2\, dt + (-1)^{k+1} \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{z'(t)} \cdot D_k \bar{f}(t) \cdot D_{n-k} f(t)\, dt = \\ = M_k f(t_2) - M_k f(t_1), \quad k \leqq n.$$

We seek limitations on the number of points at which $M_k f$ assumes the same value. We remark that such restrictions automatically imply restrictions on zeros of solutions of the differential equation. Indeed, If $h = 1 + [(n-1)/2]$, if $1 \leqq k \leqq n$, and if $f \cdot f^{(n-h)}$ has a zero of order h at t_0, then $M_k f(t_0) = 0$.

To relate $D_k \bar{f}$ and $\overline{D_k f}$ by (17) we specialize C to be the straight line segment from z_1 to z_2, $C: z = z_1 + te^{i\theta}$, $0 \leqq t \leqq |z_2 - z_1| t_0$. Thus

$$\frac{dz}{dt} = e^{i\theta} = e^{2i\theta} \frac{d\bar{z}}{dt},$$

so that

$$(20)\qquad \overline{D_k f} = e^{2i\theta(k-1)} D_k \bar{f}, \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Thus (19) becomes

$$(21)\qquad \int_0^{t_0} [e^{2i\theta k} q(t) |f(t)|^2 + (-1)^{k+1} \overline{D_k f} \cdot D_{n-k} f]\, dt = 0$$

if $M_k f(0) = M_k f(t_0)$.

Theorem 2. (a) *$M_n f$ cannot assume the same value more than once on any line $z = z_1 + te^{i\theta}$ such that $\mathcal{R}e\,[(-i)^{n+1} e^{i\theta n} q(t)]$ is one-signed and not $\neq 0$.*

(b) *Let $n = 2m$. $M_m f$ cannot assume the same value more than once on any line $z = z_1 + te^{i\theta}$ such that $\mathcal{I}m\,[e^{2i\theta m} q(t)]$ is one-signed and $\neq 0$.*

Corollary. *Under either hypothesis in Theorem 2, if w is a non-trivial solution of (15), then $w \cdot w^{(n-h)}$, $(h = 1 + [(n-1)/2])$, cannot have more than one zero of order $\geq h$ on the given line.*

Proof of Theorem 2. Using $k = n$ and $\overline{D_n f} = \bar{z}' \cdot \bar{q} \cdot f$ in (21) gives

$$\int_0^{t_0} [e^{2i\theta n} q(t) + (-1)^{n+1} \bar{q}(t)]\, |f(t)|^2\, dt = 0.$$

Multiplication by $(-\mathrm{i})^{n+1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta n}/2$ gives

$$\int_0^{t_0} \mathcal{R}e\,[(-1)^{n+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta n}\,q\,(t)]\,\mathrm{d}t = 0,$$

which gives (a).

If $k = m = n/2$, (21) gives

$$\int_0^{t_0} [\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta m}\,q\,(t)\;f\,(t)\;|^2 + (-1)^{m+1}\;|\,D_m f\,|^2]\,\mathrm{d}t = 0;$$

consideration of real and imaginary parts gives (b).

Theorem 3. *Let* $\mathcal{I}m\,[\mathrm{e}^{\mathrm{i}n(2\theta-\pi)/2}\,q\,(t)]$ *be one-signed and* $\not\equiv 0$ *on a line* $z = z_1 + t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. *If, for some* k *such that* $1 \leqq k < n$, $M_k f$ *assumes the same value at two points on the line,* $M_{n-k} f$ *cannot assume the same value at those two points.*

Proof. Assume that $M_k f\,(0) = M_k f\,(t_0)$ and $M_{n-k} f\,(0) = M_{n-k} f\,(t_0)$. Interchange k and $n-k$ in (21), multiply by $(-1)^{n+2k}$, and take complex conjugates to get

$$\int_0^{t_0} [\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta(n-k)}\,(-1)^n\,\bar{q}\,(t)\;|\,f\,(t)\;|^2 + (-1)^{k+1}\,\overline{D_k f}\,.\,D_{n-k} f]\,\mathrm{d}t = 0.$$

Subtracting from (21) and multiplying by $\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta k}/2$ gives the contradiction

$$\int_0^{t_0} \mathcal{I}m\,[\mathrm{e}^{\mathrm{i}n(2\theta-\pi)/2}\,q\,(t)]\,\mathrm{d}t = 0.$$

5. Examples

Let $\mathcal{R}e\;q = q_1$ and $\mathcal{I}m\;q = q_2$. We give applications of Theorem 2 in case $q_1 \cdot q_2$ is one-signed and $\not\equiv 0$.

Let n be odd. Then $M_n f$ can vanish at most once if $q_1 \cdot q_2 \geqq 0$ and $n\theta$ lies in the second or fourth quadrants, or if $q_1 \cdot q_2 \leqq 0$ and $n\theta$ lies in the first or third quadrants.

Let n be even; say $n = 2m$. Then $M_n f$ vanishes at most once if one of the following holds: (i) $q_1 q_2 \geqq 0$; and either $n\theta$ is in the first or third quadrants, or $n\theta$ is in the second quadrant and $(-1)^m q_1 \geqq 0$, or $n\theta$ is in the fourth quadrant and $(-1)^m q_1 \leqq 0$; (ii) $q_1 q_2 \leqq 0$; and either $n\theta$ is in the second or fourth quadrants, or $n\theta$ is in the first quadrant and $(-1)^m q_1 \leqq 0$, or $n\theta$ is in the third quadrant and $(-1)^m q_1 \geqq 0$.

Received the 28 X 1967

The University of Utah, Salt Lake City, USA

REFERENCES

1. Shin D., *Existence Theorems for the Quasi-differential Equation of the nth Order*. C. R. Ac. Sci. URSS, 1938, **18**, pp. 515–518.

ZEROURILE SOLUȚIILOR ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE COMPLEXE

(Rezumat)

Autorii, luînd ca punct de plecare o lucrare a lui Shin [1], extind rezultatele acestuia la cazul planului complex.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

УДК 517.947.5

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Н. А. ПАРТИНОВА и Д. Д. БАЙНОВ

В настоящей работе при помощи трансформации фурье решим следующую граничную задачу:

Решить дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\theta}{\partial t}=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial^2\theta}{\partial x_\nu^2}+\frac{Q}{k}\prod_{\nu=1}^{n}\delta(x_\nu) \tag{1}$$

при следующих условиях:

$$\lim_{\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu^2\to\infty}\theta=0,\quad \lim_{\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu^2\to 0}\theta=0 \text{ и } \theta(x_1,x_2,\ldots,x_n,0)=0. \tag{2}$$

Поставленная так задача описывает тепловой поток источника постоянной теплоты, поставленный в начале. Выражение $Q\prod_{\nu=1}^{n}\delta(x_\nu)$ представляет собой плотность распределения теплового источника, Q — мощность излучения, а k — коэффициент теплопроводности.

Применяем трансформацию Фурье к (1) и находим

$$\frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\theta}{\partial t}e^{i\sum_{\nu=1}^{n}\xi_\nu x_\nu}dx_1\,dx_2\ldots dx_n=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2\theta}{\partial x_l^2}e^{i\sum_{\nu=1}^{n}\xi_\nu x_\nu}dx_1\,dx_2\ldots dx_n+$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Q}{k}\prod_{\nu=1}^{n}\delta(x_\nu)e^{i\sum_{\nu=1}^{n}\xi_\nu x_\nu}dx_1\,dx_2\ldots dx_n. \tag{3}$$

Интегрируем пространственные производные по частям и полагаем

$$\Theta = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \theta e^{i \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \xi_\nu} dx_1 dx_2 \dots dx_n, \tag{4}$$

где $\Theta|_{t=0} = 0$ и

$$X = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q}{k} \prod_{\nu=1}^{n} \delta(x_\nu) e^{i \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \xi_\nu} dx_1 dx_2 \dots dx_n. \tag{5}$$

Тогда (2) примет вид

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Theta}{\partial t} = -\left(\sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu^2 \right) \Theta + \bar{X}, \tag{6}$$

где

$$\bar{X} = \frac{Q}{k} \prod_{\nu=1}^{n} \delta(x_\nu). \tag{7}$$

Интегрируем равенство (6) и получаем

$$\Theta = \alpha \int_0^t e^{-\alpha \sum_{\nu=1}^{n} \xi_n^2 (t-t')} \bar{X} dt'. \tag{8}$$

Равенство (8) является фурьеровой трансформацией решения $\theta(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$.

Берем обратную трансформацию и получаем

$$\theta(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \Theta e^{-i \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu x_\nu} d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n \tag{9}$$

или

$$\theta = \frac{\alpha}{(2\pi)^{n/2}} \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha \sum_{\nu=1}^{n} \xi_n^2 (t-t')} e^{-i \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu x_\nu} \bar{X} d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n. \tag{10}$$

Пусть

$$F(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = e^{-\alpha \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu^2 (t-t')}. \tag{11}$$

Обратной трансформацией (11) является

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu^2 (t-t')} e^{-i \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \xi_\nu} d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_n =$$

(12)

$$= \prod_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha \xi_\nu^2 (t-t')} e^{-i \xi_\nu x_\nu} d\xi_\nu .$$

Полагаем

$$\Phi(x_\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha \xi_\nu^2 (t-t')} e^{-i \xi_\nu x_\nu} d\xi_\nu . \tag{13}$$

Дифференцируем равенство (13) и находим

$$\Phi'(x_\nu) = -\frac{x_\nu}{2\alpha(t-t')} \Phi(x_\nu) . \tag{14}$$

Интегрируем (14) и получаем

$$\ln \Phi = -\frac{x_\nu^2}{4\alpha(t-t')} + C, \tag{15}$$

где

$$C = \ln \Phi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha \xi_\nu^2 (t-t')} d\xi_\nu = \ln \sqrt{\frac{\pi}{\alpha(t-t')}} . \tag{16}$$

Из равенств (15) и (16) определяем функцию

$$\Phi = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha(t-t')}} e^{-\frac{x_\nu^2}{4\alpha(t-t')}} . \tag{17}$$

Имея ввиду равенства (13) и (17) получаем

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{2^{n/2} [\alpha(t-t')]^{n/2}} e^{-\frac{\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^2}{4\alpha(t-t')}} . \tag{18}$$

Теперь выведем формулу, которая нам будет необходима для вычисления равенства (10).

Пусть даны функции

$$F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f(u_1, u_2 \ldots, u_n) e^{i \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu \xi_\nu} du_1 du_2 \ldots du_n ,$$

$$G(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} g(s_1, s_2, \ldots, s_n) e^{i \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu s_\nu} ds_1 ds_2 \ldots ds_n.$$

Производим трансформацию

$$u_1 = x_1 - v_1, \; u_2 = x_2 - v_2, \ldots, u_n = x_n - v_n; \; s_1 = v_1, \; s_2 = v_2, \ldots, s_n = v_n;$$

$$I\left(\frac{u_1 s_1}{x_1 v_1}\right) = I\left(\frac{u_2 s_2}{x_2 v_2}\right) = \ldots = I\left(\frac{u_n s_n}{x_n v_n}\right) = 1.$$

Тогда для произведения $F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) G(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ получаем

$$F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) G(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1 - v_1, x_2 - v_2, \ldots, x_n - v_n) e^{i \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu x_\nu} dv_1 \ldots dv_n ds_1 \ldots ds_n.$$

Применяем обратную трансформацию фурье и находим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi_1, \xi_2 \ldots, \xi_n) G(\xi_1, \xi_2 \ldots, \xi_n) e^{-i \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu x_\nu} d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_n =$$

(19)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1 - v_1, x_2 - v_2, \ldots, x_n - v_n) g(v_1, v_2, \ldots, v_n) dv_1 dv_2 \ldots dv_n.$$

Применяя к равенству (10) формулу (19) получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi_1, \xi_2 \ldots, \xi_n) \overline{X}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) e^{-i \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu x_\nu} d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_n =$$

(20)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1 - v_1, x_2 - v_2, \ldots, x_n - v_n) \frac{Q}{k} \prod_{\nu=1}^{n} \delta(v_\nu) dv_1 dv_2 \ldots dv_n.$$

Замещаем функцию f равным ей из (18). Тогда для решения частного дифференциального уравнения (1) получаем

$$(21) \quad \theta(x_1, x_2, \ldots, x_n t) = \frac{\alpha Q}{2^n (\pi\alpha)^{n/2} k} \int_0^t \frac{dt'}{(t - t')^{n/2}} \prod_{\nu=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x_\nu - v_\nu)^2}{4\alpha(t-t')}} \delta(v_\nu) dv_\nu.$$

Используем свойство δ функции

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta(t)\,dt = x(0)$$

и получаем

$$\theta(x_1, x_2, \ldots x_n, t) = \frac{\alpha Q}{2^n(\pi\alpha)^{n/2}k}\int_0^t \frac{dt'}{(t-t')^{n/2}}\, e^{-\frac{\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^2}{4\alpha(t-t')}}. \tag{22}$$

Полагаем

$$\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^2 = r^2, \quad u = \frac{r^2}{4\alpha(t-t')}, \quad du = \frac{4\alpha u^2}{r^2}\,dt'$$

производим подстановку в (22) и находим

$$\theta(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) = \frac{Q}{\pi^{n/2}kr^{n-2}}\int_{\frac{r^2}{4\alpha t}}^{\infty} u^{n/2-2}e^{-u}\,du.$$

Поступила 5 IV 1966 г.

Математический Факультет Университета
г. София, Н. Р. Болгария

OBSERVAŢII PE MARGINEA UNEI ECUAŢII DIFERENŢIALE DE TIP PARABOLIC

(Rezumat)

Se soluţionează cu ajutorul transformatei Fourier, ecuaţia diferenţială (1), cu condiţiile (2).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

C. D. 517.949.21

L'INTÉGRATION D'UNE ÉQUATION LINÉAIRE AUX DIFFÉRENCES

PAR

VIOREL MURGESCU

Communication présentée à la session scientifiques de l'Institut Polytechnique de Jassy, 28–30 septembre 1967

1. Dans cette Note on résout le problème de l'intégration (dans le sens du calcul aux différences) d'une équation linéaire aux coefficients variables, d'une forme particulière, en présentant un certain intérêt parce que, d'une part elle peut être considérée comme une généralisation de l'équation fonctionnelle de la fonction d'Euler $\Gamma(z)$, et d'autre part, parce qu'elle ressemble à l'équation différentielle d'Euler $\left(\sum_{p=0}^{n} a_p x^p y^{(p)} = 0\right)$ en ce qui concerne la forme et la méthode d'intégration.

2. Soit l'équation linéaire et homogène aux différences finies, d'ordre n,

$$\sum_{p=0}^{n} a_p \Psi_p(z;h)\, F(z+ph) = 0, \tag{1}$$

où z est une variable complexe, a_p et h (réel) sont des constantes connues et $\Psi_p(z;h)$ sont des fonctions données, de la forme

$$\Psi_p(z;h) \overset{\text{déf}}{=} \prod_{q=1}^{n-p} [z+(n-q)h],\ (p=0,1,2,\ldots,n-1);\ \Psi_n(z;h) \overset{\text{déf}}{=} 1. \tag{2}$$

On observe tout d'abord que ces fonctions, après le changement de variable indépendente

$$z = h\zeta, \tag{3}$$

deviennent

(4) $$\Psi_p(h\zeta;h) = h^{n-p}\prod_{q=1}^{n-p}(\zeta+n-q) = h^{n-p}\,\Psi_p(\zeta;1),\ (p=0,1,2,\ldots,n-1),$$

où

(5) $$\Psi_p(\zeta;1) = \Gamma(\zeta+n)/\Gamma(\zeta+p),\ (p=0,1,2,\ldots,n-1).$$

En effectuant le changement de variable (3) dans l'équation (1), — compte tenu de (4) et (5) —, on obtient, après la suppression du facteur $\Gamma(\zeta+n)$, l'équation

(1′) $$\sum_{p=0}^{n}\frac{a_p h^{n-p}}{\Gamma(\zeta+p)}F(h\zeta+ph) = 0.$$

En notant encore

(6) $$F(h\zeta) = \widetilde{F}(\zeta),$$

l'équation (1′) devient

(1″) $$\sum_{p=0}^{n}\frac{a_p h^{n-p}}{\Gamma(\zeta+p)}\widetilde{F}(\zeta+p) = 0.$$

On voit aisément que par la transformation

(7) $$\widetilde{F}(\zeta) = \Gamma(\zeta)\,\Phi(\zeta),$$

où $\Phi(\zeta)$ est la nouvelle fonction inconnue, l'équation (1″) est réductible à l'équation linéaire à coefficients constants

(8) $$\sum_{p=0}^{n}a_p h^{n-p}\Phi(\zeta+p) = 0,$$

dont l'équation caractéristique est

(9) $$\sum_{p=0}^{n}a_p(\lambda/h)^{n-p} = 0.$$

Si les fonctions $\eta_1(\zeta), \eta_2(\zeta),\ldots,\eta_n(\zeta)$ constituent un système fondamental de solutions pour l'équation (8) et $\omega_1(\zeta), \omega_2(\zeta),\ldots, \omega_n(\zeta)$ est un système de n fonctions arbitraires, mais périodiques, de période égale à 1, il s'ensuit que la solution générale de l'équation (8) ayant la forme

$$\Phi(\zeta) = \sum_{\nu=1}^{n}\omega_\nu(\zeta)\,\eta_\nu(\zeta),$$

la solution générale de l'équation (1″) est la suivante :

$$\widetilde{F}(\zeta) = \Gamma(\zeta) \sum_{\nu=1}^{n} \omega_\nu(\zeta)\, \eta_\nu(\zeta). \tag{10}$$

Ayant en vue la notation (6) et le changement de variable (3), il en résulte que la solution générale de l'équation (1) a l'expression

$$F(z) = \Gamma\left(\frac{z}{h}\right) \sum_{\nu=1}^{n} \widetilde{\omega}_\nu(z)\, \eta_\nu\left(\frac{z}{h}\right), \tag{11}$$

où $\widetilde{\omega}_\nu(z)$ sont des fonctions arbitraires, mais périodiques, de période égale à h.

Remarques. 1°. Il est évident que le procédé indiqué ci-dessus peut être appliqué aussi aux équations non homogènes.

2°. Si l'on pose dans l'équations (1) $n = 1$ et $a_0 = a_1 = 1$, on obtient l'équation fonctionnelle

$$F(z + h) - zF(z) = 0, \tag{12}$$

semblable à celle de $\Gamma(z)$. Sa solution générale est

$$F(z) = \widetilde{\omega}(z)\, h^{\frac{z}{h}}\, \Gamma\left(\frac{z}{h}\right), \tag{13}$$

$\widetilde{\omega}(z)$ étant une fonction arbitraire, mais périodique, de période égale à h.

3°. On peut certainement imaginer beaucoup d'autres espèces d'équations linéaires, en changeant les fonctions (2), dont les solutions générales soient obtenues par leur réduction aux équations à coefficients constants. On a choisi ici l'équation (1) non seulement pour les motifs soulignés ci-dessus, mais encore parce que le procédé d'intégration ci-indiqué permet l'extension d'un théorème de Poincaré à une classe plus vaste d'équations linéaires[1]).

Institut politéchnique de Jassy,
Chaire de Mathématiques II

INTEGRAREA UNEI ECUAŢII CU DIFERENŢE

(Rezumat)

Se integrează ecuaţia funcţională (1), în care funcţiile ce intervin în expresiile coeficienţilor au forma (2), soluţia sa generală avînd expresia (11). Se face de asemenea observaţia că ecuaţia (1) poate fi considerată ca generalizînd ecuaţia funcţională a funcţiei $\Gamma(z)$.

[1]) À ce sujet on s'occupera dans un prochain numéro de ce *Bulletin.*

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1–2, 1968

C. D. 517.948

SUR LE SPECTRE DE L'OPÉRATEUR VOLTERRA

PAR

ADRIAN CORDUNEANU

Communication présentée dans la session scientifique de l'Institut Polytechnique de Jassy, 28—30 Septembre 1967

Le but de cette Note est d'établir pour l'opérateur V:

$$(Vf)(x) = \int_x^\infty k(x,y) f(y)\, dy, \quad x \geqslant 0, \tag{1}$$

où $k(x,y)$ est une fonction continue pour $0 \leq x \leq y$ à valeurs complexes, quelques résultats analogues à ceux établis dans [1] et [2] pour l'opérateur Volterra du type classique.

Pour que V_1 soit borné dans $L_\infty(0, \infty)$, il suffit à supposer:

$$\sup_{x \geq 0} \int_x^\infty |k_1(x,y)|\, dy < +\infty, \tag{2}$$

$\| V_1 \|$ étant majorée par ce supremum.

Nous considérons aussi des opérateurs V_2 satisfaisant à une condition plus large, à savoir, quel que soit $t > 0$,

$$\sup_{0 \leq x \leq t} \int_t^\infty |k_2(x,y)|\, dy < +\infty. \tag{3}$$

Définition. On appelle λ point régulier pour l'équation $V\varphi - \lambda\varphi = f$ dans $L_\infty(0, \infty)$ si quel que soit $f \in L_\infty(0, \infty)$, la solution φ existe, est unique et appartient à $L_\infty(0, \infty)$.

L'ensemble des points irréguliers forme le spectre $\sigma(V)$ de l'équation $V\varphi - \lambda\varphi = f$.

Il est aisé de voir que le spectre de l'équation se réduit au spectre de l'opérateur si V est défini dans $L_\infty(0, \infty)$.

Lemme. *Si* $V = V_1 + V_2$, *où* V_1 *est du type* (2) *et* V_2 *du type* (3),

$$\sigma(V) - \{0\} \subseteq \sigma(V_t) \subseteq \sigma(V), \quad \forall t > 0, \tag{4}$$

V_t *étant la restriction de* V *à l'espace* $L_\infty(t, \infty)$.

Démonstration. Si λ est régulier pour V il est évident qu'il l'est aussi pour V_t. Soit maintenant λ régulier pour V_t, $\lambda \neq 0$. Alors, l'équation

$$\int_x^\infty k(x,y)\,\psi(y)\mathrm{d}y - \lambda\psi(x) = f(x), \quad x \geqslant t, \tag{5}$$

a une solution unique $\psi \in L_\infty(t, \infty)$, quel que soit $f \in L_\infty(0, \infty)$. Pour $0 \leqslant x \leqslant t$, l'équation

$$\int_x^t k(x,y)\,\eta(y)\,\mathrm{d}y - \lambda\eta(x) = f(x) - \int_t^\infty k(x,y)\,\psi(y)\mathrm{d}y, \tag{6}$$

a une solution unique $\eta \in L_\infty(0, t)$. En posant

$$\varphi(x) = \begin{cases} \eta(x), & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ \psi(x), & x > t, \end{cases} \tag{7}$$

nous voyons que $V\varphi - \lambda\varphi = f$ a une solution unique $\varphi \in L_\infty(0, \infty)$, $\forall f \in L_\infty(0, \infty)$. L'inclusion (4) est démontrée.

Théorème 1. a) V *étant du type* (1) *et satisfaisant* (2), *il résulte*

$$r(V) \leqslant \lim_{t\to\infty}\left\{\sup_{x\geqslant t}\int_x^\infty |k(x,y)|\,\mathrm{d}y\right\}. \tag{8}$$

b) *Si* V *est défini selon le lemme,* $\tilde{V}$ *satisfaisant à la condition* (2) *et de plus :*

$$\lim_{t\to\infty}\left\{\sup_{x\geqslant t}\int_x^\infty |\tilde{k}(x,y)|\,\mathrm{d}y\right\} = 0, \tag{9}$$

il résulte

$$\sigma(V) - \{0\} \subseteq \sigma(V + \tilde{V}) \subseteq \sigma(V) + \{0\}. \tag{10}$$

Démonstration. a) Compte tenu de (4) et de l'inégalité $r(V_t) \leqslant \| V_t \|$, on obtient (8) en observant que la limite existe.

b) Soit $\lambda \neq 0$ régulier pour V et t aussi grand que $\|\widetilde{V}_t\| < \|R(\lambda; V\|^{-1}$. Vu que $\|R(\lambda; V)\|^{-1} \leqslant \|R(\lambda; V_t)\|^{-1}$, il résulte $\|\widetilde{V}_t\| \cdot \|R(\lambda; V_t)\| < 1$ et donc $R(\lambda; V_t + \widetilde{V}_t)$ existe, est défini sur $L_\infty(t, \infty)$ et est continu, la série:

$$R(\lambda; V_t + \widetilde{V}_t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [R(\lambda; V_t)\widetilde{V}_t]^k R(\lambda; V_t) \tag{11}$$

étant convergente dans l'espace des opérateurs linéaires et continus définis sur $L_\infty(t, \infty)$ à valeurs dans lui-même. Il résulte que λ est point régulier pour $V_t + \widetilde{V}_t$ et donc pour $V + \widetilde{V}$ (v. le lemme). Ainsi, l'inclusion $\sigma(V + \widetilde{V}) \subseteq \sigma(V) + \{0\}$ est prouvée. En écrivant $V = (V + \widetilde{V}) + (-\widetilde{V})$, on déduit et $\sigma(V) \subseteq \sigma(V + \widetilde{V}) + \{0\}$. La démonstration est achevée.

Le théorème 1 nous fournit une condition suffisante pour que l'opérateur V du type (1) + (2) soit quasinilpotent. Une autre condition est donnée par le.

Théorème 2. *Si V du type* (1), *défini sur* $L_p(0, \infty)$ *à valeurs dans* $L_p(0, \infty)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *est compact, il est quasinilpotent.*

On peut démontrer ce résultat en faisant appel au procédé utilisé en [3].

Le théorème suivant fournit une condition suffisante pour que l'opérateur V du type (1) soit compact (donc et quasinilpotent):

Théorème 3. a) *Si V satisfait à la condition*

$$\int_0^\infty dy \left(\int_0^y |k(x,y)|^p \, dx \right)^{q/p} < +\infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \tag{12}$$

il est compact dans $L_p(0, \infty)$, $1 < p < \infty$;

b) *Si V satisfait à la condition:*

$$\int_0^\infty \sup_{0 \leqslant x \leqslant y} |k(x, y)| \, dy < +\infty, \tag{13}$$

il est compact dans $L_\infty(0, \infty)$.

Remarque 1. On peut établir un résultat analogue au théorème 1 pour les espaces $L_p(0, \infty)$, $1 \leqslant p < \infty$. Nous avons considéré le cas $p = \infty$ seulement pour simplifier l'écriture.

Remarque 2. Toutes les propositions énoncées ou démontrées ci-dessus restent valables sous forme vectorielle.

Institut Polytehnique de Jassy,
Chaire de Mathématiques I

BIBLIOGRAPHIE

1. Гольденгершель Е. И., *Спектр Вольтеррова оператора на полуоси и экспоненциальный рост решения систем интегральных уравнений типа Вольтерра.* Мат. сб. АН СССР, 1964, **64**, стр. 115-139.
2. Corduneanu A., *Le spectre de l'opérateur Volterra dans certains espaces de fonctions.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1967, **XIII (XVII)**, *3–4*, pp. 77–82.
3. Ringrose J. R., *Compact Linear Operators of Volterra Type.* Proc. of the Cambridge Philos. Soc., 1955, Part I, **51**, pp. 44–55.

DESPRE SPECTRUL OPERATORULUI VOLTERRA

(Rezumat)

Se dă o limitare superioară (8) pentru raza spectrală a operatorului V de tipul (1)+(2), De asemenea se demonstrează un rezultat referitor la spectrul operatorului perturbat $V + \widetilde{V}$. V satisfăcînd condiţiile lemei, iar $\widetilde{V}$ condiţiile (2) şi (9).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

C. D. 517.948

TEOREMI DI UNICITÀ PER LE SOLUZIONI DI TALUNE EQUAZIONI FUNZIONALI E SEPARAZIONE DEGLI AUTOVALORI DI UN PARAMETRO DA CUI QUELLE DIPENDONO

DI

MAURO PICONE
Socio d'onore dell'Accademia della Repubblica Socialista di Romania
e
D. MANGERON

1. Gli AA. hanno formulato e risolto per primi[1]) una vasta classe di problemi al contorno con operatori differenziali non classici, di cui il prototipo e il sistema [1]

$$[A(x)\,u' + \lambda\,B(x)\,u]' + \lambda\,[B(x)\,u' + C(x)\,u] = 0, \tag{1}$$

$$u\,|_{\mathrm{Fr}R} = 0, \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_m), \quad R = R(x_i^* \leqslant x_i \leqslant x_i^{**}), \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{2}$$

La novità di esso sistema consta nel fatto che il „rettangolo" $R = R(x_i^* \leqslant x_i \leqslant x_i^{**})$ è a m-dimensioni ed il simbolo $u^{(n)}$ è la „derivata totale" d'ordine n, $u^{(n)} \equiv \partial^{mn}/\partial x_1^n \partial x_2^n \ldots \partial x_m^n$.

La trattazione variazionale [2], [3] e più recentemente anche la programmazione dinamica di tali problemi [4], [5] avente alla base il prototipo

$$F(f) = \int_R A(x) f'^2(x)\,\mathrm{d}x, \quad (x = x_1, x_2, \ldots, x_m), \quad f' \equiv \frac{\partial^m f}{\partial x_1\,\partial x_2 \ldots \partial x_m}, \tag{3}$$

$$H(f) = \int_R [2B(x) f(x) f'(x) + C(x) f^2(x)]\,\mathrm{d}x = \pm 1, \quad R = \{x_i^* \leqslant x_i \leqslant x_i^{**}\}, \tag{4}$$

si inquadra felicemente nell'ambito dei risultati conseguiti dal primo degli AA. spettanti ai generali problemi di calcolo delle variazioni riguardanti integrali pluridimensionali d'ordine qualsivoglia nel vettore minimante a più componenti, cristallizzati in una vasta memoria inserita negli *Atti dell'Accademia Nazionale dei Lincei* [6] ed in alcune note pubblicate in questo *Bollettino* [7], [8].

---

[1]) Vedasi, ad esempio, in questo *Bollettino*, la Nota di M. N. Oguztöreli [9], come pure una serie di Note lincee dovute a D. Mangeron oppure la recentissima Nota de M. S. Baouendi e P. Grisvard [10], [11] concernente l'equazione di evoluzione ed il problema variazionale ad essa associato.

Poichè oggidì vieppiù si allarga la problematica spettante agli operatori funzionali non classici, comprendendovi anche gli operatori generalizzati [2]), gli AA. espongono cui sotto, prendendo le mosse dalla Memoria [6] e conservando le notazioni e le definizioni ivi introdotte, teoremi di unicità per le soluzioni di talune equazioni funzionali e ne presentano l'elaborazione del problema di separazione degli autovalori di un parametro da qui quelle dipendono.

2. Supposta la funzione $f(x,y,p)$ di classe uno, in $B\times C$, rispetto alle variabili y_i e p_{ih}, consideriamo i seguenti problemi:

Problema I. *Ricercare una funzione* $\overset{\circ}{y}(x)$ *dell'insieme* $E^{(\nu)}$, *per la quale, per ogni funzione* $y^{(x)}$ *di* $E^{(\nu)}$, *sia soddisfatta l'equazione*

$$\int_A \sum_{i=1}^{n} \{f_{y_i}[x,\overset{\circ}{y}(x), D\overset{\circ}{y}(x)]\,[y_i(x)-\overset{\circ}{y}_i(x)]+ \tag{5}$$
$$+\sum_{h=1}^{(\mu_i r)} f_{p_{ih}}[x,\overset{\circ}{y}(x), D\overset{\circ}{y}(x)]\,D_h[y_i(x)-\overset{\circ}{y}_i(x)]\}\,dx=0.$$

Problema II. *Ricercare una funzione* $\overset{\circ}{y}(x)$ *dell'insieme* $E^{(\nu)}$, *che sia regolare rispetto alla funzione* $f(x,y,p)$ *e soddisfi, in* A, *il sistema di equazioni di Eulero-Lagrange:*

$$\mathfrak{E}_f(\overset{\circ}{y})=0, \quad (per\ x\in A), \tag{6}$$

e, sulla frontiera di A, *si abbia, per ogni funzione* $y(x)$, *di* $E^{(\nu)}$,

$$\sum_{l=1}^{r}\sum_{i=1}^{n}\sum_{h=1}^{(\mu_i r)}\sum_{\mu_{h'}+\mu_{h''}=\mu_h-1}^{(l)}(-1)^{\mu_{h'}}\int_{FA} D_{h'}f_{p_{ih}}[x,\overset{\circ}{y}(x),D\overset{\circ}{y}(x)]\times \tag{7}$$
$$\times D_{h''}[y_i(x)-\overset{\circ}{y}_i(x)]\cos(x_l,N)\,d\sigma=0.$$

Problema III (*di Dirichlet*). *Assegnata una funzione* $\overline{y}(x)$, *di classe* μ *in* A, *per la quale il punto* $[x,\overline{y}(x),D\overline{y}(x)]$ *è sempre in* $B\times C$, *ricercare una funzione* $\overset{\circ}{y}(x)$, *di classe* $\nu\ (\geqq\mu)$ *in* A, *per la quale il punto* $[x,\overset{\circ}{y}(x), D\overset{\circ}{y}(x)]$ *è sempre in* $B\times C$, *che sia regolare rispetto alla funzione* $f(x,y,p)$, *e soddisfi le equazioni:*

$$\mathfrak{E}_f(\overset{\circ}{y})=0 \quad per\ x\in A, \tag{8}$$

---

[2]) Nel volume ricco di contenuto dovuto al Yu. M. Berezanski [ann. cap. IV, 12], questo autore ne cita parecchi interessanti ma susseguenti lavori aventi come prototipo il sistema (1), (2).

(9) $\mathring{y}(x) = \bar{y}(x),\ D_h \mathring{y}(x) = D_h \bar{y}(x),$ *per* $x \in FA$ *e* $\mu_h \leqslant \mu - 1.$

Per questi problemi sussistono i suguenti teoremi di unicità delle rispettive soluzioni:

Teorema I. *Supposti l'insieme* $E^{(\nu)}$ *convesso e la funzione* $f(x,y,p)$ *di classe due, in* $B \times C$, *rispetto alle variabili* y_i *e* p_{ih}, *se esiste una funzione* $v(x,y,p)$ *di invarianza* [7], *per l'integrale* $I_v(y)$ *nell'insieme* $E^{(\nu)}$, *pur essa, in* $B \times C$, *di classe due rispetto a quelle variabili, per la quale l'hessiana* $\mathcal{H}_{f-v}(x,y,p,z,q)$ *resulti nell'insieme* $E^{(\nu)} \times H$, *ove* H *è la totalità dei vettori* $\eta_i(x)$ *di classe* ν *in* A, *integralmente definita (positiva o negativa), i problemi* I *e* II *non possono avere più di una soluzione.*

Dimostrazione. In base ai teoremi V e VI [7] una soluzione di uno qualsivoglia dei problemi I o II minimizza o massimizza *propriamente* l'integrale $I_f(y)$ *in* $E^{(\nu)}$, secondochè la forma $\mathcal{H}_{f-v}$ risulta, in $E^{(\nu)} \times H$, definita positiva o definita negativa, e pertanto essa è unica.

Teorema II. *Se l'insieme* $E^{(\nu)}$ *è quello considerato nel teorema* XXIII [6], *l'unicità della soluzione, nelle ipotesi del teorema precedente, è assicurata della integrale definitezza positiva o negativa della forma* $\mathcal{H}_{f-v}$, *nell'insieme* $E^{(\nu)} \times H$, *ove* H *è la totalità dei vettori* $\eta_i(x)$, *di classe* r *in* A, *verificanti le condizioni* $\mathcal{J}_s[\eta_i(x)] = 0$, $(s = 1, 2, \ldots)$, [6, p. 52].

Dimostrazione. Si deduce dal teorema XXIII [6], come quella del teorema precedente è stata dedotta dai teoremi V e VI [7].

Teorema III. *Nelle ipotesi del teorema* XXIV [6], *l'unicità della soluzione del problema* III *è assicurata dalla integrale definitezza positiva o negativa della forma* $\mathcal{H}_{f-v}$, *nell'insieme* $E^{(\nu)} \times H$, *con* $E^{(\nu)}$ *è la totalità delle funzioni* $\eta_i(x)$, *di classe* ν *in* A, *verificanti le* (9) *e* H *è quella delle funzioni* $\eta_i(x)$, *della stessa classe verificanti le condizioni* (3.12) *del teorema* XXIV [6].

Dimostrazione. Si deduce dal teorema XXIV [6], come quella del teorema I è stata dedotta dai teoremi V e VI.

3. Rappresenti ora λ un punto di un fissato spazio euclideo Λ, ad un qualsivoglia numero di dimensioni, e supponiamo che dipendano dal punto λ, assunto come parametro, i domini A e B, il campo C, l'insieme $E^{(\nu)}$ e la funzione f, ciò che può essere messo in vista, rappresentando quegli elementi, rispettivamente coi simboli $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$, $E^{(\nu)}(\lambda)$, $f(x,y,p,\lambda)$, di funzioni, che supporremo definite, le prime quattro, nello spazio Λ e l'ultima nell'insieme $B(\lambda) \times C(\lambda) \times \Lambda$.

Diciamo che, fissato un punto λ dello spazio Λ, esso è un'autovalore di λ, per il problema I o II o III oppure per l'equazione (5) o per il sistema di equazioni (6) e $\mathcal{E}_f(y) = 0$, o per il sistema di equazioni (7) e $\mathcal{E}_f(y) = 0$, se, per quel fissato punto λ, non sussite il teorema di unicità della relativa soluzione.

Per il calcolo degli autovalori di λ, come per quello delle soluzioni di equazioni ordinaire, può essere utile il possesso di teoremi che ne con-

sentano la *separazione*, cioè di teoremi che valgano a caratterizare insiemi L, dello spazio Λ sprovvisti di autovalori. I teoremi XXV, XXVI e XXVII [6] oppure i teoremi I, II e III di qui sopra forniscono, al riguardo, i seguenti, nei cui enunciati, per mettere in vista la dipendenza delle funzioni f e v dal parametro λ, vengono queste, rispettivamente, indicate coi simboli $f(\lambda)$ e $v(\lambda)$.

Teorema IV. *Supposto l'insieme* $E^{(\nu)}(\lambda)$ *sempre convesso e la funzione* $f(\lambda)$ *di classe due, in* $B(\lambda) \times C(\lambda)$, *rispeto alle variabili* y_i *e* p_{ih}, *l'insieme* L_v *di punti, dello spazio* Λ *è privo di autovalori per il problema* I *o per il problema* II *o per il problema* III, *se esiste una funzione* $v(\lambda)$, *d'invarianza per l'integrale* $I_{v(\lambda)}(y)$ *nell'insieme* $E^{(\nu)}(\lambda)$, *pur essa, in* $B(\lambda) \times C(\lambda)$ *di classe due ris etto alle variabili* y_i *e* p_{ih}, *tale che, mantenendo il punto* λ *in* L_v *l'hessiana* $\mathcal{H}_{f(\lambda)-v(\lambda)}(x, y, p, z, q)$ *si mantenga, nell'insieme* $E^{(\nu)}(\lambda) \times H(\lambda)$ *integralmente definita (positiva o negativa) essendo* $H(\lambda)$ *la totalità che dipenderà essa pure dal parametro* λ, *dei vettori* $\eta(x, \lambda)$ *considerati nei teoremi* I *o* II *o* III.

Questo teorema, che è stato fecondo dà risultati in casi particolari importanti, ha di conseguenza una notevole generalizzazione, che vogliamo, da ultimo, osservare, del classico teorema utilizzato da Ritz per il calcolo di autovalori, fornita dal seguente

Teorema V. *Sia* Λ *l'asse reale e non dipendano da* λ *gl'insiemi* B *e* C *e neppure l'insieme* $E^{(\nu)}$. *Supponiamo che, per la funzione* $v(\lambda)$, *dipendente dal parametro* λ, *d'invarianza per l'integrale* $I_{v(\lambda)}(\lambda)$ *in* $E^{(\nu)}$, *si abbia:*

$$\mathcal{H}_{f(\lambda)-v(\lambda)}(x, y, p, z, q) \equiv \Phi_v(x, y, p, z, q) - \lambda \Psi_v(x, y, p, z, q),$$

essendo Φ_v *e* Ψ_v *due forme quadratiche, nelle variabili* z_i *e* q_{ih}, *con coefficienti funzioni del punto* (x, y, p), *continue in* $B \times C$, *la seconda conservandosi integralmente definita, positiva o negativa, nell'insieme* $E^{(\nu)} \times H$, *ove* H *è la totalità dei vettori* $\eta(x)$, *funzioni di* x, *non identicamente nulle, di classe* ν *in* A, *considerata nei teoremi* I *o* II *o* III. *Detti* λ'_v *e* λ''_v *gli estremi inferiore e superiore del funzionale* — che diremo di Ritz —

$$\frac{\int_A \Phi_v[x, y(x), Dy(x), \eta(x), Dy(x)]\, dx}{\int_A \Psi_v[x, y(x), Dy(x), \eta(x), Dy(x)]\, dx},$$

nell'insieme $E^{(\nu)} \times H$, *l'intervallo* $(-\infty, \lambda'_v)$ *se* $\lambda'_v > -\infty$ *e l'intervallo* (λ''_v, ∞) *se* $\lambda''_v < +\infty$, *sono privi di autovalori.*

Dimostrazione. Assunto un numero λ arbitrario, minore di λ'_v, si ha, per ipotesi, per ogni coppia $[y(x), \eta(x)]$ dell'insieme $E^{(\nu)} \times H$, con $\eta(x)$ non identicamente nulla,

$$\int_A \Phi_v \, dx \Big/ \int_A \Psi_v \, dx > \lambda,$$

donde, supposta, per esempio, la forma Ψ integralmente definita negativa, in $E^{(\nu)} \times H$,

$$\int_A \mathcal{H}_{f(\lambda)-v(\lambda)} \, dx < 0,$$

e quindi l'hessiana $\mathcal{H}_{f(\lambda)-v(\lambda)}$ è integralmente definita negativa nell'insieme $E^{(\nu)} \times H$.

4. In una serie degli studi susseguenti si daranno teoremi di esistenza e talvolta anche il calcolo effettivo delle soluzioni di talune equazioni funzionali di qui teoremi di unicità sono stati esposti nella nostra presente.

Pervenuta il 24 I 1968

Academia Nazionale dei Lincei, Roma, Italia
e
l'Instituto Politecnico di Iaşi, Romania

BIBLIOGRAFIA

1. Picone M., Mangeron D., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1966, **XII (XVI)**, *3—4*, pp. 19—22.
2. — Bul. Inst. polit. Iaşi, 1967, **XIII XVII**, *1—2*, pp. 41—46.
3. Favard J., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI (XV)**, *1—2*, pp. 17—20.
4. Mangeron D., J. Math. Anal. a. Appl., 1964, **9**, pp. 41—46.
5. Bellman R., *Dynamic Programming*. The RAND Corp., 1961.
6. Picone M., *Criteri sufficienti in generali problemi di calcolo delle variazioni riguardanti integrali puridimensionali d'ordine qualsivoglia nel vettore minimante a più componenti*. Memorie Accad. Naz. dei Lincei, CCCLX, 1963, Serie VIII, Sez. I, **VII**, *3*, pp. 33—57.
7. — Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI (XV)**, *1—2*, pp. 7—10.
8. — Bul. Inst. polit. Iaşi, 1966, **XII (XVI)**, *1—2*, pp. 27—30.
9. Oguztöreli M. N., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1968, **XIV (XVIII)**, *1—2*, pp. 43—49.
10. Mangeron D., Rend. Accad. Naz. dei Lincei, s. VIII, 1965, **XXXIX**, *1—2*, pp. 29—36.
11. Baouendi M. S., Grisvard P., C. r. Acad. Sci., Paris, 1967, **265**, *19*, pp. 556—558.
12. Березанский Ю. М., *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов*. Наукова Думка, Киев, 1964.

TEOREME DE UNICITATE PENTRU SOLUŢII ALE UNOR ECUAŢII FUNCŢIONALE ŞI SEPARAREA AUTOVALORILOR UNUI PARAMETRU DE CARE DEPIND ACESTE ECUAŢII

(Rezumat)

Autorii, luînd la bază o serie de lucrări proprii, precum şi studiul fundamental al primului dintre ei [6], stabilesc o serie de rezultate referitoare la titlul lucrării.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

D K. 517.512

VON LINKS SCHRÄGE APROXIMATION DURCH BERNSTEINSCHE POTENZREIHEN

VON

M. W. MÜLLER

1. Einleitung

Der n-te Operator M_n, $(n = 1, 2, ...)$, von Meyer-König und Zeller [1], [3] ordnet bekanntlich einer komplexwertigen im Intervall $[0, 1)$ definierten Funktion f formal die n-te Bernsteinsche Potenzreihe

$$(M_n f)(x) = (1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+n}{k} x^k f\left(\frac{k}{k+n}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} m_{nk}(x) f\left(\frac{k}{k+n}\right),$$

mit den Gewichten $m_{nk}(x)$ zu. Konvergiert die unendliche Reihe für ein $x \in [0, 1)$, so bezeichne $(M_n f)(x)$ den Wert des M_n-Bildes der Funktion f an der Stelle x.

Unter A_R verstehen wir den linearen Raum derjenigen komplexwertigen Funktionen f, die in $[0, 1)$ definiert sind und dort der Wachstumsbedingung $|f(x)| \leqslant Pe^{a/(1-x)}$, $(P > 0, a > 0$ reelle Konstanten), genügen. Das M_n-Bild einer Funktion $f \in A_R$ existiert an einer festen Stelle $x_0 \in [0, 1)$ für $x \geqslant 1 - [a/\ln(x_0/2)]$[1]) ([3, Hilfssatz 1]).

Für die einer Funktion $f \in A_R$ zugeordneten Bernsteinschen Potenzreihen besteht die folgende Aussage über punktweise Konvergenz ([3, Satz 3]):

(A) $$\lim_{n \to \infty} (M_n f)(x_0) = f(x_0) \text{ in jedem Stetigkeitspunkt } x_0 \in [0, 1).$$

Bei dem in dieser Note angewandten Konvergenzbegriff (Johnson [2, Def. 3]) gilt die Konvergenzaussage (A) bereits unter einer schwächeren lokalen Eigenschaft der Funktion $f \in A_R$.

2. Einige Ungleichungen

Die Gewichte $m_{nk}(x)$ wachsen für festes $x \in [0, 1)$ und festes n monoton für $0 \leqslant k \leqslant nx/(1-x)$ und fallen monoton für $k > nx/(1-x)$. Das Beweisprinzip des in § 3 folgenden Approximationssatzes beruht darauf,

[1]) [c] bedeutet für ein reeles c das Ganze von c.

dass man — ähnlich wie man es bei singulären Integralen macht — den „Buckel" der Gewichte in geeigneter Weise heraushebt. Wir betrachten hierzu zunächst die Reihen

$$S_{m,n}(x) = (1-x)^n \sum_{k=0}^{\infty} \left(k - \frac{nx}{1-x}\right)^m \binom{k+n}{k} x^k, \tag{2.1}$$

$$(m = 0, 1, \ldots;\ n = 1, 2, \ldots;\ 0 \leqslant x < 1).$$

Es ist

$$S_{0,n}(x) = \frac{1}{1-x}, \quad S_{1,n}(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Um $S_{m,n}(x)$, $(m \geqslant 2)$, zu berechnen, kann man die Rekursionsformel

$$S_{m+1,n}(x) = \frac{nmx}{(1-x)^2} S_{m-1,n}(x) + x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} S_{m,n}(x)$$

verwenden, die aus (2.1) durch Differentiation nach x folgt und die für jedes $x \in [0, 1)$ gilt ([4, S. 59 ff.]). Mittels vollständiger Induktion erhalten wir hieraus die Abschätzung

$$0 \leqslant S_{2m,n}(x) \leqslant \frac{K_n(2m)\, n^m}{(1-x)^{2m+1}}, \tag{2.2}$$

wobei $K_n(m)$ für festes m mit n monoton annimmt.

Hilfssatz (Buckel von $m_{nk}(x)$). *Für ein beliebiges $t > 0$ gilt*

$$\sum_{k \in I} m_{nk}(x) \leqslant \frac{K_n(2m)\, n^m}{(1-x)^{2m+1} t^{2m}}, \quad (m = 0, 1, \ldots;\ n \equiv 1, 2, \ldots;\ 0 \leqslant x < 1),$$

wo $I = \left\{k : k \geqslant 0, \left| k - \frac{nx}{1-x} \right| \geqslant t \right\}$ *ist.*

Beweis. Für ein festes $t > 0$ und ein festes m gilt unter Verwendung von Gl. (2.2)

$$\sum_{k \in I} m_{nk}(x) \leqslant \frac{1-x}{t^{2m}} (1-x)^n \sum_{k \in I} \left(k - \frac{nx}{1-x}\right)^{2m} \binom{k+n}{k} x^k \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1-x}{t^{2m}} S_{2m,n}(x) \leqslant \frac{1-x}{t^{2m}} \cdot \frac{K_n(2m)\, n^m}{(1-x)^{2m+2}} = \frac{K_n(2m)\, n^m}{(1-x)^{2m+1} t^{2m}}.$$

Wie man leicht zeigt, gilt für ein festes $x \in [0, 1)$ und ein beliebiges $\delta > 0$

$$\left| \frac{k}{k+n} - x \right| < \delta \quad \text{für} \quad \left| k - \frac{nx}{1-x} \right| < \frac{\delta n}{1-x}. \tag{2.3}$$

Wählt man also im Hilfssatz speziell $t = \delta n/(1-x)$, so fallen die zu Werten k aus dem Komplement I^c von I gehörenden Interpolationsabszissen $k/(k+n)$

in die δ-Umgebung der Stelle x, und die Schranke auf der rechten Seite der Ungleichung ist von der Form $O(1/n^m)$, $(n \to \infty)$.

3. Ein direkter Approximationssatz

Eine Folge $\{f_n\}$, $(n = 1, 2,...)$, komplexwertiger Funktionen, die auf einem Intervall $[a, b]$ definiert sind, heisst *im Punkt* $x_0 \in (a, b]$ *von links schräg (left slant) konvergent gegen den Wert* L, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein u_1, $(a \leqslant u_1 < x_0)$, gibt derart, dass für jedes u_2, $(u_1 < u_2 < x_0)$, ein positiver Index $N = N(\varepsilon, u_2)$ existiert mit der Eigenschaft

$$|f_n(x) - L| < \varepsilon \text{ für } n \geqslant N,\ x \in [u_1, u_2].$$

In entsprechender Weise definiert man im Punkt x_0 eine von rechts schräge Konvergenz.

Satz. *Hat die Funktion* $f \in A_R$ *an der Stelle* $x_0 \in (0, 1)$ *einen linksseitigen Grenzwert* $f(x_0^-)$, *dann konvergiert die Folge* $\{M_n f\}$, $(n = 1, 2,...)$, *der* M_n*-Bilder an dieser Stelle von links schräg gegen* $f(x_0^-)$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach Voraussetzung existiert dann eine Stelle u_0, $(0 \leqslant u_0 < x_0)$, so, dass gilt

$$|f(x) - f(x_0^-)| < \varepsilon \quad \text{für } u_0 \leqslant x < x_0 . \tag{3.1}$$

$M_n f$ existiert auf dem Intervall $[0, x_0]$ für $n \geqslant n_0 = 1 - [a/\ln(x_0/2)]$. Sei $u_1 = \frac{1}{2}(u_0 + x_0)$, $u_1 < u_2 < x_0$ und $\delta = x_0 - u_2$. Wir wählen nun einen Index $n_1 \geqslant n_0$ so, dass auch noch $e^{a/n_1} < 1 + \delta/2$ ist. Im folgenden sei ein $n \geqslant n_1$ festgehalten. Für ein festes $x \in [u_1, u_2]$ ist wegen $\sum_{k=0}^{\infty} m_{nk}(x) = 1$

$$|(M_n f)(x) - f(x)| \leqslant \left(\sum_{I_1} + \sum_{I_2}\right) m_{nk}(x) \left| f\left(\frac{k}{k+n}\right) - f(x) \right| := T_1 + T_2 ,$$

wobei

$$I_1 = \left\{k : k \geqslant 0,\ \left| k - \frac{nx_n}{1 - x_n} \right| < \frac{\delta n}{2(1 - x_n)} \right\},\quad (x_n = xe^{a/n}),$$

$$I_2 = \left\{k : k \geqslant 0,\ \left| k - \frac{nx_n}{1 - x_n} \right| \geqslant \frac{\delta n}{2(1 - x_n)} \right\}$$

ist. Sei $k \in I_1$. Wegen (2.3) und der über n gemachten Voraussetzung folgt dann

$$\left| \frac{k}{k+n} - x \right| < \delta, \tag{3.2}$$

und hieraus unter Verwendung von (3.1), dass unabhängig von x

$$T_1 < 2\varepsilon \sum_{I_1} m_{nk}(x) \leqslant 2\varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} m_{nk}(x) = 2\varepsilon$$

ist. Sei nun $k \in I_2$. Da $f \in A_R$ gilt

$$\left| f\left(\frac{k}{k+n}\right) - f(x) \right| \leqslant Pe^{a} e^{ak/n} + Pe^{a/(1-x_0)} \leqslant 2Pe^{a/(1-x_0)} e^{ak/n} := Qe^{ak/n}.$$

Somit haben wir

$$T_2 = Q(1-x)^{n+1} \sum_{I_2} \binom{k+n}{k} (xe^{a/n})^k = Q\left(\frac{1-x}{1-x_n}\right)^{n+1} (1-x_n)^{n+1} \sum_{I_2} \binom{k+n}{k} x_n^k .$$

Da nach der Regel von de l'Hospital

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1-x}{1-x_n}\right)^{n+1} = e^{ax/(1-x)} \quad \text{(monoton von unten her)} \tag{3.3}$$

ist, existiert eine Schranke $R > 0$ für den Quotienten $(1-x)^{n+1}/(1-x_n)^{n+1}$, und mit Hilfe des Hilfssatzes $(m = 1,\ t = \delta n/2(1-x_n))$ lässt sich T_2 abschätzen durch

$$T_2 \leqslant QR \frac{4K_n(2)\, n\, (1-x_n)^2}{(1-x_n)^3 \delta^2 n^2} \leqslant \frac{4QRK_n(2)}{\delta^2 (1-x_0)} \cdot \frac{1}{n} .$$

Wählen wir also $n \geqslant n_1$ hinreichend gross, so wird auch $T_2 \leqslant \varepsilon$, unabhängig von $x \in [u_1, u_2]$.

Ein entsprechender Satz lässt sich leicht auch für die von rechts schräge Konvergenz in einem Punkt $x_0 \in [0, 1)$ beweisen.

Eingegangen am 26 X 1967

Universität Stuttgart,
Bundesrepublik Deutschland

LITERATURVERZEICHNIS

1. Cheney E. W., Sharma A., *Bernstein Power Series.* Canad. Journ. of Math., 1964, **16** pp. 241–252.
2. Johnson G. G., *A Note on Bernstein Polynomials.* Nieuw Archief voor Wiskunde (3), 1966, **14**, pp. 40–42.
3. Meyer-König W., Zeller K., *Bernsteinsche Potenzreihen.* Studia Math., 1960, **19**, pp. 89–94.
4. Möller M., *Die Folge der Gammaoperatoren.* Dissertation, Stuttgart, 1967.

ASUPRA APROXIMĂRII OBLICE STÎNGI PRIN SERII DE PUTERI ALE LUI BERNSTEIN

(Rezumat)

Autorul, pornind de la definiția: un șir $\{f_n\}$, $(n = 1, 2, \ldots)$, de funcții cu valori complexe, definite într-un interval $[a, b]$, se zice că este convergent oblic la stînga într-un punct $x_0 \in (a, b]$ către o valoare L dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, se poate găsi un u_1, $(a \leqslant u_1 < x_0)$, astfel încît pentru orice u_2, $(u_1 < u_2 < x_0)$, există un indice pozitiv $N = N(\varepsilon, u_2)$ avînd proprietatea $|f_n(x) - L| < \varepsilon$ pentru $n \geqslant N$, $x \in [u_1, u_2]$, expuse sistematic problema aproximării stîngi prin serii de puteri ale lui Bernstein.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

D. C. 517.534.3

BOUNDS FOR THE ZEROS OF A POLYNOMIAL AND ITS DERIVATIVES

BY

ALLAN M. KRALL

It is well known [5] that any circular region containing the zeros of a polynomial $f(z)$ also contains the zeros of the derivatives of $f(z)$.

In fact, this same circular region is in some cases a rather poor bound for the zeros of the derivatives. The reason for this is that differentiation multiplies the coefficients of higher powers by larger numbres. Since estimates made with the coefficients are usually made with the coefficient of the highest power equal to 1, it is necessary to divide by the largest of these multipliers, thus making the estimates smaller.

We propose to show that the zeros of the derivatives lie within circles which become progressively smaller as the order of the derivative increases. This squeezing might be considered to be somewhat analagous to the squeezing done by the mean value theorem to the real zeros of the derivatives of a polynomial with real coefficients.

We note that if

$$f(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i, \quad a_n = 1,$$

then

$$\frac{(n-m)!}{n!} f^{(m)}(z) = \sum_{i=m}^{n} \frac{i!/(i-m)!}{n!/(n-m)!} a_i z^{i-m}.$$

Theorem 1. *All of the zeros of the m-th derivative of $f(z)$ lie within a circle centered at the origin vith radius $\rho_m = [(n-m)/n] M + 1$, where $M = \sup |a_i|$.*

Proof. If $|z| > \rho_m$, we see that

$$\frac{(n-m)!}{n!}|f^{(m)}(z)| \geqq |z|^{n-m} - \sum_{i=m}^{n-1} \frac{i!/(i-m)!}{n!/(n-m)!}|a_i||z|^{i-m} \geqq$$

$$\geqq |z|^{n-m} - \frac{n-m}{n} M \sum_{i=m}^{n-1} |z|^{i-m} \geqq |z|^{n-m} - M\frac{n-m}{n} \cdot \frac{|z|^{n-m}-1}{|z|-1} \geqq$$

$$\geqq \frac{|z|^{n-m}\left(|z| - \frac{n-m}{n}M - 1\right) + M}{|z|-1} > 0.$$

We note that these circles contract rather briskly as m increases.

Corollary. *If z is a zero of $f(z)$ of order $m+1$, then $|z| < [(n-m)/n]M + 1$.*

Theorem 2. *Let $p > 0$, $q > 0$ satisfy $1/p + 1/q = 1$. Then all of the zeros of the m-th derivative of $f(z)$ be within a circle centered at the origin with radius* $\rho_m = \left[1 + \left(\frac{n-m}{n}\right)^q \left(\sum_{i=m}^{n-1} |a_i|^p\right)^{q/p}\right]^{1/q}$.

Prof. We use the bound of Kuniyeda [2], Montel [3] and Tôda [4] which states that the zeros of $F(z) = \sum_{i=0}^{n} A_i z^i$, $A_i = 1$, lie within a circle centered at the origin with radius $\left[1 + \left(\sum_{i=0}^{n-1} |A_i|^p\right)^{q/p}\right]^{1/q}$, applying it to $[(n-m)!/n!]f^{(m)}(z)$. We see that if z is a zero of $f^{(m)}(z)$, then

$$|z| < \left(1 + \left\{\sum_{i=m}^{n-1} \left[\frac{i!/(i-m)!}{n!/(n-m)!}|a_i|\right]^p\right\}^{q/p}\right)^{1/q} =$$

$$= \left(1 + \left(\frac{n-m}{n}\right)^q \left\{\sum_{i=m}^{n-1} \left[\frac{i!/(i-m)!}{(n-1)!/(n-m-1)!}|a_i|\right]^p\right\}^{q/p}\right)^{1/q} <$$

$$< \left[1 + \left(\frac{n-m}{n}\right)^q \left(\sum_{i=m}^{n-1} |a_i|^q\right)^{q/p}\right]^{1/q}.$$

Again we note that these circles contract as m increases.

Corollary. *If z is a zero of $f(z)$ of order $m+1$, then*

$$|z| < \left[1 + \left(\frac{n-m}{n}\right)^q \left(\sum_{i=m}^{n-1} |a_i|^p\right)^{q/p}\right]^{1/q}.$$

If $q \to 1$, $p \to \infty$, we see that theorem 1 is implied by theorem 2.

Wherever bounds on the zeros of a polynomial are found by manipulation of its coefficients, this technique seems to be valid[1].

Received the 26 XI 1967

The Pennsylvania State University, University Park, Penna, USA

[1]) This research was supported in part by NASA Grant NGR-39-009-041.

REFERENCES

1. Cauchy A. L., *Exercises de mathématiques. Oeuvres* (2). Vol. **9**, p. 122.
2. Kuniyeda M., *Note on the Roots of Algebraic Equations.* Tohoku Math. J., 1916, **9**, pp. 167—173.
3. Montel P., *Sur la limite supérieure du module des racines d'une équation algébrique.* C. R. Soc. Sci., Varsovie, 1932, **24**, pp. 317—326.
4. Tôda T., *Some Remarks on Montel's Paper concerning the Upper Limit of Absolute Values of the Roots of Algebraic Equations.* Sci. Rep. Tokyo Buneika Daigaku, 1933, **1**, pp. 275—282.
5. Walsh J. L., *On the Location of the Roots of certain Types of Polynomials.* Trans. Amer. Math. Soc., 1922, **24**, pp. 163—180.

MARGINILE PENTRU ZEROURILE POLINOAMELOR ŞI A DERIVATELOR LOR

(Rezumat)

Ţinînd seama de faptul că orice regiune circulară care conţine zerourile unui polinom $f(z)$ conţine şi zerourile derivatelor lui $f(z)$ [5], se demonstrează că zerourile derivatelor sînt situate în cercuri din ce în ce mai mici pe măsura creşterii ordinului de derivare.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

D. K. 517.941; 518.12

DIE GRÖBNERSCHE METHODE UND IHRE ANWENDUNG AUF DIE NUMERISCHE BAHNBERECHNUNG IN DER HIMMELSMECHANIK (II)

VON

HANS KNAPP

1. In was folgt wir fortsetzen unsere Ergebnisse [1] die die Gröbnersche Methode betreffen, bei Erhaltung aller Bezeichnungen und Definitionen.

2. Bei der numerischen Auswertung ist man dann aber ohnehin gezwungen, die Reihen abzubrechen, also mit Ausdrücken von der Gestalt (26) [1] ohne Restglied (27) [1] zu rechnen. Man bekommt so natürlich nur Näherungen für die gesuchten Funktionen; aber es liegt der Gedanke nahe, diese zur Definition einer neuen Operatorzerlegung zu verwenden, und die Formel noch einmal anzusetzen (in der Hoffnung, dass die Abweichungen von den gesuchten Funktionen dabei kleiner werden).

Ausgehend etwa von $(m+1)$-mal differenzierbaren Funktionen

$$(1) \qquad {}_0\hat{x}_1(t), \ldots, {}_0\hat{x}_n(t) \quad \text{mit } {}_0\hat{x}_i(t_0) = a_i,$$

und deren Ableitungen (wir schreiben gleich einen allgemeinen Index ν!)

$$(2) \qquad {}_\nu g_i(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, {}_\nu\hat{x}_i(t), \quad (i = 1, \ldots, n),$$

bildet man also die zugehörige Operatorzerlegung

$$(3) \qquad {}_\nu D_1 = \sum_{k=1}^{n} {}_\nu g_k(t)\, \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial t}, \quad {}_\nu D_2 = D - {}_\nu D_1,$$

und berechnet ${}_{\nu+1}\hat{x}_i(t)$, $(i = 1, \ldots, n)$, nach der Formel

$$(4) \qquad {}_{\nu+1}\hat{x}_i(t) = {}_{\nu}\hat{x}_i(t) + \sum_{\alpha=0}^{m} \int_{t}^{t_0} \frac{(t-\tau)^{\alpha}}{\alpha!} [{}_{\nu}D_2 D^{\alpha} x_i]_{{}_{\nu}\hat{x}(\tau),\tau} \, d\tau .$$

Diesen Vorgang (2) ... (4) wiederholt man allgemein für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$

Mit Rücksicht darauf, dass in den Anwendungen alle Funktionen meist nur numerisch gegeben sind, ist es aber besser, die Iterationsvorschrift bereits so zu formulieren, dass ein numerisches Differenzieren unterbleibt. Man beginnt daher mit m-mal differenzierbaren Funktionen

$$(5) \qquad {}_{0}g_1(t), \ldots, {}_{0}g_n(t),$$

bildet wieder die Zerlegung (3) und mit

$$(6) \qquad {}_{\nu}\hat{x}_i(t) = a_i + \int_{t_0}^{t} {}_{\nu}g_i(\tau)\, d\tau, \quad (i = 1, \ldots, n),$$

berechnet man dann ${}_{\nu+1}g_i(t)$, $(i = 1, \ldots, n)$, nach der Formel (entstanden durch Differenzieren von (4) nach t)

$$(7) \qquad {}_{\nu+1}g_i(t) = f_i({}_{\nu}\hat{x}_1(t), \ldots, {}_{\nu}\hat{x}_n(t), t) + \sum_{\alpha=1}^{m} \int_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} [{}_{\nu}D_2 D^{\alpha} x_i]_{{}_{\nu}\hat{x}(\tau),\tau} \, d\tau,$$

für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$

Die Formeln (3), (6), (7) zusammen mit dem Anfang (5) sind nur eine andere Formulierung der bereits durch (2) ... (4) zusammen mit (1) definierten Iterationsvorschrift, die wir der Kürze wegen mit dem Symbol $\mathfrak{G}_m$ bezeichnen werden. Die formale Gestalt der Ausdrücke

$$(8) \qquad {}_{\nu}D_2 D^{\alpha} x_i, \quad (i = 1, \ldots, n; \ \alpha = 1, \ldots, m),$$

kann man ein für allemal vorher angeben, was sich ändert, sind ja nur die einzusetzenden Funktionen. Man braucht also im Verlauf der weiteren Rechnung nie mehr zu differenzieren[1]).

Es gilt folgender

Satz. *Sind im abgeschlossenen Bereich*

$$\mathfrak{E} = \{(x_1, \ldots, x_n, t) \mid |x_i - a_i| \leq b, \ (i = 1, \ldots, n), \ |t - t_0| \leq T\},$$

alle partiellen Ableitungen der eindeutigen Funktionen

$$f_1(x_1, \ldots, x_n, t), \ldots, f_n(x_1, \ldots x_n, t)$$

[1]) Diese Bemerkung soll dem Missverständnis, dass man hier etwa numerisch gegebene Funktionen zu differenzieren hätte, die Methode also wenig praktischen Wert besässe entgegenwirken!

bis einschliesslich zur Ordnung $m\ (\geqslant 0)$ *vorhanden und genügen die mit dem Operator*

$$D = \sum_{k=1}^{n} f_k\,(x_1, \ldots, x_n, t)\,\frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial t}$$

gebildeten, in allen Argumenten stetigen Funktionen

$$D^m f_1, \ldots, D^m f_n$$

in $\mathfrak{L}$ *ausserdem noch einer Lipschitzbedingung*

$$|\,[D^m f_i]_{x'',\,t} - [D^m f_i]_{x',\,t}\,| \leqq K \sum_{k=1}^{n} |\,x_k'' - x_k'\,|, \tag{9}$$

so konvergieren die durch den Iterationsprozess $\mathfrak{G}_m$ *definierten Funktionenfolgen*

$$_{\nu}\hat{x}_1\,(t), \ldots, {}_{\nu}\hat{x}_n\,(t)$$

in einem Intervall $|\,t - t_0\,| \leqslant c$ *für* $\nu \to \infty$ *gegen die Lösungen*

$$x_1\,(t), \ldots, x_n\,(t)$$

des Differentialgleichungssystems

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,x_i = f_i\,(x_1, \ldots, x_n, t), \quad (i = 1, \ldots, n),$$

zu den Anfangswerten $x_i\,(t_0) = a_i$, $(i = 1, \ldots, n)$.

Folgerung. Für jedes $\mathfrak{G}_{\bar{m}}$, mit $0 \leqslant \bar{m} < m$, gilt natürlich der Satz ebenso, weil dann für $D^{\bar{m}} f_i$, $(i = 1, \ldots, n)$, von selbst eine Lipschitzbedingung erfüllt ist, da ja noch weitere Ableitungen existieren! Insbesondere ist der Fall $\bar{m} = 0$, das gewöhnliche Verfahren der sukzessiven Approximation nach Picard, als einfachster Sonderfall in diesem Spektrum von Iterationsvorschriften immer mitenthalten [2]).

---

[2]) In übersichtlicher Symbolik geschrieben, gilt mit

$$_{\nu}\hat{\varphi}\,(t) = \begin{bmatrix} {}_{\nu}\hat{x}_1\,(t) \\ \vdots \\ {}_{\nu}\hat{x}_n\,(t) \end{bmatrix}$$

$$_{\nu+1}\hat{\varphi}\,(t) = \mathfrak{G}_{\bar{m}}\,{}_{\nu}\hat{\varphi}\,(t) \text{ und } \lim_{\nu \to \infty} {}_{\nu}\hat{\varphi}\,(t) = \varphi\,(t),$$

und zwar für jedes ganzzahlige $\bar{m}$, das der Bedingung $0 \leqslant \bar{m} \leqslant m$ genügt.

3. Weil unter den genannten Voraussetzungen die Existenz der Lösungen sichersteht, kommt es nur noch darauf an, zu zeigen, dass der Iterationsprozess konvergiert und die Lösungen liefert.

a) Dazu ist zunächst nachzuweisen, dass es ein t-Intervall von nicht verschwindender Länge gibt, derart, dass die iterierten Funktionen (6) den Bereich $\mathfrak{L}$ nicht verlassen und $(m+1)$-mal differenzierbar bleiben, also immer wieder in die Iterationsvorschrift $\mathfrak{G}_m$ eingesetzt werden dürfen.

Vorerst ist

$$\frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}t^\alpha}\int_{t_0}^{t}\frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}\,[{}_\nu D_2\, D^\alpha x_i]_{\nu\hat{x}(\tau),\,\tau}\,\mathrm{d}\tau = [{}_\nu D_2\, D^\alpha x_i]_{\nu\hat{x}(t),\,t};$$

der Ausdruck auf der rechten Seite ist aber noch $(m-\alpha)$-mal nach t differenzierbar, woraus zu ersehen ist, dass jeder Summand in Formel (7) und damit auch die Summe selbst m-mal, die Funktionen ${}_{\nu+1}\hat{x}_i(t)$, $(i=1,\ldots,n)$, folglich, wie verlangt, $(m+1)$-mal differenzierbar sind, sobald dies für die Ausgangsfunktionen (6) der Fall war.

Ausserdem gibt es wegen der Voraussetzungen (gleichmässige Stetigkeit in $\mathfrak{L}$) positive Zahlen A_0 und B_α derart, dass

$$(10)\quad |f_i(x_1,\ldots,x_n,t)| \leq A_0, \left|\left[\frac{\partial}{\partial x_k}\,D^\alpha x_i\right]_{x,\,t}\right| \leqslant B_\alpha,\quad (i,k=1,\ldots,n;\ \alpha=1,\ldots,m),$$

für $(x_1,\ldots,x_n,t)\in\mathfrak{L}$. Ist nun

$$(11)\qquad |{}_0g_i(t)| \leqslant C \text{ für } |t-t_0|\leqslant T,\quad (i=1,\ldots,n),$$

dann gilt unter der Einschränkung $|t-t_0|\leqslant \min\{T, b/C\}$ die Abschätzung

$$|{}_0\hat{x}_k(t)-a_k| = \left|\int_{t_0}^{t}{}_0g_k(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right| \leqslant |t-t_0|\,C \leqslant b,\quad (k=1,\ldots,n),$$

sodass nach (10) und (11)

$$(12)\quad |[{}_0D_2\, D^\alpha x_i]_{{}_0\hat{x}(t),\,t}| \leqslant (A_0+C)nB_\alpha = A_\alpha,\quad (i=1,\ldots,n;\ \alpha=1,\ldots,m),$$

folgt, und wir bekommen

$$|{}_1g_i(t)| \leqslant |f_i({}_0\hat{x}_1,\ldots,{}_0\hat{x}_n,t)| + \left|\sum_{\alpha=1}^{m}\int_{t_0}^{t}\frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}\,[{}_0D_2\, D^\alpha x_i]_{{}_0\hat{x}(\tau),\,\tau}\,\mathrm{d}\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\alpha=0}^{m}\frac{|t-t_0|^\alpha}{\alpha!}A_\alpha = \bar{C},\quad (i=1,\ldots,n).$$

Unter der Voraussetzung $A_0 < C$, die durch Vergrössern von C immer erfüllt werden kann, können wir $\overline{T}$ so wählen, dass für $|t - t_0| \leqslant \overline{T}$, $\overline{C} \leqslant C$ ist. Wenn wir also das Parameterintervall auf

$$|t - t_0| \leqslant c = \min\{T, b/C, \overline{T}\}^{3}) \tag{13}$$

einschränken, gilt – sobald die Ausgangsfunktionen (5) die Bedingung (11) erfüllen –

$$|{}_{\nu+1}g_i(t)| \leqslant |f_i({}_\nu\hat{x}_1,\ldots,{}_\nu\hat{x}_n,t)| + \left|\sum_{\alpha=1}^{m}\int_{t_0}^{t}\frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}[{}_\nu D_2 D^\alpha x_i]_{{}_\nu\hat{x}(\tau),\tau}\,d\tau\right| \leqslant \tag{14}$$

$$\leqslant \sum_{\alpha=0}^{m}\frac{|t-t_0|^\alpha}{\alpha!}A_\alpha \leqslant C, \quad (i=1,\ldots,n),$$

folglich

$$|{}_{\nu+1}\hat{x}_k(t) - a_k| \leqslant \left|\int_{t_0}^{t} {}_{\nu+1}g_k(\tau)\,d\tau\right| \leqslant b, \quad (k=1,\ldots,n), \tag{15}$$

für alle $\nu = 0, 1, 2,\ldots$, womit $({}_\nu\hat{x}_1(t),\ldots,{}_\nu\hat{x}_n(t), t) \in \mathfrak{L}$ nachgewiesen ist.

b) Weiters ist zu zeigen, dass die so entstandenen Funktionenfolgen ${}_\nu\hat{x}_1(t),\ldots,{}_\nu\hat{x}_n(t)$, $(\nu = 0, 1, 2,\ldots)$, gegen die Lösungsfunktionen konvergieren. Dieser Nachweis gelingt rasch. Es ist nämlich

$$x_i(t) = {}_{\nu+1}\hat{x}_i(t) + {}_\nu p_{im}(t), \quad (i=1,\ldots,n;\ \nu=0,1,2,\ldots), \tag{16}$$

(wie man sofort sieht, wenn man sich ${}_\nu\hat{x}_k(\tau)$ statt $\hat{x}_k(\tau)$, $(k=1,\ldots,n)$, und ${}_\nu D_2$ statt D_2 in (26) [1] eingesetzt denkt und mit (4) bevorsichtigt. Wenn dann im Intervall $|t - t_0| \leqslant c$

$$|x_i(t) - {}_0\hat{x}_i(t)| \leqslant 2\bar{b}, \quad (\bar{b} \leqslant b), \quad (i=1,\ldots,n), \tag{17}$$

beschränkt ist, folgt daraus zunächst

$$|x_i(t) - {}_1\hat{x}_i(t)| = |{}_0p_{im}(t)| = \left|\int_{t_0}^{t}\frac{(t-\tau)^m}{m}\{[D^{m+1}x_i]_{x(\tau),\tau} - [D^{m+1}x_i]_{{}_0\hat{x}(\tau),\tau}\}\,d\tau\right|,$$

und unter Ausnutzung der Lipschitzbedingung [4]) entsteht

---

[3]) Bei dieser groben Anschätzung ist die Zahl C selbstverständlich unnötig stark eingeschränkt worden. Im Interesse der Übersichtlichkeit verzichten wir hier aber auf eine Verfeinerung der Abschätzung.

[4]) Aus der Erklärung (11) [1] folgt auch $D^{\alpha+1}x_i = D^\alpha Dx_i = D^\alpha f_i$ also insbesondere $D^{m+1}x_i = D^m f_i$.

$$(18)\qquad |x_i(t) - {}_1\hat{x}_i(t)| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} \frac{|t-\tau|^m}{m!}\, 2\bar{b}\, Kn\, d\tau \right| = 2\bar{b}\,\frac{Kn\,|t-t_0|^{m+1}}{(m+1)!},$$

und vollständige Induktion [5]) liefert das interessante Ergebnis:

$$(19)\qquad |x_i(t) - {}_\nu\hat{x}_i(t)| \leqslant 2\bar{b}\,\frac{(Kn\,|t-t_0|^{m+1})^\nu}{[(m+1)\nu]!},\quad (i=1,\ldots,n;\ \nu=0,1,2,\ldots,).$$

Das bedeutet wegen der Fakultät im Nenner ein dem Betrag nach ungeheuer rasch abnehmendes Restglied, wenn m gross ist [6]). Es ist also

$$(20)\qquad \lim_{\nu\to\infty} {}_\nu\hat{x}_i(t) = x_i(t),\quad (i=1,\ldots,n).$$

und der Satz ist bewiesen.

Gröbners Formeln (12) [1] sind die durch Grenzübergang für m gewonnenen Iterationsvorschriften, nämlich die Lösungsvorschriften selbst, und unter Gröbnermethode ist die numerische Auswertung der Formeln (12) [1] gemeint. Dazu müssen die Reihen aber abgebrochen werden, und dies

---

[5]) Dabei wird jeweils Gleichung (16) herangezogen, die Lipschitzbedingung (9) ausgenützt und die Formel

$$\int_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)^\beta}{\beta!}\cdot\frac{(\tau-t_0)^\gamma}{\gamma!}\,d\tau = \frac{(t-t_0)^{\beta+\gamma+1}}{(\beta+\gamma+1)!},\quad (\beta,\gamma \geqslant 0,\ \text{ganz}),$$

angewandt:

a) Induktionsannahme (vgl. (18)!):

$$|x_i(t) - {}_\nu\hat{x}_i(t)| \leqslant 2\bar{b}\,\frac{(Kn)^\nu\,|t-t_0|^{(m+1)\nu}}{[(m+1)\nu]!},\quad (i=1,\ldots,n);$$

b) Induktionsschluss:

$$x_i(t) - {}_{\nu+1}\hat{x}_i(t) = {}_\nu p_{im}(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)^m}{m!}\left\{ [D^{m+1}x_i]_{x(\tau),\tau} - [D^{m+1}x_i]_{{}_\nu\hat{x}(\tau),\tau} \right\} d\tau \Bigg| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)^m}{m!}\, Kn\, 2\bar{b}\,\frac{(Kn)^\nu(\tau-t_0)^{(m+1)\nu}}{[(m+1)\nu]!}\,d\tau \right| = 2\bar{b}\,\frac{(Kn)^{\nu+1}\,|t-t_0|^{(m+1)(\nu+1)}}{(m+1)(\nu+1)!}.$$

[6]) Bei linearen Differentialgleichungen, wo dieser Sachverhalt noch sehr leicht zu durchschauen ist, heisst dies z. B., dass bei Anwendung des gewöhnlichen Verfahrens der sukzessiven Approximation ($\mathfrak{G}_0$) erst nach $(m+1)\nu$ Iterationen jener Genauigkeitsgrad erreicht wäre, der hier ($\mathfrak{G}_m$) schon nach ν Iterationen erreicht ist. Der Aufwand ist demnach bei weitem geringer.

entspricht nach unserer jetzigen Deutungsmöglichkeit einem einmaligen Anwenden einer Iterationsvorschrift $\mathfrak{G}_{\bar{m}}$, $(0 \leqslant \bar{m} \leqslant m)$. In den meisten Anwendungen genügt bereits diese einmalige Iteration, also das gewöhnliche Einsetzen in die Formeln (26) [1] ohne Restglieder (27) [1], um die gestellten Genauigkeitsforderungen erfüllen zu können [7]).

---

[7]) Dies ist besonders dann der Fall, wenn man m gross (z. B. : $m = 3$) nehmen kann und die Ausgangsnäherungen den Lösungen sehr nahe kommen. Nimmt man übrigens die konstanten Anfangswerte (6) [1] als Ausgangsnäherungen für den Iterationsprozess, so kann man die ersten Iterierten (abgesehen von Zusatzgliedern, die bei nichtautonomen Systemen auftreten können, welche aber für grosses m unwesentlich sind) noch ohne Rechnung hinschreiben :

$$\text{(a)} \qquad {}_1\hat{x}_i(t) = \sum_{\alpha=0}^{m+1} \frac{(t-t_0)^\alpha}{\alpha!} [D^\alpha x_i]_{a,\,t_0} \quad \text{bzw.} \quad {}_1g_i(t) = \sum_{\alpha=1}^{m+1} \frac{(t-t_0)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} [D^\alpha x_i]_{a,\,t_0}.$$

Es empfiehlt sich daher in den meisten Fällen, Ausdrücke vor der Gestalt (*a*) als Ausgangsnäherungen zu verwenden :

$$\text{(b)} \qquad {}_0\hat{x}_i(t) = \sum_{\alpha=0}^{\bar{m}} \frac{(t-t_0)^\alpha}{\alpha!} [D^\alpha x_i]_{a,\,t_0} \quad \text{bzw.} \quad {}_0g_i(t) = \sum_{\alpha=1}^{\bar{m}} \frac{(t-t_0)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} [D^\alpha x_i]_{a,\,t_0}.$$

Die nach der Vorschrift $\mathfrak{G}_{\bar{m}}$ daraus errechneten ersten Iterierten

$${}_1\hat{x}_1(t), \ldots, {}_1\hat{x}_n(t)$$

werden dann als Lösungen angesehen. Schranken für die Abweichungen von den wirklichen Lösungen kann man aus (19) ablesen ! Aus den Richtungsfehlern

$$\text{(c)} \qquad \begin{aligned} {}_0q_i(t) = {} & f_i({}_1\hat{x}_1(t), \ldots, {}_1\hat{x}_n(t), t) - f_i({}_0\hat{x}_1(t), \ldots, {}_0\hat{x}_n(t), t) - \\ & - \sum_{\alpha=1}^{m} \int_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)^{\alpha+1}}{(\alpha-1)!} [{}_0D_2\, D^\alpha x_i]_{{}_0\hat{x}(\tau),\,\tau}\, \mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

lassen sich durch Integration ungefähre Zahlen für die Reihenreste

$$\text{(d)} \qquad x_i(t) - {}_1\hat{x}_i(t) = {}_0p_{im}(t) \approx \int_{t_0}^{t} {}_0q_i(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

gewinnen, die man bei kleiner Schrittweite $|t - t_0|$ sogar als Korrekturen (denn die Ausdrücke (d) sind ja wegen der raschen Konvergenz des Iterationsprozesses ziemlich genau die am Ergebnis noch anzubringenden Verbesserungen !) verwenden oder zur sinnvollen Steuerung der Schrittweite heranziehen kann. Für die ungünstigste Fortpflanzung aller Fehler beim Ausführen vieler Rechenschritte hintereinander (wenn man die Lösungen über ein grosses Parameterintervall hinweg zu verfolgen hat, muss man dieses meistens in kleinere Intervalle unterteilen ; in jedem solchen Teilintervall gelten dieselben Formeln, man hat nur, anstelle von t_0 und den zugehörigen Anfangswerten, den jeweiligen Anfangspunkt des Teilintervalls mit den zugehörigen Funktionswerten einzusetzen !) lassen sich Rekursionsformeln angeben (vgl. [2]).

Vom Aufwand her gesehen, ist es bei hohen Genauigkeitsforderungen zweckmässiger, einige Male zu iterieren, als weitere kompliziert gebaute Glieder der Reihe (12) [1] auszuwerten. Leider gestaltet sich der Iterationsprozess wegen der numerischen Integrationen, die dann bald erforderlich sind, doch ziemlich schwerfällig, und da ist man natürlich froh, dass das Verfahren so rasch konvergiert, dass kaum jemals mehr als zwei Iterationen erforderlich sind.

Eingegangen am 26 X 1966

Universität Innsbruk, Österreich

LITERATURVERZEICHNIS

1. Knapp H., *Die Gröbnermethode und ihre Anwendung auf die numerische Bahnberechnung in der Himmelsmechanik (I)*. Bul. Inst. polit. Iaşi, 1967, **XIII (XVII)**, *3—4*, S. 129–134.
2. Gröbner W., *Die Lie-Reihen und ihre Anwendungen*. Springer-Verlag, Berlin, 1960.
3. Gröbner W., Knapp H., *Contributions to the Method of Lie Series*. Institute of Mathematics, University of Innsbruk, Hochschulskripten *802/802* a, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1967.

METODA LUI GRÖBNER ŞI APLICAŢIILE EI LA CALCULUL NUMERIC AL ORBITELOR ÎN MECANICA CEREASCĂ (II)

(Rezumat)

Autorul, urmînd procedeele caracteristice metodei de calcul numeric elaborată de W. Gröbner [2], [3], expune premisele necesare aplicării acestei metode în mecanica cerească.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

D. C. 517.56

THE REDUCED POISSON-HANKEL TRANSFORM (II)

BY

DEBORAH TEPPER HAIMO[1])

In the first par of our paper, published in the same *Bulletin* [3], we have studied, after a short introduction, the inversions theory of Poisson–Hankel transform. Conserving the numeration of the introduced formulae, we continue in what follows our work.

We may extend the theorem 2.3 [3] to the more general Stieltjes case by establishing the following theorem.

Theorem 2.4. *Let* α *be a function of bounded variation in every finite interval and let* $\alpha(0) = 0$. *Let*

$$f(t) = \int_0^\infty G(y;t)\,\mathrm{d}\alpha(y), \tag{2.13}$$

the integral converging for $0 < t < \rho$. *If*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} [y^{1-2\nu}\alpha(y) - x^{1-2\nu}\alpha(x)]\,\mathrm{d}\mu(y) = 0, \tag{2.14}$$

then

$$\alpha(y) = \lim_{t\to 0^+} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{2n+2\nu+1}}{2^{2n+\nu+1/2}\, n!\, \Gamma(\nu+3/2+n)} f^{(n)}(t). \tag{2.15}$$

Proof. An integration by parts of (2.13) yields

$$f(t) = G(y;t)\,\alpha(y)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \alpha(y)\,\frac{\partial}{\partial y} G(y;t)\,\mathrm{d}y. \tag{2.16}$$

---

[1]) The research was supported by a National Science Foundation fellowship at Harvard University.

Since the integral (2.13) converges for $0 < t < \rho$, an appeal to theorem 2.2a of [2] gives the order relation

$$\alpha(y) = o(e^{y^2/4\rho\theta}), \quad y \to \infty, \tag{2.17}$$

for some θ, $0 < \theta < 1$. This, together with the fact that $\alpha(0) = 0$, results in the vanishing of the integrated part of (2.16), and we have

$$f(t) = \frac{1}{2t} \int_0^\infty y\alpha(y)\, G(y;t)\, dy, \tag{2.18}$$

or

$$tf(t) = 2^{\nu-3/2}\,\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \int_0^\infty y^{1-2\nu}\,\alpha(y)\, G(y;t)\, d\mu(y). \tag{2.19}$$

Since, by (2.17), the integral (2.19) converges absolutely for $0 < t < \rho$ and since (2.14) holds, we may apply the preceding theorem to the fonction $tf(t)$ to get

$$2^{\nu-3/2}\,\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) y^{1-2\nu}\,\alpha(y) = \lim_{t\to 0^+} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu + 1/2)}{2^{2n}\, n!\, \Gamma(\nu + 1/2 + n)}\, y^{2n}\, [tf(t)]^{(n)}. \tag{2.20}$$

If $tf(t)$ is differentiated n times, the sum on the right of (2.20) may be written in the form

$$\begin{aligned} & t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu + 1/2)}{2^{2n}\, n!\, \Gamma(\nu + 1/2 + n)}\, y^{2n} f^{(n)}(t) + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu + 1/2)}{2^{2n+2}\, n!\, \Gamma(\nu + 3/2 + n)}\, y^{2n+2} f^{(n)}(t), \end{aligned} \tag{2.21}$$

so that we have

$$\begin{aligned} \alpha(y) = \lim_{t\to 0^+} \Bigg[& t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{2n+2\nu-1}}{2^{2n+\nu-3/2}\, n!\, \Gamma(\nu + 1/2 + n)}\, f^{(n)}(t) + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{2n+2\nu+1}}{2^{2n+\nu+1/2}\, n!\, \Gamma(\nu + 3/2 + n)}\, f^{(n)}(t) \Bigg]. \end{aligned} \tag{2.22}$$

The proof of the theorem will be complete if we show that the first term on the right of (2.22) tends to zero as $t \to 0^+$. To this end, we note that, by (2.18),

$$f^{(n)}(t) = -\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n G(y;t)\, \alpha(y)\, dy. \tag{2.23}$$

Hence, on appeal to lemma 2.1 [3], we have, if term by term integration is possible,

$$t\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2\nu-1}}{2^{2n+\nu-3/2}\,n!\,\Gamma(\nu+1/2+n)}f^{(n)}(t)=$$

$$=-\frac{tx^{2\nu-1}}{2^{\nu-3/2}\,\Gamma(\nu+1/2)}\int_0^{\infty}\alpha(y)\,dy\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu+1/2)}{2^{2n}\,n!\,\Gamma(\nu+1/2+n)}x^{2n}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n G(y;t)=$$

(2.24)

$$=-\frac{tx^{2\nu-1}}{2^{\nu-3/2}\,\Gamma(\nu+1/2)}\int_0^{\infty}\alpha(y)\,\frac{\partial}{\partial y}G(x,y;t)\,dy=$$

$$=\frac{tx^{2\nu-1}}{2^{\nu-3/2}\,\Gamma(\nu+1/2)}\int_0^{\infty}G(x,y;t)\,\varphi\,\alpha(y),$$

where the last equality follows on integration by parts. Clearly

$$\lim_{t\to 0^+}t\int_0^{\infty}G(x,y;t)\,d\alpha(y)=0,$$

and (2.22) reduces to the desired form. Since it may readily be verified, as in the preceding proof, that, for $0<t<\rho/2$,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^{2n}\,n!\,\Gamma(\nu+1/2+n)}\int_0^{\infty}|\alpha(y)|\left|\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n G(y;t)\right|dy$$

is finite, the validity of termwise integration follows and the theorem is established.

3. Representation

The analyticity at the origin of a function $f(t)$ is sufficient for its representation by a reduced Poisson-Hankel transform of an even entire function of certain order and type. To state the result explicitly, we need the following definition.

Definition 3.1. An even entire function

$$\psi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\,x^{2n} \tag{3.1}$$

is of growth (σ,τ) if and only if

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{e\sigma} |c_n|^{\sigma/n} \leqslant \tau. \tag{3.2}$$

Theorem 3.2. *If $f(t)$ is analytic at $t = 0$,*

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{t^n}{n!}, \quad |t| < \rho, \tag{3.3}$$

then

$$f(t) = \int_0^{\infty} G(y;t)\, \varphi(y)\, d\mu(y), \quad 0 < t < \rho, \tag{3.4}$$

where $\varphi(y)$ is an even entire function of growth $(1, 1/4\rho)$,

$$\varphi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+1/2)}{2^{2n}\, n!\, \Gamma(\nu+1/2+n)} f^{(n)}(0)\, y^{2n}, \quad 0 \leqslant y \leqslant \infty. \tag{3.5}$$

Proof. By (3.3), we have that

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right|^{1/n} \leqslant \frac{1}{\rho}. \tag{3.6}$$

From this it follows, on appeall to Stirling's formula, that

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{e} \left| \frac{\Gamma(\nu+1/2)}{2^{2n}\, n!\, \Gamma(\nu+1/2+n)} f^{(n)}(0) \right|^{1/n} \leqslant \frac{1}{4\rho}. \tag{3.7}$$

If φ is defined by (3.5), it is an even entire function, which, by definition 3.1, is of growth $(1, 1/4\rho)$ because of inequality (3.7).

Now, substituting the series (3.5) for φ, we have, on interchanging the order of summation and integration,

$$\int_0^{\infty} G(y;t)\, \varphi(y)\, d\mu(y) = \tag{3.8}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+1/2)}{2^{2n}\, n!\, \Gamma(\nu+1/2+n)} f^{(n)}(0) \int_0^{\infty} y^{2n} G(y;t)\, d\mu(y).$$

But, by lemma 2.1 of [1],

$$\int_0^{\infty} y^{2n} G(y;t)\, d\mu(y) = 2^{2n} \frac{\Gamma(\nu+1/2+n)}{\Gamma(\nu+1/2)} t^n, \tag{3.9}$$

so that

$$(3.10) \qquad \int_0^\infty G(y;t)\,\varphi(y)\,d\mu(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,t^n = f(t).$$

That termwise integration is valid is a consequence of the convergence of the series

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,t^n .$$

Hence the proof is complete.

Received the 24 X 1966

Southern Ilinois University
and
Harvard University,
USA

BIBILIOGRAPHY

1. Haimo D. T., *Expansions in Terms of Generalized Heat Polynomials and of their Appell Transforms.* J. Math. and Mech., (to appear).
2. Widder D. V., *The Laplace Transform.* Princeton Univ. Press, 1941.
3. Haimo D. T., *The reauced Poisson-Hankel Transform.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1967, **XIII (XVII)**, *3—4*, pp. 39—42.

TRANSFORMAREA REDUSĂ A LUI POISSON-HANKEL (II)

(Rezumat)

Se stabilesc două teoreme relative la transformarea redusă a lui Poisson-Hankel.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

C. D. 518.5; 512.25

UNE MÉTHODE DE RÉSOLUTION DES GRANDS SYSTÈMES LINÉAIRES PAR SURITÉRATION POLYNÔMIALE (II)

PAR

PHILIPPE NOËL

1. Introduction

Dans notre Note antérieure, insérée dans le même *Bulletin* [9], nous avons exposé méthode et technique concernant le problème posé dans le titre et avons donné une estimation de l'erreur commise.

Dans ce qui suit nous continueront notre travail, tout en tenant compte surtout de nos résultats acquis dans notre Thèse [2].

2. Choix du polynôme de convergence

Les relations (VI) et (VII) [5] montrent que, parmi tous les polynômes de degré p vérifiant les conditions requises, celui qui assure la convergence la plus rapide de (II) [5] est celui qui rend $\| P_p(A) \|$ minimum.

$$\text{Or } [P_p(A)] = [\Omega] \ulcorner \dots p_p(\lambda_i) \dots \urcorner [\Omega]^{-1} \Rightarrow \| P_p(A) \| \leqslant \rho(P_p(A)) \cdot K \text{ avec}$$

$$K = \| \Omega \| \cdot \| \Omega \|^{-1} \geqslant 1.$$

K étant indépendant de p et du choix du polynôme, la rapidité de convergence ne dépend que de $\rho(P_p(A)) = \underset{i=1,\dots,n}{\text{Max}} | p_p(\lambda_i) |$.

Les valeurs propres de la matrice ne sont que très rarement connues, et il est très difficile de les déterminer numériquement. Nous supposons alors que nous sommes en mesure de déterminer deux nombres α et β, respectivement majorant et minorant en module toutes le valeurs propres de $[A]$

$$\Rightarrow \forall i = 1, \dots, n, \begin{cases} |\lambda_i| \leqslant |\alpha|, \\ |\lambda_i| \geqslant |\beta|, \end{cases} \qquad E = \begin{cases} [\beta, \alpha] & \text{si } \beta \text{ et } \alpha > 0, \\ [\alpha, \beta] & \text{si } \beta \text{ et } \alpha < 0; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underset{i=1,\dots,n}{\text{Max}} | p_p(\lambda_i) | \leqslant \underset{x \in E}{\text{Max}} | p_p(x) |, \quad \text{ou} \quad \rho(P_p(A)) \leqslant h_p \text{ avec } h_p = \underset{x \in E}{\text{Max}} | p_p(x) |.$$

Le polynôme recherché est alors celui qui approche „au mieux" 0 sur E, tout en vérifiant $p_p(0) = 1$. *Si le critère „au mieux" est h_p minimum*, ce polynôme est connu et s'obtient à partir du polynôme de Tchébycheff de première espèce $T_p(x)$, et:

$$\text{(I)} \qquad p_p(x) = \frac{T_p\left(\dfrac{-2x+\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right)}{T_p\left(\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right)} \Rightarrow h_p = \frac{1}{T_p\left(\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right)}.$$

Partant à l'origine de la valeur 1, $p_p(x)$ oscille pour $x \in [\beta, \alpha]$, (si α et β sont positifs), entre les valeurs $+h_p$ et $-h_p$, atteintes au total $p+1$ fois (en particulier $p_p(\beta) = |p_p(\alpha)| = h_p$)

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{si } \beta = \underset{i=1,\ldots,n}{\text{Min}} |\lambda_i| \\ \text{ou } \alpha = \underset{i=1,\ldots,n}{\text{Max}} |\lambda_i| \end{array} \right\} \rho(P_p(A)) = h_p.$$

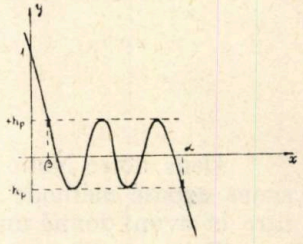


Fig. 1

Les p racines de $p_p(x)$ sont strictement connues et

$$\text{(II)} \qquad x_i = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2} \cos \frac{[(2i-1)\pi]}{2p}.$$

3. Choix du degré du polynôme lorsque $\|A\| = \rho(A)$

Supposons maintenant que les vecteurs propres de $[A]$ forment une base de vecteurs linéairement indépendants et orthonormés

$$\vec{V}_i . \vec{V}_j = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{array} \right., \qquad \Rightarrow [\Omega]^t = [\Omega]^{-1}$$

et $\|A\| = \underset{i=1,\ldots,n}{\max} |\lambda_i| = \rho(A)$ si $|\beta| \simeq \underset{i=1,\ldots,n}{\min} |\lambda|$ et $|\alpha| \simeq \underset{i=1,\ldots,n}{\max} |\lambda_i|$,

les relations d'erreur ((VI) et (VII) [5]) deviennent, si l'on choisit (I) comme polynôme $p_p(x)$:

$$\text{(II)}, \qquad \frac{\|X - X_k\|}{\|X\|} \leqslant h_p^k, \quad \|X - X_k\| \leqslant \frac{h_p}{1-h_p} \|U_k\|.$$

Une précision relative définie par $\varepsilon = h_p^N$ nécessite, pour être atteinte, $N \times P$ itérations du type (III) [5]. Un réseau de courbes $h_p(p, \alpha/\beta) = C$, tracées pour plusieurs valeurs de la constante C, échelonnées de 10^{-1} à 10^{-7} (le lecteur pourra trouver ces courbes en [2] et [3]), montre que plusieurs combinaisons (N, P) sont possibles.

Exemple: $\begin{cases} \alpha/\beta = 200 \\ \varepsilon = 10^{-6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N=1, & P=103, & N \times P = 103, \\ N=2, & P=54, & N \times P = 108; \end{cases}$

$$\begin{cases} \alpha/\beta = 4\,000 \\ \varepsilon = 10^{-4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N=1, & P=315, & N \times P = 315, \\ N=2, & P=167, & N \times P = 334, \\ N=4, & P=90, & N \times P = 360. \end{cases}$$

Une étude du facteur h_p, qui est fonction de P et de α/β, montre que $N \times P$ est minimum, donc la résolution la plus rapide, pour la combinaison pour laquelle $N = 1$.

La méthode s'identifie alors avec celle de Richardson [1], [4]. Cette méthode, connue de longue date, avait vite été abandonnée, car elle était très instable sur le plan numérique dès que P dépassait quelques dizaines. Le choix de l'ordre d'appel des racines x_i de $p_p(x)$ dans (III) [5] en était la cause, et D. Young l'avait déjà constaté.

Une étude expérimentale portant sur cet ordre d'appel des x_i a conduit à un schéma bien défini [5], que nous ne décrirons pas ici. L'ordre d'appel préconisé est tel qu'un grand nombre de systèmes nécessitant pour $N = 1$, moins de 240 itérations (III) [5] (les essais ont été effectués sur un ordinateur travaillant avec des mots de 8 chiffres significatifs), peuvent maintenant être résolus en une seule itération (II) [5]. Pour les autres systèmes, $(\alpha/\beta) > 1\,000$), plusieurs itérations (II) [5] devront être envisagées.

Le contrôle numérique du déroulement du processus itératif (II) [5] pourra alors s'effectuer en comparant à chaque itération (II) [5] les quantités $\| U_k \| / \| U_{k-1} \|$ et h_p qui devront rester comparables. Si, au bout des N itérations, le test n'est jamais contredit, la solution obtenue $[X^*] = [X_N]$ sera bien définie en regard de la solution exacte par (III).

4. Conclusion

La méthode ici résumée a toujours donné d'excellents résultats, comme le lecteur pourra le constater en consultant [2]. Plusieurs systèmes ont été résolus avec profit et en particulier: a) un système „creux" d'environ 2000 équation à 2000 inconnues, qui a permis de donner un bon aperçu des phénomènes de contraintes thermiques qui se créaient dans une lingotière pendant son remplissage par de l'acier liquide à 1500°C (résolution d'une équation biharmonique par les différences finies) et b) plusieurs dizaines de systèmes „pleins" d'ordres 50 environ où 7 à 8 chiffres significatifs étaient garantis sur toutes les composantes du vecteur solution grâce au contrôle d'erreurs (résolution de problèmes de Dirichlet par superposition finie de solutions exactes et par utilisation de la théorie du potentiel).

Le reproche qui peut être fait à cette méthode est qu'elle exige la détermination des deux nombres α et β, ce que n'exigent pas les autres méthodes itératives connues. Si la recherche de α ne pose jamais de pro-

blèmes, une technique, utilisant les proprietés des polynômes de Tchébycheff [2] a dû être mise au point pour celle de β, qui, auparavant, était très difficile.

Cet inconvénient est néanmoins atténué par le fait que la connaissance de α et β permet de contrôler la convergence, ce qui est essentiel sur le plan numérique.

Reçue le 24 I 1967

Institut Universitaire de Calcul Automatique, Nancy, France

BIBLIOGRAPHIE*)

1. Varga R. S., *Matrix Iterative Analysis*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.
2. Nöel Ph., *Suritération des grands systèmes linéaires. Quelquels applications aux dérivées partielles*. Thèse, Nancy, 1967.
3. — *Résolution par suritération polynômiale des grands systèmes linéaires*. Notice technique, Nancy, 1967.
4. Young D., *On Richardson's Method for Solving Linear Systems with Positive Definite Matrices*. J. Math. Phys., 1954, **32**, pp. 243–255.
5. Noël Ph. *Une méthode de résolution des grands systèmes linéaires (I)*. Bul. Inst. polit. Iaşi, 1967, **XIII (XVIII)**, *3–4*, pp. 119–122.

O METODĂ DE REZOLVARE A SISTEMELOR LINIARE MARI PRIN SUPRAITERAŢIE POLINOMIALĂ (II)

(Rezumat)

Continuînd lucrarea proprie [5], autorul expune problema alegerii polinomului de convergenţă şi concluziile lucrării.

*) Remarques. [2] et [3] sont publiés à l'Institut Universitaire de Calcul Automatique, Nancy, France, 42 avenue de la Libération, sous la direction de M. le Directeur prof. dr. Jean Legras.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

C. D. 517.392

FORMULES DE CUBATURE AVEC UN PETIT NOMBRE DE NOEUDS (II)

PAR

D. V. IONESCU

Dans ce que suit nous conserverons les notations et le numérotage de notre travail [7], inséré dans le même *Bulletin*.

§ 4. Formules à 5 paramètres

14. Le système d'équations

$$A_1+A_2=1,\ A_1\lambda_1^2+A_2\lambda_2^2=\frac{1}{12},\ A_1\mu_1^2=\frac{1}{12},\ A_1\lambda_1^4+A_2\lambda_2^4=\frac{1}{80},\ A_1\mu_1^4=\frac{1}{80},$$

à cinq paramètres, conduit à la formule de cubature

$$(25)\quad \iint_D f\,dx\,dy=\frac{5S}{36}[f(M_1)+f(M_2)+f(M_3)+f(M_4)]+\frac{2S}{9}[f(M_1')+f(M_3')].$$

Les noeuds M_1, M_2, M_3, M_4 correspondent à $\lambda_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{15}}$, $\mu_1=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$, et les noeuds M_1', M_3' correspondent à $\lambda_2=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$.

15. Le système d'équations

$$A_1+A_2+A_3=1,\ A_1\lambda_1^2=\frac{1}{12},\ A_2\mu_2^2=\frac{1}{12},\ A_1\lambda_1^4=\frac{1}{80},\ A_2\mu_2^4=\frac{1}{80},$$

conduit à la formule de cubature

$$(26)\quad \iint_D f\,dx\,dy=\frac{5S}{18}[f(M_1')+f(M_2'')+f(M_3')+f(M_4'')]-\frac{S}{9}f(P),$$

les noeuds M_1', M_3' et M_2'', M_4'' correspondant à $\lambda_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$ et à $\mu_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$.

16. Le système d'équations

$$A_1 + A_2 = 1,\ A_1\lambda_1^2 = \frac{1}{12},\ A_1\mu_1^2 + A_2\mu_2^2 = \frac{1}{12},\ A_1\lambda_1^4 = \frac{1}{80},\ A_1\lambda_1^2\mu_1^2 = \frac{1}{144},$$

à cinq paramètres, conduit à la formule

$$\iint_D f\,dx\,dy = \frac{5S}{36}[f(M_1) + f(M_2) + f(M_3) + f(M_4)] + \frac{2S}{9}[f(M_2'') + f(M_4'')]. \tag{27}$$

Les noeuds M_1, M_2, M_3, M_4 correspondent à $\lambda_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$, $\mu_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ et les noeuds M_2'', M_4'' correspondent à $\mu_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

17. Le système d'équations

$$A_1 + A_2 + A_3 = 1,\ A_1\lambda_1^2 + A_2\lambda_2^2 = \frac{1}{12},\ A_1\mu_1^2 + A_3\mu_3^2 = \frac{1}{12},$$

$$A_1\lambda_1^4 + A_2\lambda_2^4 = \frac{1}{80},\ A_1\lambda_1^2\mu_1^2 = \frac{1}{144}$$

est à sept paramètres A_1, λ_1, μ_1, A_2, λ_2, A_3, μ_3. Il se réduit à un système à cinq paramètres si on ajoute les équations:

$$\lambda_1 = \mu_1,\ A_2 = A_3.$$

Ce système conduit à la formule de cubature

$$\iint_D f\,dx\,dy = \frac{9S}{196}[f(M_1) + f(M_2) + f(M_3) + f(M_4)] + \frac{40S}{196}[f(M_1') + f(M_2'') + f(M_3') + f(M_4'')], \tag{28}$$

établie par R. v. Mises [2].

Dans cette formule les noeuds M_1, M_2, M_3, M_4 correspondent à $\lambda_1 = \mu_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{9}}$. Les noeuds M_1', M_3' et M_2'', M_4'' correspondent à $\lambda_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{15}}$ et $\mu_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{15}}$.

5. Formules à six paramètres

18. Le système d'équations

$$A_1 + A_2 + A_3 = 1,\ A_1\lambda_1^2 + A_2\lambda_2^2 = \frac{1}{12},$$

$$A_1\mu_1^2 = \frac{1}{12},\ A_1\lambda_1^4 + A_2\lambda_2^4 = \frac{1}{80},\ A_1\lambda_1^2\mu_1^2 = \frac{1}{144},\ A_1\mu_1^4 = \frac{1}{80},$$

à six paramètres, conduit à formule

$$\iint_D f\,dx\,dy = \frac{5S}{36}[f(M_1) + f(M_2) + f(M_3) + f(M_4)] + \tag{29}$$
$$+ \frac{5S}{63}[f(M_1') + f(M_3')] + \frac{2S}{7}f(P),$$

où les noeuds M_1, M_2, M_3, M_4 correspondent à $\lambda_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, $\mu_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$ et les noeuds M_1', M_3' correspondent à $\lambda_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{14}{15}}$.

19. Le système d'équations

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 1,\ A_1\lambda_1^2 + A_2\lambda_2^2 = \frac{1}{12},\ A_1\mu_1^2 + A_3\mu_3^2 = \frac{1}{12},$$

$$A_1\lambda_1^4 + A_2\lambda_2^4 = \frac{1}{80},\ A_1\lambda_1^2\mu_1^2 = \frac{1}{144},\ A_1\mu_1^4 + A_3\mu_3^4 = \frac{1}{80},$$

$$\lambda_1 = \lambda_2,\ \mu_1 = \mu_3$$

est à six paramètres et conduit à la formule de cubature

$$\iint_D f\,dx\,dy = \frac{25S}{324}[f(M_1) + f(M_2) + f(M_3) + f(M_4)] + \tag{30}$$
$$+ \frac{20S}{162}[f(M_1') + f(M_2'') + f(M_3') + f(M_4'')] + \frac{16S}{81}f(P).$$

Les noeuds M_1, M_2, M_3, M_4 correspondent à $\lambda_1 = \mu_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$. Les noeuds M_1', M_3' et M_2'', M_4'' correspondent à $\lambda_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$ et $\mu_3 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$.

20. Le système d'équations

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 1,\ A_1\mu_1^2 + A_3\mu_3^2 = \frac{1}{12},\ A_1\lambda_1^2 + A_2\lambda_2^2 = \frac{1}{12},$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

$$A_1\lambda_1^4 + A_2\lambda_2^4 = \frac{1}{80},\quad A_1\lambda_1^2\mu_1^2 = \frac{1}{144},\quad A_1\mu_1^4 + A_3\mu_3^4 = \frac{1}{80},\quad \lambda_1 = \mu_1 = \frac{1}{2},$$

conduit à la formule de cubature

$$\iint_D f\,dx\,dy = \frac{S}{36}[f(P_1) + f(P_2) + f(P_3) + f(P_4)] + \tag{31}$$
$$+ \frac{5S}{18}[f(M_1') + f(M_2'') + f(M_3') + f(M_4'')] - \frac{2S}{9}f(P).$$

Les noeuds M_1', M_3' et M_2'', M_4'' correspondent à $\lambda_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{5}}$ et $\mu_3 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{5}}$.

La formule (31) est citée par S. E. Mikeladze dans son livre [1, p. 502].

21. Le système d'équations

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 1,\quad A_1\lambda_1^2 + A_2\lambda_2^2 = \frac{1}{12},\quad A_1\mu_1^2 + A_3\mu_3^2 = \frac{1}{12},$$

$$A_1\lambda_1^4 + A_2\lambda_2^4 = \frac{1}{80},\quad A_1\lambda_1^2\mu_1^2 = \frac{1}{144},\quad A_1\mu_1^4 + A_3\mu_3^4 = \frac{1}{80},\quad \lambda_2 = \mu_3 = \frac{1}{2},$$

est à six paramètres et conduit à la formule de cubature

$$\iint_D f\,dx\,dy = \frac{121S}{900}[f(M_1) + f(M_2) + f(M_3) + f(M_4)] + \tag{32}$$
$$+ \frac{40S}{900}[f(P_1') + f(P_2'') + f(P_3') + f(P_4'')] + \frac{256S}{900}f(P);$$

les noeuds M_1, M_2, M_3, M_4 correspondent à $\lambda_1 = \mu_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{11}}$.

22. Considérons la système d'équations

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 = 1,$$
$$A_1\lambda_1^2 + A_2\lambda_2^2 + A_3\lambda_3^2 + A_4\lambda_4^2 + A_5\lambda_5^2 + A_6\lambda_6^2 = \frac{1}{12},$$
$$A_1\mu_1^2 + A_2\mu_2^2 + A_3\mu_3^2 + A_4\mu_4^2 + A_5\mu_5^2 + A_6\mu_6^2 = \frac{1}{12},$$
$$A_1\lambda_1^4 + A_2\lambda_2^4 + A_3\lambda_3^4 + A_4\lambda_4^4 + A_5\lambda_5^4 + A_6\lambda_6^4 = \frac{1}{80},$$

$$A_1\lambda_1^2\mu_1^2 + A_2\lambda_2^2\mu_2^2 + A_3\lambda_3^2\mu_3^2 + A_4\lambda_4^2\mu_4^2 + A_5\lambda_5^2\mu_5^2 + A_6\lambda_6^2\mu_6^2 = \frac{1}{144},$$

$$A_1\mu_1^4 + A_2\mu_2^4 + A_3\mu_3^4 + A_4\mu_4^4 + A_5\mu_5^4 + A_6\mu_6^4 = \frac{1}{80}$$

et supposons que

$$\lambda_1 = \frac{1}{2},\ \lambda_2 = \frac{1}{2},\ \lambda_3 = 0,\ \lambda_4 = \frac{1}{2},\ \lambda_5 = 0,\ \lambda_6 = 0,$$

$$\mu_1 = \frac{1}{2},\ \mu_2 = 0,\ \mu_3 = \frac{1}{2},\ \mu_4 = 0,\ \mu_5 = \frac{1}{4},\ \mu_6 = 0.$$

C'est un système à six paramètres qui conduit à la formule de cubature

$$\iint_D f\,dx\,dy = \frac{5S}{180}[f(P_1) + f(P_2) + f(P_3) + f(P_4)] + \frac{4S}{180}[f(P_1') +$$

$$(33)\qquad + f(P_2'') + f(P_3') + f(P_4'')] + \frac{64S}{180}[f(M_1') + f(M_2'') + f(M_3') +$$

$$+ f(M_4'')] - \frac{112S}{180} f(P),$$

qui a été donnée par G. W. Tyler [5].

23. Considérons aussi le systeme d'équations

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 1,$$

$$A_1\lambda_1^2 + A_2\lambda_2^2 + A_3\lambda_3^2 + A_4\lambda_4^2 = \frac{1}{12},$$

$$A_1\mu_1^2 + A_2\mu_2^2 + A_3\mu_3^2 + A_4\mu_4^2 = \frac{1}{12},$$

$$A_1\lambda_1^4 + A_2\lambda_2^4 + A_3\lambda_3^4 + A_4\lambda_4^4 = \frac{1}{80},$$

$$A_1\lambda_1^2\mu_1^2 + A_2\lambda_2^2\mu_2^2 + A_3\lambda_3^2\mu_3^2 + A_4\lambda_4^2\mu_4^2 = \frac{1}{144},$$

$$A_1\mu_1^4 + A_2\mu_2^4 + A_3\mu_3^4 + A_4\mu_4^4 = \frac{1}{80}$$

et supposons que

$$\lambda_1 = \frac{1}{2},\ \lambda_2 = \frac{1}{2},\ \lambda_3 = \lambda,\ \lambda_4 = \lambda,\ \mu_1 = \frac{1}{2},\ \mu_2 = \mu,\ \mu_3 = \frac{1}{2},\ \mu_4 = \mu\ .$$

On obtient un système à six paramètres, qui conduit à la formule de cubature

$$\iint_D f\,dx\,dy = \frac{S}{144}[f(P_1)+f(P_2)+f(P_3)+f(P_4)] + \frac{5S}{144}[f(U_1)+$$

$$+f(U_2)+f(U_3)+f(U_4)] + \frac{5S}{144}[f(T_1)+f(T_2)+f(T_3)+f(T_4)] + \tag{34}$$

$$+\frac{25S}{144}[f(M_1)+f(M_2)+f(M_3)+f(M_4)],$$

où les noeuds U_1, U_2, U_3, U_4 correspondent à $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{5}}\right)$, les noeuds T_1, T_2, T_3, T_4 correspondent à $\left(\frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{1}{2}\right)$ et les noeuds M_1, M_2, M_3, M_4 correspondent à $\left(\frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{1}{2\sqrt{5}}\right)$.

La formule (34) a été établie par D. D. Stancu [4].

24. Considérons le système d'équations

$$A_1+A_2+A_3+A_4+A_5+A_6+A_7+A_8+A_9=1,$$

$$A_1\lambda_1^2+A_2\lambda_2^2+A_3\lambda_3^2+A_4\lambda_4^2+A_5\lambda_5^2+A_6\lambda_6^2+A_7\lambda_7^2+A_8\lambda_8^2+A_9\lambda_9^2=\frac{1}{12},$$

$$A_1\mu_1^2+A_2\mu_2^2+A_3\mu_3^2+A_4\mu_4^2+A_5\mu_5^2+A_6\mu_6^2+A_7\mu_7^2+A_8\mu_8^2+A_9\mu_9^2=\frac{1}{12},$$

$$A_1\lambda_1^4+A_2\lambda_2^4+A_3\lambda_3^4+A_4\lambda_4^4+A_5\lambda_5^4+A_6\lambda_6^4+A_7\lambda_7^4+A_8\lambda_8^4+A_9\lambda_9^4=\frac{1}{80},$$

$$A_1\lambda_1^2\mu_1^2+A_2\lambda_2^2\mu_2^2+A_3\lambda_3^2\mu_3^2+A_4\lambda_4^2\mu_4^2+A_5\lambda_5^2\mu_5^2+A_6\lambda_6^2\mu_6^2+A_7\lambda_7^2\mu_7^2+A_8\lambda_8^2\mu_8^2+$$

$$+A_9\lambda_9^2\mu_9^2=\frac{1}{144},$$

$$A_1\mu_1^4+A_2\mu_2^4+A_3\mu_3^4+A_4\mu_4^4+A_5\mu_5^4+A_6\mu_6^4+A_7\mu_7^4+A_8\mu_8^4+A_9\mu_9^4=\frac{1}{80}$$

et supposons que

$$\lambda_1=\frac{1}{4},\ \lambda_2=0,\ \lambda_3=\frac{1}{2},\ \lambda_4=0,\ \lambda_5=\frac{1}{4},\ \lambda_6=\frac{1}{2},\ \lambda_7=\frac{1}{4},\ \lambda_8=\frac{1}{2},\ \lambda_9=0,$$

$$\mu_1=0,\ \mu_1=\frac{1}{4},\ \mu_3=0,\ \mu_4=\frac{1}{2},\ \mu_5=\frac{1}{4},\ \mu_6=\frac{1}{4},\ \mu_7=\frac{1}{2},\ \mu_8=\frac{1}{2},\ \mu_9=0,$$

$$A_1=A_2,\quad A_3=A_4,\quad A_6=A_7.$$

On obtient un système à six paramètres qui conduit à la formule de cubature

$$\iint_D f\,dx\,dy = \frac{96S}{2025}\,[f(M_1') + f(M_2'') + f(M_3') + f(M_4'')] + \frac{21S}{2025}\,[f(P_1') +$$

$$(35)\quad + f(P_2'') + f(P_3') + f(P_4'')] + \frac{256S}{2025}\,[f(M_1) + f(M_2) + f(M_3) + f(M_4)] +$$

$$+ \frac{56S}{2025}\,[f(U_1) + f(U_2) + f(U_3) + f(U_4)],$$

obtenue par D. D. Stancu dans [3, p. 95].

25. Les exemples donnés ci-dessus montrent assez clairement l'importance de la classe de formules de cubature (1) ou (3) et le caractère unitaire de la méthode utilisée pour les obtenir.

Reçue le 18 IV 1967

Université „Babeş-Bolyai", Cluj

BIBLIOGRAPHIE

1. Микеладзе С. Е., *Численные методы математического анализа.* Физматгиз, М., 1953.
2. v. Mises R., *Formules de cubature.* Rev. Math. de l'Union Interbalcanique, 1936, **1**, pp. 17—27.
3. Stancu D. D., *Contribuţii la integrarea numerică a funcţiilor de mai multe variabile.* St. şi cerc. de matem., Acad. R. P. R., filiala Cluj, 1957, **VIII**, pp. 75—101.
4. — *O metodă pentru construirea de formule de cubatură pentru funcţiile de două variabile.* St. şi cerc. de matem , Acad. R. P. R., filiala Cluj, 1958, **IX**, pp. 351—369.
5. Tyler G. W., *Numerical Integration of Fonction of Several Variables.* Canad. J. of Math., 1953, **5**, pp. 393—412.
6. Ionescu D. V., *Formules de cubature avec un petit nombre de noeuds (I).* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1967, **XIII (XVII)**, *3—4*, pp. 111—118.

FORMULE DE CUBATURĂ CU UN NUMĂR REDUS DE NODURI (II)

(Rezumat)

Autorul, continuîndu-şi expunerea cercetării începută în acest *Buletin* [6], prezintă rezultatele obţinute referitoare la formule cu 5 şi 6 parametri.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

C. D. 513.821.5

SUR LES SYSTÈMES TRIPLES DE COURBES DANS L'ESPACE PROJECTIF

PAR

F. MARCUS

Dans le Mémoire sous le même titre publié dans ce Bulletin [1] nous avons caractérisé les systèmes triples de courbes dans l'espace projectif. Le résultat concernant les systèmes triples triangulaires ou systèmes T doit être modifié de la manière suivante:

Un système triple est triangulaire si et seulement si les plans tangents ξ_α *aux courbes du système sont harmoniquement conjugués avec les plans focaux des congruences* H_β, $(\beta \neq \alpha)$.

Reçue le 28 IX 1967

Institut Polytechnique de Jassy,
Chaire de Mathématiques I

BIBLIOGRAPHIE

1. Marcus F., *Sur les systèmes triples de courbes dans l'espace projectif*. Bul. Inst. polit. Iaşi, 1966, **XII (XVI)**, *1—2*, pp. 71—83.

ASUPRA SISTEMELOR TRIPLE DE CURBE ÎN SPAŢIUL PROIECTIV

(Rezumat)

În legătură cu lucrarea sa [1], inserată în acelaşi *Buletin*, autorul enunţă următoarea caracterizare a sistemelor triple triunghiulare:

Un sistem triplu este triunghiular atunci şi numai atunci cînd planele tangente ξ_α *la curbele sistemului sînt armonic conjugate cu planele focale ale congruenţelor* H_β, $(\beta \neq \alpha)$.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

C. D. 516.3 ; 516.8

REPRÉSENTATION VECTORIELLE DES QUADRIQUES DE ROTATION (II)

PAR

ȘARLOTA RIMER

1. Introduction

Dans ce que suit nous établirons, tout en conservant les notations de notre Note antérieure [4], l'équation générale, sous forme vectorielle, des quadriques de rotation. Ensuite nous allons passer de ces équations à l'équation générale algébrique et trouverons la condition nécessaire et suffisante afin que cette dernière représente une quadrique de rotation.

2. Équation générale sous forme vectorielle des quadriques de rotation

a) En [1] on a établi l'équation sous forme vectorielle des coniques non dégénérées, par rapport à un repère O quelconque. En notant par $\mathbf{g}$ le vecteur de position du centre (coniques à centre), respectivement du sommet (parabole), par

$$\mathbf{v} = \mathbf{g} - (\mathbf{eg})\,\mathbf{e}\,, \tag{2.1}$$

$$q = (\mathbf{eg})^2 + b^2 - \mathbf{g}^2\,, \tag{2.2}$$

respectivement

$$\mathbf{v} = \mathbf{g} - (\mathbf{eg})\,\mathbf{e} + \mathbf{p}, \tag{2.1'}$$

$$q = (\mathbf{eg})^2 - \mathbf{g}^2 - 2\,\mathbf{pg}, \tag{2.2'}$$

l'équation générale des coniques est

$$\mathbf{r}^2 = (\mathbf{er})^2 + 2\,\mathbf{vr} + q. \tag{2.3}$$

Par la même voie (en remplaçant dans (3.1), (3.2), (3.7'), (3.8') de la Note [4] $\mathbf{r}$ par $\mathbf{r} - \mathbf{g}$) nous obtenons qu'une quadrique de rotation, (à centre, sans centre, à une droite ou un plan de centres), rapportée à un repère quelconque, est représentée par l'équation (2.3) avec les notations (2.1)...(2.2').

Remarque. Une quadrique quelconque est représentée aussi par (2.3), avec $\mathbf{r}$ donné par (3.11) [4], respectivement (3.12) [4].

En ce qui concerne les quadriques à un plan de centres, les équations (3.9′), (3.10′) [4] deviennent respectivement

$$(2.4)\quad [(\mathbf{er}) + m]^2 = b^2 \text{ où } m = -(\mathbf{eg}), \qquad (2.4')\quad [(\mathbf{er}) + m]^2 = 0.$$

b) Réciproquement, une équation (2.3) ou (2.4) caractérise une quadrique de rotation.

En effet, l'équation (2.3) peut être ramenée à une des formes (3.1) [4] si $|\mathbf{e}| \neq 1$, (3.2) [4] si $|\mathbf{e}| = 1$ et $\mathbf{ev} \neq 0$ ou (3.8′) [4] si $|\mathbf{e}| = 1$ et $|\mathbf{v}| = 0$ et l'équation (2.4) à la forme (3.9′) [4].

Dans ce but on détermine $\mathbf{g}$ (pour les quadriques à centre), b^2 et p à l'aide des formules établies en [1] pour les coniques non dégénérées:

$$(2.5)\quad \mathbf{g} = \mathbf{v} + \frac{\mathbf{ve}}{1 - e^2}\mathbf{e}, \qquad (2.6)\quad b^2 = q + \mathbf{vg}, \qquad (2.7)\quad p = \mathbf{ev}.$$

En ce qui concerne $\mathbf{g}$ pour les paraboloïdes de rotations, nous avons obtenu la formule

$$(2.8)\qquad \mathbf{g} = -\frac{(\mathbf{ve}_1)^2 + q}{2p}\mathbf{e} + (\mathbf{ve}_1)\,\mathbf{e}_1 + (\mathbf{ve}_2)\,\mathbf{e}_2,$$

où $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$ sont des vecteurs unitaires qui forment avec $\mathbf{e}$ un trièdre orthogonal droit (le vecteur $\mathbf{e}_1$ étant choisi arbitrairement).

Si $|\mathbf{e}| = 1$ et $|\mathbf{v}| = 0$, (2.3) devient $\mathbf{r}^2 = (\mathbf{er})^2 + q$ qui coïncide justement avec (3.8′) [4], où $b^2 = q$.

D'autre part l'équation (2.4) peut être écrite sous la forme $[(\mathbf{er}) - (\mathbf{eg})]^2 = b^2$ ou, en notant $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{g}$, sous la forme $(\mathbf{eR})^2 = b^2$, qui coïncide avec (3.9′) [4].

Remarque. Si $|\mathbf{e}| = 1$, $|\mathbf{v}| \neq 0$ mais $p = \mathbf{ev} = 0$, l'équation (2.3) représente aussi un cylindre de rotation.

En effet, de la même manière qu'en [3] en obtient de $\mathbf{ev} = 0$, $(\mathbf{v} \perp \mathbf{e})$, $\mathbf{v} = (\mathbf{ve}_1)\,\mathbf{e}_1 + (\mathbf{ve}_2)\,\mathbf{e}_2$ et l'équation (2.3) devient

$$(\mathbf{e}_1\,\mathbf{r})^2 + (\mathbf{e}_2\,\mathbf{r})^2 - 2(\mathbf{ve}_1)(\mathbf{e}_1\,\mathbf{r}) - 2(\mathbf{ve}_2)(\mathbf{e}_2\,\mathbf{r}) = q$$

ou

$$(2.9)\qquad (\mathbf{e}_1\,\mathbf{R})^2 + (\mathbf{e}_2\,\mathbf{R})^2 = (\mathbf{e}_1\,\mathbf{v})^2 + (\mathbf{e}_2\,\mathbf{v})^2 + q,$$

où

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{v}.$$

L'équation (2.9) représente, évidemment, un cylindre de rotation réel ou complexe ou bien un couple de plans complexes, suivant que $(\mathbf{e}_1\,\mathbf{v})^2 + (\mathbf{e}_2\,\mathbf{v})^2 + q > 0$, < 0, $= 0$,

3. Équation algébrique générale des quadriques de rotation

1° En [1] on transforme l'équation (2.3) en l'équation algébrique des coniques. De la même manière, utilisant les notations

(3.1) $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad \mathbf{e} = e_x\mathbf{i} + e_y\mathbf{j} + e_z\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k},$

nous transformons l'équation générale (2.3) des quadriques de rotation en l'équation

$$(3.2) \qquad \begin{aligned}(e_x^2 - 1)\,x^2 + (e_y^2 - 1)\,y^2 + (e_z^2 - 1)\,z^2 + 2e_x e_y\,xy + 2e_y e_z\,yz + \\ + 2e_x e_z\,xz + 2v_x x + 2v_y y + 2v_z z + q = 0.\end{aligned}$$

En multipliant les deux membres de (3.2) avec un facteur arbitraire $\rho \neq 0$ et en notant

$$(3.3) \qquad \begin{cases} a_{11} = \rho\,(e_x^2 - 1), \quad a_{22} = \rho\,(e_y^2 - 1), \quad a_{33} = \rho\,(e_z^2 - 1), \quad a_{12} = \rho e_x e_y, \\ a_{23} = \rho e_y e_z, \quad a_{13} = \rho e_x e_z, \quad a_{14} = \rho v_x, \quad a_{24} = \rho v_y, \quad a_{34} = \rho v_z, \quad a_{44} = \rho q, \end{cases}$$

l'équation (3.2) devient

$$(3.4) \qquad \begin{aligned}a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{14}x + \\ + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0,\end{aligned}$$

avec $a_{ij} = a_{ji}$.

De même, l'équation (2.4), en tenant compte de (3.1), devient

$$(3.5) \qquad (e_x x + e_y y + e_z z)^2 + 2m\,(e_x x + e_y y + e_z z) + m^2 = b^2 \text{ ou}$$

$$(3.5') \qquad \begin{aligned}e_x^2 x^2 + e_y^2 y^2 + e_z^2 z^2 + 2e_x e_y\,xy + 2e_x e_z\,xz + 2e_y e_z\,yz + 2me_x x + \\ + 2me_y y + 2me_z z + m^2 - b^2 = 0.\end{aligned}$$

Posons

$$(3.6) \qquad \begin{cases} a_{11} = e_x^2, \quad a_{22} = e_y^2, \quad a_{33} = e_z^2, \quad a_{12} = e_x e_y, \quad a_{13} = e_x e_z, \\ a_{23} = e_y e_z, \quad a_{14} = me_x, \quad a_{24} = me_y, \quad a_{34} = me_z, \quad a_{44} = m^2 - b^2. \end{cases}$$

L'équation (3.5) devient (3.4). Dans ce cas (3.4) peut être écrite aussi sous la forme

$$(3.4') \qquad [(\sqrt{a_{11}}\,x \pm \sqrt{a_{22}}\,y \pm \sqrt{a_{33}}\,z) + m]^2 = b^2.$$

On peut énoncer ainsi le suivant

Théorème. *Une quadrique de rotation, dégenérée ou non, peut être représentée par l'équation* (3.4) *où les coefficients* a_{ij} *sont donnés par* (3.3) *respectivement par* (3.6).

Remarque. Une quadrique quelconque peut être représentée aussi par l'équation (3.4) avec les notations

$$(3.3')\qquad \begin{cases} a_{11}=\rho\dfrac{b^2}{a^2}(e_x^2-1), \quad a_{22}=\rho(e_y^2-1), \quad a_{33}=\rho(e_z^2-1), \\ a_{12}=\rho\dfrac{b}{a}e_x e_y, \quad a_{13}=\rho\dfrac{b}{a}e_x e_z, \quad e_{23}=\rho e_y e_z, \\ a_{14}=\rho\dfrac{b}{a}v_x, \quad a_{24}=\rho v_y, \quad a_{34}=\rho v_z, \quad a_{44}=\rho q, \end{cases}$$

$$(3.3'')\qquad \begin{cases} a_{11}=\rho(e_x^2-1), \quad a_{22}=\rho\dfrac{p}{q}(e_y^2-1), \quad a_{33}=\rho(e_z^2-1), \\ a_{12}=\rho e_x e_y\sqrt{\dfrac{p}{q}}, \quad a_{13}=\rho e_x e_z, \quad a_{23}=\rho e_y e_z\sqrt{\dfrac{p}{q}}, \\ a_{14}=\rho v_x, \quad a_{24}=\rho v_y\sqrt{\dfrac{p}{q}}, \quad a_{34}=\rho v_z, \quad a_{44}=\rho q. \end{cases}$$

2° Puisque l'équation algébrique (3.4) peut correspondre à une quadrique de rotation aussi qu'à une quadrique quelconque, devient nécessaire le suivant

Théorème. *La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation* (3.4) *caractérise une quadrique de rotation, est qu'il existe un nombre réel* ρ *qui satisfasse au système :*

$$(3.7)\qquad \rho^2+I_k\rho+\delta_k=0, \quad (k=1,2,3),$$

où

$$(3.8)\qquad I_k=a_{ii}+a_{jj}, \quad \delta_k=\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ji} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix}, \quad (i,j,k=1,2,3;\ i\neq j\neq k\neq i),$$

ρ *étant nul si l'équation* (3.4) *peut être écrite sous la forme* (3.4').

a) La condition est nécessaire.

En effet, considérons que l'équation (3.4) (où, au moins, l'un des coefficients a_{ij}, $(i,j=1,2,3)$, n'est pas nul) représente une quadrique de rotation. En la multipliant par un facteur arbitraire $1/\rho$, $(\rho\neq 0)$, et en additionnant aux deux membres $x^2+y^2+z^2$ on obtient

$$x^2+y^2+z^2=\left(\frac{a_{11}}{\rho}+1\right)x^2+\left(\frac{a_{22}}{\rho}+1\right)y^2+\left(\frac{a_{33}}{\rho}+1\right)z^2+2\frac{a_{12}}{\rho}xy+$$

$$+2\frac{a_{23}}{\rho}yz+2\frac{a_{31}}{\rho}zx+2\frac{a_{14}}{\rho}x+2\frac{a_{24}}{\rho}y+2\frac{a_{34}}{\rho}z+\frac{a_{44}}{\rho}.$$

Puisqu'elle peut être écrite sous la forme (2.3), avec $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$, il s'ensuit que le vecteur $\mathbf{e}$ (à un signe près) a pour projections

$$(3.9)\qquad e_x=\pm\sqrt{\frac{a_{11}}{\rho}+1}, \quad e_y=\pm\sqrt{\frac{a_{22}}{\rho}+1}, \quad e_z=\pm\sqrt{\frac{a_{33}}{\rho}+1}$$

et qu'elles satisfont les conditions :

$$(3.10)\quad \pm\sqrt{\frac{a_{ii}}{\rho}+1}\,\sqrt{\frac{a_{jj}}{\rho}+1}=\frac{a_{ij}}{\rho},\quad (i,j=1,2,3;\ i\neq j),\quad a_{ij}=a_{ji},$$

c'est-à-dire que ρ vérifie le système (3.7).

D'autre part, si l'équation (3.4) se présente sous la forme (3.4'), il s'ensuit que $\delta_k=0$, $(k=1,2,3)$, et donc $\rho=0$ vérifie le système (3.7).

b) La condition est suffisante.

S'il y a un $\rho\neq 0$ qui satisfasse la système (3.7) on peut detérminer les vecteurs $\mathbf{e}\,(e_x,e_y,e_z)$ et

$$(3.11)\qquad \mathbf{v}\left(\frac{a_{14}}{\rho},\ \frac{a_{24}}{\rho},\ \frac{a_{34}}{\rho}\right)$$

aussi que le scalaire

$$(3.12)\qquad q=\frac{a_{44}}{\rho}$$

et l'équation (3.4) peut être mise sous la forme (2.3). Si $\rho=0$ satisfait le système (3.7), on a $a_{ii}a_{ij}-a_{ij}^2=0$, $(i,j=1,2,3;\ i\neq j)$, et donc $a_{ij}=\pm\sqrt{a_{ii}\,a_{jj}}$. L'équation (3.4) s'écrit alors sous la forme (3.5), c'est-à-dire (2.4).

Remarques

1° S'il y a un nombre ρ qui satisfait le système (3.7), alors il satisfait aussi le système

$$(3.7')\qquad \rho^2+I_h\rho+\delta_h=0,\quad 3\rho^2+2I\rho+\mathcal{J}=0,\quad (h=1,2),$$

où $2I=\sum_{k=1}^{3}I_k$ et $\mathcal{J}=\sum_{k=1}^{3}\delta_k$ et réciproquement.

2° L'équation

$$(3.13)\qquad 3\rho^2+2I\rho+\mathcal{J}=0$$

sera nommée *l'équation caractéristique*. Son discriminant est

$$\frac{1}{2}[(a_{11}-a_{22})^2+(a_{22}-a_{33})^2+(a_{33}-a_{11})^2]+3\,(a_{12}^2+a_{23}^2+a_{31}^2)\geqslant 0.$$

Il s'ensuit que s'il est nulle, l'équation (3.4) représente une sphère.

3° De (3.9) il s'ensuit que $e^2=I/\rho+3$. Si $e^2=1$ (paraboloïde), alors on a $I^2=4\mathcal{J}$ et réciproquement, c'est à dire que $I^2=4\mathcal{J}$ caractérise un paraboloïde de rotation.

4° Par le procédé utilisé en [3] on établit la relation

$$\delta=|a_{ij}|=\rho^3(e^2-1),\quad (i,j=1,2,3).$$

On retrouve aussi les équations du centre de la quadrique.

5° De (2.6) où l'on introduit (3.11), (3.12) et les projections de $\mathbf{g}$ obtenues des équations du centre $(\delta\neq 0)$ il résulte, pour $e\neq 1$, $b^2=\Delta/\rho\delta$. Pour $e=1$, on obtient la relation $\Delta=-\rho^4p^2$.

Institut Polytechnique de Jassy,
Chaire de Mathématiques I

BIBLIOGRAPHIE

1. Athen H., *Vektorielle Analytische Geometrie*. Hermann Schroedel Verlag, Hannover, 1963.
2. Creangă I., ş. a., *Curs de geometrie analitică*. Ed. tehn., Buc., 1951.
3. Rimer Ş., *Observaţii privitoare la studiul vectorial al conicelor*. Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI (XV)**, *3—4*, pp. 75—80.
4. — *Représentation vectorielle des quadriques de rotation (I)*. Bul. Inst. polit. Iaşi, 1967, **XIII (XVII)**, *3—4*, pp. 91—102.

O REPREZENTARE VECTORIALĂ A CUADRICELOR DE ROTAŢIE (II)

(Rezumat)

Se stabilesc ecuaţiile generale (2.3), (2.4), sub formă vectorială, ale cuadricelor de rotaţie. Se face trecerea de la ecuaţiile generale sub formă vectorială la ecuaţia generală algebrică (3.4) şi se găseşte condiţia necesară şi suficientă ca ecuaţia (3.4) să reprezinte o cuadrică de rotaţie. Se stabilesc unele relaţii între invarianţii clasici şi parametri.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

D. C. 539.37

RATIONAL MECHANICS OF DEFORMATION AND FLOW

II. A GENERAL THEORY OF CONSTITUTIVE EQUATIONS

BY

C. TRUESDELL

Following step by step my conference presented at the 4th International Congress on Rheology [1]...[4] let us expose here *A general theory of constitutive equations*. This theory may be founded upon the following three principles:

1. *Principle of Determinism.* The stress in a body is determined by the history of the motion of the body:

$$\mathbf{T}(X,t) = \mathfrak{F}(\mathbf{K}(Z,\tau);X,t), \text{ where } Z \in \mathfrak{B},\ \tau \leqslant t.$$

Here $\mathfrak{F}$ is a functional of $\mathbf{K}$ for all particles Z in the body $\mathfrak{B}$. While some physical scientists may not yet be accustomed to the concept of „functional", it is simpler and moch closer to physical experience than are such concepts as „derivative" and „integral", not to mention that ubiquitous weasel, „approximation". A *functional* of $f(x)$ is a quantity determined by $f(x)$, nothing more, nothing less. For example, the area under the curve $y = f(x)$, from $x = a$ to $x = b$, is a functional of $f(x)$, depending upon a and b as parameters. While in some work on continuum mechanis only special kinds of functionals are used, such as those represented by sums of multiple integrals, here the term „functional" is taken in its broadest and simplest sense. Thus the general constitutive equation says neither more nor less than the following sentence: *Knowledge of the motion of all particles of the body at the present and all past times suffices to determine the present stress at the particle X.* Note that only *past* experience is relevant. The *constitutive functional* $\mathfrak{F}$ defining the particular material expresses all information we have about the mechanical properties of the particles X making up the body.

2. *Principle of Local Action.* According to the principle of determinism, the stress at the particle X could be influenced by the experiences of a distant particle Z. This is surely not correct. Stress forces are contact forces and should be determined by contact actions alone, even if, perhaps, contact actions of long ago. Accordingly, we impose upon the functional $\mathfrak{F}$ a restriction forbidding action at a distance. Namely, if two motions $\mathbf{K}$ and $\mathbf{K}$ differ from one another only outside an arbitrarily small neighborhood $\mathfrak{N}(X)$ of X, for all times $\tau \leqslant t$, then they give rise to the same present stress at X. Formally, if $\mathbf{K}(Z,\tau) = \overline{\mathbf{K}}(Z,\tau)$ for $\tau \leqslant t$ and for $Z \in \mathfrak{N}(X)$, then $\mathfrak{F}(\mathbf{K}; X, t) = \mathfrak{F}(\overline{\mathbf{K}}; X, t)$.

3. *Principle of Material Indifference.* If two observers consider the same motion in a given body, they find the same state of stress. An „observer" in classical mechanics is a rigid frame which bears a clock. Thus if $\mathbf{K}(X,t)$ is the motion as apparent to the first observer, and if $\mathbf{K}'(X,t')$ is the motion as apparent to a second observer,

$$\mathbf{K}' = \mathbf{Q}\mathbf{K} + \mathbf{c}, \quad t' = t - a,$$

where $\mathbf{Q}$ is a time-dependent orthogonal tensor, $\mathbf{c}$ is a time-dependent vector, and a is a constant. According to the principle of determinism, the second observer finds the stress $\mathbf{T}'$ from the motion as follows:

$$\mathbf{T}'(X,t') = \mathfrak{F}(\mathbf{K}'; X, t'),$$

where $\mathfrak{F}$ is the constitutive functional, given once and for all for any particular material. According to the principle of material indiference, $\mathbf{T}'$ and $\mathbf{T}$ yield the same stress vectors at every point and for every element; that is,

$$\mathbf{T}' = \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^{\mathsf{T}},$$

Substituting for $\mathbf{T}'$ and $\mathbf{T}$ their expressions in terms of $\mathfrak{F}$ yields *functional equation* to be satisfied by every constitutive functional:

$$\mathfrak{F}(\mathbf{Q}\overline{\mathbf{K}} + \mathbf{c}; X, t - a) = \mathbf{Q}\mathfrak{F}(\mathbf{K}; X, t)\mathbf{Q}^{\mathsf{T}},$$

indentically in $\mathbf{Q}, \mathbf{K}, \mathbf{c}$ and a.

r

The principle of material indifference may be rendered plausible in several ways. Fo one thing, it is satisfied by every classical theory of materials and also by most of the less familiar proposals of constitutive equations. For another, without such a principle a number of generally accepted ideas in physics would become meaningless. Consider, for example, what are called centrifugal forces. Take a spring, and on one and hang a weight of one pound (see Fig. 1). The spring lengthens, say by one inch. Now lay the spring on a horizontal table, fastening one end to the center and leaving the weight attached to the other end. Spin the table and adjust the angular speed so that the extension of the spring is again exactly one inch. On seeing this demonstration in the laboratory, the freshmen, happy to participate in the experimental foundation of science, take as obvious that the force exerted by the spring is again one poundal; substituting the appropriate numbers into the formula for centrifugal force, they are encouraged to join Galileo and Mach and Leonardo da Vinci as empiricists by calculating an angular speed that agrees

with the measured value, to within experimental error. What has been assumed , tacitly, is that the elastic law or constitutive equation of the spring is invariant under rotation. For the observer standing of the floor as well as for the observer rotating with the table, one inch of extension corresponds to one poundal force. For a person lacking this belief, the experiment would measure nothing at all. (As is usual in „fundamental" experiments, the main point at issue must be conceded before the experiment is started).

If not everyone is fully content with this explanation, it may be some solace to mention that ten years ago, I was convinced that the principle of material indifference is general and unexceptionable. Today, every major student of the foundations of mechanics accepts it, though with some differences of form. Ten years from now, doubtless, it will be thrown at beginners as „obvious" and „intuitive".

a) Hanging spring. *b*) Spring on horizontal rotating table.

Fig. 1. — Demonstration of centrifugal force.

The three fundamental principles may be repeated in words:

1. *Determinism*: the stress in a body is determined by the motion the body has undergone.

2. *Local action*: the motion outside an arbitrarily small neighborhood of a particle may be disregarded in determining the stress at that particle.

3. *Material indifference*: any two observers of a motion of a body find the same stress.

The equations given above are exactly equivalent to these statements.

The theory based on these principles, while by no means general enough to include everything presently studied in continuum mechanics, allows for material behavior of great complexity. An important special case is defined by requiring material response se to be determined for *all* deformation processes as soon as it is known for all *homogeneous* deformation processes. A material of this kind is sealled *simple*. To define a homogeneous deformation, consider a particular configuration $\varkappa$ of a body $\mathfrak{B}$. The equation

$$X = \varkappa(X)$$

states that the particle X occupies the place $\mathbf{X}$ in the configuration $\varkappa$. The point $\mathbf{X}$ is the „material coordinate" of the particle X with respect to the configuration $\varkappa$. Just as the same point in geometry has infinitely many different coordinates, according to which coordinate system we may choose to employ, the particle X has infinitely many material coordinates $\mathbf{X}$, one for each configuration $\varkappa$, and $\varkappa$, like a coordinate system, is entirely at our disposal. Since $\varkappa$ is an invertible mapping, the motion $\mathbf{K}$ may be written in the form

$$\mathbf{x} = \mathbf{K}(X, t) = \mathbf{K}(\varkappa^{-1}(\mathbf{X}), t) \equiv \mathbf{K}_\varkappa(\mathbf{X}, t),$$

say. Then $\mathbf{F} \equiv \nabla \mathbf{K}_\varkappa \equiv \delta \mathbf{K}_\varkappa(\mathbf{X}, t) / \delta \mathbf{X}$ it the gradient of the deformation from $\varkappa$ to $\mathbf{K}_\varkappa$.

A deformation is called *homogeneous* when $\mathbf{F}$ is constant in space at each time. Acording to our definition, to determine the stress in a simple material all we need know about the motion $\mathbf{K}_\varkappa$ it its gradient $\mathbf{F}$. That is, the *constitutive equation of a simple material* has the form

$$\mathbf{T} = \overset{\tau=t}{\underset{\tau=-\infty}{\mathfrak{H}}} (\mathbf{F}(\tau))$$

where $\mathfrak{H}$, the constitutive functional, depends upon $\varkappa$, $\mathbf{X}$, and t as parameters. While the definiton itself seems to depend upon the choice of the reference configuration $\varkappa$, it is easy to show that such dependence is illusory.

The constitutive equation of a simple material satisfies trivially the principles of determinism and local action. To consider the principle of material indifference, we notice that under change of observer $\mathbf{F}$ becomes $\mathbf{F}'$, where

$$\mathbf{F}' = \mathbf{Q}\mathbf{F}.$$

The functional equation expressing the principle of material indiference becomes

$$\overset{\tau=t}{\underset{\tau=-\infty}{\mathfrak{H}}} (\mathbf{Q}(\tau)\,\mathbf{F}(\tau)) = \mathbf{Q}(t) \overset{\tau=t}{\underset{\tau=-\infty}{\mathfrak{H}}} (\mathbf{F}(\tau))\,\mathbf{Q}(t)^{\mathsf{T}},$$

identically in $\mathbf{Q}$ and $\mathbf{F}$. Split $\mathbf{F}$ into a pure deformation $\mathbf{U}$ and a rotation $\mathbf{R}$

$$\mathbf{F}(\tau) = \mathbf{R}(\tau)\,\mathbf{U}(\tau).$$

Then

$$\overset{\tau=t}{\underset{\tau=-\infty}{\mathfrak{H}}} (\mathbf{Q}(\tau)\,\mathbf{R}(\tau)\,\mathbf{U}(\tau)) = \mathbf{Q}(\tau) \overset{\tau=t}{\underset{\tau=-\infty}{\mathfrak{H}}} (\mathbf{F}(\tau))\,\mathbf{Q}(t)^{\mathsf{T}}.$$

For $\mathbf{Q}(\tau)$ choose the special rotation $\mathbf{R}(\tau)^{\mathsf{T}}$. Since $\mathbf{R}^{\mathsf{T}}\mathbf{R} = 1$, the rotation cancels out of the left-hand side:

$$\overset{\tau=t}{\underset{\tau=-\infty}{\mathfrak{H}}} (\mathbf{U}(\tau)) = \mathbf{R}(\tau)^{\mathsf{T}} \overset{\tau=t}{\underset{\tau=-\infty}{\mathfrak{H}}} (\mathbf{F}(\tau))\,\mathbf{R}(t).$$

Therefore, the constitutive equation of a simple material may be written in the following *reduced form*:

$$\mathbf{T} = \mathbf{R}(\tau) \overset{\tau=t}{\underset{\tau=-\infty}{\mathfrak{H}}} (\mathbf{U}(\tau))\,\mathbf{R}(\tau)^{\mathsf{T}}.$$

Thus, the functional equation expressing the principle of material indifference is solved, once and for all, for simple materials. The stress tensor may depend in any way on whatever pure deformation the particle has experienced; past rotation have no effect on the present stress; and the role of the present rotation is made explicit and shown to be exactly the same as in classical theory of finite elastic strain.

Up to now we have considered a single particle X, whose position in the reference configuration $\varkappa$ is denoted by X. Now consider a second particle $\hat{X}$. When can we say that and $\hat{X}$ are of the same material? When it is possible to bring the portions of the body near the two particles X and $\hat{X}$ into configurations such that, starting from these, any subsequent

deformation process gives rise exactly the same stress for each of these particles. The densities of the two configurations must also be the same and constant. This simple idea is easily phrase in mathematical terms (see Fig. 2): X and $\hat{X}$ are *materially isomorphic* if reference configurations $\varkappa$ and $\hat{\varkappa}$ exist such that $\rho_{\varkappa}(X) = \rho_{\hat{\varkappa}}(\hat{X}) =$ const. in neighborhood of $\mathbf{X}$ and $\hat{\mathbf{X}}$, and

$$\underset{\tau=-\infty}{\overset{\tau=t}{\mathfrak{H}_{\varkappa}}}\ (\mathbf{F}(\tau);\mathbf{X}) = \underset{\tau=-\infty}{\overset{\tau=t}{\mathfrak{H}_{\hat{\varkappa}}}}\ (\mathbf{F}(\tau);\hat{\mathbf{X}}),$$

indentically in the tensor function $\mathbf{F}(\tau)$. Here, so as to emphasize the dependence of the constitutive functional upon the reference configuration, we have written $\mathfrak{H}_{\varkappa}$ and $\mathfrak{H}_{\hat{\varkappa}}$ instead of $\mathfrak{H}$. We can repeat in other words the definition: The particles X and $\hat{X}$ are materially isomorphic if no experiment can tell us whether we are confronted with X after a deformation starting from $\varkappa$ or with $\hat{X}$ after a deformation starting from $\hat{\varkappa}$.

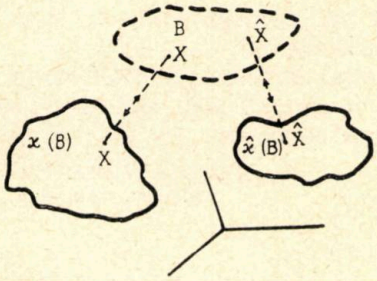


Fig. 2. — Reference configuration for material isomorphism.

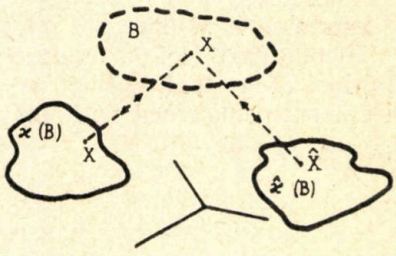


Fig. 3. — Member of the isotropy group.

It is possible that a particle may be materially isomorphic to itself in a nontrivial way. That is, there may exist two different configurations, $\varkappa$ and $\hat{\varkappa}$, such that the response of the particle X after deformation from either of these is just the same (see Fig. 3). Indeed, let $\mathbf{H}$ be a unimodular tensor (det $\mathbf{H} = \pm 1$) such that

$$\underset{\tau=-\infty}{\overset{\tau=t}{\mathfrak{H}}}\ (\mathbf{F}(\tau)) = \underset{\tau=-\infty}{\overset{\tau=t}{\mathfrak{H}}}\ (\mathbf{F}(\tau)\,\mathbf{H})$$

identically in $\mathbf{F}$. By the chain rule in calculus, $\mathbf{H}^{-1}$ is the gradient at X of the mapping from $\varkappa$ to a new reference configuration $\hat{\varkappa}$ for the same particle X such that no experiment on the particle X can determine whether $\varkappa$ or $\hat{\varkappa}$ was the starting point. That is, the two configurations $\varkappa$ and $\hat{\varkappa}$ are

physically indistinguishable as far as the particle X is concerned. Suppose that $\mathbf{H}_1$ and $\mathbf{H}_2$ are unimodular tensors satisfying the equation just written. $\mathbf{H}_1\,\mathbf{H}_2$ is unimodular, and, by two applications of that equation,

$$\overset{\tau=t}{\underset{\tau=-\infty}{\mathfrak{H}}}(\mathbf{F}\mathbf{H}_1\,\mathbf{H}_2) = \overset{\tau=t}{\underset{\tau=-\infty}{\mathfrak{H}}}(\mathbf{F}\mathbf{H}_2) = \overset{\tau=t}{\underset{\tau=-\infty}{\mathfrak{H}}}(\mathbf{F}).$$

Thus $\mathbf{H}_1\,\mathbf{H}_2$ is also solution. Therefore the set of all solutions $\mathbf{H}$ forms a group $\mathfrak{g}$, caled the *isotropy group* of the material at the particle X, with respect to the reference configuration $\varkappa$. The elements of this group generate all deformations of a neighborhood of X in $\varkappa$ which are indistinguishable by experiment; that is, no experiment can decide whether or not a deformation generated by the isotropy group has occured.

If we begin with a different conffiguration $\hat{\varkappa}$, we obtain, in general, a different isotropy group $\hat{\mathfrak{g}}$. Let $\mathbf{G}$ be the gradient of the deformation from $\varkappa$ to $\hat{\varkappa}$. Then it is easy to show that

$$\hat{\mathfrak{g}} = \mathbf{G}\,\mathfrak{g}\,\mathbf{G}^{-1}.$$

Therefore, if the isotropy group for one configuration is known, we can determine it at once for all other configurations.

In our next Note, to appear in the same *Bulletin*, we shall begin with definitions of a fluid and particularly of a *simple* fluid, and give various developments concerned with the introduced concepts.

Received the 14 I 1967

The John Hopkins University,
Baltimore, Maryland, USA

REFERENCES

1. Truesdell C., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1967, **XII (XVI)**, *3–4*, pp. 415–418.
2. — *Thermodynamique de la déformation.* Canadian Congress of Applied Mechanics. Centennial Year, 1967, Sci. Program, Univ. Laval, Quebec, Canada, p. 10.
3. — *Instabilities of Isotropic Perfectly Elastic Materials in Simple Shear.* Eleventh International Congress of Applied Mechanics, Munich, 30 VIII – 5 IX 1964.
4. — *Rational Mechanics of Deformation and Flow.* Proc. 4th Intern. Congress on Rheology, John Wiley & Sons, Inc., N. Y., 1965, pp. 3–30.

PROBLEME ALE MECANICII DEFORMAŢIEI ŞI CURGERII
II. Teoria generală a ecuaţiilor constitutive

(Rezumat)

Se expune o teorie generală a ecuaţiilor constitutive care determină eforturile din date în număr suficient, referitoare la mişcare.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Demonstraţie privitoare la forţa centrifugă: *a* — resort atîrnat; *b* — resort pe o masă orizontală în rotaţie.
Fig. 2. — Configuraţie de referinţă privitoare la izomorfismul material.
Fig. 3. — Membri ai grupului de izotropie.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

C. D. 531.31

ÉQUATIONS GÉNÉRALES DE DYNAMIQUE ANALYTIQUE DES SYSTÈMES CONSTANTS ET FONCTION $\mathfrak{R}$ (II)

PAR

SOULEYMANE NIANG

Dans la première partie de ce travail [1], insérée dans la même *Bulletin*, basée sur les équations de la Dynamique analytique de Lagrange — Mangeron [2] — Tzenoff [4] nous avons étudié des systèmes constants. Tout en conservant les notations, les notions et les résultats y acquises, nous exposerons ici nombre d'applications.

$(\mathcal{R}_1) = Ox_1y_1z_1$ étant un référentiel inertial et orthonormal direct, on considère le système $\mathcal{S}(t)$ d'indexant $\mathcal{L}(t)$ défini par:

$$\mathcal{S}(t) = \mathcal{S}(t) + \mathcal{S}_1(t) + \mathcal{C}(t), \tag{1}$$

$\mathcal{S}(t)$ — reposant sur un plan matériel horizotal fixe — est une sphère rigide, creuse, d'enveloppe homogène et de centre d'inertie O; $\mathcal{S}_1(t)$ est une sphère rigide, homogène, pesante et de centre d'inertie O. ($\mathcal{S}_1(t)$ repose sur $\mathcal{S}(t)$ par l'intermédiaire de $\mathcal{C}(t)$); $\mathcal{C}(t)$ — qui est un anneau de révolution pesant de masse m, de centre d'inertie $G(t)$ situé au centre géométrique de l'anneau — présente des cavités contenant des billes dont la masse est supposée négligeable (fig. 1).

On désigne par: A le moment d'inertie de $\mathcal{S}_1(t)$ par rapport à un de ses diamètres; a et c les moments principaux d'inertie de $\mathcal{C}(t)$ au point O; ψ, θ et φ les angles d'Euler définissant la position de $\mathcal{C}(t)$ par rapport à $(\mathcal{R}_1)$; ψ_1, θ_1 et φ_1 les angles d'Euler définissant la position de $\mathcal{S}_1(t)$ par par rapport à $(\mathcal{R}_1)$.

On pose:

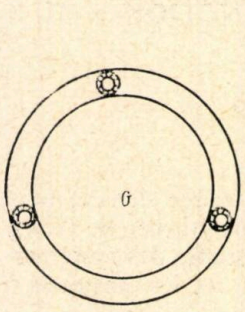
$$\begin{cases} l = |\overrightarrow{GO}|, \vec{g} = -g\vec{k}_1, \; g > 0, \\ q^1 = \psi, \; q^2 = \theta, \; q^3 = \varphi, \; q^4 = \psi_1, \; q^5 = \theta_1, \; q^6 = \varphi_1, \end{cases} \tag{2}$$

où $\vec{g}$ désigne le champ de la pesanteur supposé constant, $\vec{k}_1$ étant le vecteur unitaire de $\overrightarrow{Oz_1}$, *verticale ascendante de O.*

On suppose enfin que: a) *le contact de* $\mathcal{C}(t)$ *et des billes est sans frottement ;* b) les billes *roulent sans glisser sur* $\mathcal{S}_1(t)$ *et sur* $\mathcal{S}(t)$; c) *le diamètre des billes est négligeable vis-à-vis du rayon de* $\mathcal{S}(t)$.

Nous allons montrer que l'état de $\mathcal{S}(t)$ dépend de trois paramètres indépendants et que *le mouvement du système peut être complètement caractérisé par des équations Lagrangiennes sans multiplicateurs.*

I. *Conditions de non glissement des billes sur* $\mathcal{S}_1(t)$ *et* $\mathcal{S}(t)$. Soient I et I_1 les points de contact respectifs d'une bille de $\mathcal{C}(t)$ avec $\mathcal{S}(t)$ et $\mathcal{S}_1(t)$.



Couronne $C(t)$
contenant 3 billes.

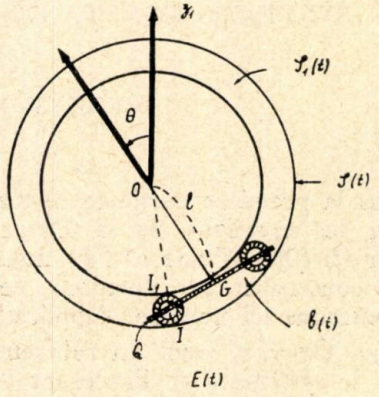


Fig. 1

Désignons respectivement par $\vec{\omega}$, $\vec{\Omega}_1$ et $\vec{\Omega}$ les vitesses de rotation instantanées de $\mathcal{S}(t)$, $\mathcal{S}_1(t)$ et $\mathcal{C}(t)$ par rapport à $(\mathcal{R}_1)$. Dès lors les vitesses de glissement $(\vec{V}_g)_I$ et $(\vec{V}_g)_{I_1}$ en I et I_1 de la bille considérée sur $\mathcal{S}(t)$ et $\mathcal{S}_1(t)$ sont:

$$(3)\qquad \begin{cases} (\vec{V}_g)_I = \vec{V}_Q + \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{QI} - \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{QI}, \\ (\vec{V}_g)_{I_1} = \vec{V}_Q + \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{QI_1} - \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OI_1}, \text{ avec} \\ \overrightarrow{QI} + \overrightarrow{QI_1} = 0, \end{cases}$$

où $\vec{V}_Q$ désigne la vitesse, par rapport à $(\mathcal{R}_1)$, du centre Q de la bille envisagée, $\vec{\alpha}$ étant la rotation instantanée de cette bille par rapport à $(\mathcal{R}_1)$.

Q appartenant à la couronne $\mathcal{C}(t)$, on a:

$$(4)\qquad \vec{V}_Q = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OQ}.$$

Les vitesses $(\vec{V}_g)_I$ et $(\vec{V}_g)_{I_1}$ étant nulles, il vient, par addition membre à membre des deux premières relations (3) et compte tenu de (3_3) :

$$(5)\qquad \begin{cases} 2\,\vec{V}_Q = (\vec{\Omega}_1 \wedge \overrightarrow{OI_1} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OI}) \text{ ou} \\ 2\,\vec{V}_Q = (\vec{\Omega}_1 + \vec{\omega}) \wedge \overrightarrow{OQ} + (\vec{\Omega}_1 - \vec{\omega}) \wedge \overrightarrow{QI_1}\,. \end{cases}$$

(5_2) s'écrit, en négligeant $\overrightarrow{QI_1}$ vis-à-vis de $\overrightarrow{OQ}$

$$(6)\qquad 2\,\vec{V}_Q = (\vec{\Omega}_1 + \vec{\omega}) \wedge \overrightarrow{OQ}\,;$$

en rapprochant (4) et (6) il vient $(\overrightarrow{OQ} \neq 0)$:

$$(7)\qquad \vec{\Omega}_1 + \vec{\omega} = 2\vec{\Omega}\,.$$

Nous supposerons, dans ce qui suit, que $\mathcal{S}(t)$ *est fixe* par rapport à $(\mathcal{R}_1)$, de sorte que (7) s'écrit :

$$(8)\qquad \vec{\Omega}_1 = 2\vec{\Omega}\,.$$

En projetant (8) sur $(\mathcal{R}_1)$ on obtient de façon simple :

$$(8')\qquad \begin{cases} \dot{\psi}_1 = \dot{q}^4 = 2\,\dot{\psi} + 2\,\mathrm{ctg}\,\theta_1 \sin(\psi - \psi_1)\,\dot{\theta} + \\ \qquad\qquad + 2\,[\cos\theta - \sin\theta\,\mathrm{ctg}\,\theta_1 \cos(\psi - \psi_1)]\,\dot{\varphi}\,, \\ \dot{\theta}_1 = \dot{q}^5 = 2\cos(\psi - \psi_1)\,\dot{\theta} + 2\sin\theta\,\sin(\psi - \psi_1)\,\dot{\varphi}\,, \\ \dot{\varphi}_1 = \dot{q}^6 = \dfrac{2}{\sin\theta_1}\,[-\sin(\psi - \psi_1)\,\dot{\theta} + \sin\theta\cos(\psi - \psi_1)\,\dot{\varphi}], \end{cases}$$

relations de la forme :

$$(9)\qquad \dot{q}^\alpha = a^\alpha_\beta\,\dot{q}^\beta + b^\alpha,\ (\beta = 1, 2, 3\,;\ \alpha = 4, 5, 6),$$

où

$$(10)\qquad \begin{cases} a^4_1 = 2\,, \quad a^4_2 = 2\,\mathrm{ctg}\,\theta_1 \sin(\psi - \psi_1) \\ a^5_1 = 0\,, \quad a^5_2 = 2\cos(\psi - \psi_1)\,, \\ a^6_1 = 0\,, \quad a^6_2 = -\dfrac{2}{\sin\theta_1}\sin(\psi - \psi_1)\,, \\ a^4_3 = 2\,[\cos\theta - \sin\theta\,\mathrm{ctg}\,\theta_1 \cos(\psi - \psi_1)], \\ a^5_3 = 2\sin\theta\,\sin(\psi - \psi_1)\,, \\ a^6_3 = \dfrac{2}{\sin\theta_1}\sin\theta\cos(\psi - \psi_1)\,. \end{cases}$$

Il résulte des relations (8) ou (9) que le système $\mathcal{S}(t)$ dépend de trois paramètres indépendants, soit q^β, mais il est clair *que si la position de toute particule de* $\mathcal{C}(t)$ *peut s'exprimer explicitement en fonction de ces trois paramètres il n'en est pas de même pour la position de toute particule de* $\mathcal{S}_1(t)$, *les relations* (8) *n'étant pas intégrales.* On notera cependant que si $\{m_i, M_i(t), \vec{V}_i(t)\} \in \mathcal{S}_1(t)$, on a:

$$\vec{V}_i = \vec{\Omega}_1 \wedge \overrightarrow{OM}_i = 2(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}_i), \tag{11}$$

de sorte que la vitesse de toute particule de $\mathcal{S}(t)$ peut s'exprimer uniquement en fonction des q^γ et des seules dérivées des paramètres indépendants q^β.

II. *Énergie cinétique de* $\mathcal{S}(t)$. On vérifiera aisément que les énergies T et $\overline{T}$ sont données par:

$$\begin{cases} 2T = A(\dot\psi_1^2 + \dot\theta_1^2 + \dot\varphi_1^2 + 2\dot\varphi_1\dot\psi_1\cos\theta_1) + (a\sin^2\theta + c\cos^2\theta)\dot\psi^2 + a\dot\theta^2 + \\ \qquad\qquad + c\dot\varphi^2 + 2c\dot\varphi\dot\psi\cos\theta, \\ 2\overline{T} = [A^\star + (a-c)\sin^2\theta]\dot\psi^2 + B^\star\dot\theta^2 + A^\star\dot\varphi^2 + 2A^\star\dot\psi\dot\varphi\cos\theta, \text{ avec} \\ A^\star = 4A + c,\ B^\star = 4A + a; \end{cases} \tag{12}$$

on observera que $\overline{T}$ ne dépend que des paramètres indépendants q^β et de leurs dérivées.

III. *Fonction* $\mathcal{R}$. Compte tenu de (2.12) [1] et de (8), des calculs simples conduisent à:

$$2\overline{\mathcal{R}} = B^\star(p\ddot p + q\ddot q) + A^\star\tau\ddot\tau + 2(c-a)(\dot q p - \dot p q)\tau + \text{termes indépendants des } \ddot q^\beta, \tag{13}$$

ou, tous calculs faits:

$$2\mathcal{R} = 3[(a-c)\cos\theta\,\dot\psi - A^\star\dot\varphi]\sin\theta\,\dot\psi\ddot\theta + \text{termes indépendants des } \ddot q^\beta. \tag{14}$$

IV. *Travail virtuel* $\delta\overline{W}$ *du système des forces appliquées à* $\mathcal{S}(t)$ Le contact de $\mathcal{C}(t)$ et des billes étant sans frottement et les billes roulant sans glisser sur $\mathcal{S}_1(t)$ et $\mathcal{S}(t)$, seule la force $\vec{mg}$ appliquée en $G(t)$ à $\mathcal{C}(t)$ travaille dans une évolution virtuelle quelconque respectant t

$$\delta\overline{W} = \vec{mg}\,\overrightarrow{\delta G} = +mgl\vec{k}_1\,\vec{\delta k}, \text{ avec } \overrightarrow{OG} = -l\vec{k}, \tag{15}$$

où $\vec{k}$ désigne le vecteur unitaire de l'axe $\overrightarrow{Oz}$ de $\mathcal{C}(t)$.

Comme

$$\vec{k}_1 \vec{k} = \cos\theta \Rightarrow \vec{k}_1 \vec{\delta k} = -\sin\theta\,\delta\theta, \tag{16}$$

il vient :

$$\delta\overline{W} = -mgl\sin\theta\,\delta\theta = \overline{Q}_q\,\delta q^2, \text{ avec } \overline{Q}_q = -mgl\sin\theta. \tag{17}$$

V. *Mouvement du système* $\mathcal{S}(t)$. En remarquant d'après (14) que

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \ddot{q}^\beta} = \begin{cases} 0 = \dfrac{\partial \overline{T}}{\partial q^\beta} \text{ si } \beta = 1 \text{ ou } 3, \\ \dfrac{3}{2}[(a-c)\sin\theta\,\dot{\psi} - A^\star\dot{\varphi}]\sin\theta\,\dot{\psi} = \dfrac{3}{2}\dfrac{\partial \overline{T}}{\partial q^\beta} \text{ si } \beta = 2, \end{cases} \tag{18}$$

les équations générales (1.6) [1] du mouvement de $\mathcal{S}(t)$ s'écrivent

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial \dot{q}^\beta}\right) - \frac{\partial \overline{T}}{\partial q^\beta} = \overline{Q}_\beta, \ (\beta = 1, 2, 3), \tag{19}$$

auxquelles on adjoindra les 3 équations (8). On obtient ainsi des équations de Lagrange relatives à la fonction $\overline{T}$ (et sans multiplicateurs).

Le système (19) s'écrit :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{T}}{\partial \dot{q}^3} = \mathrm{C^{te}} \Rightarrow \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi} = \tau_0 = \mathrm{C^{te}}, \\ \dfrac{\partial \overline{T}}{\partial \dot{q}^1} = \mathrm{C^{te}} \Rightarrow B^\star \sin^2\theta\,\dot{\psi} + A^\star\tau_0\cos\theta = \mu = \mathrm{C^{te}}, \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial \overline{T}}{\partial \dot{q}^2}\right) - \dfrac{\partial \overline{T}}{\partial q^2} = -mgl\sin\theta \Rightarrow B^\star\ddot{\theta} + \\ \qquad + (B^\star\cos\theta\,\dot{\psi} - A^\star\tau_0)\sin\theta\,\dot{\psi} = -mgl\sin\theta. \end{cases} \tag{20}$$

La dernière équation (20) conduit, lorsque θ n'est pas constant, à l'intégrale des forces vives, soit :

$$B^\star\dot{\theta}^2 + \frac{(\mu - A\tau_0\cos\theta)^2}{B^\star\sin^2\theta} = 2mgl\cos\theta + \lambda. \tag{21}$$

Ces diverses relations s'écrivent aussi :

$$(22)\qquad \begin{cases} \dot{\psi} = \dfrac{\beta - h\tau_0 \cos\theta}{\sin^2\theta}, \quad \dot{\varphi} = \tau_0 - \cos\theta \dfrac{\beta - h\tau_0 \cos\theta}{\sin^2\theta}, \\ \dot{\theta}^2 = \alpha - \gamma\cos\theta - \dfrac{(\beta - h\tau_0\cos\theta)^2}{\sin^2\theta} \text{ avec } h = \dfrac{A^\star}{B^\star}, \ \gamma = \dfrac{-2mgl}{B^\star}, \end{cases}$$

τ_0, α et γ étant des constantes dépendant des conditions initiales.

Les équations (22) montrent que le mouvement de $\mathcal{C}(t)$ est celui d'une toupie pesante mobile autour d'un point fixe.

Le mouvement de $\mathcal{S}_1(t)$ est, compte tenu de (22), défini par (8) ou (9).

Remarque 1. Les équations générales (1.6) [1] s'écrivent, compte tenu de (1.11_1) [1]

$$(23)\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \dot{q}^\beta}\right) - \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial q^\beta} + \frac{\partial \bar{T}}{\partial q^\alpha} a^\alpha_\beta\right) + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha}\left(\frac{\partial \ddot{\bar{q}}^\alpha}{\partial \dot{q}^\beta} - 2\bar{a}^\alpha_\beta\right) = \bar{Q}_\beta .$$

En rapprochant (19) et (23) il apparaît que

$$(24)\qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha}\left(\frac{\partial \dot{q}^\alpha}{\partial \dot{q}^\beta} - 2\dot{a}^\alpha_\beta\right) = 0, \ \forall \beta \in \{1, 2, 3\}, \ \forall \alpha = \{4, 5, 6\}.$$

Ce qu'on pourra d'ailleurs vérifier en utilisant (12_1) et (9).

Remarque 2. On aurait pu utiliser — comme le propose d'ailleurs H. Béghin [6] — les théorèmes généraux de la Dynamique des Systèmes Constants, pour trouver les équations du mouvement de $\mathcal{S}(t)$. (Le théorème du moment angulaire appliqué à une bile, par rapport à son centre, montre que les forces de frottement en I et I_1 sont équipollentes. Dès lors les théorèmes du moment angulaire en O, appliqués au système $\mathcal{S}_1(t)$ seul, puis à la courronne $\mathcal{C}(t)$ seule déterminent, compte tenu de l'intégrale des forces vives, les équations du mouvement de $\mathcal{S}(t)$).

On aurait pu aussi utiliser les équations appelliennnes (1.9) [1]. On vérifiera alors à cet effet que l'énergie $\bar{S}$ d'Appell de $\mathcal{S}(t)$ est:

$$(25)\qquad \begin{aligned} 2\bar{S} = {} & [A^\star + (a-c)\sin^2\theta]\,\ddot{\psi}^2 + B^\star\ddot{\theta}^2 + A^\star\ddot{\varphi}^2 + \\ & + 2\sin\theta\,[A^\star\dot{\varphi} + (c-a)\cos\theta\,\dot{\psi}]\,(\dot{\psi}\ddot{\theta} - \dot{\psi}\ddot{\theta}) + \\ & + 2A^\star\ddot{\varphi}\ddot{\psi}\cos\theta - 2A^\star\sin\theta\ddot{\psi}\dot{\varphi}\dot{\theta} + \text{termes indépendants des } \ddot{q}_\beta . \end{aligned}$$

Les équations du mouvement s'en déduisent.

Mais cette application a surtout pour but de montrer sur un exemple concret, comment on pouvait utiliser les équations (1.6_1) [1] et comment ces équations se ramènent à celles de Lagrange à l'aide de „l'energie tzenoffienne" T.

Reçue le 26 V 1965

Université de Dakar, Sénégal

BIBLIOGRAPHIE

1. Niang S., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1966, **XII (XVI)**, *3-4*, pp. 103-109.
2. Mangeron D., Deleanu S., C. r. Acad. bulgare Sci., 1962, **15**, *1*, pp. 9-12.
3. Niang S., *Théorie des systèmes variables de particules. Applications.* Thèse de Doctorat, Fac. Sci., Dakar, 5 Juin, 1964.
4. Tzenoff I., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1959, **X (IX)**, *1-2*, pp. 119-124.
5. Dolaptschiew Bl., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1967, **XIII (XVII)**, *1-2*, pp. 399-408.
6. Béghin H., *Cours de Mécanique.* Vol. **I**, Gauthier-Villars, Paris, p. 454.

ECUAŢII GENERALE ALE DINAMICII ANALITICE A SISTEMELOR CONSTANTE ŞI FUNCŢIA $\mathcal{R}$ (II)

(Rezumat)

Autorul a studiat în prima parte a acestei lucrări, inserată în acelaşi *Buletin* [1], luînd ca bază ecuaţiile lui Lagrange — Mangeron — Tzenoff de dinamică analitică, aşa numitele sisteme constante. Conservînd în prezenta numerotarea, notaţiile folosite anterior şi rezultatele obţinute, se expun un număr de aplicaţii.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

C. D. 513.73; 532.521

ÉCOULEMENTS AU LONG D'UNE VARIÉTÉ LINÉAIRE (LA_i) DE L'ESPACE E_3 DONT LES DIRECTIONS ASYMPTOTIQUES SONT INDÉTEMINÉES

PAR

C. ACKER

Communication présentée à la sesion scientifique de l'Institut Polytechnique de Jassy, 28—30 Septembre 1967

Nous avons étudié l'ecoulement barotrope d'un fluide idéal, dont l'équation de l'état est

$$f(\tilde{\rho}, \tilde{p}) = 0, \tag{1}$$

où $\tilde{\rho}$ est la densité et $\tilde{p}$ est la pression. Supposons que l'équation (1) peut être localement résolue par rapport à $\tilde{p}$, $(\partial f/\partial \tilde{p} \neq 0)$.

Nous allons considérer l'écoulement tridimensionel nonstationnaire au long de la variété (LA_i) de l'espace E_3 euclidéen à trois dimensions, c'est-à-dire sur une variété linéaire de l'espace E_3, dont les directions asymptotiques du champ des vecteurs unités orthogonaux à la variété sont indéterminées.

Attachons à la variété (LA_i) un repère local triorthogonal $T(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3)$ ayant l'origine M et dont $\mathcal{J}_2$ est normal à la variété (LA_i), tandis que $\mathcal{J}_3$ est le vecteur unité de la normale principale de la trajectoire orthogonale de la variété (LA_i).

Attachons aussi à l'écoulement un répère local triorthogonal $T_1(I_1, I_2, I_3)$ ayant la même origine M, I_2 ayant la direction normale de la variété (LA_i) et $I_3 = \mathbf{v}/v$ ($\mathbf{v}$ est le vecteur vitesse et $v = |\mathbf{v}|$).

La variation du repère T est donnée par

$$d\bar{M} = \tilde{\omega}^i \mathcal{J}_i, \; d\mathcal{J}_i = \tilde{\omega}_i^j \mathcal{J}_j = \bar{\Omega} \times \mathcal{J}_i, \; (i, j = 1, 2, 3), \tag{2}$$

où

(3) $$\bar{\Omega} = \pi \mathcal{J}_1 + \varkappa \mathcal{J}_2 + \rho \mathcal{J}_3, \quad \pi = \pi_i \tilde{\omega}^i, \quad \varkappa = \varkappa_i \tilde{\omega}^i, \quad \rho = \rho_i \tilde{\omega}^i,$$

et la variation du repère T_1 est donnée par

(4) $$d\bar{M} = \omega^i I_i, \quad dI_i = \omega_i^j I_j = \bar{\omega} \times I_i, \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

où

(5) $$\bar{\omega} = pI_1 + qI_2 + rI_3, \quad p = p_i \omega^i + p_t dt, \quad q = q_i \omega^i + q_t dt, \quad r = r_i \omega^i + r_t dt.$$

Les conditions géométriques sous les quelles se développe l'écoulement sont les suivantes:

(6) $$\mathcal{J}_3 \parallel d\mathcal{J}_2 |_{\tilde{\omega}^3 = \tilde{\omega}^1 = 0} = (-\rho_2 \mathcal{J}_1 + \pi_2 \mathcal{J}_3)\, \tilde{\omega}^2,$$

c'est-à-dire $\rho_2 = 0$; I_2 est stationnaire, c'est-à-dire si

(7) $$dI_2 |_{\omega^1 = \omega^2 = \omega^3 = 0} = (-r_t I_1 + p_t I_3)\, dt,$$

alors $r_t = p_t = 0$; les équations de la structure de l'espace euclidéen à trois dimensions sont:

(8) $$dp = [r, q], \quad dq = [p, r], \quad dr = [q, p];$$

les directions asymptotiques du champ (I_2) sont indéterminées, c'est-à-dire si

(9) $$r_1 (\omega^1)^2 - (p_1 - r_3)\, (\omega^1)\, (\omega^3) - p_3 (\omega^3)^2 = 0$$

est l'équation des directions asymptotiques du champ (I_2) [1], alors

$$r_1 = p_3 = p_1 - r_3 = 0.$$

Les conditions mécaniques sous les quelles se développe l'écoulement sont déterminées par: a) l'équation d'Euler (l'équation du mouvement d'un fluide idéal), b) l'équation de la continuité, c) l'équation de l'état $(\tilde{p} = f_1(\tilde{\rho}))$.

L'ensemble de ces conditions géométriques et mécaniques constitue un système différentiel extérieur de l'écoulement tridimensionel instationnaire; les variétés intégraux à quatre dimensions de ce système extérieur sur les quelles $[\omega^1, \omega^2, \omega^3, dt] \neq 0$, représentent les écoulements tridimensionels instationnaires, dont l'existence nous l'avons établie sous les suivantes conditions restrictives:

a) l'écoulement soit transversal ($\mathrm{rot}\, \mathbf{v} \perp \mathbf{v}$),

ou

b) les forces massiques soient conservatives,

ou

c) le fluide soit incompressible.

L'existence de ces écoulements a été établie en cherchant si pour chacun de ceux-ci le système extérieur est en involution après qu'il est rendu fermé.

Dans ce qui suit nous allons indiquer quelques propriétés communes aux écoulements signalés ci-dessus :

1. Si les lignes admisibles $(l.a_k)_3$ du champ (I_3) ont les équations $\omega^1=\omega^2=\omega^3-k\,dt=0$, $(k=k(\overline{M},t)$ est une fonction arbitraire), et les lignes admissibles $(l.a_{k*})_1$ du champ (I_1) ont les équations $\omega^2=\omega^3=\omega^1-k^*dt=0$, $(k^*=k^*(\overline{M},t)$ est aussi une fonction arbitraire indépendente de $k)$, alors toutes ces lignes qui passent par un point quelconque donné, ont la torsion égale à $p_1\,(=r_3)$.

2. Pour $k=v$ la ligne $(l.a_k)_3$ représente la trajectoire et pour $1/k=0$ la ligne $(l.a_k)_3$ représente la ligne du courant; alors la trajectoire et la ligne du courant qui passent par un point quelconque donné de la variété (LA_i) à un moment quelconque donné ont la même torsion p_1.

3. La ligne du champ $(\mathcal{J}_3)$ et la ligne du champ $(\mathcal{J}_1)$ qui passent par un même point ont la torsion commune $\pi_1\,(=\rho_3)$; les relations (1.6) [2]

$$(10)\qquad \begin{cases} \pi_1 = p_1\cos^2\theta + (p_3+r_1)\sin\theta\cos\theta + r_3\sin^2\theta, \\ \rho_3 = r_3\cos^2\theta - (p_3+r_1)\sin\theta\cos\theta + p_1\sin^2\theta, \end{cases}$$

conduisent alors à

$$(11)\qquad \pi_1 = p_1,$$

c'est-à-dire les lignes du champ $(\mathcal{J}_3)$ et du champ $(\mathcal{J}_1)$ et les lignes $(l.a_k)_3$, $(l.a_{k*})_1$ qui passent par un même point à un moment donné, ont la même torsion; il en résulte alors que les lignes instationnaires $(l.a_k)_3$, $(l.a_{k*})_1$ qui passent par un même point ont la torsion commune stationnaire.

4. Les courbures des lignes $(l.a_k)_3$, $(l.a_{k*})_1$ sont données par

$$(12)\qquad \pm\frac{1}{R_{(l.a_k)_3}} = q_3 + \frac{\theta_t}{v}, \quad \pm\frac{1}{R_{(l.a_{k*})_1}} = q_1 + \frac{\theta_t}{v},$$

où θ_t est la vitesse de la rotation du vecteur vitesse situé dans le plan tangent de la variété (LA_i). Alors la trajectoire et la ligne du courant coïncident si $\theta_t=0$ (mouvement stationnaire), et elles coïncident à une rotation (180°) près si $2q_3+\theta_t/v$ (mouvement instationnaire).

Institut Politechnique de Jassy,
Chaire de Mécanique Théorique

BIBLIOGRAPHIE

1. Бюшгенс С. С., *Геометрия векторного поля.* ИАН СССР, с. Мат., 1946, *10.*
2. Gheorghiev Gh., *Нестационарные движения идеальной жидкости вдоль линейной неголономной поверхности.* An. şt. Univ. „Al. I. Cuza", Iaşi, s. I, 1959, **V**, pp. 51—56.
3. Miron R., *Asupra sferei neolonome şi planului neolonom.* An. şt. Univ. „Al. I. Cuza", Iaşi, s. I. 1955, **1**, pp. 43—52.

CURGERI ÎNTR-O VARIETATE LINIARĂ (LA_i) A SPAŢIULUI E_3, DEFINITĂ DE UN CÎMP CU DIRECŢII ASIMPTOTICE NEDETERMINATE

(Rezumat)

Utilizînd un sistem diferenţial exterior al curgerii barotrope tridimensionale nestaţionare într-o varietate (LA_i) din spaţiul tridimensional euclidian, se stabileşte existenţa a trei clase de curgeri, închizînd sistemul exterior şi cercetîndu-i involuţia. Se pun în evidenţă, de asemenea, unele proprietăţi ale acestor curgeri.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1–2, 1968

D. C. 512.91

COMPOSITION OF COLINEAR OSCILLATIONS WITH AMPLITUDE MODULATION

BY

ALFRED BRAIER

Paper presented in the scientific session of the Polytechnic Institute of Jassy, September the 28–30st, 1967

1. It is a well-known fact [1] that through composition of a number of colinear harmonic oscillations with equal frequencies it results a single harmonic oscillation, with the same frequency. Likewise, the superposition of two colinear harmonic oscillations with different frequencies, results in an oscillation with amplitude and phase modulation [2]. But, the literature does not gives general results concerning the composition of modulated oscillations, possibly due to the lack of an adequate mathematical implement.

The object of this Note is to prove that the superposition of a discreet number of colinear amplitude modulated oscillations, having respectively equal their frequencies and those of modulation, gives an oscillatory motion, described by only two oscillations of the analized type. The phase differences in the respective trigonometric functions which intervene is equal to $\pi/2$.

The prove utilise the capability of the elements of algebras on the real field to represent symbolically functions of a scalar variable [3]...[7].

2. In [6] and particularly in [7] was shown that the functions

$$f(t) = A[1 + \mu \sin(\omega t + \alpha)] \sin(pt + \beta) \tag{1}$$

are simbolically represented by an algebra $\mathcal{A}_6$, namely the direct sum of complex and $\mathfrak{D}$-polynions algebras. The element

$$w = \sum_{i=1}^{6} a_i \varepsilon_i \tag{2}$$

of the algebra

(3)

	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5	ε_6
ε_1	ε_1	ε_2	0	0	0	0
ε_2	ε_2	$-\varepsilon_1$	0	0	0	0
ε_3	0	0	ε_3	ε_4	ε_5	ε_6
ε_4	0	0	ε_4	$-\varepsilon_3$	ε_6	$-\varepsilon_5$
ε_5	0	0	ε_5	ε_6	$-\varepsilon_3$	$-\varepsilon_4$
ε_6	0	0	ε_6	$-\varepsilon_5$	$-\varepsilon_4$	ε_3

attached to (1) has

$$(4)\qquad \begin{cases} a_1 = A\cos\beta, & a_3 = A\mu\cos\alpha\cos\beta, & a_5 = A\mu\sin\alpha\cos\beta, \\ a_2 = A\sin\beta, & a_4 = A\mu\sin\alpha\cos\beta, & a_6 = A\mu\sin\alpha\sin\beta, \end{cases}$$

with

$$(5)\qquad \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_3}{a_4} = \frac{a_5}{a_6}.$$

The exponential form [6] of (2), (4) are [7]

$$(6)\qquad w = A(\tilde{e}^{\beta\varepsilon_2} + \mu\tilde{e}^{\beta\varepsilon_4}\tilde{e}^{\alpha\varepsilon_5}),$$

where

$$(7)\qquad \tilde{e}^{\beta\varepsilon_s} = \cos\beta\,\varepsilon_1 + \sin\beta\,\varepsilon_s,\ (s=1,\ 2);\quad \tilde{e}^{\alpha\varepsilon_5} = \cos\alpha\,\varepsilon_3 + \sin\alpha\varepsilon_5.$$

Likewise, the elements (2) which do not satisfy (5) and have

$$(8)\qquad a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 \neq 2\,|\,a_3 a_6 - a_4 a_5\,|,$$

take the following exponential form [7]:

$$(9)\qquad w = A_1(\tilde{e}^{P\varepsilon_2} + \mu_1\tilde{e}^{P\varepsilon_4}\tilde{e}^{Q\varepsilon_5}) + A_2[\tilde{e}^{(P+\pi/2)\varepsilon_1} + \mu_2\tilde{e}^{(P+\pi/2)\varepsilon_4}\tilde{e}^{(Q+\pi/2)\varepsilon_5}],$$

where

$$(10)\qquad \begin{cases} \operatorname{tg}P,\ \operatorname{tg}Q = \sqrt{\Gamma^2+1} - \Gamma,\ \text{with } \Gamma_P = \dfrac{a_3^2 - a_4^2 + a_5^2 - a_6^2}{2(a_3 a_4 + a_5 a_6)}, \\ \Gamma_Q = \dfrac{a_3^2 + a_4^2 - a_5^2 - a_6^2}{2(a_3 a_5 + a_4 a_6)},\quad A_1 = \dfrac{a_1 + a_2\operatorname{tg}P}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 P}},\quad A_2 = \dfrac{a_2 - a_1\operatorname{tg}P}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 P}}, \\ A_1\mu_1,\ A_2\mu_2 = \dfrac{1}{2}\left[\sqrt{(a_3+a_6)^2 + (a_4-a_5)^2} \pm \sqrt{(a_3-a_6)^2 + (a_4+a_5)^2}\right]. \end{cases}$$

The element (9) represents symbolically the function

$$(11)\qquad f(t) = A_1[1+\mu_1\sin(\omega t+Q)]\sin(pt+P) + A_2[1+\mu_2\cos(\omega t+Q)]\cos(pt+P).$$

3. If we now attache to an amplitude modulated oscillation of type (1) the element (2), (4) of $\mathfrak{A}_6$ (3), the composition of such colinear oscillations, with the same ω and p, resumes to a simple addition of the elements, and a riturn to the law of motion.

Let be

$$F(t) = \sum_{k=1}^{m} A_k [1 + \mu_k \sin(\omega t + \alpha_k)] \sin(pt + \beta_k) \tag{12}$$

the function which describe the motion resulting from the superposition of m colinear oscillations (1), where A_k are amplitudes, μ_k — degrees of modulation, α_k and β_k — phase angles of respective the modulation and oscillation, ω and p — the frequencies of respective the modulation and oscillation. In view of (1) and (4), the element $w = \sum_{i=1}^{6} b_i \varepsilon_i$ of (3), attached to $F(t) = \sum_{k=1}^{m} f_k(t)$ (12), with each f_k of type (1), has

$$\left\{\begin{array}{l} b_1 = \sum_{k=1}^{m} A_k \cos\beta_k, \quad b_3 = \sum_{k=1}^{m} A_k\mu_k \cos\alpha_k \cos\beta_k, \quad b_5 = \sum_{k=1}^{m} A_k\mu_k \sin\alpha_k \cos\beta_k, \\ b_2 = \sum_{k=1}^{m} A_k \sin\beta_k, \quad b_4 = \sum_{k=1}^{m} A_k\mu_k \cos\alpha_k \sin\beta_k, \quad b_6 = \sum_{k=1}^{m} A_k\mu_k \sin\alpha_k \sin\beta_k. \end{array}\right. \tag{13}$$

If (8) is fulfiled, the resulting motion stands in the same class of oscillatory motions, with amplitude modulation.

In view of (8) and (10) it is useful to calculate the following quantities:

$$\left\{\begin{array}{l} \Lambda_1 = b_3^2 + b_4^2 + b_5^2 + b_6^2 = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} A_jA_k\mu_j\mu_k \cos(\alpha_j - \alpha_k)\cos(\beta_j - \beta_k), \\ \Lambda_2 = b_3^2 - b_4^2 + b_5^2 - b_6^2 = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} A_jA_k\mu_j\mu_k \cos(\alpha_j - \alpha_k)\cos(\beta_j + \beta_k), \\ \Lambda_3 = b_3^2 + b_4^2 - b_5^2 - b_6^2 = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} A_jA_k\mu_j\mu_k \cos(\alpha_j + \alpha_k)\cos(\beta_j - \beta_k), \\ \Lambda_4 = 2(b_3b_6 - b_4b_5) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} A_jA_k\mu_j\mu_k \sin(\alpha_j - \alpha_k)\sin(\beta_j - \beta_k), \\ \Lambda_5 = 2(b_3b_4 + b_5b_6) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} A_jA_k\mu_j\mu_k \cos(\alpha_j - \alpha_k)\sin(\beta_j + \beta_k), \\ \Lambda_6 = 2(b_3b_4 + b_5b_6) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} A_jA_k\mu_j\mu_k \sin(\alpha_j + \alpha_k)\cos(\beta_j - \beta_{k.}) \end{array}\right. \tag{14}$$

The resulting motion (12) is described by (s. (11))

$$F(t) = B_1[1 + M_1 \sin(\omega t + \varphi)] \sin(pt + \psi) + \\ + B_2[1 + M_2 \cos(\omega t + \varphi)] \cos(pt + \psi), \tag{15}$$

where, taking into account (10) and (14),

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\left(\frac{\Lambda_3}{\Lambda_6}\right)^2 + 1} - \frac{\Lambda_3}{\Lambda_6}, \quad \operatorname{tg}\psi = \sqrt{\left(\frac{\Lambda_2}{\Lambda_5}\right)^2 + 1} - \frac{\Lambda_2}{\Lambda_5}, \\ B_1 = \frac{b_1 + b_2 \operatorname{tg}\psi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\psi}}, \qquad B_2 = \frac{b_2 - b_1 \operatorname{tg}\psi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\psi}}, \\ B_1 M_1, \; B_2 M_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{\Lambda_1 + \Lambda_4} \pm \sqrt{\Lambda_1 - \Lambda_4}). \end{cases} \tag{16}$$

The eventual negative values of B_1, B_2, M_1, M_2 denote a phase opposition at the level of the respective trigonometric function.

In comparision with each of the component, the resulting motion (15) presents two terms, with the phase angles on both trigonometric functions switched over $\pi/2$. Thus, the presence of a second term of this kind, denotes the appearance of a distorsion, measured in the first place by B_2.

4. Let us consider some interesting particular cases.

a) If $b_3 b_6 = b_4 b_5$, i. e. (s. (14_4))

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} A_j A_k \mu_j \mu_k \sin(\alpha_j - \alpha_k) \sin(\beta_j - \beta_k) = 0, \tag{17}$$

than

$$\frac{\Lambda_3}{\Lambda_6} = \frac{b_4^2 - b_6^2}{2 b_3 b_6}, \quad \frac{\Lambda_2}{\Lambda_5} = \frac{b_5^2 - b_6^2}{2 b_5 b_6}, \quad \Lambda_4 = 0 \tag{18}$$

and

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\varphi = \frac{b_6}{b_4}\left(= \frac{b_5}{b_3}\right), \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{b_6}{b_5}\left(= \frac{b_4}{b_3}\right), \\ B_1 = \frac{b_1 b_5 + b_2 b_6}{\sqrt{b_5^2 + b_6^2}}, \quad B_2 = \frac{b_2 b_5 - b_1 b_6}{\sqrt{b_5^2 + b_6^2}}, \\ B_1 M_1 = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2}, \quad M_2 = 0. \end{cases} \tag{19}$$

It results that

(20) $$F(t) = B_1 [1 + M_1 \sin (\omega t + \varphi)] \sin (pt + \psi) + B_2 \cos (pt + \psi),$$

i.e. the distorsion is purely harmonic.

b) Moreover, if $b_1 b_6 = b_2 b_5$, that is

(21) $$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} A_j A_k (\mu_j \sin \alpha_j - \mu_k \sin \alpha_k) \sin (\beta_j - \beta_k) = 0,$$

$B_2 = 0$ and the previous distorsion becomes equal to zero (the restrictions (5) are in this way fulfiled).

Thus, only if (17) and (21) hold simultaneously,

(22) $$F(t) = B_1 [1 + M_1 \sin (\omega t + \varphi)] \sin (pt + \psi),$$

and the resulting motion presents the same feature which that of the component oscillations.

c) Now, if in (19) $b_1 b_5 + b_2 b_6 = 0$, that is

(23) $$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} A_j A_k \mu_k \sin \alpha_k \cos (\beta_j - \beta_k) = 0,$$

the final motion becomes

(24) $$F(t) = B_2 \cos (pt + \psi).$$

Therefore, if (17) and (23) take place, the superposition of colinear amplitude modulated oscillations results in an harmonic motion. For two modulated oscillations ($m = 2$) one obtains $A_1 \mu_1 = A_2 \mu_2$, $\alpha_2 - \alpha_1 = \pi$ and $\beta_2 = \beta_1$, which can be find also directly.

d) If (8) does not hold, the element (13) becomes divisor of zero ($b_3 + b_6 = 0$, $b_4 - b_5 = 0$, or $b_3 - b_6 = 0$, $b_4 + b_5 = 0$), i. e.

(25) $$\begin{cases} \sum_{k=1}^{m} A_k \cos (\psi_k - \varphi_k) = 0, \\ \sum_{k=1}^{m} A_k \sin (\psi_k - \varphi_k) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \sum_{k=1}^{m} A_k \cos (\psi_k + \varphi_k) = 0, \\ \sum_{k=1}^{m} A_k \sin (\psi_k + \varphi_k) = 0, \end{cases}$$

and on proves easily that

(26) $$F(t) = F \sin [(p \pm \omega) t + \Phi],$$

where

(27) $$F = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} A_k A_l \cos (\psi_k - \psi_l) \cos \varphi_k \cos \varphi_l}, \quad \operatorname{tg} \Phi = \frac{\sum_{k=1}^{m} A_k \cos \psi_k \sin \varphi_k}{\sum_{k=1}^{m} A_k \cos \psi_k \cos \varphi_k}.$$

Politechnic Institute, Jassy,
Department of Theoretical Mechanics

LITERATURE

1. Gábos Z., Mangeron D., Stan I., *Fundamentele mecanicii*. Ed. Acad. R.P.R., Buc., 1962.
2. Крылов А. Н., *О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики*. ГИТТЛ, М.-Л., 1950.
3. Braier A., *Sur la représentation par des nombres hypercomplexes des fonctions reélles d'une variable*. Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI (XV)**, *1-2*, pp. 89-96.
4. — *La représentation symbolique des fonctions qui vérifient des équations différentielles linéaires à coefficients constants*. Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI (XV)**, *3-4*, pp. 93-100.
5. — *Représentation symbolique des produits de fonctions*. Bul. Inst. polit. Iaşi, 1966, **XII (XVI)**, *3-4*, pp. 63-70.
6. — *Exponential Form of the Elements of some Algebras*. Bul. Inst. polit. Iaşi, 1967, **XIII (XVII)**, *1-2*, pp. 115-122.
7. — *Exponential Form for the Elements of Direct Sums of Algebras and some Applications*. Bul. Inst. polit. Iaşi, 1967, **XIII (XVII)**, *3-4*, pp. 31-38.

COMPUNEREA OSCILAŢIILOR COLINIARE MODULATE ÎN AMPLITUDINE

(Rezumat)

Utilizînd capacitatea elementelor algebrei (3) de a reprezenta simbolic funcţiile (1) ([6], [7]) se demonstrează că prin suprapunerea unui număr discret de oscilaţii coliniare modulate armonic în amplitudine (12), rezultă o mişcare oscilatorie (16) realizată prin suprapunerea a numai două mişcări oscilatorii de tipul considerat, cu amîndouă funcţiile trigonometrice respective în cuadratură.

În particular, dacă mărimile ce caracterizează oscilaţiile componente verifică condiţia (17), una din mişcări devine pur armonică (20).

Mişcarea rezultată are aceeaşi alură (22) cu cele componente numai dacă (17) şi (22) au simultan loc şi se reduce la o oscilaţie armonică pură cînd sînt verificate condiţiile (17) şi (23).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

C. D. 536.7 ; 530.1

SUR LES DISCUSSIONS RELATIVES A LA FORMULE $Q = Q_0\sqrt{1-\beta^2}$ ET LA DÉFINITION DE LA PRESSION EN THERMODYNAMIQUE RELATIVISTE

PAR

LOUIS DE BROGLIE
Membre d'honneur de l'Académie de la République Socialiste de Roumanie

1. Dans des Notes précedentes, insérées dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* et dans ce *Bulletin* [1], [2], nous avons donné de nouvelles démonstrations de la formule de transformation relativiste de la chaleur $Q = Q_0\sqrt{1-\beta^2}$. Dans ce que suit, tout en suivant le texte de notre Note récente insérée dans les mêmes *Comptes rendus* [3] nous montrons que, si l'on a pu récemment mettre en doute la validité de la formule de transformation relativiste de la chaleur $Q = Q_0\sqrt{1-\beta^2}$, cela tient sans doute aux ambiguités qui se présentent lorsqu'on introduit la notion de pression en Thermodynamique relativiste.

2. Planck et Laue ont démontré vers 1908 la formule suivante de transformation relativiste de la chaleur

$$Q = Q_0\sqrt{1-\beta^2}, \tag{1}$$

qui a été longtemps admise sans contestation. Mais ils ont aussi utilisé la formule de transformation relativiste du tenseur symétrique de rang 2 qui représente des densités d'énergie-impulsion et de pression interne dans un corps. De cette dernière formule on peut tirer par intégration sur le volume, des formules de transformation pour l'énergie U, la pression interne P, supposée isotrope, le volume V et la quantité de mouvement $\mathbf{p}$ d'un corps lorsqu'on passe d'un système de référence R_0, où il est immobile, à un système de référence R, où il est animé de la vitesse constante $v = \beta c$. Ces relations peuvent s'écrire

$$U = \frac{U_0 + P_0 V_0 \beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mathbf{p} = \frac{U_0 + P_0 V_0}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}\mathbf{v}, \quad PV = \frac{P_0 V_0 + U_0 \beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{2}$$

Or, divers auteurs se sont appuyés sur ces formules pour contester la validité de la formule (1). Comme de nombreux raisonnements m'ont conduit à penser que la formule (1) est exacte, j'en suis arrivé a me demander si les formules (2) n'étaient pas sinon inexactes du moins inexactement appliquées dans le cas d'un corps contenant de la chaleur et je me suis aperçu que l'introduction de la pression en Thermodynamique relativiste comporte des ambiguïtés qu'il importe de bien préciser.

Même si l'on se contente de considérer dans R_0 un corps en état d'équilibre calorifique homogène et invariable, l'application des formules (2) au simple changement de système de référence $R_0 \to R_1$ soulève des difficultés. Si l'on examine la question, on voit que toutes les difficultés proviennent des termes en P_0 figurant dans les formules (2) et que, par suite, elles disparaissent si l'on pose $P_0 = 0$. Cette hypothèse me paraît pouvoir être justifiée. En effet, si l'on admet qu'un corps dans un état d'équilibre homogène et invariable contient dans son système propre une agitation moléculaire partout isotrope et si l'on considère un petit élément de surface placé dans R_0, cet élément de surface reçoit sur ses deux faces la même quantité de mouvement due aux impacts moléculaires de sorte que la pression qu'il subit est nulle. C'est seulement aux limites du corps que la pression P_0 apparaît et qu'elle peut se manifester par le travail $P_0 \, \mathrm{d}V_0$, quand V_0 varie.

Il paraît donc essentiel de bien distinguer la pression interne qui, on le voit dans les formules (2), n'est pas invariante et qui dans le cas considéré est nulle dans R_0, de la pression aux limites du corps qui n'est pas nulle dans R_0 et qui intervient dans l'expression du travail. Or cette dernière pression n'est pas non plus invariante. Elle ne le serait que si l'on pouvait négliger l'énergie de translation globale du corps dans R qui est égale à $E_t = U_0 \beta^2 / \sqrt{1 - \beta^2}$; c'est ce qui ressort clairement des calculs exposés dans une dernière Note aux *Comptes rendus* [4] (où j'ai écrit W au lieu de U).

Cette non-invariance de la pression P qui intervient dans l'expression du travail peut aussi se voir autrement. Planck et Laue ont autrefois démontré [5] non pas l'invariance de la pression P comme on le croît souvent, mais l'invariance d'une autre pression $\mathcal{P}$ qu'ils ont appelée la „pression relative" et qui ne coïncide pas avec P.

Ayant examiné cette démonstration assez compliquée, je crois qu'on peut en tirer la conclusion suivante: si P et $\mathcal{P}$ désignent respectivement la pression qui figure dans l'expression du travail et la pression invariante de Plank-Laue, on peut écrire dans R quand V varie, les deux pressions étant comptées dans le sens qui va de l'intérieur à l'extérieur du corps,

$$\mathcal{P} \Delta V = P \Delta V + \Delta E_t \tag{3}$$

et l'on a $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 = P_0$. En employant les notations de ma dernière Note [4], le travail total que le corps reçoit dans R de l'extérieur quand son volume varie de ΔV est

$$(4)\qquad -P\Delta V = -\mathcal{P}\Delta V + \Delta E_t = -P_0\Delta V_0\sqrt{1-\beta^2} + \Delta E_t = \Delta\mathcal{T} + \Delta\mathcal{T}'.$$

L'accord de cette évaluation du travail dans R avec les résultats de ma dernière Note est alors évident. Il montre bien qu'on ne peut supposer invariante la pression qui figure dans l'expression du travail qu'en oubliant de tenir compte de la variation de E_t.

Les ambiguïtés que présente ainsi la définition de la pression et de sa varience sont, me semble-t-il, à l'origine de confusions qui ont conduit à contester la validité de la formule (1).

Revenons aux formules (2) an admettant qu'on peut y poser dans le cas considéré $P_0 = 0$. Nous obtenons d'abord les relations

$$(5)\qquad U = \frac{U_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\,,\quad \mathbf{p} = \frac{U_0}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}\,\mathbf{v},$$

qui sont entièrement satisfaisantes. La première peut s'écrire

$$(6)\qquad U = U_0\sqrt{1-\beta^2} + \frac{U_0\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

où $U_0\sqrt{1-\beta^2}$ est l'énergie que le corps transporte à son intérieur pendant son mouvement dans R, ce qui justifie la formule (1), tandis que $U_0\beta^2/\sqrt{1-\beta^2}$ est l'énergie de translation d'ensemble E_t dans R.

Reste à interpréter la formule

$$(7)\qquad PV = \frac{U_0\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

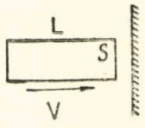


Fig. 1

Pour en voir l'origine, nous considérerons dans R un corps chaud ayant la forme d'un parallélépipède rectangle de longueur L et de section S perpendiculaire à la direction du mouvement (fig. 1). Nous supposerons que le corps vient s'aplatir cortre une paroi rigide, les molécules du corps s'incorporant à la paroi tandis que la pression P reste constante pendant tout le processus.

Pendant le processus envisagé, la paroi exerce sur le corps une force F égale et opposée à la force de pression PS qu'elle subit et c'est cette force qui anulle progressivement la quantité de mouvement du corps. Comme on a à chaque instant $dp = Fdt = -PSdt$, on obtient en intégrant sur toute la durée T du processus

$$(8)\qquad \Delta p = -p = -PST.$$

Mais on a évidemment $T = L/v$ et il vient d'après (5) :

$$(9)\qquad PSL = PV = pv = U_0\beta^2/\sqrt{1-\beta^2},$$

ce qui est bien la relation (7).

En conclusion, il semble bien que, si l'on admet la relation $P_0 = 0$, l'application des formules (2) au changement de système de référence $R_0 \to R$ ne soulève plus de difficultés et qu'elle est en accord avec la formule (1).

Reçue le 15 IX 1967

Académie des Sciences, Paris, France

BIBLIOGRAPHIE

1. de Broglie L., C. r. Acad. Sci., Paris, 1966, **262**, série B, p. 1235; Ibid., 1966, **263**, série B, p. 1351; Ibid., 1967, **264**, série B, p. 1173.
2. — Bul. Inst. polit. Iaşi, 1967, **XIII** (**XVII**), *3–4*, pp. 161–164.
3. — C. r., Acad. Sci., Paris, 1967, **265**, série B, pp. 589–591.
4. — C. r., Acad. Sci., Paris, 1967, **265**, série B, p. 437.
5. von Laue M., *Die Relativitätstheorie*. Vieweg, Braunschweig, 1919, S. 213–214.

ASUPRA DISCUŢIILOR RELATIVE LA FORMULA $Q = Q_0\sqrt{1-\beta^2}$ ŞI DEFINIŢIA PRESIUNII ÎN TERMODINAMICA RELATIVISTĂ

(Rezumat)

Se scoate în evidenţă faptul că punerea recentă în dubiu a formulei de transformare relativistă a căldurii $Q = Q_0\sqrt{1-\beta^2}$ se datoreşte unor interpretări ambigue referitoare la noţiunea de presiune în termodinamica relativistă.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

D. K. 534-8; 669

VERFESTIGUNG DURCH ULTRASCHALL UND IHR THERMISCHER ABBAU *)

VON

ERICH SCHMID

1. Einleitung

Unter *Rekristallisation* versteht man den durch eine thermische Behandlung bewirkten Neuaufbau des Kristallgefüges in einem metallischen Werkstück, das durch Kaltreckung verfestigt worden war. Der Neubau des Gefüges geht über Kernbildung und Wachstum dieser Kerne vor sich. Ein anschauliches Bild über den Zusammenhang der Korngrösse des neugebildeten Gefüges mit Reckgrad und Glühtemperatur gibt das Rekristallisationsdiagramm. Abb. 1 gibt ein Beispiel für die grundsätzlich einander ähnlichen Diagramme für die verschiedenen Metalle wieder. Damit überhaupt die Kornneubildung erfolgt muss ein (mit fallender Glühtemperatur steigender) Schwellenwert des Reckgrads überschritten werden. Hoher Reckgrad und niedrige Glühtemperatur führen zu besonderer Feinkörnigkeit. Umgekehrt kann durch kleinen (kritischen) Reckgrad und hohe Glühtemperatur sehr grobkörniges Gefüge, gegebenenfalls Bildung eines einzigen Rekristallisationskristalls, erhalten werden. Als Anhaltspunkt seien einige kritische Reckgrade angeführt: Mg 0,2%, Al 1,6%, Fe (Armco) 2,75%.

Das Rekristallisationsverhalten eines Metalls ist zweifellos als eine „strukturempfindliche" Eigenschaft aufzufassen. Wenn auch die allgemeine Form des Rekristallisationsdiagramms erhalten bleibt, so wird es doch wesentlich von vielen Faktoren, wie Art der Verformung, Gefügeausbildung im Ausgangszustand, Beimengungen usw. beinflusst. Bei sehr grobkörnigen Proben bzw. Einkristallen kann sogar die Steigerung des Rekristallisationsvermögens mit zunehmendem Reckgrad verloren gehen. In einem gedehnten und anschliessend geglühten Zweikristall tritt, trotz geringerer Verformung

*) Herrn Akademiker Prof. Dr. Eugen Bădărău mit den besten Wünschen zum 80. Geburtstag gewidmet.

in der Nachbarschaft der Korngrenze nur an dieser Rekristallisation ein. Abb. 2 zeigt die Rekristallisation in einer ungedehnt gebliebenen Knotenstelle eines gedehnten Kadmiumkristalls, Abb. 3 die im Bereich von Deformationszwillingen. Wichtig für Kernbildung scheinen vor allem turbulent

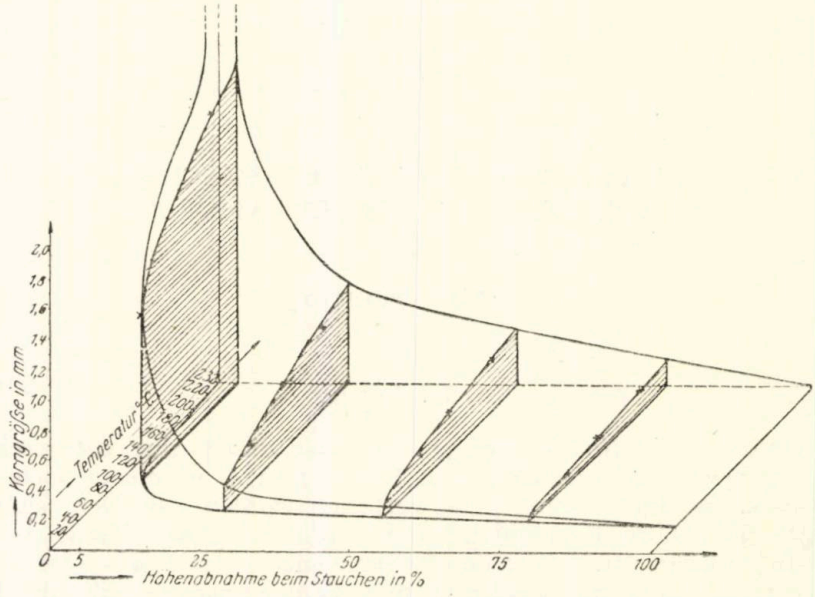


Abb. 1. — Rekristallisationsdiagramm des Zinns [1].

gestörte Gitterbereiche mit Speicherung hoher Beträge von elastischer Energie zu sein, wie sie in gereckten Proben in der Nachbarschaft von Grosswinkelkorngrenzen, an Stoss-stellen von gedehnt und ungedehnt gebliebenen Teilen von Einkristallen oder in der Umgebung von Deformationszwillingen auftreten. Die Rückbildung der Eigenschaften während Rekristallisation erfolgt sprunghaft in einem schmalen Temperaturgebiet. Als Beispiel hierfür ist in Abb. 4 die Änderung von Zugfestigkeit und Dehnung eines hartgezogenen Flusseisendrahtes bei steigender Glühtemperatur dargestellt.

Grundsätzlich verschieden von dieser Art der Entfestigung ist die *Erholung*. Am deutlichsten beobachtet man sie bei gedehnten Einkristallen, die einer Anlassbehandlung (bei niedrig schmelzenden Metallen genügt Lagerung bei Raumtemperatur) unterworfen werden. Hierbei geht ohne Kornzerfall und ohne Änderung der Orientierung die aufgeprägte Verfestigung allmählich und stetig zurück; gegebenenfalls werden die Werte des unverformten Ausgangskristalls erreicht. Auch für die Erholung ist, ebenso wie für die Kernbildung und das Kornwachstum bei der Rekristallisation, die im verfestigten Metall gespeicherte Energie verantworlich. In verspannten Gitterbereichen zweier sich an einer Grosswinkelkorngrenze berührenden

Abb. 2. — Rekrisallisierter Cd-Kristall. Keimbildung an Übergangsstelle zwischen gedehntem und ungedehntem Teil.

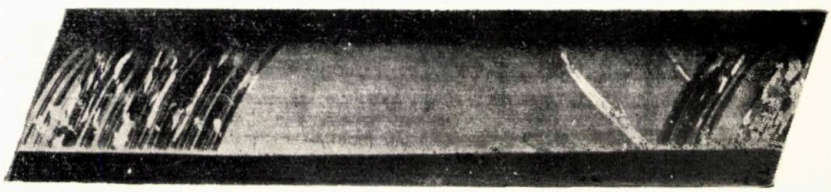


Abb. 3. — Cd-Kristall; Rekristallisation in Zwillingslamellen.

Körner wird nur in Ausnahmefällen eine Erholung zu weitgehen der Entbindung der Spannungsenergie führen können. Dies ist der Grund dafür, dass in vielkristallinen Proben das Ausmass der Erholung, die ja auch erst in Einkristallversuchen entdeckt worden ist, stark zurücktritt, die Entfestigung also im Wesentlichen durch Rekristallisation erfolgt.

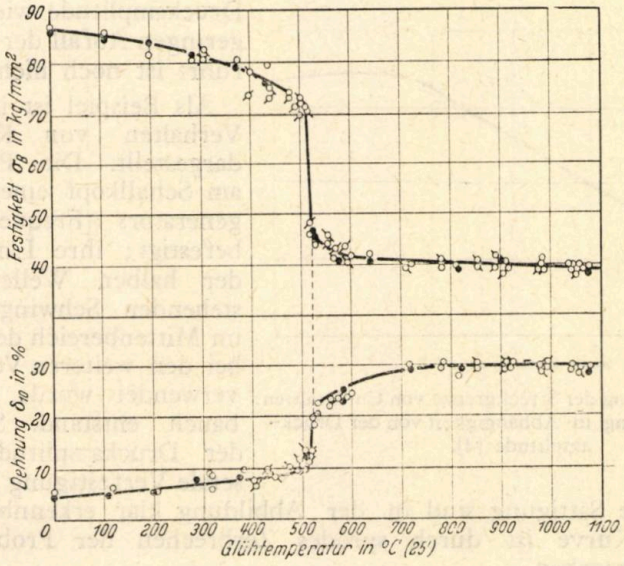


Abb. 4. — Änderung von Festigkeit und Dehnung von hartgezogenem Flusseisen (0,08% C) mit steigender Glühtemperatur (Glühdauer 25 Min.) [2].

Auch für die Erholung kann man mit Hilfe eines Diagramms, welches den prozentischen Rückgang der durch die Kaltreckung veränderten Eigenschaft als Funktion von Anlasstemperatur und -zeit wiedergibt eine anschauliche Darstellung gewinnen. Zur Frage, ob auch für das Einsetzen von Erholung die Vorverformung eine gewisse Schwelle übersteigen muss sei bemerkt, dass dies — endliche Erholungszeiten vorausgesetzt — in der Tat der Fall zu sein scheint [3]. Der Absolutwert dieser Schwelle hängt wahrscheinlich von der Empfindlichkeit des Messverfahrens ab.

2. Thermische Behandlung beschallter Kupferproben

Wird eine Metallprobe in geeigneter Weise Ultraschall behandelt, so erweist sie sich im anschliessenden statischen Zugversuch als verfestigt. Besonders ausgeprägt ist der Effekt im Druckbauch einer stehenden Ultraschallschwingung. Der Frequenz der Schwingung kommt nach unseren

bisherigen Kenntnissen keine wesentliche Bedeutung zu, wohl aber ist die Druckamplitude entscheidend. Bie zur Erreichung eines bestimmten Schwellenwerts dieser Druckamplitude wird kein Einfluss des Ultraschalls beobachtet, nach Überschreitung der Schwelle steigt die Verfestigung mit der Druckamplitude an, um schliesslich einem konstanten Endwert zuzustreben [4]. Ob nach dem Erreichen dieses Stättigungswerts weitere Erhöhung der Druckamplitude wieder zu einem geringen Abfall der Verfestigung führt ist noch nicht geklärt.

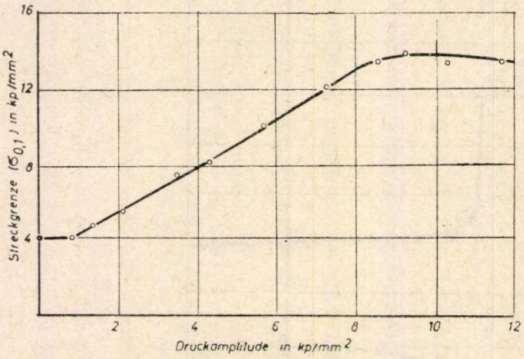


Abb. 5. — Änderung der Streckgrenze von Cu-Drähten durch Beschallung in Abhängigkeit von der Druckamplitude [4].

Als Beispiel ist in Abb. 5 das Verhalten von Kupferdrähten dargestellt. Die Proben waren am Schallkopf eines Ultraschallgenerators (Frequenz 20 kHz) befestigt; ihre Länge entsprach der halben Wellenlänge einer stehenden Schwingung, so dass im Mittenbereich der Proben, der bei den weiteren Versuchen stets verwendet wurde, ein Druckbauch entstand. Schwellenwert der Druckamplitude, anschliessende Verfestigung und Einmündung in eine Sättigung sind in der Abbildung klar erkennbar. Der Endpunkt der Kurve ist durch sprödes Zerbrechen der Probe durch die Beschallung gegeben.

Die in der Abbildung dargestellte Kurve bezieht sich auf weichgeglühtes Ausgangsmaterial. Werden vorgereckte Kupferdrähte der Beschallung unterworfen so beobachtet man eine mit steigendem Reckgrad abnehmende Ultraschallverfestigung. Schliesslich tritt bei sehr stark vorverfestigten Proben sogar Entfestigung durch die Beschallung ein. Analoge Beobachtungen liegen auch für Ermüdungsversuche mit niedrigen Frequenzen vor [6].

Überraschend sind nun die Beobachtungen über die Rückbildung der Ultraschallverfestigung durch thermische Behandlung. Wenn Proben, die bis fast zum Maximum der Verfestigung beschallt worden waren einer Wärmebehandlung mit steigender Temperatur unterworfen werden, so beobachtet man, dass die Mikrohärte oder die Streckgrenze in einem breiten Temperaturbereich allmählich absinken, was auf einen Erholungsvorgang hinweist. In Abb. 6 sind entsprechende Ergebnisse dargestellt. Dass in der Tat Erholung und nicht Rekristallisation vorliegt, konnte durch röntgenographische Untersuchungen belegt werden. Abb. 7 gibt drei Diagramme wieder, die sich a) auf den weichen Ausganzsustand des Drahtes, b) auf den bis zum Maximum durch Ultraschall gehärteten Draht und c) auf den gehärteten und anschliessend angelassenen Draht beziehen. Die Beschallung

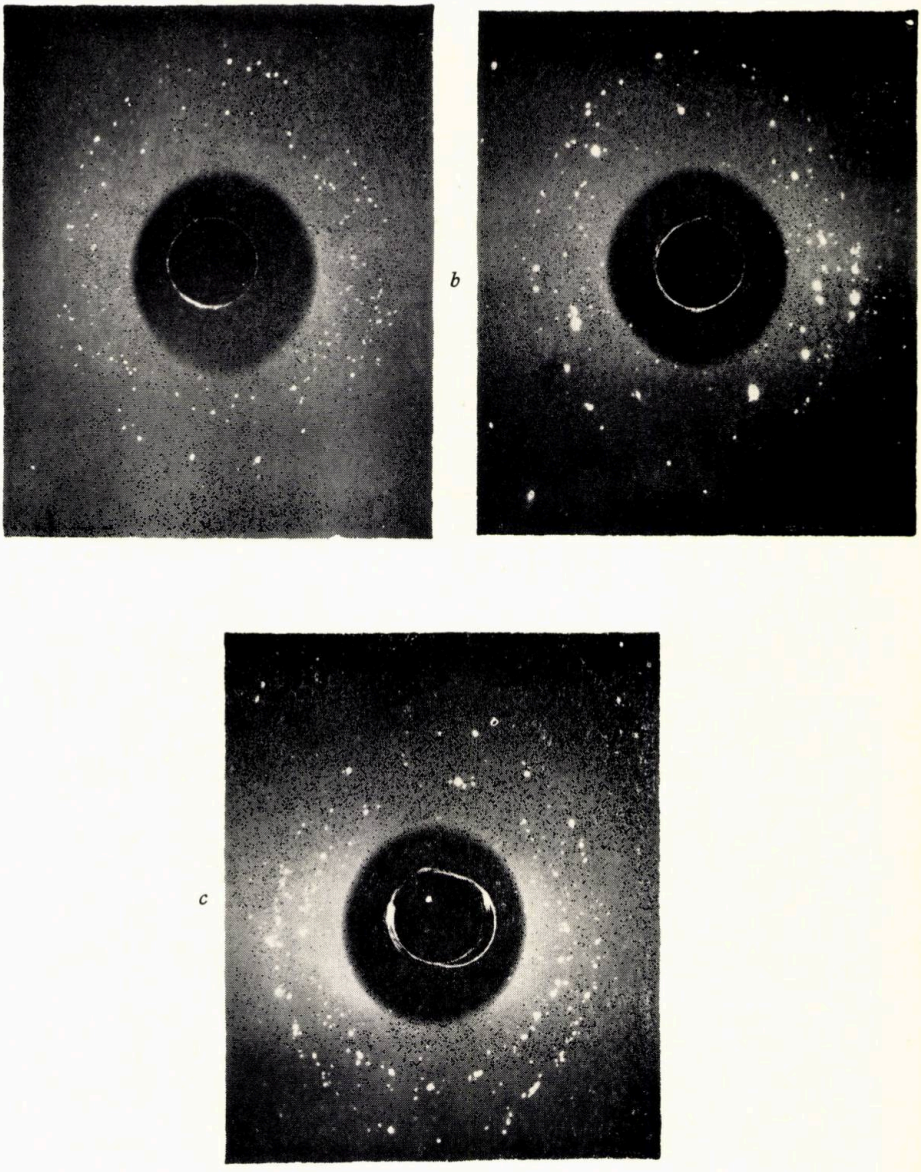


Abb. 7. — Anlassen von Cu-Drähten, die bis zum Max.d.Streckgrenze beschallt waren [8]; *a* — weicher Ausgangszustand, *b* — beschallt, *c* — beschallt und geglüht, 10 Min. bei 500°C.

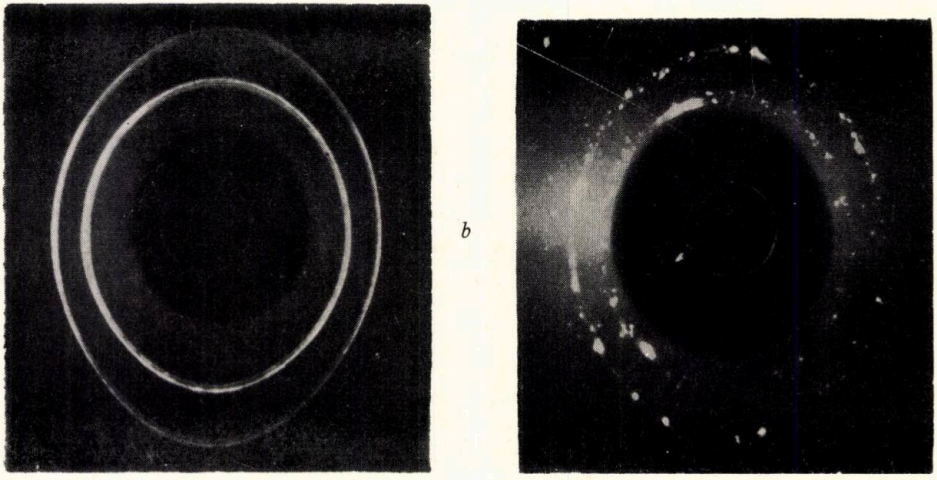


Abb. 8. — Anlassen von Cu-Drähten, die bis zum Bruch beschallt waren [8]; *a* — beschallt, *b* — beschallt und geglüht, 10 Min. bei 500°C.

führt zwar zu einer gewissen Unschärfe der Interferenzen, die Glühbehandlung bringt aber keine weitere Änderung des Diagramms. Das Fehlen eines Neuaufbau des Gefüges zeigt, dass die Zug-Druck-Beanspruchung, welche das Material erheblich verfestigt, das Rekristallisationsvermögen nicht entsprechend gesteigert hat. Dies entspricht völlig früheren Versuchen an einem plastisch gebogenen und nur teilweise zurückgebogenen Aluminiumkristall. Obwohl durch die Rückbiegung weitere mechanische Verfestigung entstand blieb die Rekristallisation auf den gebogenen Teil, in welchem erhebliche Orientierungsänderungen vorliegen, beschränkt [9].

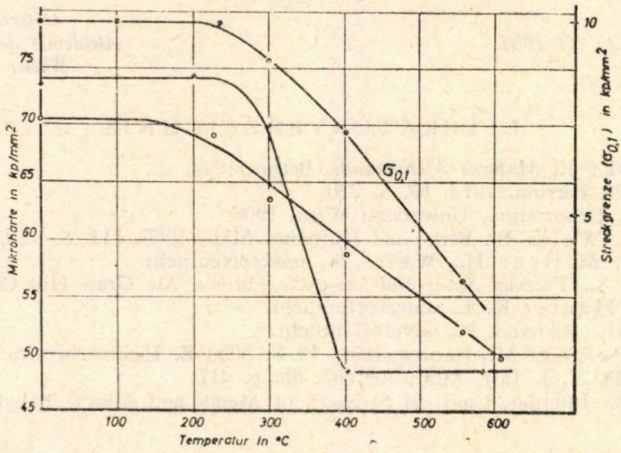


Abb. 6. — Rückbildung der durch Beschallung bewirkten Streckgrenzenänderung durch Glühbehandlung (10 Min.) [7]; • — • beschallt bis zu maximaler Verfestigung; Streckgrenze, o — o beschallt bis zu maximaler Verfestigung; Mikrohärte, * — * beschallt bis zum Bruch; Mikrohärte.

Auf das Verhalten von Proben, die bis zum Bruch beschallt worden waren, bezieht sich Abb. 8. Sie zeigt, dass nun nach der Beschallung die letzten Debye-Scherrer-Ringe völlig ausgeschmiert sind und dass durch die anschliessende Glühbehandlung Rekristallisation erfolgt ist. In Übereinstimmung damit fällt nun auch die Mikrohärte der beschallten und angelassenen Proben in schmalem Temperaturbereich schroff ab (vgl. Abb. 6). Völlig analoge Ergebnisse zu diesen mit Ultraschallfrequenzen gewonnenen, wurden schon von längerer Zeit in Wechselbeanspruchungsversuchen mit niedrigen Frequenzen erhalten [10]. Dort ergab sich, dass bei Kupferproben, die mit geringen Wechselspannungen bis zum Bruch beansprucht waren keine Rekristallisation bei anschliessender Glühbehandlung auftrat, wohl aber bei Proben, die hohen Wechselspannungen bis zum Bruch ausgesetzt waren.

Die eingangs erwähnte geringe Bedeutung der Ultraschallfrequenz für die Beeinflussung der Festigkeitseigenschaften metallischer Proben dürfte

so eine Extrapolation bis zu den niedrigen Frequenzen der technologischen Ermüdungsmaschinen erlauben. Ultraschallbehandlung und Ermüdungsversuche dürften weitgehende Parallelen aufweisen. Eine Stütze dieser Behauptung wurde in elektronen-mikroskopischen Untersuchungen gefunden, welche zeigen, dass die Versetzungsstrukturen in beiden Fällen mit steigender Beanspruchung vielle Analogien zeigen: Übergang von regelloser Verteilung der Versetzungen zu Anhäufungen in einer sogenannten *patches structure* und bei weiterer Steigerung der Beanspruchung zu einer Art Zellenstruktur [7], [11]. Darauf kann aber hier nicht mehr eingegangen werden.

Eingegangen am 23 XI 1967

Österreichischen Akademie der Wissenschaften, Wien, Österreich

LITERATURVERZEICHNIS

1. Czochralski J., *Moderne Metallkunde.* Berlin, 1924.
2. Goerens P., Ferrum, 1913, **10**, S. 226.
3. Pinger H., Dissertation, Universität Wien, 1966.
4. Kralik G., Weiss B., Berg- und Hüttenm. MH., 1966, **111**, S. 123.
5. Kralik G., Müllner H., Weiss B., unveröffentlicht.
6. Manson S. S., *Thermal Stress and low-cycle Fatigue.* Mc Graw Hill Co, 1966.
7. Weiss B., Maurer K. L., unveröffentlicht.
8. Müllner H., Bajons P., unveröffentlicht.
9. Beck P., Polanyi M., Naturw, 1931, **19**, S. 505; Z. Elektrochemie, 1931, **37**, S. 521.
10. Kemsley D. S., J. Inst. Met., 1956/57, **85**, p. 417.
11. Schmid E., Internat. Conf. of Strength of Metals and Alloys, Tokyo, 1967.

ÎNTĂRIREA PRIN ULTRASUNETE ŞI REVENIREA TERMICĂ

(Rezumat)

Se expun unele date referitoare la întărirea metalelor prin tratarea lor cu ultrasunete, precum şi metoda de revenire prin restabilire şi recristalizare.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Diagrama de recristalizare a zincului [1].

Fig. 2. — Cristal de Cd recristalizat. Formarea stratificării în secţiunea de trecere între regiunea extinsă şi cea neextinsă.

Fig. 3. — Cristal de Cd. Recristalizare în lamele gemene.

Fig. 4. — Modificarea durităţii şi ductilităţii fierului lichid întărit (0,08% C) cu creşterea temperaturii de topire (durata de topire 25 min) [2].

Fig. 5. — Modificarea limitei de ductibilitate a sîrmelor de Cu prin tratare cu ultrasunete, în funcţie de amplitudinea presiunii [4].

Fig. 6. — Revenirea modificării limitei de ductibilitate obţinută în urma tratării cu ultrasunete şi aducere la incadescenţă (10 min) [7]; • —— • tratat cu ultrasunete pînă la întărirea maximă; limita de ductibilitate, o —— o tratat cu ultrasunete pînă la întărirea maximă; microduritate, * —— * tratat cu ultrasunete pînă la rupere; microduritate.

Fig. 7. — Întărirea sîrmelor de Cu, tratate cu ultrasunete pînă la limita maximă a ductibilităţii [8]: a) stare iniţială moale, b) tratat cu ultrasunete, c) tratat cu ultrasunete şi aducere la incandescenţă 10 min, 500°C.

Fig. 8. — Întărirea sîrmelor de Cu, tratate cu ultrasunete pînă la rupere [8]; a) tratat cu ultrasunete; b) tratat cu ultrasunete şi aducere la incandescenţă 10 min, 500°C.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

УДК 530.145.61

ДВУХКОМПОНЕНТНАЯ МОДЕЛЬ ТОМАСА-ФЕРМИ

В. Д. ГЕРШУН и С. С. САННИКОВ

1. В этом сообщении мы обобщим известную статистическую модель атома [1] на случай, когда к атому добавлено большое число позитронов[1]). Поэтому, наряду с электронной жидкостью (обычная модель Томаса-Ферми) мы рассматриваем также и позитронную жидкость (двухкомпонентная модель Томаса-Ферми[2])). В такой системе, очевидно, будут идти процессы аннигиляции и регенерации электрон-позитронных пар. Чтобы ее можно было рассматривать как некоторую (метастабильную) систему, необходимо выполнение условия

$$\rho\sigma v \ll \sqrt{\frac{4\pi e^2 \rho}{m}}, \tag{1}$$

где: ρ — плотность электронов (или позитронов), v — их скорость, σ — сечение аннигиляции. Правая часть (1) представляет собой плазменную частоту. Для реальных плотностей (вплоть до 10^{19}) условие (1) заведомо выполняется ($\sigma v \simeq 10^{-10}$ [4]).

Здесь эту модель мы рассмотрим применительно к атому (п. **2**) и к электрон-позитронной плазме (п. **3**).

2. Рассмотрим атом с большим Z, в оболочке которого находится большое число электронов и позитронов. Полное число электронов минус число позитронов (ρ_-, ρ_+ — соответствующие плотности)

---

[1]) Простейшие атомные системы, состоящие из электронов и одного позитрона, экспериментально и теоретически изучались в [2], [3]. Рассматриваемая нами атомная система (как и электрон-позитронная плазма, см. ниже) могут найти применение в связи с астрофизическими исследованиями.

[2]) Данное рассмотрение может быть проведено и в том случае, когда вторая компонента образована не позитронами, а какими-либо другими частицами, положительно или отрицательно заряженными. В этом случае нужно потребовать, чтобы числа этих частиц N_1 и N_2 сохранялись в отдельности (см. ниже).

(2) $$\int(\rho_- - \rho_+)\,d\tau = N_- - N_+$$

есть некоторая фиксированная величина. В отдельности числа N_- и N_+ не сохраняются, поскольку имеют место процессы аннигиляции и регенерации пар.

В нулевом приближении полная энергия E такой системы записывается в виде [3])

(3) $$E = T_{e^-} + T_{e^+} + U_{k^-} + U_{k^+} + U_{e^-e^-} + U_{e^+e^+} + U_{e^-e^+},$$

где $T_{e\mp} = \int \chi_k \rho_{\mp}^{5/3}\,d\tau$, $\left(\chi_k = \frac{3}{10}(3\pi^2)^{2/3}e^2a_0\right)$ — кинетическая энергия электронов и позитронов [5], $U_{k\mp} = \mp e\int V_k \rho_{\mp}\,d\tau$, $(V_k = Ze/r)$ — потенциальная энергия взаимодействия электронов и позитронов с ядром, $U_{e\mp e\mp} = \frac{e^2}{2}\int \frac{\rho_{\mp}(r)\,\rho_{\mp}(r')}{|r-r'|}\,d\tau\,d\tau'$ — энергия взаимодействия электронов с электронами и позитронов с позитронами, а $U_{e^-e^+} = -e^2\int \frac{\rho_-(r)\,\rho_+(r')}{|r-r'|}\,d\tau\,d\tau'$ — энергия взаимодействия электронов с позитронами. Следовательно, мы можем считать, что электроны и позитроны находятся в некотором самосогласованном потенциале

(4) $$V(r) = V_k(r) + e\int \frac{\rho_-(r') - \rho_+(r')}{|r-r'|}\,d\tau'.$$

Вариационный принцип нашей задачи при условии (2) записывается в виде

(5) $$\delta[E + V_0 e(N_- - N_+)] = 0,$$

где варьирование производится независимо по ρ_- и ρ_+, $V_0 e$ — множитель Лагранжа. Из (5) получаем следующие соотношения

(6) $$\rho_- = j(V - V_0)^{3/2}, \quad \rho_+ = j(V_0 - V)^{3/2},$$

где $j = \left(\frac{3e}{5\chi_k}\right)^{3/2}$.

Напишем теперь уравнение Пуассона для самосогласованного потенциала $V(r)$, создаваемого плотностью $\rho_- - \rho_+$

---

[3]) Эту модель можно уточнить, если включить в полную энергию системы обменное взаимодействие [5] и члены, в явном виде описывающие аннигиляцию и регенерацию. Но даже в нулевом приближении (3) при дополнительном условии (2), косвенно учитывающем процессы аннигиляции и регенерации, мы получаем все характерные черты рассматриваемой модели (см. ниже).

$$\Delta(V - V_0) = 4\pi e(\rho_- - \rho_+), \tag{7}$$

или, используя (6),

$$\Delta(V - V_0) = 4\pi je(1 \pm \mathrm{i})(V - V_0)^{3/2}, \quad \mathrm{i} = \sqrt{-1}. \tag{8}$$

Граничным условием для $V(r)$ при $r \to 0$ является $[r(V - V_0)]_{r=0} = Ze$. V_0 находится из условия $\rho_-(r_0) - \rho_+(r_0) = 0$, где $r = r_0$ — граница атома, и равно $V_0 = e(Z - N_- + N_+)/r_0$ (если атом нейтральный, то есть $Z = N_- - N_+$, или ион не имеет границы $r_0 = \infty$, то $V_0 = 0$).

Нас интересует только центрально симметричное решение уравнения (8) (основное состояние атома или иона). Такое решение удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2}{dr^2}[r(V - V_0)] = 4\pi je\frac{1 \pm \mathrm{i}}{\sqrt{r}}[r(V - V_0)]^{3/2}. \tag{9}$$

В области $r \ll j^{-2/3}Z^{-1/3}e^{-1}$ решение уравнения (9) записывается в виде

$$V - V_0 = \frac{Ze}{r} + \frac{16}{3}\pi je(Ze)^{3/2}r^{1/2} + \ldots \pm$$
$$\pm \mathrm{i}\left[\frac{16}{3}\pi je(Ze)^{3/2}r^{1/2} + \frac{32}{3}\pi^2 j^2 e^2 (Ze)^2 r^2 + \ldots\right], \tag{10}$$

а при $r \gg j^{-2/3}Z^{-1/3}e^{-1}$ имеет вид

$$V - V_0 = \frac{72\sin(7\pi\lambda/6)}{r^{3+\lambda}(4\pi je)^{2+2\lambda/3}(Ze)^{1+\lambda/3}2^{\lambda/3}} + \ldots -$$
$$- \mathrm{i}\left\{\frac{72}{r^3(4\pi je)^2 Ze}\left[1 + \frac{\cos(7\pi\lambda/6)}{r^\lambda(4\pi je)^{2\lambda/3}(Ze)^{\lambda/3}2^{\lambda/3}}\right]\right\}, \tag{11}$$

где $\lambda = (\sqrt{73} - 7)/2 = 0{,}772$ [5].

Как и следовало ожидать, решение уравнения (9) является комплексным. Такое решение мы интерпретируем в духе оптической модели. Именно, $\mathcal{R}eV(r)$ дает распределение потенциала ($\mathcal{R}e\rho_-$ и $\mathcal{R}e\rho_+$ дают распределение электронной и позитронной плотности), а $\mathcal{I}mV(r)$ описывает процессы затухания (в данном случае аннигиляцию и регенерацию электрон-позитронных пар). Поскольку ρ_- и ρ_+ — комплексны, энергия системы E (3) также величина комплексная. $\mathcal{R}eE$ дает энергию системы, а $\mathcal{I}mE$ связана со временем жизни рассматриваемой системы. Для $\mathcal{I}mE$ имеем

$$\mathcal{I}mE=\int\Big\{\chi_k(\mathcal{R}e\,\rho_-)^2+(\mathcal{I}m\,\rho_-)^2]^{5/6}\sin\left(\frac{5}{3}\operatorname{arctg}\frac{\mathcal{I}m\,\rho_-}{\mathcal{R}e\,\rho_-}\right)+$$

$$+\chi_k\,[(\mathcal{R}e\rho_+)^2+(\mathcal{I}m\,\rho_+)^2]^{5/6}\sin\left(\frac{5}{3}\operatorname{arctg}\frac{\mathcal{I}m\,\rho_+}{\mathcal{R}e\,\rho_+}\right)-$$

$$-eV_k(\mathcal{I}m\,\rho_--\mathcal{I}m\,\rho_+)\Big\}\,dr+ \tag{12}$$

$$+e^2\iint\Big\{\Big[\frac{\mathcal{R}e\rho_-(r)\,\mathcal{I}m\,\rho_-(r')+\mathcal{R}e\rho_+(r)\,\mathcal{I}m\,\rho_+(r')}{|r-r'|}\Big]-$$

$$-\Big[\frac{\mathcal{R}e\rho_-(r)\,\mathcal{I}m\,\rho_+(r')-\mathcal{R}e_+(r)\,\mathcal{I}m\,\rho_-(r')}{|r-r'|}\Big]\Big\}\,dr\,dr'.$$

При больших Z грубая оценка интегралов в (12) дает для $\Gamma/2=\mathcal{I}mE$

$$\frac{\Gamma}{2}\simeq-4{,}8\frac{e^2}{a_0}Z^{7/3}, \tag{13}$$

где a_0 — радиус первой боровской орбиты.

3. Рассмотрим теперь электрон-позитронную плазму. В этой системе отсутствует кулоновский центр (ядро), и поэтому граничные условия в начале системы отсчета при $r=0$ должны быть другими[4]). Естественно принять следующее граничное условие $(V-V_0)_{r=0}=A$, где A — некоторая постоянная. Уравнение для самосогласованного потенциала $V-V_0$ остается прежним (8). Центрально симметричное решение удовлетворяет уравнению (9) и при выбранных граничных условиях в области малых $r\ll(je)^{-1/2}A^{-1/4}$ записывается в виде

$$V-V_0=\mathcal{R}eA+\frac{2}{3}\pi je\,[(\mathcal{R}eA)^2+(\mathcal{I}mA)^2]^{3/4}\left[\cos\left(\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{\mathcal{I}mA}{\mathcal{R}eA}\right)\mp\right.$$

$$\left.\mp\sin\left(\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{\mathcal{I}mA}{\mathcal{R}eA}\right)\right]r^2\mp\frac{4}{5}\pi^2j^2e^2\,\mathcal{R}eA\,\mathcal{I}mA\,r^4+\ldots+ \tag{14}$$

$$+i\Big\{\mathcal{I}mA+\frac{2}{3}\pi je\,[(\mathcal{R}eA)^2+(\mathcal{I}mA)^2]^{3/4}\left[\sin\left(\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{\mathcal{I}mA}{\mathcal{R}eA}\right)\pm\right.$$

$$\left.\pm\cos\left(\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{\mathcal{I}mA}{\mathcal{R}eA}\right)\right]r^2\pm\frac{2}{5}\pi^2j^2e^2\,[(\mathcal{R}eA)^2-(\mathcal{I}mA)^2]\,r^4+\ldots\Big\}.$$

[4]) Мы считаем электрон-позитронную плазму ограниченной; начало системы отсчета находится в центре масс системы. В силу изотропности основного состояния рассматриваемой системы самосогласованный потенциал обладает центральной симметрией. Только такое решение мы и рассматриваем ниже.

В области больших $r \gg (je)^{-2/3}$ решение представляется формулой (11), в которой нужно положить $Ze = 1$ [5]). Как и прежде потенциал $V - V_0$, плотности ρ_-, ρ_+ и энергия системы E являются величинами комплексными. Теперь выражение для $\Im m E$ представляется формулой (12), в которой нужно положить $V_k = 0$. Грубая оценка этого интеграла приводит к следующему значению

$$\frac{\Gamma}{2} \simeq -\frac{1{,}7.10^2}{e^{1/3} a_0}. \tag{15}$$

В заключение выражаем благодарность В. И. Герасименко за обсуждение рассмотренного вопроса.

Поступила 27 V 1967 г.

Физико-технический институт АН УССР, Харьков, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., *Квантовая механика.* Физматгиз, М., 1963.
2. Bell R. E., Jorgensen M. H., Can. J. Phys, 1960, **38**, p. 652.
3. Динь Ван Хоанг, ЖЭТФ, 1965, **49**, стр. 630.
4. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б., *Квантовая электродинамика.* Физматгиз, М., 1959.
5. Гомбаш П., *Проблема многих частиц в квантовой механике.* ИЛ, М., 1953, (пер. с англ.).

MODELUL CU DOUĂ COMPONENTE AL LUI THOMAS-FERMI

(Rezumat)

Se extinde la cazul unui sistem cu două componente (electron-fluid de pozitroni) modelul statistic al lui Thomas-Fermi.

[5]) Из условия сшивания решений при больших и малых r получаем следующее выражение для $A \simeq (je)^{2/3}$.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

C. D. 537.217 ; 530.12 ; 531.51

NOTE SUR L'EXPRESSION DEMI-RELATIVISTE GÉNÉRALISÉE DE LA FORCE D'INTERACTION ENTRE DEUX PARTICULES PONCTUELLES

PAR

J. GOTTLIEB et E. TEREJA

1. Une série d'applications de la théorie de la relativité généralisée est basée sur la métrique de Vescan [7] :

$$ds^2 = c^2(1 - 2U)\,dt^2 - (1 - 2U)^{-1}\,dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2), \tag{1}$$

où U est l'énergie potentielle du corpuscule rapportée à l'unité de l'énergie propre. Une synthèse et une bibliographie détaillée de ces ouvrages se trouve en [8].

Beaucoup de ces applications se basent sur le calcul demi-relativiste généralisé de la force qui, dans le cas où la trajectoire du mouvement est contenue dans un plan, a comme composantes

$$\begin{cases} f_r^{(1)} = m[-2r\dot{\theta}^2\,U + c^2(1 - 2U)\,U' - 3\dot{r}^2(1 - 2U)^{-1}U'], \\ f_\theta^{(1)} = m[-2r\dot{r}\dot{\theta}(1 - 2U)^{-1}U'], \text{ où } U' = dU(r)/dr. \end{cases} \tag{2}$$

On appelle cette approximation comme demi-relativiste généralisée, parce que les composantes de la force ont été empruntées de la mécanique classique, tandis que les expressions $\ddot{r}$, $\dot{\theta}^2$ et $r^2\ddot{\theta}$ sont calculées à l'aide de l'équation des géodésiques, qui s'obtiennent de la métrique (1).

Récemment on a commencé [3], [1] l'étude de la métrique

$$ds^2 = c^2(1 - U)^2\,dt^2 - (1 - U)^{-2}\,dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2), \tag{3}$$

qui se réduit à (1), si l'on néglige $U^2 \ll 1$. Dans le cas du potentiel newtonien, (1) constitue exactement la métrique de Schwarzschild et (3) constitue une généralisation de celle-ci. La métrique (3) offre des possibilités de calcul pour les vérifications classiques de la théorie de la relativité générale [4]. Ce fait ne résulte pas d'une manière banale pour $(1-U)^2 \approx 1-2U$, car au déplacement du périhélium, dans le cas de la métrique (3), il est nécesaire d'effectuer une correction angulaire, qui n'en est plus nécessaire pour la métrique (1). La supériorité de la métrique (3) par rapport à (1) réside dans la possibilité offerte par celle-ci pour le calcul des grandeurs du champ [3], [1], pendant que (1) conduit seulement aux effets cinématiques et dynamiques.

2. Dans cette Note nous nous sommes proposés d'évaluer les composantes de la force dans le cas de la métrique (3), pour apprécier si elle permet aussi des applications tout comme la métrique (1) et d'évaluer, en dehors de la première approximation (liée de ces applications), et la seconde approximation, pour en étudier la signification.

Utilisant le même procédé de calcul [5], [6], [2] qui a été employé pour obtenir les relations (2) dès (1), dans le cas de la métrique (3) nous aurons

$$(4)\qquad \begin{cases} f_r^{(2)} = m\,[r\dot{\theta}^2\,U\,(U-2) + c^2\,(1-U)^3\,U' - 3\dot{r}^2\,(1-U)^{-1}\,U'], \\ f_\theta^{(2)} = m\,[-2r\dot{r}\dot{\theta}\,(1-U)^{-1}\,U']. \end{cases}$$

Dans l'expression concrète de U figurera une constante multiplicative caractéristique pour le champ accélérateur et d'après laquelle nous pourrons dévélopper en série les expressions de (2) et (4). Ainsi

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{m} f_r^{(1)} = A^{(1)} + B^{(1)} + \ldots = [-2r\dot{\theta}^2\,U + (c^2 - 3\dot{r}^2)\,U'] + \\ \qquad\qquad + [-(c^2 + 3\dot{r}^2)\,(U^2)'] + \ldots, \\ \dfrac{1}{m} f_\theta^{(1)} = C^{(1)} + D^{(1)} + \ldots = [-2r\dot{r}\dot{\theta}U'] + [-2r\dot{r}\dot{\theta}\,(U^2)'] + \ldots \end{cases}$$

et

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{m} f_r^{(2)} = A^{(2)} + B^{(2)} + \ldots = [-2r\dot{\theta}^2\,U + (c^2 - 3\dot{r}^2)\,U'] + \\ \qquad\qquad + \left[r\dot{\theta}^2\,U^2 - \dfrac{3}{2}[c^2 + \dot{r}^2)\,(U^2)'\right] + \ldots, \\ \dfrac{1}{m} f_\theta^{(2)} = C^{(2)} + D^{(2)} + \ldots = [-2r\dot{r}\dot{\theta}U'] + [-r\dot{r}\dot{\theta}\,(U^2)'] + \ldots \end{cases}$$

Dans les crochets nous avons groupé les termes du même ordre d'approximation obtenant par cette voie les expressions $A^{(1)}$, $B^{(1)}$ etc.

Si l'on compare les expressions (5) et (6) on peut énoncer les conclusions suivantes :

a) Dans la première approximation les forces coïncident, $A^{(1)} = A^{(2)}$ et $C^{(1)} = C^{(2)}$, ce que signifie que la métrique (3) offre les mêmes applications que la métrique (1). Ce fait constitue un argument supplémentaire en faveur de la métrique (3).

b) Lorsque $U(r)$ est une fonction décroissante, $B^{(1)}$ et $B^{(2)}$ sont positives et font apparaître une terme répulsif dans l'expréssion de la force, sans rapport à l'action attractive où répulsive du champ U envers une charge. Ainsi ce sont des forces independentes de charge qui font leur apparition, qui, dans le cas où l'attraction tout comme la répulsion sont possibles (interaction électrique), ont comme conséquence l'apparition d'une asymétrie dans ces deux interactions. Jusqu'à présent l'expérience n'a pas pu mettre en évidence la présence où l'absence de cette asymétrie.

c) Dans le cas où le potentiel coulombien a comme expréssion $-U = q_1 q_2/mc^2 r$, où la charge q_2 avec la masse m se déplace dans le champ de la charge q_1, les expressions des relations (5) et (6) deviennent

$$
(7)\quad
\begin{cases}
mA^{(1)} = mA^{(2)} = \dfrac{q_1 q_2}{r^2}\left(1 + \dfrac{2v^2}{c^2} - \dfrac{5\dot{r}^2}{c^2}\right), \\
mB^{(1)} = \dfrac{q_1^2 q_2^2}{mc^2}\cdot\dfrac{1}{r^3}\left(1 + \dfrac{3\dot{r}^2}{c^2}\right), \quad mB^{(2)} = \dfrac{q_1^2 q_2^2}{mc^2}\cdot\dfrac{1}{r^3}\left(3 + \dfrac{v^2}{c^2} + \dfrac{2\dot{r}^2}{c^2}\right), \\
mC^{(1)} = mC^{(2)} = -\dfrac{q_1 q_2}{r^3}\cdot\dfrac{2r\dot{r}\dot{\theta}}{c^2}, \\
mD^{(1)} = \dfrac{q_1^2 q_2^2}{mc^2}\cdot\dfrac{1}{r^3}\cdot\dfrac{4r\dot{r}\dot{\theta}}{c^2}, \quad mD^{(2)} = \dfrac{q_1^2 q_2^2}{mc^2}\cdot\dfrac{1}{r^3}\cdot\dfrac{2r\dot{r}\dot{\theta}}{c^2},
\end{cases}
$$

où $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$. Il est évident que les rapports B/A et D/C ont le même ordre de grandeur que $q_1 q_2/mc^2 r$. Dans le cas de deux charges élémentaires ($q_1 = q_2 = e$) il en résulte $e^2/mc^2 r \simeq 3.10^{-13}/r$ (CGS). Ainsi, même aux distances atomiques, le rapport, entre la seconde approximation de la force et la première reste inférieur à 10^{-5}. En échange, à l'échelle des dimensions des particules élémentaires ($r = 10^{-13}$ cm) les deux approximations auront le même ordre de grandeur. Par conséquent, lors d'une collision des particules électrisées, la répulsion (dans le cas où les deux charges ont le même signe) sera beaucoup plus grande que l'attraction (qui a lieu dans les cas où les deux charges ont signes contraires).

En ce qui concerne le choix entre ces deux métriques, c'est la vérification expérimentale de l'approximation de second ordre de la force qui en decidera.

Reçue le 28 XII 1965

Université „Al. I. Cuza", Jassy,
Chaire de Physique Théorique,

BIBLIOGRAPHIE

1. Gottlieb I., Mociuţchi C., *Contribuţii privind interpretarea şi generalizarea principiului echivalenţei locale al lui Einstein.* An. şt. Univ. „Al. I. Cuza", Iaşi, s. I, 1964, **X**, p. 7.
2. Mihul El., *O nouă formulă pentru interacţiunea a două particule in mişcare.* An. şt. Univ. „Al. I. Cuza", Iaşi, s. I, 1955, **I**, *1—2*, p. 200.
3. Tomozei C., *Studiul relativist al cîmpului gravific rezultînd dintr-o metrică bazată pe o nouă exprimare a principiului echivalenţei.* An. şt. Univ. „Al. I. Cuza", Iaşi s. I, 1962, **VIII**, p. 131.
4 — *Studiul verificărilor experimentale ale teoriei relativităţii generale cu ajutorul unei metrici noi.* St. şi cerc. şt., Fiz. şi şt. tehn., Acad. R.P.R., filiala Iaşi, 1961, **XII**, *2*, p. 283.

5. Vescan T. T., *Asupra posibilității de aplicare a teoriei clasice a electricității și a teoriei relativității generalizate la studiul acțiunilor elementare.* St. și cerc. de fiz., 1951, **II**, *3–4*, p. 299.
6. — *Legea acțiunii electrodinamice a lui Ampère în lumina teoriei relativității generalizate.* St. și cerc. de fiz., 1954, **V**, p. 249.
7. — *Sur la généralisation du problème de Schwarzschild.* C. R., Ac. Sci., Paris, 1957, **245**, p. 2014.
8. — *Some real Possibilities to extend Classic and Relativistic Considerations upon the Study of Different Processes of Microcosm and constituting a Plausible Fundament for Various Unified Theories (a Synthetic View).* An. șt. Univ. „Al. I. Cuza", s. I, 1960, **VI**, *1*, p. 101.

NOTĂ ASUPRA EXPRESIEI SEMI-RELATIVIST GENERALIZATE A FORȚEI DE INTERACȚIUNE DINTRE DOUĂ PARTICULE PUNCTIFORME

(Rezumat)

Se explicitează aproximațiile semi-relativist generalizate de ordinul întîi și doi ale forțelor (v. (5) și (6)), ce rezultă din metricile (1), respectiv (3). Prima aproximație a forței, exprimată în (5), a condus la numeroase aplicații [8].

Compararea relațiilor (5) și (6) a permis autorilor să tragă următoarele concluzii :

a) În prima aproximație, forțele rezultînd din (1) și (3) coincid, deci metrica (3), propusă de unul din autori [1], conduce și ea la aceleași aplicații ca și metrica (1).

b) Dacă $U(r)$ este o funcție descrescătoare, aproximațiile de ordinul doi conduc la forțe repulsive. Astfel, în cazul cîmpurilor în care atît atracția cît și repulsia sînt posibile, cele două interacțiuni prezintă o asimetrie.

c) În cazul potențialului coulombian, ordinele de mărime ale aproximațiilor de ordinul întîi și doi vor fi aceleași la nivelul dimensiunilor particulelor elementare.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2. 1968

D. C. 538.4 ; 533.9

THE PROPAGATION OF THE ALFVÉN WAVES IN NONHOMOGENEOUS SYSTEMS IN THE RELATIVISTIC MAGNETOHYDRODYNAMICS

BY

R. V. DEUTSCH and L. BĂLAN

Paper presented at the Scientific Session of the Polytechnic Institute of Jassy, September the 28—30, 1967

In a series of recent works there was studied the propagation of the magnetohydrodynamic waves in nonhomogeneous systems with different properties of symmetry, as in plane systems [1]...[3], in systems with axial symmetry [4], and in systems with helicoidal symmetry [5]. We resume here the same problem for the Alfvén waves in the case of the relativistic magnetohydrodynamics, pointing out the difference in comparison with the nonrelativistic case.

From the equations of motion

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = 0, \tag{1}$$

Maxwell's equations

$$\frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k} = \frac{4\pi}{c} j_i, \tag{3}$$

and the condition that the plasma should be ideal

$$F_{li}\, u_i = 0, \tag{4}$$

the system of equations necessary for the study of propagation of the Alfvén type perturbations results. We used here the usual notations of the theory of relativity. The energy-impulse tensor is compound of two components

$$T_{ik} = T^{em}_{ik} + T^{h}_{ik}, \tag{5}$$

the electromagnetic one

$$T_{ik}^{em} = \frac{1}{4\pi}\left(F_{il}F_{kl} - \frac{1}{4}F_{lm}^2\,\delta_{ik}\right), \tag{6}$$

and the hydrodynamic one

$$T_{ik}^{h} = wu_i u_k + p\delta_{ik}, \tag{7}$$

where p is the pressure of plasma and w the entalpy density.

In case of a plane system in a stationary equilibrium if the axis z is considered parallel to the translation along which the system is invariable, for the small perturbations, that are propagated perpendicularly on the axis Oz, we get form the equations (1)...(7) the following system

$$e_x = \frac{1}{c}v_z B_y^0, \tag{8}$$

$$e_y = -\frac{1}{c}v_z B_x^0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial e_y}{\partial x} - \frac{\partial e_x}{\partial y} = -\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial b_z}{\partial t}, \tag{10}$$

$$\frac{1}{4\pi}\left(B_x^0\frac{\partial}{\partial x} + B_y^0\frac{\partial}{\partial y}\right)b_z + \frac{1}{4\pi c}\left(B_x^0\frac{\partial e_y}{\partial t} - B_y^0\frac{\partial e_x}{\partial t}\right) - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial}{\partial t}(w v_z) = 0, \tag{11}$$

$$\frac{\partial B_x^0}{\partial x} + \frac{\partial B_y^0}{\partial y} = 0. \tag{12}$$

B_x^0, B_y^0 are the components of induction of the magnetic field which is not perturbated, b_z the small perturbation of the induction, and e_x and e_y the perturbations of the intensity of the electric field.

The system (8)...(12) forms a complete subsystem of all the equations resulting for the small perturbations from (1)...(7). It corresponds to the Alfvén type waves and for b_z the equations are reduced to

$$(\vec{B}^0\nabla)^2 b_z = \Lambda\frac{\partial^2 b_z}{\partial t^2}, \tag{13}$$

where

$$\Lambda = \frac{4\pi w}{c^2}\left(1 + \frac{U^2}{c^2}\right). \tag{14}$$

The Alfvén velocity (U) is expressed as follows:

$$U = \frac{Bc}{\sqrt{4\pi w}}. \tag{15}$$

From the differential equation (13) it results in a similar way as in the nonrelativistic theory [1]:

1. The Alfvén type perturbations of the magnetic field and of the velocity are parallel to the axis against which the translation along which the system is invariant.

2. These perturbations are propagated along the force lines.

3. Their group velocity is

$$V = \frac{U}{\sqrt{1 + U^2/c^2}}, \tag{16}$$

a value which for $U \ll c$ passes into the well-known expression from the nonrelativistic theory [5]:

$$V = \frac{B}{\sqrt{4\pi\varrho}}. \tag{17}$$

It results in a completely analogous way for the asimuthal perturbations in a system with an axial symmetry from the basic equations of the relativistic magnetohydrodynamics (1)...(7):

$$\left(B_z^0 \frac{\partial}{\partial z} + B_r^0 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} B_r^0\right)\left(B_z^0 \frac{\partial}{\partial z} + B_r^0 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} B_r^0\right) b_\varphi = \Lambda \frac{\partial^2 b_\varphi}{\partial t}. \tag{18}$$

The same conclusions result as in the cases 1...3 from this equations for the Alfvén waves propagated im mediums with an axial symmetry.

If the magnetohydrodynamic system has an helicoidal symmetry the Alfvén type perturbation could be found only locally. Neither in the case of the relativistic magnetohydrodynamics could be constructed from the system of equations for the small perturbations a complete subsystem for the systems with an helicoidal symmetry, and in an analogous way as in the nonrelativistic case it could be demonstrated that global Alfvén waves could not appear. If in a certain point the perturbation is of Alfvén type, deformations of the magnetic surfaces are produced in the adjoining points, it is also perturbations of density. For the general condition for the existence of the Alfvén waves in nonhomogeneous systemes we obtain the condition formulated in [6].

Department of Physics,
Polytechnic Institute, Jassy,
and
Pedagogical Institute, Baia Mare

REFERENCES

1. Deutsch R. V., Rev. Roum. Phys., (under print).
2. Petruş O., Deutsch R. V., St. şi cerc. fiz., (under print).
3. Deutsch R. V., Fornwald F., Rev. Roum. Phys., (under print).

4. Deutsch R. V., Ciubotariu C., St. şi cerc. fiz., (under print).
5. Deutsch R. V., Zet Gh., St. şi cerc. fiz., (under print).
6. Deutsch R. V., *Unde magnetohidrodinamice*. Ed Acad. R. S. R., 1968, Buc., (under print).

STUDIUL PROPAGĂRII UNDELOR ALFVÉN ÎN SISTEME NEOMOGENE ÎN CADRUL MAGNETOHIDRODINAMICII RELATIVISTE

(Rezumat)

Pornind de la ecuaţiile de bază ale magnetohidrodinamicii relativiste se demonstrează că în sistemele plane şi în cele cu simetrie axială poate exista o undă corespunzătoare oscilaţiei liniilor de forţă în interiorul suprafeţelor magnetice. Astfel de unde corespund propagării unor perturbaţii de-a lungul liniilor de forţă. S-a obţinut valoarea vitezei de grup a acestor unde în cadrul teoriei relativiste. În cazul sistemelor cu simetrie elicoidală nu pot apare oscilaţii de tip Alfvén globale ale mediului, din cauza variaţiei unghiului dintre suprafeţele generate de liniile de forţă ale cîmpului.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

C. Z. 535.321 ; 535.341

STUDIUL PROPRIETĂŢILOR OPTICE ALE STRATURILOR SUBŢIRI DE TELUR

DE

N. CALINICENCO, SOFIA MELINTE şi V. MIHU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 28-30 septembrie 1967

1. Introducere

Straturile subţiri, studiate în mod obişnuit, se împart în două grupe distincte ; prima categorie o formează straturile depuse pe suporturi amorfe, de obicei sticlă sau cuarţ. În acest caz nici una din direcţiile planului suportului nu este privilegiată în ceea ce priveşte orientarea cristalilor depuşi. Din a doua categorie fac parte straturile depuse pe un suport mono-cristalin şi care încearcă să producă un sistem bine ordonat, care să se apropie de un strat ideal, limitat de feţe plane şi paralele. Straturile metalice depuse pe sticlă sînt în general lacunare, pentru grosimi sub cîteva sute de angstromi.

Studiile întreprinse pe baza difracţiei electronice, difracţiei razelor X (de ex. [1]), arată că aceste straturi sînt alcătuite din granule de particule sferice sau elipsoidale, care constituie un dipol electrizat, pentru undele electromagnetice incidente. Pe această bază s-au determinat valorile factorilor de reflexie, transmisie şi diferenţa de fază.

Problema straturilor subţiri, deşi studiată în numeroase lucrări, nu este complet elucidată datorită structurii oarecum particulare a straturilor şi numărului mare de parametri de care depind proprietăţile optice, electrice şi fotoelectrice ale straturilor. Un rol deosebit în stabilirea acestor proprietăţi îl joacă natura suportului, temperatura lui, presiunea din incinta de depunere, gradul de puritate al substanţei depuse, viteza de vaporizare etc.

În literatura de specialitate se întîlnesc numeroase lucrări care studiază proprietăţile straturilor subţiri ale diferitelor metale sau ale compuşilor acestora, însă informaţiile referitoare la proprietăţile straturilor subţiri de Te, sînt foarte rare. Acest fapt ne-a determinat ca în lucrarea de faţă să ne ocupăm de problema depunerii unor astfel de straturi şi să le studiem pentru început din punct devedere optic.

2. Obţinerea straturilor subţiri de Te

Straturile subţiri de Te au fost obţinute cu ajutorul unei tehnici obişnuite [2], prin evaporare termică, sub un vid de ordinul 10^{-4} ... 10^{-5} torri, care se menţinea constant în tot timpul vaporizării. Cuptoraşul utilizat era constituit dintr-un fir de tungsten spiralat, în care s-a introdus un creuzet din cuarţ, construit în mod special, cu un diametru interior de 1 mm, în care se găsea substanţa utilizată. Telurul era folosit sub formă pulverizată. Creuzetul se încălzea încet, pentru a realiza o omogenizare a temperaturii substanţei, dar suficient de ridicată pentru a obţine vaporizarea telurului. În acest scop s-au utilizat curenţi de intensităţi relativ mici, 20 ... 25 A.

a) *Pregătirea suportului.* Deoarece suportul joacă un rol deosebit în ceea ce priveşte structura stratului, s-a acordat o atenţie deosebită pregătirii sale; s-au ales lamele de microscop cu dimensiunile $18 \times 18 \times 0{,}15$ mm, pe cît posibil cu feţele plane şi paralele. Suportul a fost curăţat chimic cu acid sulfuric şi bicromat de potasiu, apoi a fost imersat, mai mult timp, în apă distilată. De asemenea înainte de depunere suportul a fost degazat la o temperatură de 150° ... 200° C, timp de cîteva ore. Cunoscînd din literatura de specialitate [1], [2] importanţa condiţiilor de proiecţie în ceea ce priveşte structura straturilor subţiri, care exercită o influenţă sensibilă asupra proprietăţilor optice şi electrice, pentru a obţine rezultate reproductibile ne-am plasat pe cît posibil, în aceleaşi condiţii de lucru.

Din acelaşi motiv s-au efectuat depuneri simultane pe un număr de patru plăcuţe. În vederea obţinerii unei depuneri uniforme s-a ales distanţa între creuzet şi suport suficient de mare, circa 10 ... 15 cm. S-au efectuat un număr mare de depuneri, pe aproximativ 60 de plăcuţe. Dintre acestea s-au ales acelea care au furnizat rezultate reproductibile, adică valorile coeficienţilor de transmisie şi de absorbţie, care determinate după anumite intervale de timp, au rămas constante.

3. Determinarea constantelor optice: indicii de refracţie, factorii de transmisie şi de absorbţie

Indicele de refracţie n_2 al suportului s-a măsurat cu ajutorul unui refractometru universal tip Abbé. În ceea ce priveşte determinarea celorlalte constante optice, ne-am bazat pe teoria dată în [2].

Din teoria electromagnetică clasică se cunoaşte că o undă plană, monocromatică, este perfect definită prin lungimea de undă în vid, prin vectorul intensitate de cîmp electric **E** şi vectorul intensitate de cîmp magnetic **H**. Vectorii **E** şi **H** satisfac ecuaţiile lui Maxwell:

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}.$$

Într-o primă aproximaţie se admite că straturile sînt omogene, limitate de două feţe plane şi paralele şi sînt caracterizate printr-o grosime d — dis-

tanța ce separă cele două fețe, și printr-un indice de refracție n. Dacă straturile sînt anizotrope, vom avea doi indici de refracție: n_e — pentru raza extraordinară și n_0 — pentru raza ordinară. În cazul straturilor transparente absorbante, acești indici de refracție sînt complecși, de forma: $n = \nu - i\varkappa$, unde: ν — indicele de refracție, $\varkappa$ — indicele de extincție.

Raportul $K = \varkappa/\nu$ poartă denumirea de coeficient de extincție. Notînd cu R — factorul de reflexie al stratului față de aer, cu R' — factorul de reflexie al stratului față de suport, cu T — factorul de transmisie și scriind relațiile lor de calcul în cazul straturilor aproximativ groase, obținute de noi, neglijînd în același timp reflexiile multiple, deoarece straturile sînt suficient de absorbante, s-au putut determina constantele ν, $\varkappa$ și d.

Relațiile cu care se determină în acest caz constantele R, R' și T sînt:

$$(2) \qquad R = \left|\frac{n_0 - n}{n_0 + n}\right|^2 = \left|\frac{n_0 - \nu + i\varkappa}{n_0 + \nu - i\varkappa}\right|^2, \quad R' = \left|\frac{n_2 - n}{n_2 + n}\right|^2 = \left|\frac{n_2 - \nu + i\varkappa}{n_2 + \nu - i\varkappa}\right|^2,$$

$$T = (1 - R)(1 - R') \exp\left(-\frac{4\pi\varkappa d}{\lambda}\right).$$

Din sistemul (2) de trei ecuații cu trei necunoscute (ν, $\varkappa$ și n_2) se obțin imediat expresiile lui ν și $\varkappa$:

$$\nu = \frac{1}{2} \cdot \frac{n_2^2 - n_0^2}{n_2 B_2 - n_0 B_0}, \quad \varkappa^2 = 2n_0 B_0 \nu - (\nu^2 + n_0^2) = 2n_2 B_2 - (\nu^2 + n_0^2),$$

unde:

$$B_0 = \frac{1 + R}{1 - R}, \qquad B_2 = \frac{1 + R'}{1 - R'}.$$

Cunoscînd din literatură [3] valorile factorilor de reflexie pentru o anumită lungime de undă am putut determina volorile lui ν și $\varkappa$ și anume:

$$\nu = 0{,}55 \text{ și } \varkappa = 1{,}5,$$

valori găsite de altfel și de alți autori.

a) *Determinarea factorului de transmisie.* În literatura cercetată nu am găsit valori ale factorului de transmisie T — în cazul telurului probabil că sînt foarte puține — de aceea s-a măsurat experimental, pentru fiecare plăcuță, factorul T, pentru aceeași lungime de undă $\lambda = 700$ mμ, cu ajutorul unui microfotometru MF_2.

Din graficul din fig. 1 se constată că factorul de transmisie pentru o lungime de undă constantă, în cazul nostru $\lambda = 700$ mμ, depinde de grosimea stratului depus și anume, T are valoarea maximă, de 87,9%, pentru grosimea minimă de 59,2 mμ și scade continuu pînă la valoarea de 57,3% pentru o grosime triplă, de 185,7 mμ.

b) *Determinarea experimentală a factorului de absorbţie A.* Factorul de absorbţie A a fost măsurat cu ajutorul aceluiaşi microfotometru MF_2, folosit la determinarea factorului de transmisie T, pentru lungimea de undă $\lambda = 700$ mμ. Acest factor s-a determinat cu relaţia cunoscută:

$$I = I_0 e^{-Ad},$$

unde: I — intensitatea luminii absorbită de stratul de Te, I_0 — intensitatea luminii absorbită de sticlă, A — factorul de absorbţie, d — grosimea stratului de Te.

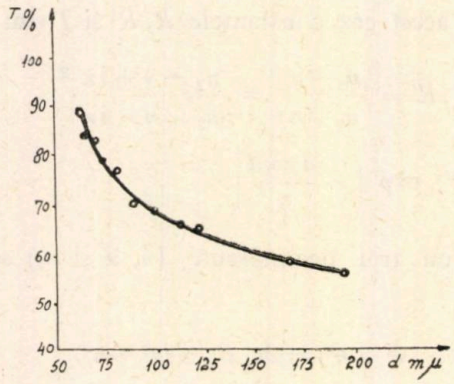


Fig. 1. — Variaţia coeficientului de transmisie $T(\%)$ cu grosimea, pentru $\lambda = 700$ mμ.

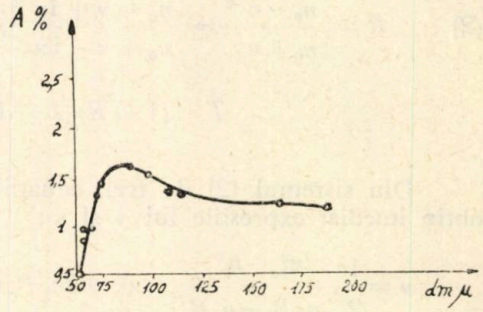


Fig. 2. — Variaţia coeficientului de absorbţie $A(\%)$ cu grosimea, pentru $\lambda = 700$ mμ.

Din graficul din fig. 2 se observă că factorul de absorbţie A creşte cu grosimea stratului depus, ajunge la o valoare maximă pentru o anumită grosime, apoi scade lent rămînînd constant pentru valori ce depăşesc grosimea de 180 mμ.

4. Discuţia şi interpretarea rezultatelor

Absenţa din literatură a datelor referitoare la comportarea factorilor de transmisie (T) şi absorbţie (A) a straturilor subţiri de telur, ne-a împiedicat să comparăm rezultatele obţinute cu alte rezultate experimentale; în schimb din comparaţia datelor experimentale obţinute cu cele teoretice se constată o concordanţă deplină. Din fig. 1 se observă că T are valoarea maximă de 87,9% pentru grosimea minimă de 59,2 mμ, iar pentru o valoare triplă a grosimii, adică 185,6 mμ, scade cu 30%. În timp ce T scade factorul de absorbţie creşte. Din fig. 2 rezultă că A are o valoare de 0,56% pentru grosimea minimă de 59,2 mμ, apoi creşte rapid, ajungînd la valoarea maximă de 1,52% pentru $d = 98$ mμ. Deci absorbţia maximă la Te, în straturi,

este în jurul grosimii de 100 mμ. Crescînd şi mai mult grosimea, A începe să scadă, probabil datorită creşterii rapide a factorului de reflexie R (pe care îl vom determina într-o lucrare viitoare). Pentru grosimi duble faţă de grosimea iniţială, adică pentru $d \geqslant 120$ mμ, A rămîne aproximativ constant. De asemenea se constată experimental că atunci cînd transmisia este maximă, absorbţia este minimă ($A = 0$).

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de fizică
şi
Universitatea, Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. Gandais M., Revue d'Optique, 1961, **40,** *6,* pp. 306-322.
2. Richard J., Roux D., Revue d'Optique, 1962, **41,** *9,* p. 469.
3. * * * *American Institute of Physics Handbook.* Section 6 — Optics.
4. Bousquet P., Delcourt Y., J. Physique et radium, 1957, **18,** *7,* pp. 447-452.
5. Rasigni G., Revue d'Optique, 1962, **41,** *11,* p. 566

ÉTUDE DES PROPRIÉTÉS OPTIQUES DES COUCHES MINCES DE TELLURE

(Résumé)

À la suite du travail entrepris, on expose ci-dessus, successivement, a) l'obtention des couches minces de Te, b) la détermination des constantes optiques : indices de réfraction, facteurs de transmission et d'absorption. On en conclue avec discussion et interprétation des résultats obtenus.

Explication des figures

Fig. 1.—Variation du coefficient de transmission $T(\%)$ avec la grosseur, pour $\lambda = 700$ mμ.
Fig. 2.—Variation du coefficient d'absorption $A(\%)$ avec la grosseur, pour $\lambda = 700$ mμ.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

Chimie

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том XIV (XVIII), вып. 1—2, 1968

Химия

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

Chemistry

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

C. D. 66.028 ; 663.9

UNE MÉTHODE DE DOSAGE COLORIMÉTRIQUE DE LA NICOTINE DU TABAC FERMENTÉ

PAR

M. ŞCHIOPU, VIORICA ONU, MARIA APOSTOLESCU
et LUCIA SILBERMAN

Comunication présentée à la session scientifique de l'Institut Polytechnique de Jassy, 5—7 Février 1965

1. Introduction

L'industrie du tabac de notre pays utilise pour le dosage de la nicotine du tabac fermenté et des produits finis la méthode Bertrand en faisant précipiter la nicotine à l'aide de l'acide silicotungstène.

La méthode Bertrand présente les désavantages suivants : elle nécessite une durée appréciable (48 heures), utilise un réactif coûteux et donne des résultats dépassant ceux obtenus par voie spectroscopique [1]. Nous avons vérifié que l'acide silicotungstène précipitait tout aussi bien avec de la nicotine qu'avec de la pyridine donc qu'il ne permettait pas leur dosage séparément.

2. Partie expérimentale

Le méthode élaborée par nous se base sur la détermination colorimétrique de la concentration du produit iod-nicotine. La réaction entre la nicotine et l'iode dissous dans de l'éther a été décrite par C. Hubert [2], qui a considéré qu'il se formerait une huile rouge ayant la formule brute $C_{10}H_{12}I_2N_2 . HI + I_2$ et des cristaux rouge-rubis dont la formule brute serait $C_{10}H_{14}N_2 . HI + I_2$. Ces produits n'ont pas été étudiés ultérieurement ni utilisés dans des buts analytiques.

Nous avons établi que la réaction entre l'iode et la nicotine a lieu dans un milieu éthéré et qu'il se formait seulement une huile d'un rouge brun, pour laquelle nous avons déterminé la formule brute $C_{10}H_{12}I_2N_2.HI + I_2$.

Afin que la réaction entre l'iode et la nicotine soit totale il est nécessaire que l'on ajoute de l'acétone dans le milieu de réaction. L'acétone, après la réaction avec l'iode, mettrait en liberté de l'acide iodhydrique

nécessaire à la formation du produit avec de la nicotine. Si dans le milieu de réaction nous introduisons HgO, qui fixe le HI, on n'obtient pas le produit coloré entre l'iode et la nicotine.

Le produit iode-nicotine a une pression de vapeurs très réduite de sorte qu'à un chauffage plus prolongé à 100°C environ, on ne constate pas de pertes.

Le produit est stable sous l'action des acides et des bases. Il est insoluble dans la majorité des dissolvants organiques. Il est très peu soluble dans le benzène, relativement soluble dans l'alcool méthylique et l'alcool éthylique et très soluble dans l'acétone. Ce comportement a permis la purification du produit de l'excès de l'iode en utilisant CCl_4. Le lavage au tétrachlorure de carbone en ébulition présente l'avantage qu'on élimine, à part l'iode, aussi le produit formé entre l'iode et la pyridine. Le produit iode-nicotine est complètement insoluble dans CCl_4. Dissous dans l'acétone

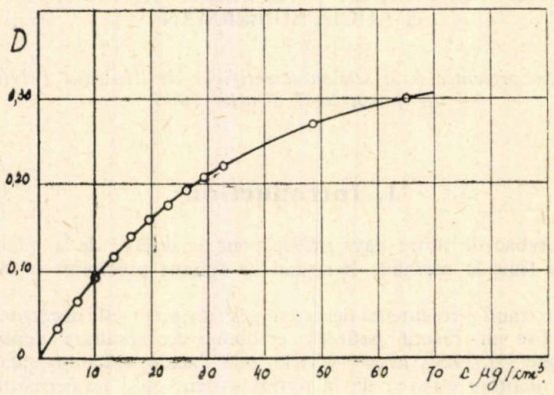


Fig. 1

il donne une solution colorée en jaune à absorption maximum en bleu-violet. On a constaté que la densité optique de la solution iode-nicotine dans l'acétone diminue progrésivement compte tenu de certaines interactions avec le dissolvant. La présence de l'eau augmente la vitesse de la décomposition, tandis que la pyridine, en petites quantités, inhibe la réaction et la densité optique reste parfaitement stable tout le temps. Cettes constatations ont permis le dosage colorimétrique du produit iode-nicotine.

La curbe étalon densité optique-concentration (µg nicotine/cm³ solution acétonique), représentée dans la fig. 1, a été obtenue par deux méthodes: a) en utilisant des solutions de nicotine dans l'éther, de concentrations connues, qui étaient ensuite traitées avec de l'iode; b) en utilisant des solutions de concentrations connues, du composé iode-nicotine, dans l'acétone, diluées dans des proportions différentes. La sensibilité de la méthode atteint 0,3 µg nicotine/cm³ solution acétonique.

3. Analyse du tabac des cigarettes

La composé iode-nicotine a été utilisé pour analyser le contenu de nicotine des cigarettes. La séparation de la nicotine du tabac a été effectuée de la façon suivante: le tabac est traité à l'ébulition avec une solution 2*M* NaOH et une addition de $Ca(OH)_2$ solide. Après refroidissement, on prend une fraction déterminée du volume du mélange, on la soumet à l'extraction avec de l'éther, de l'extrait on sépare la nicotine avec de l'acide sulfurique dilué et celui-ci, après alcalinisation, est soumis à une nouvelle extraction avec de l'éther. De cette façon on élimine différents composés qui passent du tabac dans la solution pendant les premières opérations et qui pourraient donner des précipités avec l'iode. Le dernier extrait éthéré est traité avec une solution éthérée de 0,5% d'iode, on y ajoute un peu d'acétone, on evapore au vide dans une éprouvette, ensuite on lave avec du CCl_4 sous reflux à l'ébulition. Dans l'éprouvette il ne reste que le produit iode-nicotine, qui se dissout dans l'acétone, on y ajoute un peu de pyridine comme inhibiteur, on le fait venir au volume connu et on mesure la densité optique de cette solution.

Les résultats obtenus de cette manière pour certaines espèces de tabac sont donnés dans le tableau 1.

Tableau 1

Espèce de cigarettes	Nicotine %
Mărăşeşti	0,55
Favorit	0,33
Snagov	0,45

Ces résultats concordent avec les épreuves physiologiques. Ils sont moins grands que les résultats obtenus par la méthode Bertrand.

4. Conclusions

Le produit iode-nicotine a été étudié dans le but de pouvoir l'utiliser pour la détermination du contenu en nicotine du tabac, par la méthode photocolorimétrique. La méthode élaborée par nous présente les avantages suivants: elle est rapide, ne nécessite qu'un appareillage simple, a une grande sensibilité et donne des résultats plus exacts que les autres méthodes, car le produit iode-nicotine peut être séparé facilement des composés avec l'iode des autres substances qui accompagnent la nicotine du tabac.

Institut Polytechnique de Jassy,
Chaire de Chimie Physique

BIBLIOGRAPHIE

1. Pyriki C., Moldenhauer W., Ber. Inst. Tabakforsch. Dresden, 1962, 2, *1*, S. 104–122.
2. Hubert C., Liebige Annalen der Chemie, 1912, **131**, S. 257.

O METODĂ DE DOZARE COLORIMETRICĂ A NICOTINEI DIN TUTUNUL FERMENTAT

(Rezumat)

Se propune o metodă fotocolorimetrică pentru dozarea nicotinei din tutunul fermentat şi din produsele finite.

Metoda foloseşte proprietăţile produsului iod-nicotină, care dizolvat în acetonă, furnizează o soluţie galbenă, ce poate fi dozată fotocolorimetric.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

C. Z. 620.193

CONSIDERAŢII ASUPRA UNOR FACTORI CE DETERMINĂ AGRESIVITATEA SOLURILOR (I)

DE

ANGELA LUCA, JULIETA LINDE, TIBERIU GOLGOŢIU, IANCU HÎNCU şi MARGARETA URSU

Comunicare prezentată la Conferinţa Republicană de Chimie, Timişoara, 27—30 iunie 1966

1. Generalităţi

Solul este un sistem complex, constituit din fazele solidă, lichidă şi gazoasă; este cunoscut faptul că coroziunea metalelor în sol se datoreşte acţiunii solurilor şi apelor din sol care transportă necontenit electroliţi cu diferite concentraţii şi cantităţi noi de oxigen [1].

Faza solidă, constituită din particule de compoziţie chimică, formă şi mărime diferite, este un sistem poros ai cărui pori pot fi umpluţi cu apă sau cu aer, volumul lor total depinzînd de dimensiunile particulelor şi de poziţia lor mutuală.

Printre factorii care influenţează coroziunea metalelor introduse în sol, proprietăţile fizico-chimice, şi în special cele fizice, condiţionate la rîndul lor de structură, joacă un rol preponderent. Structura depinde în mare măsură de procesul formării solului; o serie de factori o influenţează şi fac ca structura, şi în consecinţă şi agresivitatea, să varieze continuu [2], [3].

Solul este rezultat prin procesul de dezagregare fizică şi chimică a rocilor la care s-a adăugat procesul de formare a solului, ambele procese desfăşurîndu-se simultan [4].

Agenţii dezagregării chimice sînt: bioxidul de carbon, oxigenul şi apa cu ionii ei (fără apă oxigenul şi bioxidul de carbon nu au posibilitatea de a acţiona); rolul principal îl joacă bioxidul de carbon. Un rol important îl joacă de asemenea şi soluţiile de acizi, baze, săruri, substanţele humice acide şi microorganismele.

Transformările chimice cele mai frecvente, şi care în natură au loc simultan, sînt cele de oxidare, dezoxidare, hidratare, deshidratare, hidroliză, carbonatare şi podzolire.

Transformările chimice prin carbonatare au loc prin acţiunea bioxidului de carbon din apa şi din aerul din sol, rezultat din descompunerea substanţelor organice, din procesele de respiraţie ale faunei şi florei şi din atmosferă; în general se desfăşoară după reacţia:

$$RSiO_3 + CO_2 + H_2O \rightarrow RCO_3 + SiO_2 + H_2O$$

în urma căreia rezultă carbonaţi dintre care cei de sodiu şi potasiu sînt uşor solubili, cei de fier şi de mangan trec în hidroxizi insolubili, iar cei de calciu şi magneziu în bicarbonaţi solubili. Acidul silicic, rezultat iniţial sub formă solubilă şi ulterior sub formă amorfă, con-

stituie un factor important în procesul de transformare a structurii solului, umplînd spaţiile dintre microelementele cristaline ale rocii, transformînd-o într-un corp poros cu proprietăţi care asigură relaţiile cu apa (porozitate capilară) şi cu aerul (porozitate necapilară) [2]... [6].

Faza lichidă, constituită din apa existentă în sol ce conţine o cantitate de substanţe dizolvate, reprezintă factorul hotărîtor care influenţează structura solului şi prin aceasta coroziunea care depinde de capacitatea solului de a reţine apa şi de posibilitatea mişcării apei, adică permeabilitatea solului pentru apă [2].

Faza gazoasă este constituită din aerul din sol care are o compoziţie diferită de cel din atmosferă, putîndu-se găsi fie liber în pori sau sub formă de pungi închise în lichidul care umple porii, fie dizolvat în apa din sol, fie adsorbit de faza solidă [10]; difuzarea aerului în sol depinde de capacitatea solului de a reţine apa. Aerul din sol conţine mult mai mult CO_2 decît cel atmosferic şi mai puţin oxigen [7], [8].

În ceea ce priveşte agresivitatea solurilor, aceasta constituie o problemă deosebit de complexă, fiind determinată de un mare număr de factori ce acţionează concomitent; deoarece nu pot fi determinaţi complet nici aceşti factori, nici relaţiile dintre ei şi nici influenţa lor simultană, nu totdeauna poate fi stabilit factorul care reglează coroziunea. În general factorii care influenţează coroziunea sînt: compoziţia chimică (avînd importanţă componentele solubile: acizi, baze, săruri, acizi humici, gaze ca O_2, H_2S, CO_2), umiditatea, porozitatea, gradul de aerare, microorganismele, dar o clasificare a solurilor pe baza acestor factori este greu de stabilit [2], [9]...[11].

2. Partea experimentală

Ţinînd seama de importanţa procesului de carbonatare asupra structurii solului — structură ce influenţează agresivitatea — am supus cîteva tipuri de soluri acţiunii CO_2 în prezenţa apei, urmărind modificarea structurii solurilor şi ulterior agresivitatea lor prin metode de laborator. Solurile cercetate aparţin regiunii Iaşi şi anume: podzol (3 orizonturi—*A*, *B*, *C*), lut şi cernoziom.

Solurile, amestecate cu apă în cantitate egală cu coeficientul de consistenţă Arany [8], au fost ţinute în autoclavă în atmosferă de CO_2, la presiunea constantă de 2 at, timp de o săptămînă; o cantitate de apă prezentă în autoclavă crea o atmosferă de vapori saturaţi.

S-au efectuat pentru fiecare sol cîte trei probe la temperaturile de 60°, 80° şi 100°C pentru a accelera acţiunea CO_2 şi a apei. În urma acestui tratament solurile au fost uscate în aer şi măcinate iar pentru a depista schimbările survenite în structură (de care depinde agresivitatea) s-au efectuat o serie de determinări relative la unele proprietăţi fizice şi chimice ale solurilor tratate şi netratate şi anume: a) proprietăţi în legătură cu apa (dintre care coeficientul de consistenţă Arany şi coeficientul de higroscopicitate maximă prin metoda Mitscherlich, la o sucţiune pF = 4,9085, calculat la solul uscat [8]; b) pH-ul în laborator, prin metoda potenţiometrică, la un pH-metru Lampowy tip BS-3A; c) solubilele prin metoda Peterburgski [8]; d) humusul prin metoda titrimetrică a lui Tiurin [8].

În modificarea valorilor nu se constată nici o regularitate, aceasta fiind funcţie de natura solului (podzol, lut, cernoziom).

Tabelul 1

Coeficientul de higroscopicitate maximă (%)

Solul	Podzol *A*	Podzol *B*	Podzol *C*	Lut	Cernoziom
Netratat	4,8913	8,3046	9,045	5,1014	8,1954
La 60°C	4,9498	8,1410	9,128	5,3109	8,2501
La 80°C	4,3979	8,1679	9,028	5,1424	8,1912
La 100°C	4,1057	8,1001	8,9954	4,9588	8,0929

Tabelul 2

Solubilele (%)

Solul	Podzol *A*	Podzol *B*	Podzol *C*	Lut	Cernoziom
Netratat	0,119	0,327	0,239	0,168	0,1725
La 60°C	0,115	0,379	0,262	0,168	0,192
La 80°C	0,214	0,230	0,193	0,194	0,286
La 100°C	0,281	0,260	0,206	0,192	0,447

Tabelul 3

pH-ul

Solul	Podzol *A*	Podzol *B*	Podzol *C*	Lut	Cernoziom
Netratat	5,7	4,3	4	6,8	5,5
La 60°C	5,7	4,5	4,2	7	5,5
La 80°C	5,9	4,6	4,3	6,5	5,8
La 100°C	6	4,8	4,5	6,2	5,5

Tabelul 4

Humus (%)

Solul	Podzol *A*	Podzol *B*	Podzol *C*	Lut	Cernoziom
Netratat	1,361	0,466	0,420	0,216	2,724
La 60°C	1,412	0,493	0,521	0,223	2,717
La 80°C	1,406	0,53	0,573	0,271	2,720
La 100°C	1,35	0,496	0,347	0,279	2,724

Se pot face următoarele observații :

a) Coeficientul de higroscopicitate crește în general la solurile tratate la 60°C, apoi scade cu creșterea temperaturii.

b) Solubilele cresc continuu la podzolul *A*, lut și cernoziom.

c) Humusul crește continuu, dar slab, la lut, rămîne practic neschimbat la cernoziom și prezintă un maxim la 80°C la podzol.

d) pH-ul crește continuu la podzol, pe cînd la lut și cernoziom crește la început ușor iar apoi scade.

În cadrul încercărilor efectuate de noi, agresivitatea a fost cercetată prin metoda cantitativă accelerată a pierderii de masă (a atacului anodic) a unor epruvete de fier, preconizată de Bibillo [12]. Solurile pentru determinare au fost umezite la coeficientul de consistență Arany. Rezultatele sînt redate în tabelele 5 și 6

Tabelul 5

Coeficientul de consistență Arany

Solul	Podzol *A*	Podzol *B*	Podzol *C*	Lut	Cernoziom
	38,5	50	50	35,5	48,5

Tabelul 6

Coroziunea $\frac{\Delta g. 100}{S}$

Solul	Podzol *A*	Podzol *B*	Podzol *C*	Lut	Cernoziom
Netratat	2,43	2,46	2,89	3,41	4,57
La 60°C	2,28	2,70	3,22	4,18	4,57
La 80°C	3,38	2,90	3,71	4,23	3,81
La 100°C	4,94	3,13	4,62	4,40	5,24

Se constată, în general, că agresivitatea crește la solurile tratate cu atît mai mult cu cît ele au fost tratate la o temperatură mai ridicată, exceptînd cernoziomul la care solul tratat la 80°C prezintă o scădere a agresivității și apoi din nou o creștere importantă.

3. Concluzii

Cîteva soluri din regiunea Iaşi au fost supuse acţiunii CO_2 în prezenţa apei la diferite temperaturi. Din studiul efectuat se pot desprinde următoarele concluzii:

a) Se constată o modificare a structurii solurilor prin determinarea coeficientului de higroscopicitate maximă, a solubilelor, pH-lui, humusului.

b) Ca o consecinţă a modificării structurii variază şi agresivitatea solurilor.

c) În studiul agresivităţii unui sol trebuie să se ţină seama, ca urmare a acţiunii $CO_2 + H_2O$, de capacitatea lui de a-şi modifica activitatea agresivă, ce variază de la sol la sol.

Dintre solurile studiate agresivitatea a crescut la podzol cu 100 %.

d) Din rezultatele experimentale s-a constatat că variaţia unor constante fizico-chimice, luate parţial, este redusă, în timp ce agresivitatea solului creşte ca urmare a unor acţiuni simultane şi complexe a tuturor factorilor.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de chimie anorganică

BIBLIOGRAFIE

1. Ţikerman L. I., *Lupta împotriva coroziunii conductelor metalice subterane.* IDT, Buc.. 1951, pp. 1—38, (trad. din l. rusă)
2. Markovic T., Werkstoffe und Korrosion, 1958, *10*, S. 623—629.
3. Lehr H., *Fundaţii.* ESAC, Buc., 1954.
4. Chiriţă C. D., *Pedologie generală.* Ed. agrosilvică, Buc., 1955.
5. Obrejanu Gr., Măianu Al., *Pedologie ameliorativă.* Ed. agrosilvică, Buc., 1966.
6. Wiliams V. R., *Pedologie.* Ed. agrosilvică, Buc., 1954, (trad. din l. rusă).
7. Russel E. J., Appleyard A. J., J. Agric. Sci., 1957, 7, p. l.
8. Obrejanu Gr., *Metode de cercetare a solului.* Ed. Acad. R. P. R., Buc., 1964.
9. Hagymaş Gh., Radovici O., Firoiu C., *Coroziunea şi protecţia metalelor.* Ed. tehn., Buc., 1963.
10. Pritula V. A., *Protecţia împotriva coroziunii a conductelor subterane din incinta uzinelor.* IDT, Buc., 1963, pp. 16—76, (trad. din l. rusă).
11. Ciortea M., Radovici O., Petrol şi gaze, 1957, *1*, pp. 209—210.
12. Bibillo Al., *Probleme de coroziune a reţelelor metalice subterane.* IDT, Buc., 1955, pp. 59—61, 66—76 (trad. din l. rusă).

CONSIDÉRATIONS CONCERNANT QUELQUES FACTEURS QUI DÉTERMINENT L'AGRÉSSIVITÉ DU SOL (I)

(Résumé)

Quelques sortes de sols de la région de Jassy ont été soumis à l'action de CO_2 en présence de l'eau, à différentes températures.

On aboutit aux conclusions suivantes :

1. On constate une certaine modification de la structure du sol par la détermination du coefficient de l'hygroscopicité maxime, du pH, du humus et des solubles.

2. Par suite de la modification de la structure, l'agressivité des sols a varié aussi, mais fonction de la capacité de chaque sorte de sol de changer son activité agressive.

3. La variation de quelques constantes physiques et chimiques est réduite, mais l'agressivité croît, compte tenu de l'action simultanée et complexe des facteurs qui influencent la corrosion.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

C. Z. 535.24; 542.61; 66.028; 546.57

O METODĂ FOTOMETRICĂ EXTRACTIVĂ PENTRU DOZAREA UNOR OXIDANŢI

NOTA II

DETERMINAREA FOTOMETRICĂ A IONULUI Ag^+

DE

I. ANTONESCU şi MARIA CARAMLĂU

Comunicare prezentată la Conferinţa Republicană de Chimie, Timişoara, 27 — 30 iunie 1966

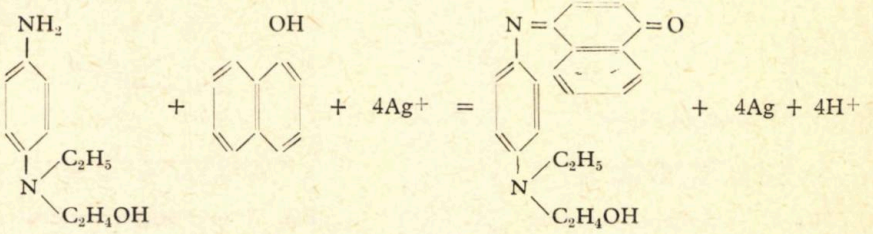
1. Introducere

Intr-o Notă anterioară [1] s-au stabilit condiţiile optime şi s-au analizat o serie de factori care influenţează metoda folosită pentru dozarea unor oxidanţi, în cazul particular al ionului Fe^{3+}.

În cele ce urmează se caută a se adînci în continuare unele probleme, teoretice şi practice, în conexiune cu această metodă, considerînd de această dată, cazul ionului Ag^+.

S-a ales acest caz, întrucît existînd în literatură date în legătură cu reacţia heterogenă a procesului de developare, al cărei mecanism nu este încă în întregime clarificat, s-au putut face comparaţii cu cazul cînd aceeaşi reacţie decurge în fază omogenă.

Reacţia fundamentală este următoarea:



Această reacţie este în realitate mult mai complicată, ea avînd loc în mai multe stadii, iar numărul atomilor de argint participanţi la reacţie este după unii autori de 4 [2], după alţii sînt suficienţi numai 2 [3].

În prima fază a reacţiei ia naştere, ca urmare a acţiunii oxidante a ionului de argint, o semichinonă, care în general este un compus ce ia naştere din *p*-fenilen-diamine, prin pierderea unui singur electron, şi avînd structura unor radicali-ioni (Michaelis, 1931).

Considerentele de mai sus au dus la teoria transferului monoelectronic, a lui Shaffer–Michaelis, care consideră că aceste semichinone reprezintă faze intermediare în procesele de oxidoreducere. Totuşi materialul experimental cunoscut pînă în prezent este încă insuficient pentru a se putea stabili dacă această teorie este în general valabilă.

2. Partea experimentală

Datele experimentale obţinute de noi, precum şi unele date din literatură [4], arată că aceşti produşi intermediari (semichinonele) au o stabilitate destul de bună în soluţie apoasă, avînd culori diferite, funcţie de *p*-fenilen-diamina de la care se pleacă.

În cazul etil oxietil *p*-fenilen-diaminei se formează, după oxidare, o semichinonă de culoare roşie, de intensitate variabilă, funcţie, în anumite limite, de cantitatea de ioni care au produs oxidarea.

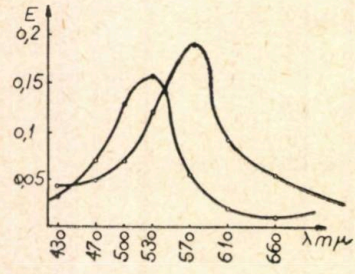


Fig. 1. — Curbele de absorbţie ale soluţiei apoase de semichinonă (*a*) şi a colorantului extras în eter (*b*).

Curba de absorbţie a soluţiei apoase a acestei semichinone este redată în fig. 1a. Se constată maximul de absorbţie la 530 mμ, lungime de undă la care s-au efectuat în continuare toate determinările referitoare la soluţiile apoase. Deplasarea maximului de absorbţie spre lungimi de undă mai mari, precum şi intensificarea culorii în urma cuplării semichinonei cu α-naftol este explicată de teoriile clasice în acest domeniu.

În continuare, cu scopul de a stabili unele caracteristici ale acestui produs intermediar, în vederea unei eventuale posibilităţi de a fi folosit el însuşi, într-o metodă de dozare, s-au efectuat determinări referitoare la stabilitatea în timp, influenţa temperaturii, cantitatea de reactiv adăugat la aceeaşi cantitate de ioni de argint, influenţa pH-ului, ale căror rezultate sînt redate în fig. 2...5.

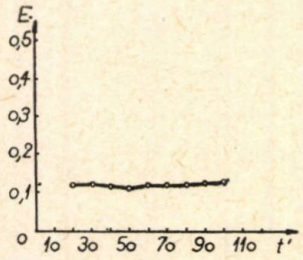


Fig. 2. — Variaţia extincţiei funcţie de timp.

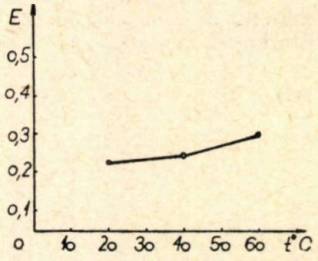


Fig. 3. — Variaţia extincţiei funcţie de temperatură.

Luînd în consideraţie datele obţinute în urma acestor determinări am ajuns la concluzia că se pot stabili condiţiile pentru o metodă de dozare a

ionului de argint precum şi a altor ioni, mergînd cu reacţia dintre *p*-fenilen-diamina amintită şi ionii respectivi pînă la faza de semichinonă.

În acest scop ne-am fixat asupra acestor condiţii pe care le-am verificat în mod practic şi am elaborat o variantă de dozare a ionului de argint pe această cale.

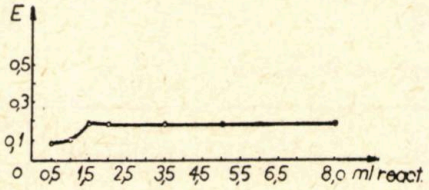


Fig. 4. — Variaţia extincţiei funcţie de cantitatea de reactiv introdusă

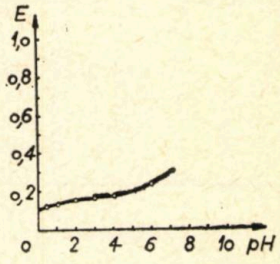


Fig. 5. — Variaţia extincţiei funcţie de pH-ul soluţiei.

Au fost utilizaţi următorii reactivi: a) sulfat de etil oxietil *p*-fenilendiamină (chimic pur), sol. 0,5%, b) soluţie standard de argint (0,158 g $AgNO_3$ chimic pur uscat la 110°C, adus la 1 000 ml cu apă distilată).

Pentru ambele soluţii se foloseşte apă fiartă şi răcită.

a) *Modul de lucru*

Pentru trasarea curbei de etalonare s-au introdus în flacoane cotate de 100 ml volume de soluţie de $AgNO_3$ cu un conţinut în ioni de argint cuprins între 0,1...1 mg. În continuare s-a introdus în flacoane cîte 2 ml soluţie 0,5% de reactiv, agitîndu-se uşor timp de 10 min, după care s-a completat la marcă cu apă distilată.

Fotometrarea s-a efectuat cu ajutorul fotometrului Pulfrich, în cuva de 2 ml şi filtru S-53, faţă de apă distilată.

Curba de etalonare este redată în fig. 6.

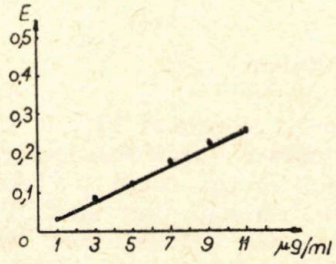


Fig. 6. — Curba de etalonare pentru ionul de argint (prima variantă).

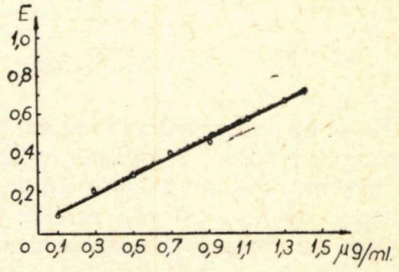


Fig. 7. — Curba de etalonare pentru ionul de argint (varianta a doua).

Se constată că legea lui Lambert-Beer este respectată între limitele 1...10 μg/ml. Pentru valori mai ridicate ale concentraţiei determinările sînt perturbate de apariţia în soluţie a unor cantităţi ridicate de argint metalic care jenează determinările.

Pentru verificarea reproductibilităţii şi preciziei acestei variante, s-au efectuat o serie de determinări, rezultatele fiind consemnate în tabelul 1.

Tabelul 1

Conţinutul în Ag^+ în proba de analizat

Nr. probei	Existent mg	Dozat mg	Diferenţa mg	Eroare relativă %	Precizie %
1	0,0070	0,0075	+0,0005	7,1	
2	0,0070	0,0073	+0,0003	4,3	
3	0,0070	0,0068	−0,0002	2,9	
4	0,0070	0,0070	0	0	
5	0,0070	0,0075	+0,0005	7,1	±4,7
6	0,0070	0,0072	+0,0002	2,9	
7	0,0070	0,0067	−0,0003	4,3	
8	0,0070	0,0073	+0,0003	4,3	
9	0,0070	0,0075	+0,0005	7,1	
10	0,0070	0,0075	+0,0005	7,1	

Sensibilitatea acestei variante de dozare a argintului este de zece ori mai mică decît cea a variantei cu extracţie. Acest fapt se explică prin intensificarea culorii în urma cuplării semichinonei cu α-naftol.

Pentru cea de e doua variantă s-a lucrat în mod analog ca la dozarea ionului Fe^{3+} [1] cu excepţia faptului că extracţia s-a efectuat în eter.

Curba de etalonare pentru această variantă este redată în fig. 7.

b) *Influenţa ionilor străini*

În urma încercărilor efectuate s-a ajuns la concluzia că nu jenează desfăşurarea reacţiei, sensibilitatea şi selectivitatea ei, decît acei ioni care ei însăşi pot juca rol de oxidant asupra sulfatului de etil oxietil *p*-fenilendiamină, sau acei ioni colorați care se găsesc în cantităţi prea mari. Printre ionii care nu jenează determinările citãm: Al^{3+}, Cu^{2+} (1:100), Fe^{2+} (1:500), Co^{2+} (1:50), Ni^{2+} (1:100), Mn^{2+} (1:100), Zn^{2+} (1:500), Cd^{2+} (1:500), Hg^{2+} 1:100).

Jenează determinările ionii : Fe^{3+}, Hg^{2+}, Cr^{6+}, NO_2^-, Cl^-, Br^-.

3. Concluzii

a) S-a propus o metodă, cu două variante, pentru dozarea ionului de argint.

b) Reproductibilitatea metodei, pentru cazul cînd nu jenează ionii mai sus amintiți, iar pH-ul se menține între limitele indicate, este destul de bună.

c) Sensibilitatea metodei variază între 0,1 μg/ml, pentru varianta cu extracție și 1 μg/ml, pentru cealaltă variantă.

d) Eroarea medie relativă a metodei nu depășește ±5%.

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de chimie analitică

BIBLIOGRAFIE

1. Antonescu I., Caramlău M., Matei Fl. *Determinarea fotometrică a ionului Fe^{3+}.* Bul. Inst. polit. Iași, 1967, **XIII (XVII)**, *3–4*, p. 217.
2. Иорданский, Арбузов, ЖПХ, 1951, стр. 337.
3. Kenneth Mees C. E., *The Theory of the Photographic Process.* N. Y., 1942.
4. Nenițescu C. D., *Tratat elementar de chimie organică.* Vol. **II**, ed. IV, Ed. Tehn., Buc., 1958.
5. Sandell E. B., *Colorimetric Determination of Trases of Metals.* ed. III, N. Y., London, 1959.
6. Nicolae M., *Fizico-chimia proceselor fotografice.* Ed. Acad. R. P. R., Buc., 1964.

EXTRACTIVE PHOTOMETRIC METHOD FOR THE DETERMINATION OF SEVERAL OXIDANTS

II. The Photometric Determination of Silver Ions

(Summary)

In several conditions the Ag^+ ion can oxydise the ethyloxiethyl *p*-phenilendiamine-sulphate. The product, with a big reactivity, form with the α-naphtol a colorant which can be photometrated.

Explanation of the Figures

Fig. 1. — Absorbtion curves of the aquous solution of semiquinone (*a*) and of the ether extracted dyestuff (*b*).
Fig. 2. — Dependence between extinction and time.
Fig. 3. — Dependence between extinction and temperature.
Fig. 4. — Dependence between extinction and the quantity of introduced reactive.
Fig. 5. — Dependence between extinction and pH of the solution.
Fig. 6. — Silver ion calibration curve (first variant).
Fig. 7. — Silver ion calibration curve (second variant).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

C. Z. 541.123; 546.226-35; 661.63; 531.756; 532

DENSITATEA ŞI VISCOZITATEA UNOR SOLUŢII DIN SISTEMUL $H_2SO_4-H_3PO_4-H_2O$

DE

CORNELIA LEONTE şi MARIA GABURICI

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 28—30 septembrie 1967

1. Introducere

Densitatea soluţiilor din sistemele binare $H_2SO_4-H_2O$ şi $H_3PO_4-H_2O$ sînt cunoscute în literatură [1], [2]; valorile acestor mărimi pentru soluţiile din sistemul ternar corespunzător însă lipsesc.

În fabricarea acidului fosforic pe cale umedă, prin tratarea rocii fosfatice cu acid sulfuric, rezultă suspensii a căror fază lichidă reprezintă soluţii de acid sulfuric şi acid fosforic de diverse concentraţii. Cunoaşterea valorilor densităţii şi viscozităţii soluţiilor din sistemul $H_2SO_4-H_3PO_4-H_2O$ este necesară pentru stabilirea condiţiilor hidrodinamice, pentru calculul reactoarelor, rezervoarelor, pompelor.

În lucrarea de faţă se determină valorile densităţii şi viscozităţii unor soluţii din sistemul $H_2SO_4-H_3PO_4-H_2O$ la temperatura de 20°C, în intervalul de concentraţii care interesează industria acidului fosforic.

2. Rezultate experimentale

Pentru reprezentarea compoziţiei soluţiilor s-a adoptat drept diagramă a compoziţiei triunghiul dreptunghic echilateral [3]. Pe această diagramă s-au trasat drepte de reacţie corespunzătoare sistemului $H_2SO_4-H_3PO_4-H_2O$.

Ecuaţia dreptelor de reacţie pentru sistemul considerat, are forma:

$$C^0_{H_2SO_4} = C^i_{H_2SO_4}\left[1 - \frac{C^0_{H_3PO_4}}{C^f_{H_3PO_4}}\right],$$

unde: $C^0_{H_2SO_4}$, $C^0_{H_3PO_4}$ reprezintă concentraţia în acid sulfuric, respectiv acid fosforic de pe dreapta de reacţie, exprimată în procente de masă, $C^i_{H_2SO_4}$ $C^f_{H_3PO_4}$ reprezintă concentraţia iniţială şi finală în sistemul $H_2SO_4-H_2O$ şi respectiv $H_3PO_4-H_2O$, exprimată în procente de masă.

Pentru soluţiile de pe dreptele de reacţie corespunzătoare unei concentraţii iniţiale a acidului sulfuric de 96% şi unor concentraţii finale ale acidului fosforic de 10%, 20%, 30%, 40%, s-au determinat, la temperatura de 20°C, densitatea prin metoda picnometrului şi viscozitatea prin metoda curgerii cu viscozimetrul cu capilară Ubelhode.

Rezultatele obţinute s-au reprezentat pe diagrama proprietate-compoziţie şi izoproprietate-compoziţie.

La temperatură şi presiune constantă, o proprietate a sistemului ternar considerat este o funcţie de concentraţiile a doi componenţi ai sistemului. Pe această bază s-a adoptat drept model spaţial pentru reprezentarea dependenţei proprietate-compoziţie, prisma cu baza triunghi dreptghi isoscel [3], [4], a cărei schemă este reprezentată în fig. 1.

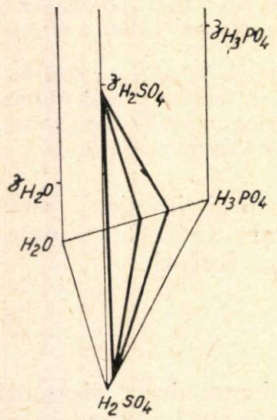


Fig. 1. — Schema modelului spaţial proprietate-compoziţie; z — o proprietate oarecare a sistemului.

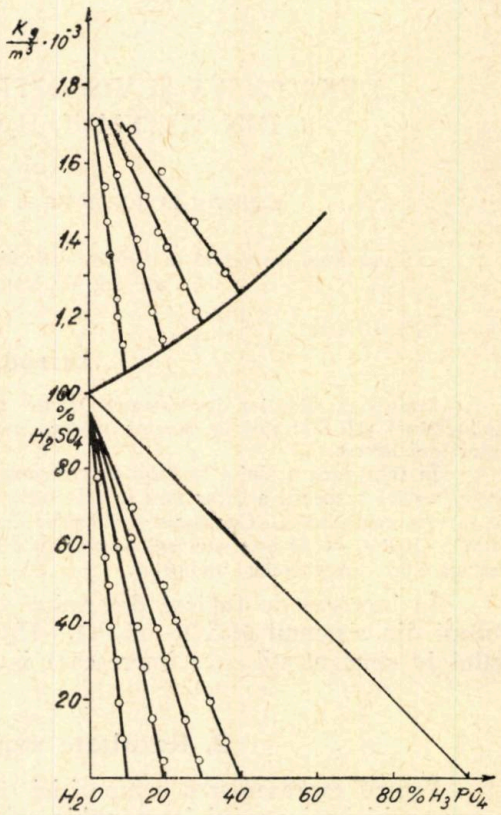


Fig. 2. — Proiecţiile valorilor densităţii.

Pentru obţinerea diagramelor plane s-au efectuat proiecţii ale modelului spaţial şi ale secţiunilor orizontale ale acestuia. În fig. 2 sînt redate proiecţiile modelului spaţial pe diagrama compoziţiei şi pe planul feţei $H_2O-H_3PO_4$ referitoare la rezultatele experimentale ale densităţii.

Din fig. 2 rezultă că la temperatura de 20°C densităţile soluţiilor din sistemul $H_2SO_4-H_3PO_4-H_2O$, corespunzătoare unei drepte de reacţie, se

plasează pe o dreaptă. Se remarcă, în acelaşi timp, că la grade de transformare ale acidului sulfuric de ordinul 0,05...0,1 şi respectiv, concentraţii mici de acid fosforic, valorile obţinute prezintă o abatere pronunţată de la dreaptă.

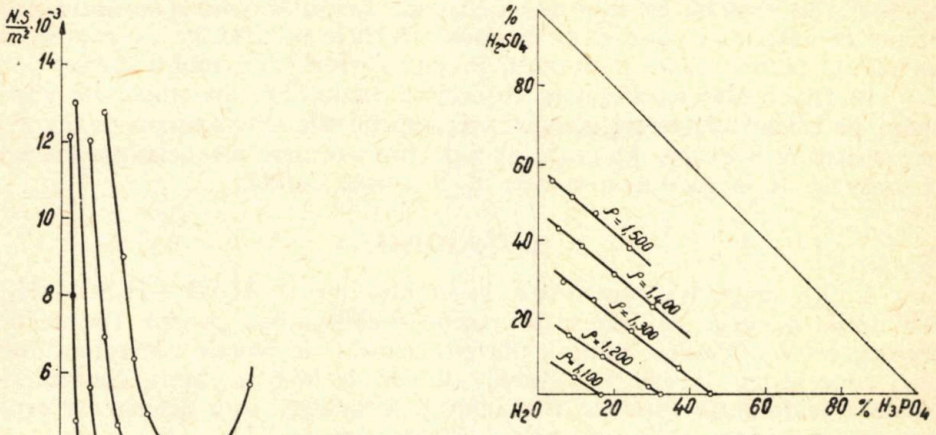


Fig. 3. — Proiecţiile secţiunilor orizontale ale densităţii.

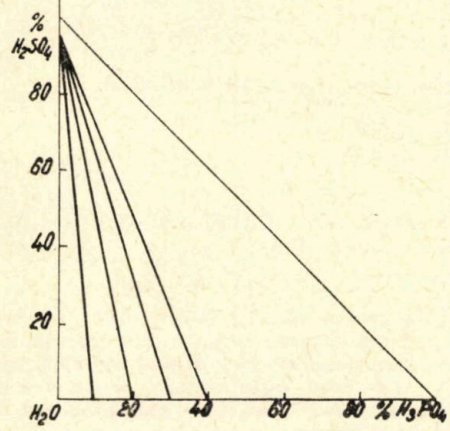


Fig. 4. — Proiecţiile valorilor viscozităţii.

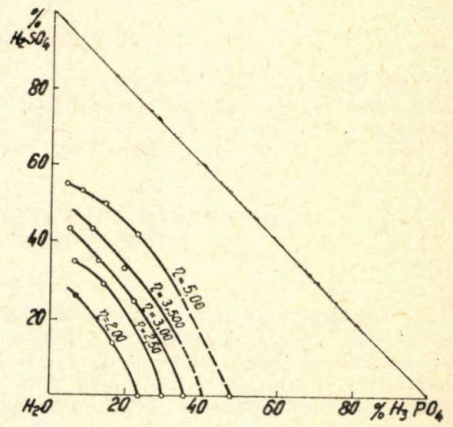


Fig. 5. — Proiecţiile secţiunilor orizontale ale viscozităţii.

Pentru evidenţierea compoziţiilor din sistem care au aceeaşi valoare a proprietăţii s-au efectuat secţiuni orizontale ale modelului spaţial şi s-au proiectat aceste secţiuni pe diagrama compoziţiei.

Din fig. 3 rezultă că în intervalul de concentraţii cercetat, dependenţa izodensitate-concentraţie este de forma unei drepte.

În fig. 4 sînt redate proiecţiile punctelor figurative reprezentînd pe planul diagramei compoziţiei şi pe planul feţei $H_2O-H_3PO_4$ viscozitatea soluţiilor de pe dreptele de reacţie considerate, de asemenea la temperatura de 20°C. Se constată că valorile viscozităţii soluţiilor corespunzătoare unei drepte de reacţie se plasează pe o curbă. Curbele au tendinţa de a prezenta un minim pe măsură ce conţinutul în acid fosforic din soluţii creşte.

În fig. 5 sînt reprezentate proiecţiile secţiunilor orizontale ale viscozităţii pe planul diagramei compoziţiei; dependenţa izoviscozitate-compoziţie este redată prin curbe. La grade mici de transformare ale acidului sulfuric se constată, şi în acest caz, abateri de la forma curbei.

3. Concluzii

1. Pe diagrama compoziţiei sistemului ternar $H_2SO_4-H_3PO_4-H_2O$ s-au trasat o serie de drepte de reacţie, stabilindu-se, pentru fiecare din acestea, ecuaţia. Pentru soluţiile de pe dreptele de reacţie corespunzătoare unei concentraţii iniţiale a acidului sulfuric de 96% şi unor concentraţii finale a acidului fosforic de 10%, 20%, 30%, 40%, s-au determinat experimental densitatea şi viscozitatea la temperatura de 20°C.

2. Rezultatele experimentale s-au generalizat pe diagrame proprietate-compoziţie şi izoproprietate-compoziţie. Aceste diagrame sînt redate în fig. 1...5.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de tehnologia substanţelor anorganice

BIBLIOGRAFIE

1. Van Wazer J. R., *Phosphorous and its Compounds*. St. Louis, Missouri, 1960.
2. Малин К. М., *Справочник сернокислотчика*. М., 1952.
3. Doig I. D., British Chem. Eng., 1963, **8**, *10*, p. 688.
4. Clare H., Trans. Inst. Chem. Eng., 1953, **31**, p. 234.

DENSITY AND VISCOSITY OF SOME SOLUTIONS FROM THE SYSTEM $H_2SO_4-H_3PO_4-H_2O$

(Summary)

On the composition diagram of the ternary system $H_2SO_4-H_3PO_4-H_2O$ has been traced some reaction linies and has been established the adequate equation. For the solutions on the reaction linies coresponding of a initial concentration of 20% H_2SO_4 and final concentrations of 10%, 20%, 30% and 40% H_3PO_4 has been experimentaly determined the density and the viscosity at 20°C. The experimental results has been generalized on the diagrams property-composition and izoproperty-composition.

Explanation of the Figures

Fig. 1. — Diagram of the space model property-composition; z — certain property of the system.
Fig. 2. — Values of the density projections.
Fig. 3. — Values of the viscosity projections.
Fig. 4. — Projections of the horizontal sections of density.
Fig. 5. — Projections of the horizontal sections of viscosity.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

C. D. 620.193 ; 669.14 ; 66.097.7

RECHERCHES SUR LA CORROSION DES ALLIAGES OL 38, V_2A ET V_4A DANS L'ACIDE PHOSPHORIOUE ET LES POSIBILITÉS DE PROTECTION PAR INHIBITEURS

PAR

ST. IVĂŞCANU et IERONIM ICHIM

Communication présentée à la session scientifique de l'Institut Polytechnique de Jassy, 28—30 Septembre 1967

1. Introduction

La corrosion représente un facteur très important qui peut préjudicier un processus technologique en ce qui concerne son développement normal en entrainant des pertes de métaux (corrosion des appareils et des installations).

Les pertes provoquées par la corrosion des solutions agressives peuvent être diminuées en utilisant de diverses méthodes, en particulier les inhibiteurs. Ceux-ci ajoutés en petites quantités au milieu agressif diminuent souvent la vitesse de corrosion.

Dans cette Notte nous nous sommes proposés de déterminer la vitesse de corrosion lors de l'interaction de l'acide phosphorique avec de divers aciers. L'acide phosporique de diverses concentrations, est obtenu à l'aide du procédé par voie humide Dorr-Oliver, (Usines d'engrais chimiques, Turnu-Măgurele) tandis que les aciers expérimentés sont ceux utilisés dans la construction des appareils et outillages.

La littérature de specialité fournit nombre de données quant au thème abordé. Les résultats obtenus par nos expériences complètent ceux existents et relèvent les possibilités d'utiliser les inhibiteurs comme moyen de protection contre l'agressivité de l'acide phosphorique.

Les recherches effectuées par Tomachov et ses collaborateurs [1] concernant l'agressivité de l'acide phosphorique (concentration — 3...10% ; températures — 100°...300°C), relèvent l'influence accélératrice exercée par ces facteurs sur la vitesse de corrosion. Pourtant, les mêmes auteurs affirment que pour des températures plus élevées (au dessus de 250°C) les pellicules de corrosion deviennent compactes, s'épaissent et leur capacité de protection augmente. Par exemple dans le cas de l'alliage EI 629 la vitesse de corrosion, exprimée sous forme d'indice de pénétration (mm/année) décroit de la valeur 5,9 pour la temperature de 250°C

jusqu'à la valeur 4,28 pour une température de 300°C. Pour l'alliage EI 641 l'indice de pénétration décroit de la valeur 2,78 jusqu'à la valeur 0,09 les températures étant les mêmes, à savoir 250°C, respectivement 300°C.

Bunger [2] a étudié le comportement des alliages riches en chrome et molibdène sous l'action de l'acide phosporique, ainsi que celui des alliages avec de petites quantités de silicium et cuivre. L'auteur affirme que pour des concentrations élevées d'acide phosphorique le seul alliage anticorrosive est celui qui contient 67% Ni et 30% Mo. Pour les solutions d'acide phosphorique de faibles concentrations le même auteur recommande l'alliage austenitique contenant Mo et Cu. Les alliages préconisés possèdent une bonne résistance anticorrosive à basses températures mais ils sont trop chers.

En Roumanie on a effectué des recherches en ce qui concerne l'action corrosive exercée par l'acide phosphorique de concentration 6%, 22% et 31% sur des matières métalliques et non métalliques à savoir : fonte silicieuse, bois simple ou impregné, caoutchouc, graphit simple ou impregné, briques antiacides, etc. [3].

Frank [4] a étudié le phénomène de passivation des métaux, par exemple le fer, dans l'acide phosphorique. Enfin Clifton et Wainwright [5] ont étudié les possibilités d'utilisation des inhibiteurs comme moyen efficace de protection contre l'agressivité de l'acide phosphorique. Ils déterminent l'action inhibitrice d'une substance Armohib 25 (dénomination commerciale) dans l'acide phosphorique (concentration 20 ... 30%, températures 74° et 93°C). En fonction de diverses concentrations de l'inhibiteur, la vitesse de corrosion diminue environ de 30 fois par rapport à celle sans l'inhibiteur.

Dans cette Note on détermine la vitesse de corrosion dans l'acide phosphorique ayant une concentration de 20%, 30%, 52% et 89%. Ona utilisé les concentrations de 32% et 52% obtenues dans le processus de fabrication de l'acide phosphorique à Turnu-Măgurele. Les aciers expérimentés (OL 38, V_2A et V_4A) sont utilisés dans la même usine comme métaux de construction.

Parmi les facteurs qui influencent la vitesse de corrosion on a étudié la concentration de l'acide, la température, la durée de contact entre l'éprouvette métallique et le milieu agressif ainsi que l'état de la surface métallique.

Pour les expériences concernant la protection anticorrosive des aciers étudiés, nous avons utilisé une combination organique contenant du soufre bivalent très efficace, à savoir la thiourée. Dans cette Note, l'étude de l'influence exercée par l'inhibiteur sur la vitesse de corrosion s'est limitée à deux concentrations de l'aide phosphorique: 30% et 52%. L'acier expérimenté dans cettes conditions a été V_2A.

2. Méthode de travail

Les éprouvettes utilisées étaient confectionnées sous forme d'un disque avec $\varnothing = 28$ mm, percé au centre (la cavité centrale avait $\varnothing = 6$ mm), et une épaisseur comprise entre 2 et 3,5 mm (fig. 1). Les températures expérimentées (20°, 30°, 40° et 50°C) ont été obtenues à l'aide un thermostate. La surface des éprouvettes a été toujours préparée d'une manière connue: polissage, dégraissage et décapage.

Le volume d'acide phosphorique utilisé dans les expériences a été dans tous les cas le même, à savoir 25 ml. Les éprouvettes métalliques ont été suspendues dans la solution par un fil de fer isolé. Après chaque heure, les eprouvettes ont été retirées de la solution, bien lavées avec de l'eau,

séchées et enfin pesées. La différence entre le poids initial et celui final a été considérée comme vitesse moyenne de corrosion dans les conditions expérimentées, en tant que indice gravimétrique.

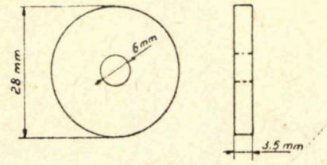


Fig. 1. — La forme et les dimensions d'une eprouvette métallique.

On a étudié l'influence de l'inhibiteur thiourée sur la vitesse de corrosion pour l'acier V_2A immersé dans l'acide phosphorique, ayant une concentration de 30% et 52%. La quantité de thiourée ajoutée a varié entre 0,035% et 0,5%. La vitesse de corrosion a été appréciée, tout comme dans les cas précédents, à l'aide de l'indice gravimétrique.

3. Résultats expérimentaux et leur interprétation

L'acide phosphorique forme trois sortes de sels : primaires, secondaires et tertiaires. En outre, l'acide phosphorique polymérise en acide superphosphorique pour une concentration au-dessus de 68,9% P_2O_5 [6]. Par polymérisation l'agressivité de l'acide diminue, car la concentration des ions H^+ diminue (voir dans la fig. 2 la variation de la conductivité électrique de l'acide en fonction de la concentration). Évidemment, par une augmentation de la température, le degré de dissociation est modifié et par conséquent l'agressivité de la solution d'acide.

Les droites de la fig. 3 représentent la variation de la vitesse de corrosion de l'acier OL 38 pour la température de 20°C et pour des concentrations de l'acide phosphorique ayant les valeurs 20%, 30%, 52% et 89%. Les droites *1*, *2*, et *3* mettent en évidence l'augmentation de la vitesse de corrosion an fur et à mesure que la concentration de l'acide augmente. La droite *4* indique une diminution de cette vitesse qouique la concentration de l'acide ait augmenté. Le phénomène s'explique si l'on tient compte des propriétés de polymérisation de l'acide phosphorique.

Le processus de corrosion représente, en essence, une somme de processus macroscopiques élémentaires, chacun d'eux caractérisé par une vitesse bien déterminée.

Le processus élémentaire correspondant à la vitesse la plus petite représente l'étape limitative du processus global de corrosion. Les droites de la fig. 3 nous permettent à affirmer que le stade limitatif de la corrosion, dans les conditions expérimentées, est représenté par la réaction

chimique, c'est-à-dire la réaction de formation des phosphates, comme produits de corrosion.

Dans la fig. 4 on a représenté la variation de la vitesse de corrosion pour l'acier V_2A dans les mêmes condition de température et concentrations de l'acide.

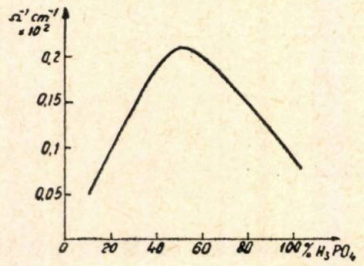


Fig. 2. — Variation de la conductivité électrique de l'acide phosphorique en fonction de sa concentration, pour la température de 25°C.

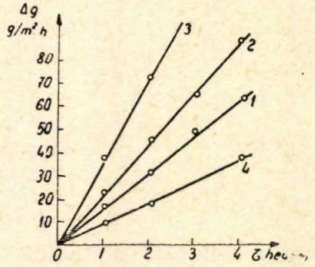


Fig. 3. — Variation de la vitesse de corrosion de l'acier OL 38 en fonction de la concentration de l'acide phosphorique: *1* — 20% H_3PO_4, *3*—52% H_3PO_4, *4*—89% H_3PO_4; la température: 20°C.

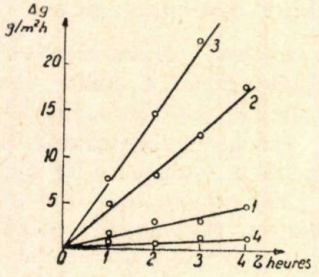


Fig. 4. — Variation de la vitesse de corrosion de l'acier V_2A en fonction de la concentration de l'acide phosphorique: *1*—20% H_3PO_4, *2*—30% H_3PO_4, *3*—52% H_3PO_4, *4*—89% H_3PO_4; la température: 20°C.

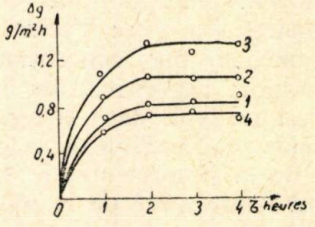


Fig. 5. — Variation de la vitesse de corrosion de l'acier V_4A en fonction de la concentration de l'acide phosphorique: *1*—20% H_3PO_4, *2*—30% H_3PO_4, *3*—52% H_3PO_4, *4*—89% H_3PO_4; la température: 20°C.

Les suppositions concernant le cas précédent gardent leur valabilité même dans ce cas. Les vitesses de corrosion augmentent au fur et à mesure que la concentration de l'acide augmente, jusqu'à une certaine limite, puis diminuent sensiblement lorsque la valeur de la concentration de l'acide phosphorique est élevée (la droite *4*).

Dans la fig. 5 on a représenté la variation de la vitesse de corrosion de l'acier V_4A dans les mêmes conditions.

La corrosion se développe selon une loi logarithmique. On peut supposer que les produits de la corrosion forment des pellicules adhérentes, compactes et stables à la surface de l'acier. Les proprietés protectrices de ces pellicules empêchent le progrès de la corrosion. C'est le processus de diffusion qui représente, dans ce cas, le stade limitatif de la corrosion.

L'influence de la température a été expérimentée pour les aciers OL 38 (fig. 6), V_2A (fig. 7) et V_4A (fig. 8). Pour les aciers OL 38 et V_2A on a effectué encore des expériences pour deux valeurs de la température, à savoir 90°C et respectivement 150°C.

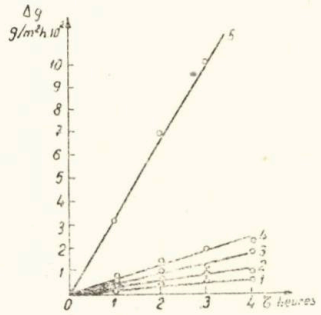


Fig. 6. — Variation de la vitesse de corrosion de l'acier OL 38: en fonction de la température *1* — 20°C, *2* — 30°C, *3* — 40°C, *4* — 50°C, *5* — 90°C; la concentration de l'acide phosphorique : 20%.

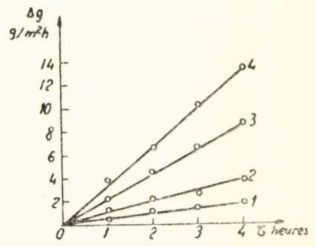


Fig. 7. — Variation de la vitesse de corrosion de l'acier V_2A en fonction de la température: *1* — 20°C, *2* — 30°C, *3* — 40°C, *5* — 90°C; la concentration de l'acide phosphorique : 20%.

Pour les concentrations de l'acide phosphorique et l'intervalle de température étudiées, on constate une augmentation de la vitesse de corrosion; au fur et à mesure que la température augmente, cette augmentation est de l'ordre 20 ... 40 %, moindre pour l'acier V_4A.

Probablement les pellicules de corrosion sont stables jusqu'à 70°C. Pour pouvoir apprécier l'influence exercée par les températures plus élevées sur la corrosion on a encore expérimenté deux températures à savoir: pour l'acier OL 38, 90°C et pour l'acier V_4A, 150°C, la concentration de l'acide étant de 30 %.

On observe dans les deux cas que la corrosion est fortement accélérée. Les pellicules de corrosion formées sur la surface de l'acier V_4A, à action protectrices aux températures basses, sont détruites à une température élevée, et la vitesse de corrosion augmente. Pour l'acier OL 38 la vitesse de corrossion augmente aproximativement avec 100 %.

Conformément à la théorie de M a c h u [7] les inhibiteurs forment sur la surface de l'acier, par une adsorption physique et chimique (chémosorption), une „pellicule d'inhibiteur" qui empêche l'accès de l'agent agressif vers la surface de réaction.

Les fig. 9 et 10 en représentent les résultats expérimentaux obtenus pour l'acier V_2A immersé dans l'acide phosphorique à une concentration de 30% et 52%. La concentration de l'inhibiteur a varié entre 0,03‰ et 0,28 ‰.

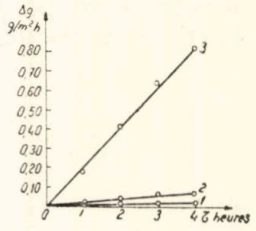


Fig. 8. — Variation de la vitesse de corrosion de l'acier V_4A en fonction de la température : *1* — 30°C, *2* — 50°C, *3* — 150°C; la concentration de l'acide phosphorique: 30%

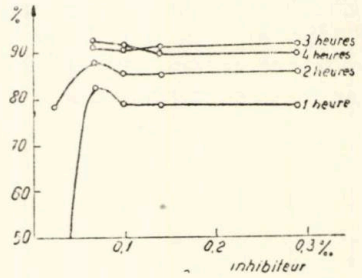


Fig. 9. — Variation de l'efficacité de l'inhibiteur (en %) en fonction de sa concentration, pour divers temps de contact entre l'acide et l'acier V_2A; la concentration de l'acide phosphorique: 30 %, la température: 20°C.

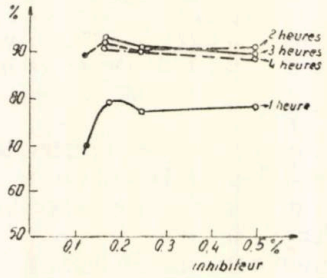


Fig. 10. — Variation de l'efficacité de l'inhibiteur (en %) en fonction de sa concentration pour divers temps de contact entre l'acide et l'acier V_2A; la concentration de l'acide phosphorique: 52%, la température: 20°C.

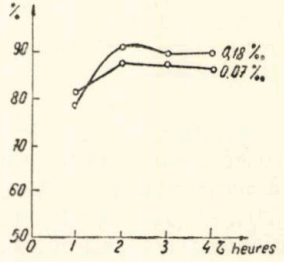


Fig. 11. — Variation de l'efficacité de l'inhibiteur (en %) fonction de temps pour l'acier V_2A; la concentration de l'acide phosphorique: 30% (0,7‰ inhibiteur), 52% (0,18‰ inhibiteur), la température: 20°C.

Les diagrammes montrent, clairement, l'action d'inhibition exercée par la thiourée sur la corrosion. L'inhibition, exprimée en pourcents, augmente au fur et à mesure que la quantité d'inhibiteur augmente, jusqu'à une certaine limite, puis elle se maintient constante.

L'inhibation maximum a atteint une valeur de 92%. Les concentrations de l'inhibiteur qui exercent dans des conditions bien déterminées concernant l'acidité et la température, une très bonne action inhibitrice sont, comprises entre 0,07 et 0,18‰. Pour une concentration moindre que 0,07‰ l'inhibation de la corrosion n'atteint pas des valeurs acceptables. Des concentrations dépassant 0,18‰ sont inutiles car l'inhibation n'augmente plus.

Dans la fig. 11 on peut observer que l'action de l'inhibiteur ne se manifeste pas immédiatement.

On obtient le maximum d'efficacité seulement après une ou deux heures. Cet aspect est probablement en liaison avec le fait que les processus physiques et chimiques, qui conduissent à la formation de la pellicule de l'inhibiteur, atteignent l'état d'équilibre au bout d'une periode déterminée.

4. Conclusions

1. On étudie la vitesse de corrosion des aciers OL 38, V_2A et V_4A dans l'acide phosphorique, pour des diverses concentrations et températures. La concentration a varié entre 20 et 89% et la température entre 20° et 50°C. On exprime les vitesses de corrosion sous la forme de diagrammes $\Delta_g - \tau$. On relève les influences accélératrices de la concentration et de la température de l'acide sur la corrosion, jusqu'à une certaine limite.

2. On étudie les posibilités de protection anticorrosive des aciers expérimentés, à l'action de l'acide phosphorique, à l'aide de l'inhibiteur thiourée.

Les résultats de laboratoire obtenus pour l'acier V_2A accusent une puissance de l'inhibation jusqu'à 92%.

Institut Polytechnique de Jassy,
Chaire de Technologie Chimique Anorganique
et
Institut d'Hygiène, Jassy

BIBLIOGRAPHIE

1. Томашов Н. Д. и сотр., *Химическое машиностроение*. 1960, **40**, стр. 20—24.
2. Bunger J., Werkstoffe u. Korrosion, 1955, *6*, S. 369.
3. Schwartz L., Revista de Chimie, 1959, *7*, p. 1071.
4. Franck F. O., Corrosion, 1960, *12*, p. 15—27.
5. Clifton D., Wainwright P., Corrosion Prevention and Control, 1965, **12**, *8*, pp. 12—19.
6. Pozin E. M., *Tehnologia sărurilor minerale*. Ed. Tehn., Buc., 1953, (trad. din l. rusă).
7. Machu W., Marcos I. H., Werkstoffe u. Korrosion, 1960, *11*, S. 81—87; Ibid., 1962, *6*, S. 171—174.

CERCETĂRI PRIVIND COROZIUNEA ALIAJELOR OL 38, V_2A ŞI V_4A ÎN ACID FOSFORIC ŞI PROTECŢIA LOR PRIN INHIBITORI

(Rezumat)

1. Se cercetează viteza de coroziune a oţelurilor OL 38, V_2A şi V_4A în acid fosforic de concentraţii şi temperaturi diferite. Concentraţia acidului a variat între 20 şi 89%, iar temperatura între 20° şi 50°C. Vitezele de coroziune sînt redate sub forma diagramelor

$\Delta g - \tau$. Se scot în evidenţă influenţele acceleratoare ale concentraţiei acidului (pînă la concentraţia de 68,9%) şi temperaturii.

2. Se cercetează posibilităţile de protecţie anticorosivă a oţelurilor amintite cu ajutorul inhibitorului tiouree. Rezultatele obţinute pentru oţelul V_2A, în condiţiile de experimentare din laborator, indică o putere de inhibare de aproximativ 90%.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Reprezentarea grafică a formei şi dimensiunilor epruvetelor metalice.

Fig. 2. — Variaţia conductibilităţii specifice a acidului fosforic, funcţie de concentraţia sa, la 25°C.

Fig. 3. — Variaţia vitezei de coroziune a oţelului OL 38, funcţie de concentraţia acidului fosforic: *1*—20% H_3PO_4, *2*—30% H_3PO_4, *3*—52% H_3PO_4, *4*—89% H_3PO_4, temperatura: 20°C.

Fig. 4. — Variaţia vitezei de coroziune a oţelului V_2A, funcţie de concentraţia acidului fosforic: *1*—20% H_3PO_4, *2*—30% H_3PO_4, *3*—52% H_3PO_4, *4*—89% H_3PO_4; temperatura: 20°C.

Fig. 5. — Variaţia vitezei de coroziune a oţelului V_4A funcţie de concentraţia acidului fosforic: *1*—20% H_3PO_4, *2*—30% H_3PO_4, *3*—52% H_3PO_4, *4*—89% H_3PO_4; temperatura: 20°C.

Fig. 6. — Variaţia vitezei de coroziune a oţelului OL 38 în acid fosforic de concentraţie 20%, funcţie de temperatură: *1*—20°C, *2*—30°C, *3*—40°C, *4*—50°C, *5*—90°C.

Fig. 7. — Variaţia vitezei de coroziune a oţelului V_2A în acid fosforic de concentraţie 20%, funcţie de temperatură: *1*—20°C, *2*—30°C, *3*—40°C, *4*—50°C.

Fig. 8. — Variaţia vitezei de coroziune a oţelului V_4A în acid fosforic de concentraţie 30%, funcţie de temperatură: *1*—30°C, *2*—50°C, *3*—150°C.

Fig. 9. — Variaţia eficacităţii inhibitorului (în %) funcţie de concentraţie, pentru diferite durate de contact, în cazul oţelului V_2A; concentraţia acidului fosforic: 30%, temperatura: 20°C.

Fig. 10. — Variaţia eficacităţii inhibitorului (în %) funcţie de concentraţie, pentru diferite durate de contact, în cazul oţelului V_2A; concentraţia acidului fosforic: 52%, temperatura: 20°C.

Fig. 11. — Variaţia eficacităţii inhibitorului (în %) funcţie de perioada de contact, în cazul oţelului V_2A; concentraţia acidului fosforic: 30% şi 52%, temperatura: 20°C.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

D. C. 621.357.1

DÉCOMPOSITION DE L'AMALGAME DE SODIUM EN PILE

PAR

RADU VASILIU

Communication présentée à la session scientifique de l'Institut Polytechnique de Jassy, 28—30 Septembre 1967

1. Introduction

Un grand nombre de recherches ont été consacrées à l'étude de la décomposition des amalgames en général et de l'amalgame de sodium en particulier, grâce au très grand intérêt théorique et pratique, suscité par ce phénomène.

Les données expérimentales et leurs interprétations diffèrent, souvent, par rapport à l'auteur ; c'est ainsi que pour la vitesse du processus de décomposition chimique dans de solutions alcalines, A. N. Frumkin, Z. A. Iofa et Z. B. Petchkovskaia admettent l'équation $i = kC^{0,5}$ [1], [2], P. Gallone propose l'équation $i = kC$ [3], tandis que A.N. Frumkin, B. N. Korsynov et Z. A. Iofa, dans quelques Notes plus récentes [4], [5], admettent les équations $i = kC$ pour les solutions ayant pH$>$10 et $i = kC^{0,5}$ pour les solutions avec pH = 7...9.

Même dans des travaux antérieurs [6]...[8] consacrés à l'étude de la décomposition de l'amalgame de sodium, on trouve des résultats différents.

La dispersion des données expérimentales montre que le phénomène n'offre pas la possibilité d'une reproduction rigoureuse et qu'il existent des nombreux facteurs dont l'influence exercée sur la décomposition est difficile à controler.

G. I. Volkov [9], en faisant la même remarque, suppose une éventuelle impureté des substances, utilisées par divers auteurs, en constatant que la majorité de ceux-ci admettent comme seul critère de pureté, la reproduction des résultats expérimentaux.

Mais il est assez difficile qu'un expérimentateur reussît à obtenir, dans une série d'expériences, des résultats concordants et par conséquent la dispersion des résultats obtenus par différents auteurs ne manque pas de justification.

Dans cette Note nous avons étudié la décomposition électrochimique de l'amalgame de sodium en pile, en solution alcaline, en considérant que le processus ne diffère pas de la décomposition chimique que par la formation de l'hydrogène sur l'anode, (on suppose qu'il n'y a pas lieu la formation de l'hydrogène sur la surface de l'amalgame), les réactions étant les mêmes.

Les expériences ont été réalisées dans des conditions analogues à celles dans lesquelles se déroule le processus industriel de décomposition, mais pas identiques.

2. Partie expérimentale

La décomposition de l'amalgame a été réalisée dans un appareil (fig. 1) qui permet la mesure du volume d'hydrogène provenu de la décomposition, aussi bien que la mesure de l'intensité du courant.

La vase V, ayant un volume d'environ de 200 ml, où se produit la décomposition, contient une solution de 5% NaOH. La solution est d'une concentration assez forte et l'hydroxide formé ne peut pas modifier sensiblement la concentration d'une telle manière qu'on puisse réaliser dans la même solution plusieurs déterminations.

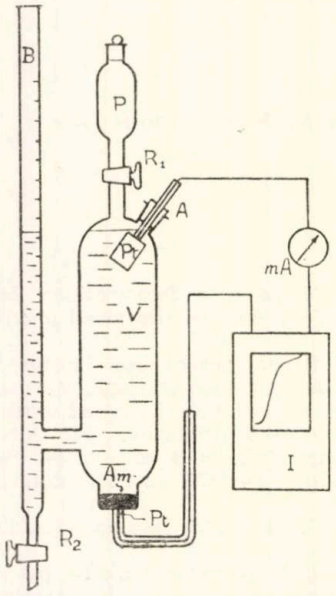


Fig. 1

L'amalgame qui se trouve dans la partie inférieure de la vase V, à savoir dans l'espace Am, est mis en contact avec le circuit extérieur par un fil de platine. L'anode A, en platine, est rangée à une distance convenable de la cathode d'amalgame, de sorte que l'intensité du courant, au début de la décomposition, soit comprise entre 50...100 mA (D_c=200...400 A/m^2). Par le déplacement du niveau de la solution dans la burette B, on détermine le volume d'hydrogène, obtenu par la décomposition de 1 ml d'amalgame de concentration 1M ou 0,5M.

Le courant de décomposition est mesuré à l'aide d'un miliampermètre (mA) et d'un miliampermètre enregistreur (I). Avant d'effectuer l'expérience on a fait barboter l'hydrogène obtenu par voie électrolytique afin de saturer la solution.

L'erreur de détermination du volume de gaz dégagé, due a la différence des niveaux du liquide dans la vase V et dans la burette B, est de 0,75%, ce qui rend négligeable la nécessité du nivellement des deux ménisques.

Les conditions de pureté ont été observées, en utilisant pour la formation de l'amalgame, le mercure distillé dans une atmosphère oxydante (conformément aux indications de la littérature [10]...[12]), et sodium métallique chimique.

Les solutions ont été preparées avec de l'hydroxyde de sodium chimique et de l'eau bidistillée.

3. Résultats et discussions

La courbe $i = f(\tau)$, tracée à l'aide du miliampàrmètre enregistreur, est représentée dans la fig. 2. Son allure est commune pour la majorité des déterminations. La reproductibilité assez bonne, n'est pas tout de même absolue, et souvent on obtient des écarts des valeurs mais qui n'entraînent pas une modification de la forme générale de la courbe.

Dans le graphique on peut distinguer trois domaines distincts de la décomposition : un premier domaine (*a-b*), au début du procesus, avec une variation rapide de l'intensité du courant, un second domaine (*b-c*), qui correspond à une durée plus longue, la variation de l'intensite du courant étant plus lente, et enfin le troisième domaine (*c-d*), qui marque la fin de la décomposition. Pour ce dernier domaine on observe une chute brusque de l'intensité du courant, accompagnée par une agitation spontanée de l'amalgame, due aux effets superficiels du mercure [10].

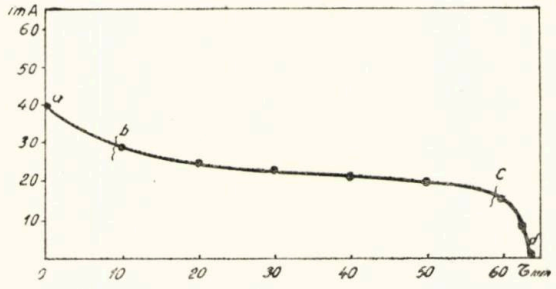


Fig. 2

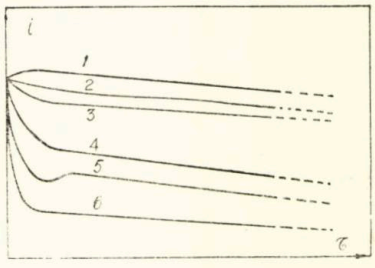


Fig. 3

De tous ces domaines, c'est le premier seulement qui n'est pas reproductibile pour toutes les déterminations ; les deux autres gardent leurs allures.

Au début de la décomposition l'allure de la courbe $i = f(\tau)$ présente quelques fois des différences, par rapport à la courbe indiquée dans la fig. 2. Dans la plupart des déterminations l'intensité du courant est plus grande au début puis diminue très rapidement selon une exponentielle et enfin s'approche d'une façon sensible d'une droite. Les déterminations ont été effectuées dans des conditions très variées à savoir : par l'introduction de l'électrode séchée au préalable, par l'interruption et la reprise de la décomposition, par l'interruption de la décomposition, en ôtant l'electrode de platine de la solution et par la reprise de la décomposition, par l'introduction de l'électrode, etc. Dans la fig. 3 on donne les courbes obtenues en représentant la variation du courant au début de la décomposition, dans diverses cas. En expérimentant avec des électrodes de platine (plaque ou fil), des électrodes de fer, charbon ou tungstène, on a obtenu de diverses formes pour la courbe $i = f(\tau)$ au début de la décomposition (le domaine *a-b*, fig. 3), à savoir : *1* — pour électrode de fer et quelques fois de platine,

2-3-4 — pour électrode de platine et de fer, *1-3* — pour électrode de tungstène, *5-6* — pour électrode de charbon.

Les résultats montrent que le premier domaine du processus de décomposition en pile est fortement influencé par l'état de l'électrode, par sa surface, et par d'autres facteurs qui ne peuvent être facilement contrôlés, par exemple l'apparition des centres de formation des bulles d'hydrogène, etc. Quelques fois, plus fréquemment pour les électrodes de fer, on observe au commencement une faible accéleration de la décomposition (courbe *1*, fig. 3) qu'on pourrait attribuer à la surface oxydée du fer. Par conséquant le premier domaine de la courbe n'est concluant pour le processus de la décomposition, tandis que le deuxième et le troisième accusent une très bonne réproduction quant à la forme de la courbe et même aux valeurs, si les condition de l'expérience sont gardés identiques.

En considérant que pour la production de n_H moles d'hydrogène il en est nécessaire un transfert de charge électrique de $2n_HF$ coulombs, on a $Q = 2n_HF$; mais $n_H = pv_H/RT$ et par conséquent $Q = 2pFV_H/RT$ et compte tenu que $i = dQ/d\tau$ il en résulte :

$$V_H = K\int_0^{\tau} i\,d\tau \tag{1}$$

avec

$$K = \frac{RT}{2pF}.$$

L'intégration graphique d'une courbe du type (*1*) mène à une courbe du type (*2*) (fig. 4). Si l'on prend toutes les précautions en vue d'assurer une mesure exacte du volume d'hydrogène dégagé par la décomposition de l'amal-

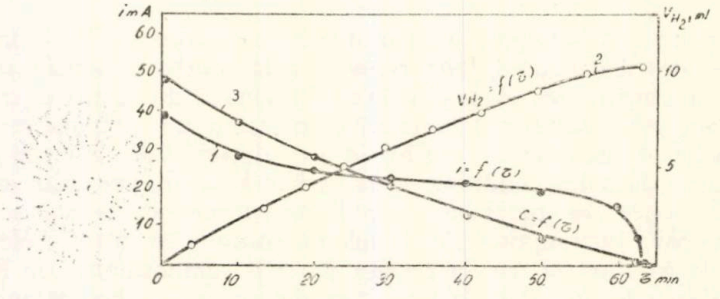


Fig. 4

game, en fonction du temps, on obtient les valeurs expérimentales qui fournissent une courbe semblable à celle déterminée par voie théorique. Au début les expériences ont été réalisées à l'aide d'un appareil indiqué par la littéra-

ture ; nombre d'observations effectuées lors des déterminations, et en même temps les écarts entre les valeurs obtenues par voie théorique et par voie expérimentale quant aux fonctions $i = f(\tau)$ et $V_H = f(\tau)$, nous ont conduit à réaliser, après quelques variantes, l'appareil indiqué dans la fig. 1. En analysant les erreurs de détermination introduites par cet appareil nous avons constaté que pour une température constante la mesure du volume de gaz ne nécessite pas à niveller la solution dans les deux branches. Dans cettes conditions l'erreur est au dessous de 1 %, et la concordance entre les fonctions $i = f(\tau)$ et $V_H = f(\tau)$ est satisfaisante.

On a déterminé les valeurs expérimentales pour les deux fonctions, avec des amalgames $1M$ et $0{,}5M$ (l'amalgame $1M$ a une concentration d'approximatif 0,2 %, proche de celle de l'amalgame obtenu dans les cellules industrielles par le procédé avec cathode de mercure) dans des solutions d'hydroxyde de sodium de 5 %, ayant une concentration voisine à celles des solutions industrielles obtenues par la décomposition de l'amalgame. Les valeurs ont été obtenues en utilisant une anode de platine.

De l'équation (1), en tenant compte que $dV_H = -K_1\, dC$, il en résulte

$$i = -K' \frac{dC}{d\tau} \tag{2}$$

où

$$K' = \frac{K_1}{K}\,.$$

À l'aide des données expérimentales on a calculé une suite de valeurs pour la fonction $i = f(C)$. Cette fonction, qui caractérise la cinétique du processus, accuse, dans une première approximation, une même forme que la fonction $i = f(\tau)$ (fig. 5). Dans ce cas on peut délimiter les mêmes do-

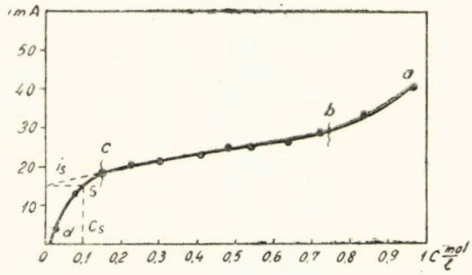


Fig. 5

maines dans l'évolution de processus, à savoir au début, pendant, et à la fin de la décomposition. En considérant la branche *b-c* comme une droite on peut approximer ce domaine par l'équation

$$i = a + bC. \tag{3}$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

L'ordonnée a de la courbe $i = f(C)$ (fig. 5) correspond sensiblement à une valeur de la concentration de l'amalgame, pour laquelle apparaît l'agitation spontanée de la surface de mercure, mais ne coïncide pas d'une façon rigoureuse avec la fin de la décomposition. On considère, d'une manière approximative, que la décomposition est finie au moment de la chute brusque de l'intensité du courant. Ce détail ne présente d'ailleurs q'une importance théorique, car pour les dispositifs expérimentaux on estime comme fin de la décomposition, le moment ou l'amalgame a une concentration d'environ 0,005%, valeur qui évidemment ne correspond pas au moment de la fin réel de la décomposition.

L'approximation analytique de l'équation cinétique $i = f(C)$ élève nombre de difficultés vu la variation lente de l'intensité du courant, pour le domaine *b-c*, autant pour la fonction $i = f(\tau)$ que pour $i = f(C)$; par conséquent toutes les deux peuvent être approximées par des droites.

Cette manière approximative d'interpréter les résultats expérimentaux mène à des conclusions opposées aux celles des équations théoriques du phénomène car il n'est pas posible que les fonctions $i = f(\tau)$ et $i = f(C)$ soient linéaires, bien que les graphiques peuvent être considérés comme autant.

En considérant les fonctions $V_H = f(\tau)$, $i = f(V_H)$, $i = f(C)$ $C = f(\tau)$, représentées par leur équations et en admettant l'hypothèse que $i = f(C)$ est une droite ($i = KC$), il en résulte que $i = f(\tau)$ est une fonction exponentielle. Si l'on admet que $i = f(C)$ est une parabole ($i = KC^{1/2}$), hypothèse valable en quelques cas, il en résulte pour $i = f(\tau)$ une droite.

Une représentation graphique, à une échelle plus reduite, ne permet pas de saisir ces différences et apparemment il n'y a aucune erreur si l'on considère les graphiques des fonctions $i = f(\tau)$ et $i = f(C)$ comme des droites. Une analyse minutieuse et une représentation graphique à une échelle convenable mettent en évidence des différences saisissantes entre ces fonctions.

Dans la fig. 6 sont indiqués les résultats d'un grand nombre d'essais expérimentaux, qui concordent aux équations théoriques (cas *I*). Une répresentation graphique pour le domaine *b-c* (fig. 1), à une échelle suffisamment grande, met en évidence les détails qui permettent à reconnaître que $i = f(C)$ peut être approximée par une droite tandis que $i = f(\tau)$ et $i = f(C^{1/2})$ sont représentées, chacune, par une courbe de degré supérieur.

La cinétique de la décomposition en pile de l'amalgame de sodium en solution d'hydroxyde de sodium 5%, pour le domaine *b-c*, peut être décrite par l'équation

$$i = KC. \tag{4}$$

La vitesse de la décomposition de l'amalgame de sodium en solutions alcalines est influencée par la nature de l'anode. C'est ainsi qu'en utilisant des anodes de platine, fer, charbon, avec des surfaces égales, et placées à

la même distance de l'amalgame (en réalisant ainsi, tant que possible, des conditions identiques de décomposition) on obtient les courbes $i = f(\tau)$ (fig. 7).

La nature de l'électrode n'exerce aucune influence sur la forme de la courbe, c'est-à-dire sur la cinétique du processus mais seulement sur la vitesse de celui-ci, qui décroit d'après la suite suivante : fer, platine, charbon.

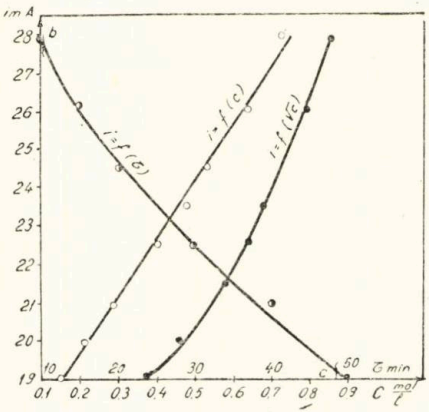


Fig. 6

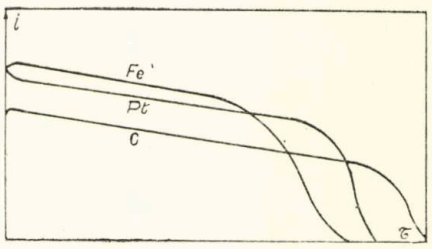


Fig. 7

4. Conclusions

1. La décomposition de l'amalgame de sodium en pile, en solution d'hydroxyde de sodium 5%, présente trois domaines distincts dans lesquels le processus se développe d'une manière différente.

2. Dans les conditions indiquées, on constate pour le deuxième domaine le plus long comme durée, une proportionnalité entre l'intensité du courant et la concentration de l'amalgame.

3. L'utilisation de différents anodes : platine, fer, charbon, modifie seulement la vitesse du processus, la cinétique en restant la même.

Institut Polytechnique de Jassy,
Chaire de Chimie Physique

BIBLIOGRAPHIE

1. Frumkin A. N., Bagoţki V., Iofa Z., Kabanov B., *Cinetica proceselor electrodice.* EES, Buc., 1954, p. 286, (trad. din l. rusă).
2. Иофа З. А., Печковская З. В., ДАН СССР, 1948, **56**, стр. 265.
3. Gallone P., Chimica (Milan), 1950, 5, *132,* p. 201.
4. Коршунов Б. Н., Иофа З. А., ДАН СССР, 1961, **141**, *1*, стр. 143.
5. Фрумкин Н. А., Коршунов Б. Н., Иофа З. А., ДАН СССР, 1961, **141**, *2*, стр. 413.

6. Klein A., Z. anorg. Chem., 1924, **137**, S. 33.
7. Brönsted J., Kane N., J. Amer. Chem. Soc., 1931, **53**, p. 3624.
8. Fletsher F., Kilpatrick J., J. Phys. Chem., 1938, **42**, p. 113.
9. Волков Г. И., ЖФХ, 1953, *2*, стр. 194—196.
10. Пугачевич П. П., *Техника работы со ртутью в лабораторных условиях*. Госхимиздат, М., 1961.
11. Şchiopu M., communication privée.
12 Gordon Ch., Wichers E., Ann. New-York Acad. Sci., 1957, **65**, p. 369
13. Calistru C., Popovici A., Leonte C., Herşcovici M., St. şi cerc. şt., Acad. R. P. R., fi iala Iaşi, 1954, **V**, *1-2*, p. 197.

DESCOMPUNEREA AMALGAMULUI DE SODIU ÎN PILĂ

(Rezumat)

Lucrarea, cu un caracter experimental, se referă la descompunerea amalgamului de sodiu, în soluţie de hidroxid de sodiu 5%, într-o pilă în care amalgamul este pol negativ, iar polul pozitiv este format din platină, fier sau cărbune.

Înregistrînd curentul debitat de pilă şi măsurînd volumul hidrogenului degajat din reacţia de descompunere, se calculează curentul în funcţie de concentraţia amalgamului.

Se stabileşte că în cazul descompunerii în pilă a amalgamului de sodiu, în soluţie de hidroxid de sodiu 5%, procesul prezintă trei domenii. În domeniul mijlociu, cel mai lung ca durată, intensitatea curentului debitat de pilă variază liniar în funcţie de concentraţia amalgamului.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

C.Z. 66.096

MODELAREA MACROCINETICĂ A PROCESELOR CHIMICE INDUSTRIALE

I. SISTEMATIZAREA PROCESELOR CHIMICE INDUSTRIALE

DE

C. CALISTRU şi CORNELIA LEONTE

Comunicare prezentată la Conferinţa Republicană de Chimie, Timişoara, 27 — 30 iunie 1966

1. Introducere

Dezvoltarea industriei chimice în epoca actuală a determinat modificări importante în structura ştiinţelor tehnice chimice [1]. Ramura ştiinţelor tehnice chimice consacrată cercetării proceselor chimice industriale capătă, în noile condiţii de dezvoltare, o importanţă mereu sporită. Cercetările teoretice şi experimentale întreprinse în domeniul proceselor chimice industriale au dus la acumularea unui bogat material, de aceea una din problemele importante şi actuale ale acestui domeniu este constituită de sistematizarea materialului existent, a tratării lui unitare sub aspectul cercetării şi calculului.

Procesul chimic industrial reprezintă un proces complex, elementul său constitutiv principal fiind reacţia chimică. Numeroşi autori, acordînd o importanţă deosebită reacţiei chimice, au clasificat procesele chimice industriale luînd drept criteriu natura reacţiilor chimice [2]...[4]. Procesul chimic nu se poate însă reduce numai la reacţia chimică şi de aceea o serie de alţi autori au luat în consideraţie un alt criteriu sau simultan mai multe criterii [5]... [10].

Clasificările şi sistematizările propuse au dus la o conturare mai accentuată a ramurii ştiinţelor tehnice chimice al cărui obiect este constituit de cercetarea proceselor chimice industriale.

În cele ce urmează se consideră că este necesară şi că, în condiţiile actuale, este posibilă realizarea unei sistematizări mult mai complete a proceselor chimice industriale, sistematizare care să favorizeze modelarea matematică a acestora. În acest sens se arată că procesul chimic industrial poate fi privit ca un ansamblu unitar alcătuit dintr-o serie de „procese macroscopice elementare". Clasificarea proceselor chimice industriale poate fi întocmită folosind drept criteriu natura proceselor macroscopice elementare.

2. Procesele macroscopice elementare

Procesul chimic industrial este întotdeauna complex. Pentru cunoaşterea calitativă şi cantitativă a acestuia este de aceea necesară stabilirea proceselor care-l constitue, cercetarea fiecărui proces elementar în parte, precum

şi a interacţiunii lor în cadrul unităţii considerate. În acest sens, problema principală iniţială constă în a defini procesul elementar şi a stabili criteriul sau criteriile pe baza cărora se pot distinge diferitele tipuri ale acestor procese.

Prin urmărirea unui proces chimic industrial, ca de altfel şi a unui proces fizic industrial, se constată că acestea se manifestă de cele mai multe ori funcţie de condiţiile lor de desfăşurare, prin legităţi diferite. O aceeaşi legitate corespunde manifestării cu precădere a unuia din procesele simple componente.

Procesul cel mai simplu care se manifestă macroscopic unitar şi care poate fi caracterizat numai printr-un mecanism microcinetic se numeşte *proces macroscopic elementar*. Ansamblul proceselor macroscopice elementare alcătuieşte procesul chimic industrial, ordinea desfăşurării lor, reprezentînd mecanismul macrocinetic al procesului.

Criteriul pentru stabilirea tipurilor de procese macroscopice elementare îl constituie natura schimbărilor fazei sau fazelor iniţiale, la trecerea acestora într-o stare finală în cursul unui proces fizic sau chimic. Modificările fazelor iniţiale în faze finale pot fi de ordin calitativ sau cantitativ, reprezentînd schimbări de masă sau de energie. Procesele macroscopice elementare care produc schimbări calitative au fost numite *procese macroscopice elementare de transformare* sau simplu — procese elementare de transformare. Acestea, la rîndul lor, se grupează în *procese macroscopice elementare de transformare de masă* şi *procese macroscopice elementare de transformare de energie*. Procesele macroscopice elementare care determină schimbări cantitative sînt cele *de transfer*. Acestea din urmă se grupează în *procese de transfer de masă* şi *procese de transfer de energie*.

Pentru a stabili care sînt procesele macroscopice elementare de transformare de masă se alege, în continuare, drept criteriu, natura modificărilor de calitate a fazei finale în raport cu faza sau fazele iniţiale. În tabelul 1 sînt indicate procesele elementare de transformare de masă stabilite pe baza criteriului menţionat.

Tabelul 1

Procese macroscopice elementare de transformare

Nr. crt.	Procesul macroscopic elementar de transformare	Ecuaţia caracteristică [faze iniţiale şi finale]
1.	Transformarea stării de agregare	$[A_1]_m \rightarrow [A_1]_n$
2.	Amestecarea moleculară	$[A_1]_m + [A_2]_m \rightarrow [A_1 + A_2]^*_m$
3.	Dizolvarea	$[A_1]_m + [A_2]_n \rightarrow [A_1 + A_2]^*_m$
4.	Reacţia chimică	$[A_1 + A_2]_m \rightarrow [A_1']^m$
5.	Adsorbţia (desorbţia)	$[A_1]_m + K \underset{(\leftarrow)}{\rightarrow} [A_1 + K]^*_{ads}$
6.	Formarea germenilor	$[A_1 + A_2]_m \rightarrow [A_1 + A_2]_n + [A_1]_n$

Simbolul de tipul $[A_1]_m$ reprezintă o fază. A_1, A_2 reprezintă componentele fazei, m, n indică starea de agregare, simbolul $[A_1 + K]_{ads}$ reprezintă stratul superficial al unui catalizator K în care s-a adsorbit componentul A_1. Ecuațiile caracteristice din coloana a doua a tabelului 1 indică faza sau fazele inițiale și finale, precum și natura schimbărilor calitative.

Oricare din procesele macroscopice elementare de transformare se petrece într-un punct macroscopic, care poate aparține unui volum sau unei suprafețe. Se presupune că punctul macroscopic poate conține particule chimice care fac parte dintr-o singură fază sau din două faze și care au, în consecință, o structură corespunzătoare. Prin desfășurarea procesului elementar de transformare are loc, funcție de tipul procesului, o anumită modificare calitativă a structurii punctului.

Modificarea de structură specifică unui anumit proces elementar de transformare poate avea loc la scară macroscopică obișnuită, fără să aibă loc schimbări de altă natură, numai dacă volumul sau suprafața, în care urmează să se petreacă procesul considerat, are aceeași structură inițială specifică. Ecuațiile caracteristice indicate în tabelul 1 se referă la faze și, ca urmare, reprezintă un proces la scara macroscopică obișnuită. Așa de exemplu, în cazul reacției chimice ca proces elementar de transformare, faza $[A_1 + A_2]_m$ poate avea structura inițială specifică acestui proces. În acest sistem, în prealabil amestecat, există posibilitatea realizării numai a reacției chimice la scara macroscopică obișnuită și, ca urmare, ecuația caracteristică indicată reprezintă numai un astfel de proces. În cazul cînd se pleacă de la două faze inițiale, ansamblul acestora nu corespunde structurii inițiale specifice și ecuația caracteristică nu mai reprezintă un singur proces elementar. Așa de exemplu, ecuația caracteristică indicată în tabelul 1 pentru procesul numit „amestecare moleculară" include și procesele corespunzătoare de transfer de masă. Un astfel de proces elementar nu poate fi realizat singur la scara macroscopică obișnuită. Din aceeași categorie fac parte și celelalte procese, ale căror ecuații caracteristice au fost notate în tabelul 1 cu un asterisc.

Existența unor astfel de procese se manifestă însă unitar în anumite condiții de realizare a unor procese fizice sau chimice. R. Marc cercetînd procesul fizic de dizolvare găsește, cu mult timp în urmă, că nu numai transferul, ci și dizolvarea, ca proces elementar de transformare, poate determina viteza globală [11]. Alți autori au pus în evidență existența aceluiași proces elementar în cazul absorbției [12], [13]. În cercetarea proceselor catalitice industriale, manifestarea adsorbției ca proces elementar de transformare este luată curent în considerare.

Cele mai importante procese macroscopice elementare de transformare de energie sînt reprezentate de consumul și degajarea de căldură. Ele însoțesc, ca efect termic, oricare din procesele macroscopice elementare de transformare de masă.

În cercetarea proceselor chimice industriale, alături de procesele de transfer de masă se întîlnesc, în largă măsură, procesele de transfer de

căldură şi cele de transfer de cantitate de mişcare. Transferul de electricitate se ia în considerație la cercetarea proceselor electrochimice industriale şi a proceseler de corodare electrochimică.

3. Tipurile principale ale proceselor chimice din industria anorganică

Procesul chimic industrial este alcătuit, în esenţă, din procese macroscopice elementare de transformare şi de transfer. Dintre acestea procesele elementare de transformare de masă reprezintă constituentele inseparabile ale procesului chimic, reprezentînd sursa principală a proceselor de transfer, fiind direct legate de natura materiilor prime. Din această cauză criteriul ales pentru sistematizarea proceselor chimice industriale este reprezentat de natura proceselor macroscopice elementare de transformare de masă. Utilizarea acestui criteriu permite stabilirea unui număr mic de tipuri de procese chimice industriale şi indică, în acelaşi timp, căile principale pentru cercetarea cantitativă a fiecăruia din aceste tipuri.

În tabelul 2 sînt indicate principalele tipuri ale proceselor chimice din industria anorganică, stabilite pe baza criteriului menţionat [14].

Tabelul 2 a fost întocmit luîndu-se în considerație următoarele simplificări : a) în oricare din tipurile menţionate are loc o singură reacţie de tipul

$$A_1 + A_2 \rightarrow A_1' \quad ;$$

b) cantităţile fazelor iniţiale sînt cele stoechiometrice ; c) numai un singur component poate trece dintr-o fază în alta.

În cadrul fiecărui tip de procese chimice industriale se manifestă, desigur, alături de procesele elementare considerate în definirea tipului, procesele elementare de transformare de energie, procesele de transfer de masă, căldură şi cantitate de mişcare. Într-o primă etapă de cercetare a fiecăruia din tipurile menţionate, se iau în considerație numai procesele elementare de transformare şi numai acele procese de transfer de masă care sînt determinate de procesele de transformare.

Ansamblul acestor procese elementare, inclusiv ordinea desfăşurării lor, alcătuieşte structura generală a tipului procesului chimic industrial. Acestei structuri îi pot corespunde mai multe mecanisme macrocinetice. Există posibilitatea stabilirii mecanismelor macrocinetice posibile în cadrul fiecărui tip de proces. Unui aceluiaşi mecanism macrocinetic îi corespunde o anumită ecuaţie cinetică diferenţială, care constituie ceea ce vom denumi *modelul macrocinetic*. Operaţia de stabilire a acestora se numeşte *modelare macrocinetică*. Aceasta din urmă este considerată ca o primă etapă în modelarea matematică a proceselor chimice industriale. În acelaşi timp, pe baza modelării macrocinetice se pot concepe metodele iniţiale de cercetare experimentală la o scară de laborator a oricărui proces chimic industrial concret.

Tabelul 2

Tipuri de procese chimice industriale

Nr. crt.	Tipuri de procese posibile	Ecuaţia caracteristică	Exemple de procese reale
1.	Amestecare moleculară — reacţie chimică	$[A_1 + A_1'']_m + [A_2 + A_2'']_m \rightarrow [A_1' + A_1'' + A_2'']_m$	— sinteza acidului clorhidric — oxidarea oxidului de azot — oxidarea fosforului vapori
2.	Amestecare moleculară — reacţie chimică — formare şi creştere de germeni	$[A_1 + A_1'']_m + [A_2 + A_2'']_m \rightarrow [A_1' + A_1'' + A_2'']_m + [A_1']_n$	— purificarea saramurii, apei etc. — oxidarea vaporilor de zinc — formarea ceţii, reducerea Na_2SO_4 cu cărbune
3.	Dizolvare — reacţie chimică	$[A_1 + A_1'']_m + [A_2 + A_2'']_n \rightarrow [A_1' + A_1'']_m + [A_2'']_n$	— procese de chemosorbţie — dizolvarea metalelor în acizi
4.	Dizolvare — reacţie chimică — formare şi creştere de germeni	$[A_1 + A_1'']_m + [A_2 + A_2'']_n \rightarrow [A_2'']_n + [A_1'' + A_1']_m + [A_1']_l$	— carbonatarea saramurii amoniacale — fabricarea acidului fosforic — caustificarea
5.	Adsorbţie — reacţie chimică — desorbţie	$[A_1 + A_2 + A_1'']_m + [K]_s \rightarrow [A_1' + A_1'']_m + [K]_s$	— oxidarea bioxidului de sulf — sinteza amoniacului — oxidarea amoniacului
6.	Adsorbţie — reacţie chimică — formare şi creştere de germeni	$[A_1 + A_1'']_m + [A_2 + A_2'']_n \rightarrow [A_1'']_m + [A_2'']_n + [A_1']_l$	— prăjirea piritei — reducerea oxizilor de fier — depunerea catodică a metalelor
7.	Adsorbţie (dizolvare) — reacţie chimică — dizolvare	$[A_1 + A_1'']_m + [A_2 + A_2'']_n \rightarrow [A_1'']_m + [A_1' + A_2 + A_2'']_n$	— solubilizarea bauxitei — formarea peliculelor prin corodare — electroliza cu catodă de mercur

Modelarea macrocinetică este, firește, bazată pe cercetarea numai a mecanismelor macrocinetice, nefiind necesar să se țină seama de mecanismele microcinetice ale proceselor elementare de transformare și de transfer. De aceea, în stabilirea modelelor macrocinetice nu este necesar să se apeleze la teoriile proceselor de transformare sau transfer.

Problemele referitoare la modelarea macrocinetică a fiecăruia din tipurile proceselor chimice industriale, indicate în tabelul 2, vor fi expuse în lucrările următoare.

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de tehnologia substanțelor anorganice

BIBLIOGRAFIE

1. Calistru C., Leonte C., Rev. învăț. sup., aprilie, 1966.
2. Groggins P. H., *Unit Processes in Organic Synthesis.* Mc. Graw Hill, New York, 1952.
3. Shreve R. N., *The Chemical Process Industries.* Mc. Graw Hill, London, 1956.
4. Епштейн Д. А., ЖПХ, 1946, **19**, *10.*
5. Eucken A., Jakob M., *Der Chemie-Ingenieur.* Akadem. Verlag, Leipzig, 1932.
6. Müller W. J., Chem. Fabrik, 1933, **6**, S. 33.
7. Keppeller G., *Technologische Kennzeichnung chemischer Apparaturen.* Bd. **III**/*2*, 1938.
8. Wicke E., Brötz W., Chem. Ing. Technique, 1952, **24**, p. 58.
9. Орочко Д. И., *Теоретические основы ведения синтезов жидких топлив.* Изд. АН СССР, М., 1955.
10. Jottrand R., Ind. Chim. Belge, 1965, **30**, *2*, p. 119.
11. Marc R., Ztschr. Phys. Chem., 1912. **79**, S. 71.
12. Emmert R. E., Ch. Eng. Prog., 1954, **87**, p. 50.
13. Кишиневский М. Х., Мочалова Л. А., ЖПХ, 1959, **32**, *5*, стр. 1016.
14. Calistru C., Leonte C., Ind. Chimique belge, C. r. XXXVI Congrès International de Chimie Industrielle, Bruxelles, 1966, I, p. 409.

MODÈLES MACROCINÉTIQUES DES PROCESSUS CHIMIQUES INDUSTRIELS

I. Systématisation des processus chimiques industriels

(Résumé)

Les modifications importantes produites récemment dans la structure de la technologie chimique ont déterminé la nécessité d'une nouvelle systématisation des matériaux concernant le développement et la recherche quantitative du processus chimique industriel.

Dans cette Note on montre que tout processus chimique industriel peut être considéré comme un ensemble unitaire d'une série des processus élémentaires dénommés *processus macroscopiques élémentaires.* Par processus macroscopique élémentaire on entend le plus simple procesus qui se développe d'une façon unitaire à l'échelle macroscopique et qui est caractérisé par un seul mécanisme microcinétique.

D'après la nature de la transformation des phases initiales en phases finales on établit les types de processus macroscopiques élémentaires de transformation possibles.

En utilisant comme critère la nature des processus macroscopiques élémentaires de transformation on propose une classification des processus chimiques industriels notamment pour ceux qu'on rencontre dans l'industrie chimique anorganique.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

C. D. 53.082.7; 621.3.08 ; 66.094.37 ; 546.171.1

AN ANALOGICAL MODEL OF THE REACTOR FOR AMMONIA CATALYTIC OXIDATION

BY

I. CURIEVICI and ŞT. UNGUREANU

Paper presented at the Republican Conference on Chemistry, Timişoara, June the 27—30st, 1966

1. The design of the reactor for ammonia catalytic oxidation has been long effected empirically, as no kinetic equation of the oxidation process existed. The first equation of the kind, worked out by L. E. Apelbaum and M. I. Temkin [1], starts from the supposition that the reaction rate is dependent on the rate of ammonia diffusion towards the surface of the catalyst. The results obtained by this equation are satisfactory, still, since it does not include temperature as a variable in the problem, it was thought preferable not to use it in modelling the reactor.

Other kinetic equation, as, for instance, those worked out by V. I. Atroschenko [2], V. P. Markov [2], are purely empiric and contain as variables but few of the magnitudes characteristic of the process, being thus limited in their application under certain working conditions.

An equation of a semiempiric character, also based on the hypothesis that the influence of diffusion may be determinative, was proposed by A. P. Oele [3]; it contains all the magnitudes influencing the process as variables.

2. In the present work, an analogical model of the reactor for ammonia catalytic oxidation was effected, starting from the kinetic relation of A. P. Oele. This involved establishing the functional dependence on temperature, of the physical parameters of the gas, as well as formulating some calculations.

3. The equation of mass transfer, proposed by Oele, is as follows:

$$\alpha = 0.924 \frac{\lambda \mathcal{R}e^{0.33}}{PC_p d} \quad \left[\frac{\text{Kmol.NH}_3}{\text{m}^2_{\text{wire}} \cdot \text{sec. atm.}}\right], \tag{1}$$

for a requested conversion of x, we should have:

$$\alpha \Delta p_{ml} nf = \frac{m_0 Gx}{28.96 - 11.96\, m_0}, \tag{2}$$

where the logarithmic mean pressure drop Δp_{ml} will take on the relation worked out by us:

$$\Delta p_{ml} = \frac{m_0 Px}{2.3 \log [1/(1-x)]}. \tag{3}$$

From relations (1), (2), and (3) we obtain:

$$\ln (1-x) = \frac{\lambda n f (11.82 m_0 - 28.6)}{C_p \mu^{0.33} d^{0.67} G^{0.67}}, \tag{4}$$

where the values λ, C_p, μ, must be taken at arithmetic mean of inlet gas temperature and sieve exit temperature.

4. Mean gas temperature may be derived from heat balance, if the variation of reaction thermal effect, function of temperature, together with the variation of mixture specific heat, function of temperature, are known. Taking into account the range of temperature and NH_3 concentration under which the process is usually taking place, and analysing the data provided by literature about C_p, as function of temperature in this range, it was possible to obtain the following linear relation:

$$C_p = 6.45 + (1.52 + 4.08 m_0) 10^{-3} \quad \left[\frac{\text{Kcal.}}{\text{Kmol.°C}}\right] \tag{5}$$

for $T_m \in [600\,°\text{K}, 1{,}100\,°\text{K}]$ and $m_0 \in [0.09, 0.12]$.

From eq. (5) and the relation of reaction thermal effect, function of temperature,

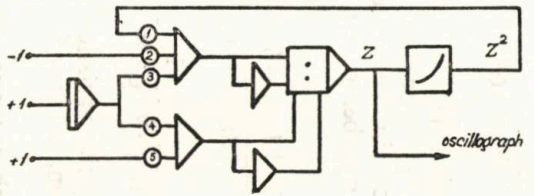
$$Q = 54{,}250 - 0.4\,(T_m - 298), \tag{6}$$

there results, supposing a drop of 20°C in final temperature of gases, owing to heat losses, the following final relation for mean temperature:

$$\begin{aligned}(1.52+4.08 m_0)\,10^{-3} T_m^2 + [0.241 m_0 + 6.465 - (1.52+4.08 m_0)\,10^{-3} T_0] T_m - \\ - 6.45 T_0 - 27{,}185 m_0 + 64.5 = 0.\end{aligned} \tag{7}$$

Analogical modelling of this equation (fig. 1) for $T_0 \in [300\,°\text{K}, 600\,°\text{K}]$ and $m_0 \in [0.09, 0.12]$ leads to the conclusion that relation $T_m = T_m(T_0, m_0)$ between those limits is approximately represented by a group of straight lines (Fig. 2), thus rendering possible to represent eq. (7) by the considerably simplified one:

$$T_m = 3{,}200 m_0 + 0.94 T_0 + 38. \tag{8}$$



Pot.	Coefficients	
1	$0.25\,A$	$A = 0.152 + 0.408\,m_0$
2	C	$B = 0.783 + 0.391\,m_0$
3	$0.33\,D$	$C = -0.228 + 2.630\,m_0$
4	$0.167\,A$	$D = 0.736 + 0.245\,m_0$
5	$0.50\,B$	

Variable dependent on machine: $Z = a_z(T_m - 600)$,
Variable independent of machine: $\tau = a_T(T_0 - 300)$,
Scale factor of amplitude: $a_z = 2.10^{-3}$,
Scale factor of time: $a_T = 3.10^{-3}$,
Machine equation: $$Z = \frac{0.25\,AZ + C + 0.33\,D}{0.5\,B - 0.167\,A}.$$

Fig. 1. — Analogical Model of Equation (7) worked out on Analogical Computer MEDA (Czekoslovakia)

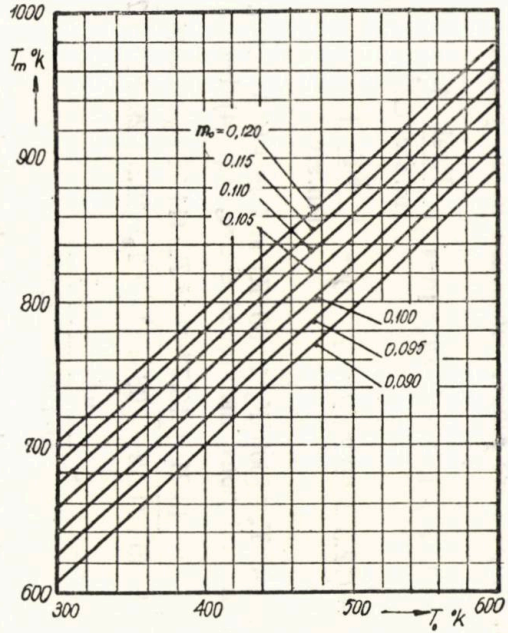


Fig. 2. — Curve Group $T_m = T_m(T_0, m_0)$ established by Model in Fig. 1.

5. To make use of eq. (4), experimental data published in literature on magnitudes λ and μ were also studied and the following relations were established for the temperature ranges concerned in the process:

$$\lambda = (3.31 + 12.77 \cdot 10^{-3} T_m)\, 10^{-6} \quad \left[\frac{\text{Kcal.}}{\text{m. sec.°C}}\right], \tag{9}$$

$$\mu = (12.5 + 29.20 \cdot 10^{-3} T_m) 10^{-6} \quad \left[\frac{\text{Kg.}}{\text{m. sec.}}\right], \tag{10}$$

both valid in the range $T_m \in [600\,°\text{K},\ 1{,}100\,°\text{K}]$ and $m_0 \in [0.9,\ 0.12]$.

According to the relations mentioned above, eq. (4) becomes:

$$\ln(1-x) = \frac{(3.21 + 12.77 \cdot 10^{-3} T_m)(11.75\, m_0 - 28.6)}{[6.45 + (1.52 + 4.08\, m_0)\, 10^{-3} T_0]\,(12.5 + 29.2 \cdot 10^{-3} T_m)^{0.33}} \times \times \frac{nf}{(d \cdot 10^6)^{0.67}} \cdot \frac{1}{G^{0.67}}. \tag{11}$$

6. Combining eq. (8) and (11), we obtain the relation:

$$\ln(1-x) = \frac{T_0 \cdot 10^{-3}(141\, m_0 - 343) + 479\, m_0^2 - 1{,}122\, m_0 - 106}{T_0 \cdot 10^{-3}(1.43 + 3.84\, m_0) + 13.06\, m_0^2 + 5.03\, m_0 + 6.51} \times \times \frac{nf}{(27.45 \cdot 10^{-3} T_0 + 93.44\, m_0 + 13.61)^{0.33}\,(d \cdot 10^6)^{0.67}} \cdot \frac{1}{G^{0.67}}. \tag{12}$$

The results of computation according to relation (12) are not satisfactorily coinciding with known experimental data, owing probably to simplifications undergone by eq. (2). But, in order to obtain the agreement, it is enough to introduce factor 1/1.5 into the second member of eq. (12) and we obtain the equation:

$$\ln(1-x) = \frac{T_0 \cdot 10^{-3}(94\, m_0 - 228.7) + 320\, m_0^2 - 748.1\, m_0 - 70.67}{T_0 \cdot 10^{-3}(1.43 + 3.84\, m_0) + 13.06\, m_0^2 + 5.03\, m_0 + 6.51} \times \times \frac{nf}{(27.45 \cdot 10^{-3} T_0 + 93.44\, m_0 + 13.61)^{0.33}\,(d \cdot 10^6)^{0.67}} \cdot \frac{1}{G^{0.67}}. \tag{13}$$

Considering that in the range $m_0 \in [0.09,\ 0.12]$ the variation of term m_0 is of little account for the result of computation, m_0 may be taken as constant and equal to 0.10.

By simplifying thus, and neglecting also other terms of reduced influence, eq. (13) becomes:

$$\ln(1-x)' = -\frac{21.93\cdot 10^{-3}\,T_0 + 14.59}{(9.22\cdot 10^{-6}\,T_0^2 + 16.36\cdot 10^{-3}\,T_0 + 8.35)^{1/3}} \times \times \frac{nf}{(d\cdot 10^6)^{2/3}} \cdot \frac{1}{G^{2/3}}. \tag{14}$$

Computation after eq. (14) leads to results agreeing satisfactorily with experimental data, as may be seen from Table 1, where the results obtained by L. E. Apelbaum's and M. I. Temkin's relations, as well as the results obtained by eq. (12) unrevised, are given. Experimental data for comparison were taken from Blasiak's works [4] and compared to those given out by Atroschenko [2].

Tabele 1

Number of sieves n	The rate of gas $\frac{l}{\text{cm}^2\cdot\text{h}}$	Gas charge G $\frac{\text{Kg}_{\text{mixture}}}{\text{m}^2_{\text{sieve}}\cdot\text{sec}}$	Conversion level x			
			Experimental data	Apelbaum and Temkin	Data obtained with eq. (12)	Data obtained wish eq. (14)
1	230	0.285	85.4	82.6	94.59	86.00
2	230	0.285	98.5	97.0	99.707	98.05
2	560	0.694	87.0	85.0	96.01	88.67
3	230	0.285	99.9	99.5	99.98	99.72
3	560	0.694	95.6	94.2	99.19	96.00
3	900	1.116	89.0	87.3	96.84	89.96

The constant data of process: $m_0 = 0{,}11$, $T_0 = 390°\text{K}$, $T_f = 1{,}123°\text{K}$, $d = 9\cdot 10^{-5}\,\text{m}$, $f = 1.87$.

7. As may be seen, eq. (14) contains as variables, magnitudes x, T_0, G, d, n, and f, being possible to compute each of them in relation to the others, thus completely solving both the problem of design and those occuring under working conditions.

In order to simplify the presentation of analogical modelling of eq. (14), we introduced the following notations:

$$\begin{cases} 21.93\cdot 10^{-3}\,T_0 + 14.59 = M(T_0), \\ 9.22\cdot 10^{-6}\,T_0^2 + 16.36\cdot 10^{-3}\,T_0 + 8.35 = N(T_0), \\ \dfrac{f}{(d\cdot 10^6)^{2/3}} = S. \end{cases} \tag{15}$$

Thus eq. (14) becomes:

$$1 - x = \exp\left(-\frac{M}{N^{1/3}} nSG^{-2/3}\right). \tag{16}$$

Analog modelling of eq. (16) may be carried out in two ways:

a) Considering as main independent variable T_0, eq. (16) takes on the aspect:

$$\frac{\mathrm{d}(1-x)}{\mathrm{d}T_0} = -nSG^{-2/3} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T_0}\left[\frac{M(T_0)}{N^{1/3}(T_0)}\right], \tag{17}$$

when function $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T_0}\left[\frac{M(T_0)}{N^{1/3}(T_0)}\right]$ will be set up by using eq.:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T_0}\left(\frac{M}{N^{1/3}}\right) = \frac{M}{N^{1/3}} \cdot \frac{N\mathrm{d}M/\mathrm{d}T_0 - \frac{1}{3} M\mathrm{d}N/\mathrm{d}T_0}{MN}. \tag{18}$$

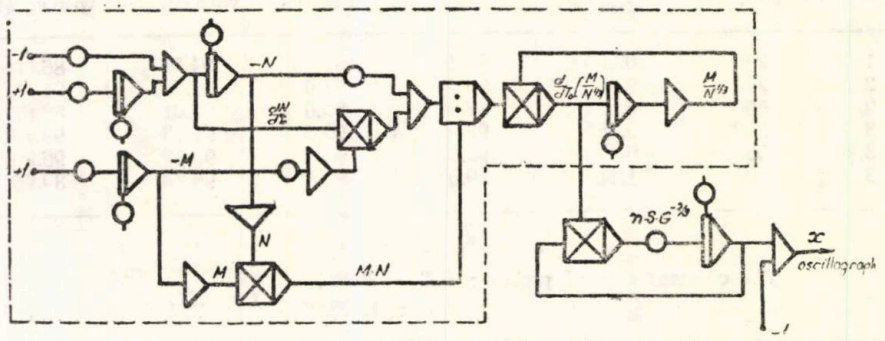


Fig. 3. — Analogical Model of Eq. (17) and (18).

The analogical model of eq. (17) and (18), taking into account the form of function M and N (s. eq. (15)) and their derivatives, is given in Fig. 3.

An alternative of this model, where the number of multipliers is reduced from 5 to 3, giving rise, in exchange, to three succesive integrations, is given in Fig. 4.

In the scheme in Fig. 4, function $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T_0}\left(\frac{M}{N^{1/3}}\right)$ is modelled after eq:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T_0}\left(\frac{M}{N^{1/3}}\right) = \frac{M}{N^{1/3}} \cdot \frac{68\cdot10^{-9}\,T_0^2 + 150\cdot10^{-6}\,T_0 + 103\cdot10^{-3}}{202\cdot10^{-9}\,T_0^3 + 494\cdot10^{-6}\,T_0^2 + 323\cdot10^{-3}\,T_0 + 122}, \tag{19}$$

resulted after introducing the values of function M and N and their derivati es from eq. (15) in eq. (18) and working out the corresponding computations.

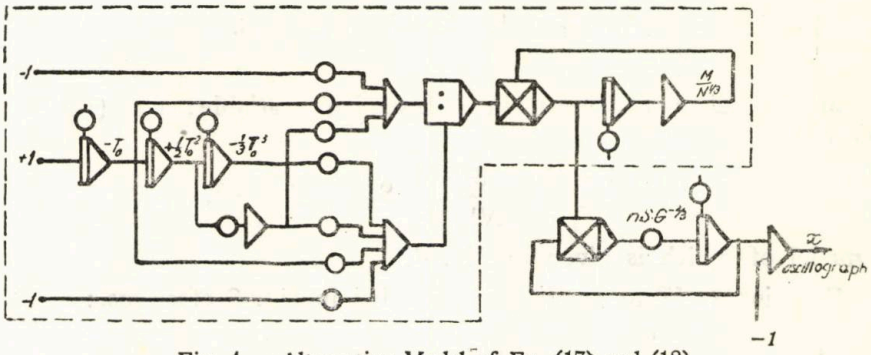


Fig. 4. – Alternative Model of Eq. (17) and (18).

By means of the models in figs. 3 and 4, plot sets of the form $x = x(T_0)$ may be drawn for various discrete values of sieve charge (attributing certain values to factor G, and introducing by means of the potentiometer the factor $G^{-2/3}$), of the number of sieves (n) and various types of sieves (factors S).

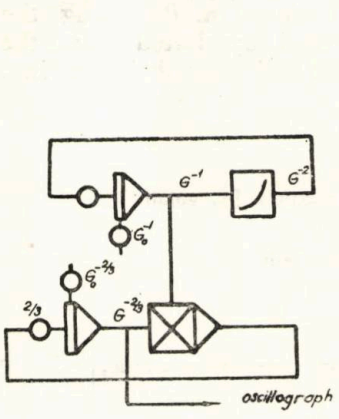


Fig. 5. – Analogical Model of Eq. (20).

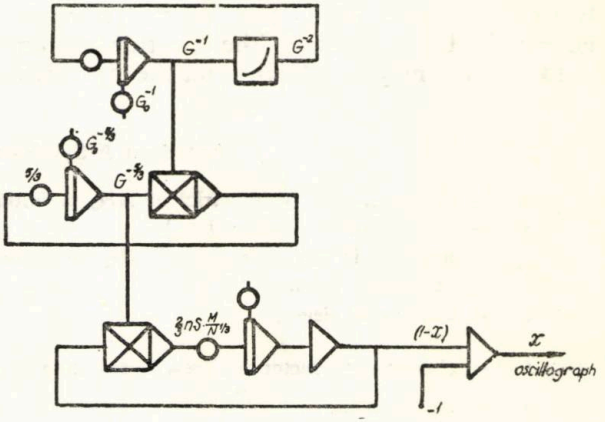


Fig. 6. – Analogical Model of Eq. (21).

Values of factor $G^{-2/3}$ may be taken from the curve established by means of the model in Fig. 5, set up from eqs. (20), where the independent variable is G and the dependent one is $G^{-2/3}$:

$$(20)\quad \begin{cases} G^{-2/3} = -\dfrac{2}{3}\displaystyle\int_{G_0}^{G} G^{-2/3}\, G^{-1}\, \mathrm{d}G + G_0^{-2/3}, \\ G^{-1} = -\displaystyle\int_{G_0}^{G} G^{-2}\, \mathrm{d}G + G_0^{-1}, \quad \text{for } G_{\min} = G_0 > 0. \end{cases}$$

b) G is taken as the main independent variable; eq. (16) is thus rendered:

$$(21)\quad \frac{\mathrm{d}(1-x)}{\mathrm{d}T_0} = \frac{M}{N^{1/3}} \cdot \frac{2}{3} nS(1-x)\, G^{-5/3},$$

the model of which is given in Fig. 6.

Function $G^{-5/3}$ in eq. (21) is modelled in fig. 6 after eqs.:

$$(22)\quad \begin{cases} G^{-5/3} = -\dfrac{5}{3}\displaystyle\int_{G_0}^{G} G^{-5/3}\, G^{-1}\, \mathrm{d}G + G_0^{-5/3}, \\ G^{-1} = -\displaystyle\int_{G_0}^{G} G^{-2}\, \mathrm{d}G + G_0^{-1}, \quad \text{for } G_{\min} = G_0 > 0. \end{cases}$$

By means of the model in Fig. 6, sets of plots $x = x(G)$ may be drawn from various values of initial temperature T_0 (by varying factor $M/N^{1/3}$), of sieve type, and of the number of sieves, n. By using the pattern in Figs. 3 and 4 (the portion circumscribed by dotted lines) the factor $M/N^{1/3}$ may be obtained on the curves, thus facilitating their drawing.

Notations & Symbols

m_0 — molar fraction (volumetric) of NH_3 in initial mixture, [% volume],
p — initial overall pressure, [ata.],
p_{ml} — logarithmic mean pressure of NH_3 in mixture, [ata.],
x — conversion level,
n — number of sieves,
f — characteristic factor of sieves, representing the wire area–sieve area ratio, $\left[\dfrac{m^2_{wire}}{m^2_{sieve}}\right]$,
d — wire dia, [m.],
G — gas charge on sieve square meter, representing nf m^2 active area for n sieves, $\left[\dfrac{\text{Kg. mixture}}{\text{sec. } m^2_{sieve}}\right]$,
α — mass transfer factor, $\left[\dfrac{\text{Kmol. } NH_3}{m^2_{wire}\text{.sec. ata}}\right]$,

C_p — molar specific heat at mean temperature, $\left[\frac{\text{Kcal.}}{\text{Kmol.}\,^\circ\text{C}}\right]$,

μ — dynamic viscosity of gas mixture at mean temperature, $\left[\frac{\text{Kg.}}{\text{m. sec.}}\right]$,

λ — thermal conductivity of gas mixture at mean temperature, $\left[\frac{\text{Kcal.}}{\text{m. sec.}\,^\circ\text{C}}\right]$,

T_0 — inlet gas temperature, [°K],

$T_m = \frac{1}{2}(T_0 + T_f)$ — mean temperature of gases, [°K],

T_f — gas temperature beyond sieves, [°K].

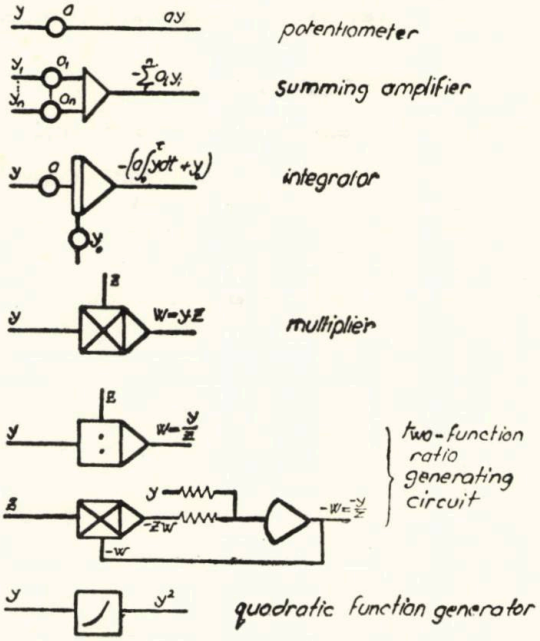


Fig. 7. — Symbols used for Computing Elements.

The Polytechnic Institute of Jassy,
Department of Chemical Technology

REFERENCES

1. Апелбаум Л. Е., Темкин М. И., *Окисление аммиака на сетках из платины и платино-родиевого сплава.* ЖФХ, 1948, **22**, *2*, стр. 179.
2. Атрощенко В. И., Каргин С. И., *Технология азотной кислоты.* М., 1962.
3. Oele A. P., *Technological Aspects of the Catalytic Combustion of Ammonia with Platinum Gauze Elements.* Chem. Eng. Sci., 1958, **III**, *1—2*, p. 146.
4. Blasiak E. a. o., *Technologia związków azotowych.* T. **II**, Warszawa, 1956, pp. 82—83.

MODELAREA ANALOGICĂ A REACTORULUI DE OXIDARE CATALITICĂ A AMONIACULUI

(Rezumat)

Se realizează modelarea analogică a reactorului de oxidare catalitică a amoniacului, plecînd de la ecuația cinetică (1) a lui A. P. Oele. În acest scop a fost stabilită dependența funcțională a parametrilor fizici ai amestecului aer-amoniac, de temperatură și de concentrația inițială (relațiile (5), (8), (9), (10)), folosind tehnica de calcul analogic (fig. 1 și 2) și au fost formalizate o serie de calcule.

Relația finală stabilită (ec. (14)) conține ca variabile toate mărimile care caracterizează procesul cercetat, fiecare din ele putînd fi calculată în funcție de celelalte, ceea ce rezolvă integral atît problema proiectării cît și problemele care se pun în exploatare.

Pentru ecuația finală (14) se dau modelele analogice în două ipoteze de calcul (fig. 3...6).

Explicația figurilor

Fig. 1. — Modelul analogic al ecuației (7) realizat pe un calculator analogic tip MEDA (Cehoslovacia).
Fig. 2. — Familia de curbe $T_m = T_m(T_0, m_0)$ stabilită pe modelul din fig. 1.
Fig. 3. — Modelul analogic al ecuațiilor (17) și (18).
Fig. 4. — Altă variantă a modelului analogic al ecuațiilor (17) și (18).
Fig. 5. — Modelul analogic al ecuației (20).
Fig. 6. — Modelul analogic al ecuației (21).
Fig. 7. — Simboluri utilizate pentru elementele de calcul.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

D. K. 66.048

STUDIEN IN DER RIESELFILMDESTILLATION
DER EINFLUSS DER HYDRODYNAMISCHEN BEDINGUNGEN AUF DEN STOFFAUSTAUSCHZAHLEN

VON

THEODOR SĂVEANU, MARIANA VASILIU und AL. STANCU

Mitteilung an die wissenschaftliche Tagung der Technischen Hochschule Jassy, 28—30 September 1967

1. Vorwort

In einer früheren Arbeit [1] wurde die Möglichkeit der Vergrösserung der Effizienz bei der Rieselfilmdestillation festgestellt. Die Versuche wurden auf einer Rieselfilmdestillationsanlage für zwei binäre Gemische: Äthanol—Wasser und Benzol—Essigsäure durchgeführt.

In dieser Arbeit studiert man für dieselben binären Gemische die Rolle der hydrodynamischen Bedingungen der beiden Phasen in dem Mechanismus des Stoffaustausches in der Rieselfilmdestillation. Es wird auch die Bestimmung des Geschwindigkeitsbereiches für Rücklauf und Dampf verfolgt, für welches die Veränderung der Wandgeometrie massgebend ist, welche zu merklichen Veränderung der Stoffaustauschzahl führt.

2. Versuchsergebnisse

Die künstliche Rauhigkeit beeinflusst hauptsächlich die flüssige Phase [2] ... [4] in welcher sie anwesend ist, aber ihr Einfluss manifestiert sich auch in der Dampfphase. Da die Rauhigkeit sich in der flüssigen Phase befindet, haben wir erstens die Veränderung der Stoffaustauschzahlen als Funktion der Rücklaufgeschwindigkeiten studiert.

Abb. 1 gibt die Veränderungen der Stoffdurchgangszahl K_F bezogen auf die flüssige Phase als Funktion der Reynoldszahl $\mathcal{R}e_F$ für verschiedene Rauhigkeitsdurchmesser ε. Der Bereich der Rücklaufströmung zwischen

$\mathcal{R}e_F = 30 \ldots 180$ zeigt eine wellige Rieselfilmströmung, mit den anfänglichen Werten sehr nahe stehend denjenigen der laminaren Rieselströmung.

Die Abb. 2 und 3, in welchen bei zwei Werten der Rauhigkeit die Kurven der Veränderung der Stoffdurchgangszahlen als Funktion von der Dampfgeschwindigkeit gezeichnet sind, zeigen ähnliche Allüren des Phänomens.

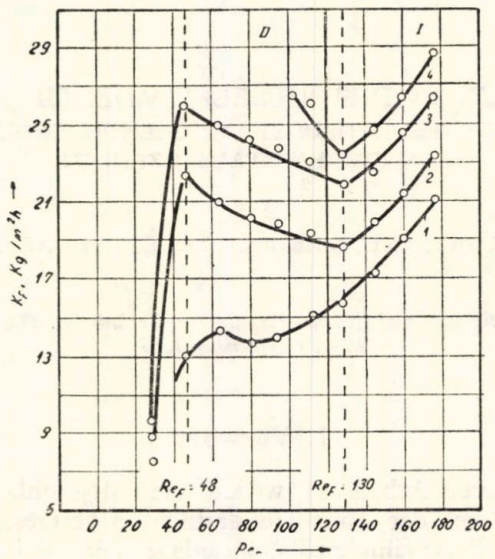


Abb. 1. — Veränderung der Stoffdurchgangszahl K_F als Funktion der Rücklaufhydrodynamik für das Gemisch Äthanol—Wasser; $1 - \varepsilon = 0{,}00$ mm, $2 - \varepsilon = 0{,}20$ mm, $3 - \varepsilon = 0{,}36$ mm, $4 - \varepsilon = 0{,}60$ mm.

Es wurde beobachtet dass für bestimmte Gebiete die Kurventangente plötzlich das Zeichen wechselt.

Auf diese Bemerkung gestützt haben wir das ganze Bestimmungsfeld in zwei Bereiche geteilt.

In Abb. 2 haben wir der Bereich *I*, zwischen Dampfgeschwindigkeiten $w_D = 0{,}66 \ldots 0{,}92$ m/s (entsprechend $\mathcal{R}e_D = 1\,400 \ldots 2\,000$) und der Bereich *II*, zwischen Dampfgeschwindigkeiten $w_D = 0{,}25 \ldots 0{,}66$ m/s (entsprechend $\mathcal{R}e_D = 530 \ldots 1\,400$) festgelegt.

Für die Veränderungen der Abb. 1, befindet sich der Bereich *I* im Gebiet $\mathcal{R}e_F = 130 \ldots 180$ und der Bereich *II* im Gebiet $\mathcal{R}e_F = 48 \ldots 130$.

Die repräsentativen Kurven der Destillation des Gemisches Benzol—Essigsäure (Abb. 3) zeigen dieselbe plötzliche Änderung in einem gewissen

Punkt, was ebenfalls die Teilung des Diagrammfeldes in zwei Bereiche (begrenzt von bestimmten Werten der Reynoldszahl) gestattet. Der Bereich *I* hat den unteren Wert der Reynoldszahl $\mathcal{R}e_D = 1\,400$, welcher gleich mit dem Gemisch Äthanol—Wasser ist.

Der Bereich *II* befindet sich zwischen $\mathcal{R}e_D = 810 \ldots 1\,400$.

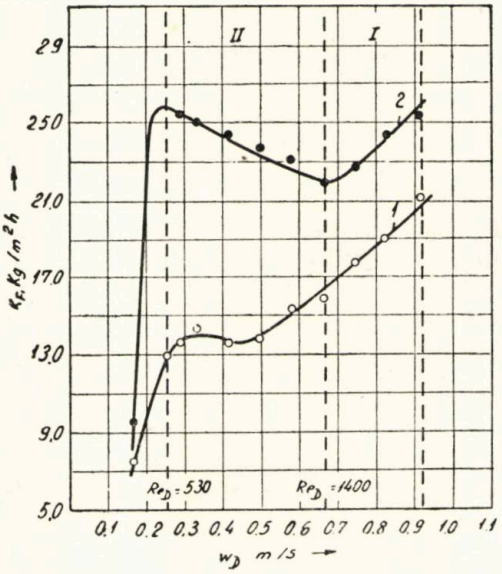


Abb. 2. — Veränderung der Stoffdurchgangszahl K_F als Funktion der Dampfgeschwindigkeit für das Gemisch Äthanol—Wasser; *1* — ε = 0,00 mm; *2* — ε = 0,36 mm.

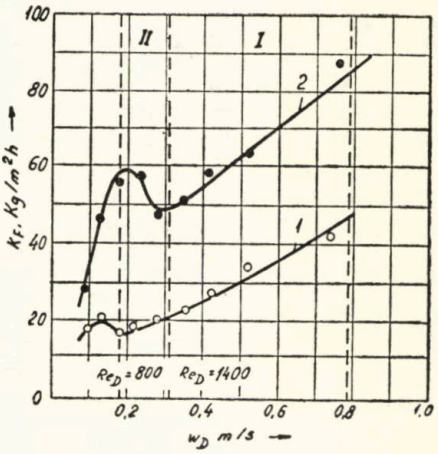


Abb. 3.— Veranderug der Stoffdurchgangszahl K_F als Funktion der Dampfgeschwindigkeit für das Gemisch Benzol—Essigsäure; *1* — ε = 0,00 mm, *2* — ε = 0,36 mm.

Da die Phänomene ähnlich, obwohl die Eigenschaften der zwei Gemische verschieden sind, haben wir nur beim Gemisch Äthanol—Wasser den Einfluss der hydrodynamischen Bedingungen auf den Stoffaustausch studiert.

In erster Reihe wurde der Einfluss der Dampfgeschwindigkeit verfolgt. Aus der Abb. 2 geht hervor, dass bei der Rieselfilmströmung auf einer Wand mit künstlicher Rauhigkeit (ε = 0,36), die Werte der Stoffdurchgangszahl abnehmen, gleichzeitig mit der Verminderung der Dampfgeschwindigkeit bis zum Grenzwert $w_D = 0{,}66$ m/s (entsprechend $\mathcal{R}e_D = 1\,400$), worauf eine plötzliche Steigerung folgt.

Im Bereich *II* bei der glatten Wand gibt es praktisch keine Steigerung der Stoffdurchgangszahl, welche fast konstant zwischen den Dampfgeschwindigkeiten $w_D = 0{,}4 \ldots 0{,}3$ m/s bleibt, während bei der Rauhigkeits-

wand in demselben Geschwindigkeitsintervall die Stoffdurchgangszahl merkliche maximale Werte zeigt.

Als Folge des oben gezeigten, ist es offenbar dass der Bereich *II* ein besonderes Interesse darstellt.

Die Werte der Stoffdurchgangszahlen bei Rieselfilmströmung auf einer Wand mit künstlichen Rauhigkeit sind viel vergrössert, wenn die Dampfgeschwindigkeit sinkt. Bei der glatten und rauhen Wand beobachtet man dass, nach dem Maximum wo $\mathcal{R}e_F = 40$, ein plötzliches Sinken der Werte der Stoffdurchgangszahlen erscheint. Dieses plötzliche Sinken ist nicht einer merklichen Veränderung der Dampfgeschwindigkeit, sondern einer qualitativen Umwandlung der Rieselfilmhydrodynamik zu verdanken. Dieses Phänomen erscheint in Wirklichkeit, beim Werte der Reynoldszahl $\mathcal{R}e_F = 30$, bei welchem der Strömungscharakter vom Wellengebiet in das Gebiet der reinem laminaren Strömung wechselt.

Für das vergleichende Studium der zwei Bereiche wurden die graphischen Darstellungen der Abb. 4 und 5 aufgezeichnet.

Aus der Abb. 4 ist ersichtlich dass im Bereich *I* die Vergrösserung der Stoffdurchgangzahl ΔK_w, als Folge des Wachsens der Dampfgeschwindigkeit graphisch bestimmt werden kann.

Die Werte dieser Vergrösserung bei der glatten Wand ($\varepsilon = 0{,}00$ mm), für eine Veränderung $\Delta w = 0{,}91 - 0{,}66 = 0{,}25$ m/s, betragen $\Delta K_w = 4{,}4$ Einheiten. Weil für dasselbe Intervall der Geschwindigkeitsveränderung, die totale Vergrösserung $\Delta K_{tot} = 9{,}4$ Einheiten ist, kann man in diesem Intervall den der Rauhigkeit verdankten Vergrösserungseffekt nach der folgenden Beziehung berechnen:

$$\Delta K_{tot} - \Delta K_w = \Delta K_R = 5 \text{ Einheiten.}$$

Im Bereich *II*, auf Grund derselben Veränderungen der Parameter (Abb. 5), beobachtet man dass in demselben Geschwindigkeitsintervall $\Delta w = 0{,}66 - 0{,}40 = 0{,}26$ m/s, die Werte der partiellen Vergrösserungen der Stoffdurchgangszahlen sind:

$$\Delta K_{tot} = 10{,}6 \text{ Einheiten}, \quad \Delta K_w = 2{,}0 \text{ Einheiten}, \quad \Delta K_R = 8{,}0 \text{ Einheiten.}$$

Wir erwähnen dass in beiden Bereiche die vergleichenden Werte für die Kurven $\varepsilon = 0{,}00$ mm und $\varepsilon = 0{,}36$ mm gelesen wurden.

Aus diesen Betrachtungen ergibt sich dass der Vergrösserungseffekt der Rauhigkeit im Bereich *II* viel grösser ist als im Bereich *I*.

Aus der Abb. 5 geht auch hervor dass die Werte der Stoffdurchgangszahl gegen gleiche Werte der glatten Wand, bei $\varepsilon = 0{,}1$ mm zusammenlaufen. Demzufolge ist die Trennwirkung für eine Dicke der Rauhigkeit kleiner als 0,10 mm, nicht mehr von der Wandgeometrie beeinflusst.

Gleichzeitig kann man feststellen dass das optimale Verhältnis der Rauhigkeit $(\delta/\varepsilon)_{max} = 0{,}38$ für $\mathcal{R}e_F = 48$ ist, wo δ die Dicke des abfallenden Rücklaufsfilms ist.

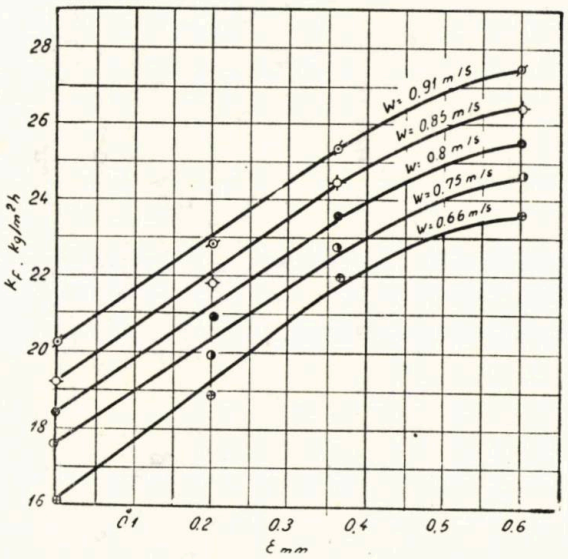


Abb. 4. — Veränderung der Stoffdurchgangszahl K_F für verschiedene Rauhigkeitsdurchmesser im Bereich *I*.

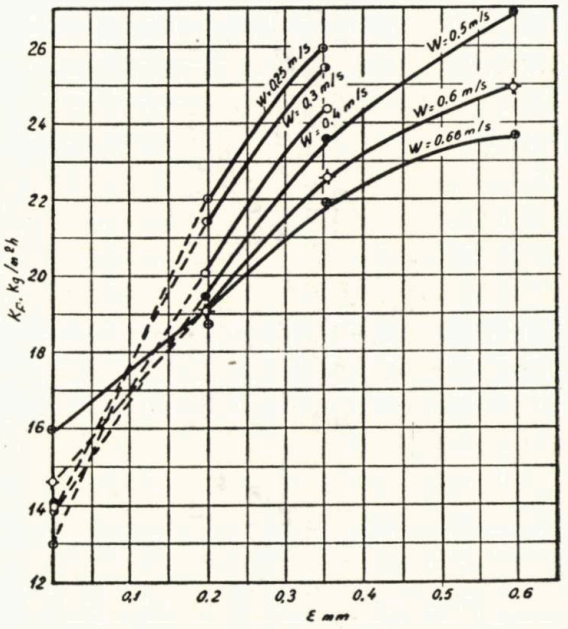


Abb. 5. — Veränderung der Stoffdurchgangszahl K_F für verschiedene Rauhigkeitsdurchmesser im Bereich *II*.

Um die inneren Gründe welche den Bereich, in welchem die Wandrauhigkeit den Stoffaustausch verstärken kann, festzustellen, hat man versucht das Verhältnis der Stoffübergangszahlen durch die Gleichung zu bestimmen in welcher angenommen wird, dass die Stoffaustauschwiderstände additiv sind

$$\frac{1}{K_F} = \frac{1}{k_x} + \frac{1}{mk_y}. \tag{1}$$

Es wurde die Ausnützung des Zweifilmmodells benützt um das Problem zu vereinfachen, da nicht die genauen Werte der partiellen Widerstände verfolgt werden, sondern die Grössenordnungen mit welchen diese im allgemeinen Prozesse des Stoffaustausches eintreten.

Die Gleichung (1) wurde graphisch für verschiedene Werte der Stoffdurchgangszahl K_F in Abb. 6 und 7, für die Bereiche *I* und *II* dargestellt.

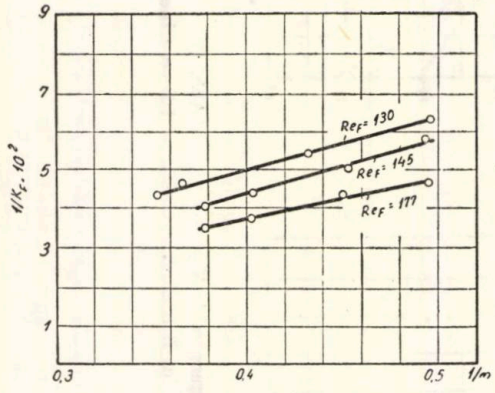


Abb. 6. — Veränderung des totalen Widerstandes $1/K_F$ als Funktion des $1/m$ im Bereich *I*.

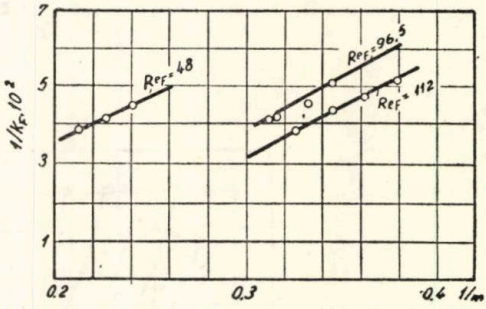


Abb. 7. — Veränderung des totalen Widerstandes $1/K_F$ als Funktion des $1/m$ im Bereich *II*.

Die partiellen Widerstände in gasförmiger und flüssiger Phase, $1/k_y$ und $1/k_x$, wurden aus graphischen Darstellungen mit der Gleichung (1) berechnet und haben die in der Tabelle 1 gegebenen Werte.

Die Veränderung der partiellen Widerstände $1/k_y$ und $1/k_x$ für der Bereich *I* zeigt dass der hauptsächliche Widerstand in der Dampfphase beschränkt ist. Auf diese Weise bestätigen sich auch in der Destillation unsere Ergebnisse der früheren Arbeiten in der Absorbtion [3], [4] und zwar, dass die in die flüssige Phase eingeführte Rauhigkeit die Trennoberfläche der Phase und durch indirekte Einwirkung die Turbulenz in der Dampfphase vergrössert.

Die Einwirkung der Rauhigkeit im Bereich *I* ist in der Destillation nicht massgebend.

Tabelle 1

Bereich *I*			Bereich *II*		
Re_F	$1/k_y$	$1/k_x \cdot 10^3$	Re_F	$1/k_y$	$1/k_x \cdot 10^2$
177	0,0877	1,83	112	0,261	− 6,5
145	0,110	2,25	96,5	0,264	− 0,4
130	0,143	2,41	48	0,270	− 2,2

Die Werte der Widerstände im Bereich *II* in der Dampfphase bleiben bei derselben Grössenordnung; sie wachsen aber mit der Verminderung der Dampfgeschwindigkeit. Gleichzeitig vermindern sich sehr viel die Werte des Widerstandes in der flüssigen Phase, streben zu Null und bekommen auch negative Werte. Diese negativen Werte können als Folge der Fehler bei der graphischen Ausnützung und der Anwendung der, nach der Zweifilmtheorie-Widerstandsadditivität, erklärt werden.

3. Schlussfolgerungen

Eine theoretische Untersuchung bei Rieselfilmdestillation hat das Abschätzen der relativen Werte der Stoffaustauschwiderstände in den beiden Phasen und auch des Effektes der starken von der Rauhigkeit verursachten Störung der hydrodynamischen Bedingungen, gestattet.

Die Verwendung der künstlichen Rauhigkeit bei der Intensivierung der Rieselfilmdestillation kann auf industriellem Masstab benützt werden.

Die Verschiebung der maximalen Werte der Trenneffizienz nach kleineren Dampfgeschwindigkeiten (betreffend kleinere Dampfdurchflussmengen) gestattet die Erzielung einer Wärmeersparung.

Formelzeichen

k — Stoffübergangszahl,
K — Stoffdurchgangszahl,
ΔK — Vergrösserung der Stoffdurchgangszahl.
m — Neigung der Geraden,
Re — Reynoldszahl,
w — lineare Geschwindigkeit,
Δw — Vergrösserung der Geschwindigkeit,
δ — Dicke des Rücklauffilms,
ε — Rauhigkeitsdurchmesser.

Indices

D — Dampf,
F — Flüssigketsphase,
R — Rauhigkeit,
tot — total,
w — Geschwidigkeit,
x,y — Konzentration der leichtvolatilen Komponente in der flüssigen, entsprechend in der dampfförmigen Phase.

Technische Hochschule Jassy,
Lehrstuhl für Chemischen Tehnologie,
Laboratorium für Verfahrenstechnik

LITERATURVERZEICHNIS

1. Săveanu T., Vasiliu M., Stancu Al., *Über die Intensivierung der Rieselfilmdestillation*, (unter Druck).
2. Săveanu T., Vasiliu M., Ibănescu I., *Einfluss der Rauhigkeit in der Absorbtion*. Bul. Inst. polit. Iaşi, 1960, **VI (X)**, *3–4*, S. 127–132.
3. Săveanu T., Ibănescu I., Vasiliu M., *Analiza intensificării proceselor de transfer în curgerea peliculară, cu ajutorul rugozităţii*. Bul. Inst. polit. Iaşi, 1962, **VIII (XI)**, *3–4*, S. 129–140.
4. Săveanu T., Ibănescu I., Cristian Gh., *Studiul intensificării proceselor de transfer în regim turbulent al fazei gazoase*. Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI (XV)**, *3–4*, pp. 143–148.

STUDII ÎN DISTILAREA PELICULARĂ

Influenţa condiţiilor hidrodinamice asupra coeficienţilor de transfer

(Rezumat)

Autorii au stabilit într-un studiu teoretic bazat pe datele experimentale ale unei lucrări anterioare [1] valorile relative ale rezistenţelor în transferul de masă, pentru cele două faze, în cazul rectificării peliculare pentru amestecul etanol–apă.

S-a delimitat un domeniu pentru care valorile vitezelor de vapori sînt egale cu valorile obişnuite în coloanele industriale.

Pentru acest domeniu s-a pus în evidenţă influenţa unei geometrii variabile a peretelui, creată printr-o rugozitate artificială.

Această influenţă conduce la o schimbare a condiţiilor hidrodinamice în cele două faze, care are ca rezultat o eficacitate sporită a transferului de masă

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Variaţia coeficientului de transfer de masă funcţie de hidrodinamica refluxului, pentru amestecul etanol–apă; *1* — $\varepsilon = 0{,}00$ mm, *2* — $\varepsilon = 0{,}20$ mm, *3* — $\varepsilon = 0{,}36$ mm, *4* — $\varepsilon = 0{,}60$ mm.

Fig. 2. — Variaţia coeficientului de transfer de masă funcţie de viteza vaporilor, pentru amestecul etanol–apă; *1* — $\varepsilon = 0{,}00$ mm, *2* — $\varepsilon = 0{,}36$ mm.

Fig. 3. — Variaţia coeficientului de transfet de masă funcţie de viteza vaporilor, pentru amestecul benzen–acid acetic: *1* — $\varepsilon = 0{,}00$ mm, *2* — $\varepsilon = 0{,}36$ mm.

Fig. 4 — Variaţia coeficientului de transfer de masă K_F pentru diferite geometrii ale peretelui, în domeniul *I*.

Fig. 5. — Variaţia coeficientului de transfer de masă K_F pentru diferite geometrii ale peretelui, în domeniul *II*.

Fig. 6. — Variaţia rezistenţei totale $1/K$ funcţie de $1/m$, în domeniul *I*.

Fig. 7. — Variaţia rezistenţei totale $1/K$ funcţie de $1/m$, în domeniul *II*.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

C.Z. 546.678.2

REACŢII ALE ACENAFTENONELOR CU COMPUŞI GRIGNARD

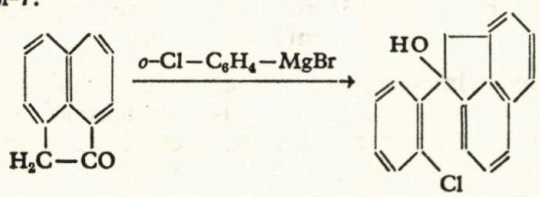
DE

ILIE MATEI
membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România
şi
TATIANA LIXANDRU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5-7 februarie 1965

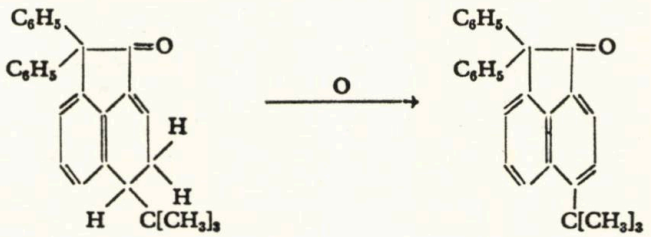
1. Introducere

Acenaftenona reacţionează cu bromura de *o*-clor-fenil-magneziu [1] şi se obţine 7-(*o*-clorfenil)-acenaftenol-7:

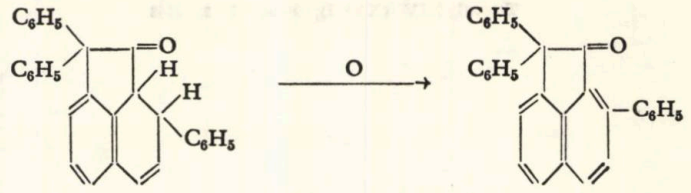


Dacă se lucrează cu iodura de metil magneziu şi bromura de fenil magneziu se obţin acenaftenolii corespunzători, care prin deshidratare trec în 1-metil şi 1-fenil-acenaftilen [2].

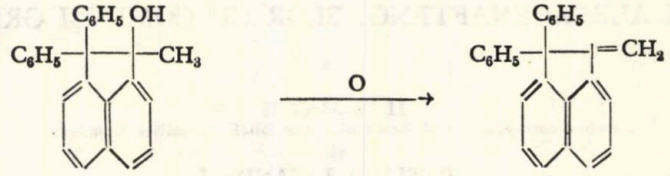
R. Fusson şi G. Griffin [3] studiază reacţia 2,2-difenil-1-acenaftenonei cu clorura de terţiar butil magneziu şi obţin două cetone ce conţin radicalul terţiar butil. În cantitate mai mare se obţine un compus dihidro-aromatic cu grupă carbonil conjugată, care prin oxidare trece în difenil-acenaftenona terţiar butilată:



Cu bromura de fenil magneziu, 2,2-difenil-acenaftenona-1, formează întîi o dihidrocetonă, care se oxidează apoi în aer şi trece în derivatul aromatic:



Reactivul Grignard cu radical metil, reacţionează cu difenil-acenaftenona în poziţia 1,1, dar nu se obţine un carbinol, ci o hidrocarbură obţinută prin deshidratarea acestuia [3]:



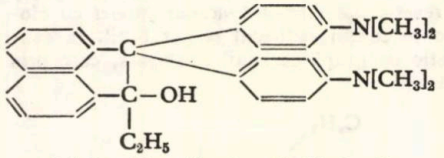
Pornind de la aceste considerente, am încercat extinderea posibilităţilor de reacţie a unor acenaftenone disubstituite cu reactivi Grignard, ştiut fiind că grupa carbonilică în aceste produse este împiedecată steric.

Am realizat reacţia bis-(dialchilamino-fenil)-acenaftenonelor şi a difenol-acenaftenonelor cu derivaţi Grignard. Ca derivaţi Grignard s-au folosit bromura de fenil magneziu şi iodura de etil magneziu.

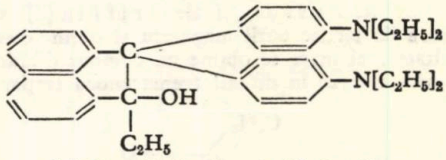
2. Reacţia bis-(dialchilamino-fenil)-acenaftenonelor cu derivaţi Grignard

La soluţia reactivului Grignard, preparată în mediul de eter anhidru, s-a adăugat soluţia dimetil- sau dietilamino-fenil-acenaftenonei în benzen anhidru şi s-a încălzit timp îndelungat sub reflux. Mediul de reacţie devine verde intens. După descompunerea complexului magnezian cu HCl dil., separă un produs galben brun, care apoi se purifică din solvenţii potriviţi.

Datele analitice indică formare de acenaftenoli de forma:



1,1-bis-(dimetilamino-fenil)-2-etil-acenaftenol-2



1,1-bis-(dietilamino-fenil)-2-etil-acenaftenol-2

Produsele fiind uşor solubile în majoritatea solvenţilor organici, purificarea lor a fost foarte anevoioasă. De aceea a fost nevoie să se recurgă la o purific re prin cromatografiere pe coloană de alumină. S-au înregistrat spectrele în IR ale produselor astfel purificate. Spectrele prezintă benzi la 3565 cm^{-1}, care s-ar putea atribui grupării OH. În cazul reacţiei bis-(dialchil-amino-fenil)-acenaftenonelor cu derivaţi Grignard se formează

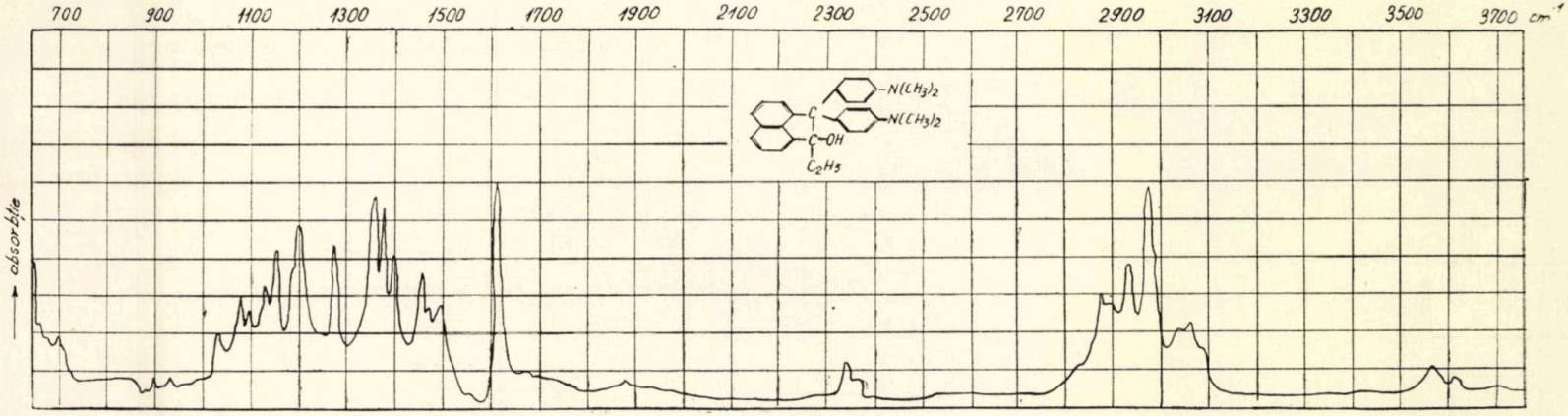


Fig. 1. — Spectrul IR al 1,1-bis-(dimetilamino-fenil)-2-etil acenaftenol-2.

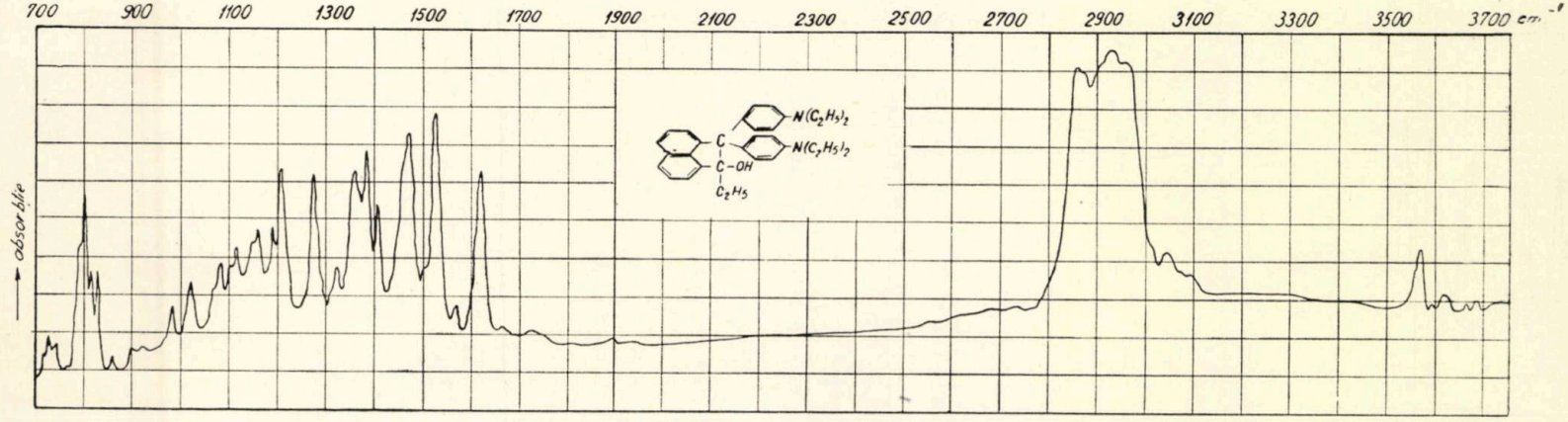
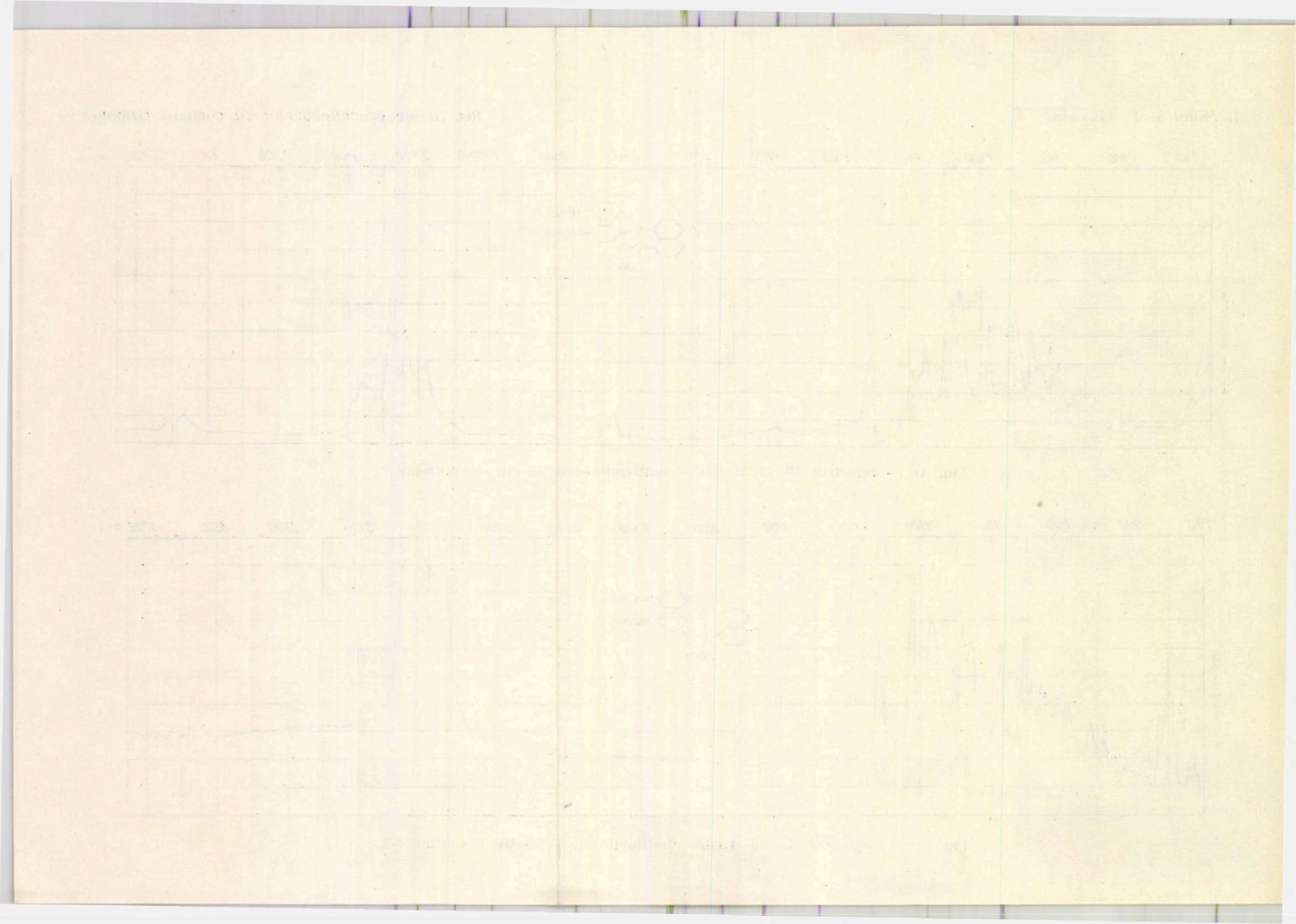


Fig. 2. — Spectrul IR al 1,1-bis-(dietilamino-fenil)-2-etil acenaftenol-2.

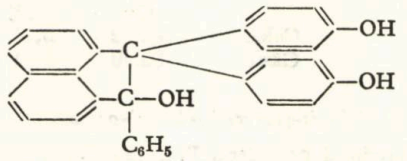


deci acenaftenoli și nu hidrocarburi, așa cum indică R. Fusson și G. Griffin (*op. cit.*), pentru cazul reacției difenil-acenaftenonei cu iodura de metil magneziu.

3. Reacția difenol-acenaftenonelor cu derivați Grignard

Reacția decurge la fel ca în cazul bis-(dialchilamino-fenil)-acenaftenonelor, dar se lucrează cu exces de derivat Grignard, produsele de plecare conținînd și grupe fenolice care reacționează cu derivați Grignard. Datele analitice indică și în acest caz formare de acenaftenoli.

Prin analogie cu cazurile cercetate anterior, presupunem că reacția s-a produs la grupa carbonilică cu formare de derivat carbinolic



1,1-bis-(p-oxifenil)-2-fenil-acenaftenol-2

S-a utilizat drept componentă carbonilică difenol-acenaftenona, dipirocatechin-acenaftenona, anhidro-diresorcin-acenaftenona, anhidro-dihidrochinon-acenaftenona, di-*m*-cresil-acenaftenona.

Datorită purificării extrem de dificile nu s-a reușit să se purifice decît produsele ce conțin în moleculă rest de fenol și de *m*-cresol. Purificarea în cazul combinației cu rest de *m*-cresol s-a efectuat prin cromatografiere pe coloană de alumină. Spectrele IR prezintă și în aceste cazuri benzi ce s-ar putea atribui grupei OH. Probabil că și în cazul difenol-acenaftenonelor se formează acenaftenoli disubstituiți.

4. Partea experimentală

a) *1.1-bis-(dimetilamino-fenil)-2-etil-acenaftenol-2*

La reactivul Grignard preparat din 1,47 g Mg și 9,3 g iodură de etil în 55 ml eter, se adaugă 4,8 g N.N'-dimetilamino-fenilacenaftenonă solvita la cald în 75 ml benzen anhidru și se încălzește sub reflux. După 6 ore de încălzire se adaugă încă 3,9 g iodură de etil și se continuă încălzirea încă 10 ore. Se adaugă 200 ml HCl 10%; separă un produs vîscos galben brun. Produsul este solubil în alcool metilic, alcool etilic, acetonă, eter, benzen, toluen, cloroform, tetraclorură de carbon. Se purifică prin cromatografiere pe coloană de alumină. Ca solvent se utilizează benzenul. După îndepărtarea benzenului rămîne un produs uleios, care cristalizează din amestec de alcool și apă P.t. 105°C.

$C_{30}H_{32}N_2O$ (436)	C%	H%	N%
Calculat	82,56	7,33	6,42
Găsit	82,51	7,38	6,65; 6,30

b) *1,1-bis-(dietilamino-fenil)-2-etil-acenaftenol-2*

Preparat analog cu produsul precedent. Solubil în solvenții organici obișnuiți. Purificarea s-a efectuat prin cromatografiere pe coloană de alumină. S-a utilizat benzenul ca

solvent. După îndepărtarea solventului rămîne un produs uleios roşcat, care la răcire puternică se solidifică. Prin cristalizare din alcool se obţine un produs alb gălbui cu aspect microcristalin. P. t. 118°C.

$C_{34}H_{40}N_2O$ (492)		C%	H%	N%
	Calculat	82,92	8,13	5,69
	Găsit	82,69	7,87	6,10; 5,85

c) *1,1-bis-(p-oxifenil)-2-fenil-acenaftenol-2*

La reactivul Grignard preparat din 1,47 g Mg şi 10,4 g brom-benzen solvit în 55 ml eter se adaugă 1,2 g difenol-acenaftenonă solvită în 20 ml benzen şi se încălzeşte sub reflux. După 5 ore separă un produs galben, se încălzeşte încă 10 ore. Se adaugă 100 ml HCl 10%. Se separă cele două straturi şi stratul apos se extrage cu eter. La îndepărtarea solventului rămîne un produs uleios, care prin răcire are tendinţa să cristalizeze. Se purifică prin cristalizare din amestec de alcool şi apă. Produsul este solubil în solvenţii organici obişnuiţi. P. t. 56°C.

$C_{30}H_{22}O_2$ (430)		C%	H%
	Calculat	83,72	5,11
	Găsit	83,50	5,34

d) *1,1-bis-(m-cresil)-2-etil-acenaftenol-2*

Preparat analog cu produsul precedent. P. t. 125°C.

$C_{28}H_{26}O_2$ (410)		C%	H%
	Calculat	81,95	6,34
	Găsit	81,70	6,56
		81,80	6,83

3. Concluzii

Reacţia bis-(dialchilamino-fenil)-acenaftenonelor şi a bis-(*p*-oxifenil)-acenaftenonei cu derivaţi Grignard duce la formare de acenaftenoli.

Spectrele IR şi UV au fost executate de Maria Mocanu-Paraschiv, cercetător la Institutul de fizică atomică, Bucureşti, Iulian Gabe, cercetător principal la Institutul de Chimie „P. Poni", Iaşi şi Elena Harnagea, chimistă la Combinatul chimic, Borzeşti, cărora le aducem pe această cale multe mulţumiri.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de chimie organică

BIBLIOGRAFIE

1. Fieser L. F., Cason J., J. Amer. Chem. Soc., 1940, **62**, p. 432.
2. O'Brien S., Smith D. C. C., J. Chem. Soc., 1963, p. 2905.
3. Fusson R. C., Griffin G. W., J. Amer. Chem. Soc., 1957, **79**, p. 1941.

RÉACTION D'ACÉNAPHTENONES AVEC LES RÉACTIFS DE GRIGNARD

(Résumé)

On aboutit à la conclusion que les bis-(dialcoylamino-phenyl)-acénaphtenones réagissent avec les réactifs de Grignard en fournissant des dérivés d'acénaphtenols.

Explication des figures

Fig. 1. — Spectre IR de 1,1-bis-(diméthylamino-phényl)-2-éthyl acénaphténol-2.
Fig. 2. — Spectre IR de 1,1-bis-(diéthylamino-phényl)-2-éthyl acénaphténol-2.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

УДК 547.551

СТРОЕНИЕ И ЦВЕТНОСТЬ ПРОИЗВОДНЫХ САЛИЦИЛИДЕНАНИЛИНА

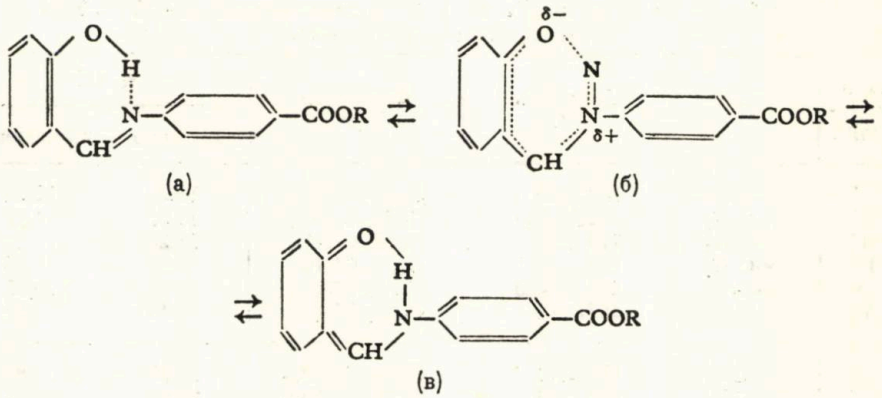
ЭФИЫ 5-ХЛОРСАЛИЦИЛИДЕН- и 4.5-ДИХЛОРСАЛИЦИЛИДЕН-*п*-АМИНО-БЕНЗОЙНОЙ КИСЛОТЫ

Е. А. СМИРНОВ и Л. Н. КИРИЧЕНКО

1. *Введение*

В предыдущем сообщении [1] на основании сопоставления спектров поглощения эфиров салицилиден-*п*-аминобензойной кислоты (формула (1)), измеренных у веществ взятых в виде тонкого порошка, со спектрами их растворов, нами был сделан вывод, что большинство указанных эфиров в твердом состоянии находится в виде формы (б), которую мы назвали „квазихиноидной". Эта форма является промежуточной между бензоидной (а) и хиноидной (в) структурами и образуется в результате смещения протона гидроксильной группы, образующей внутримолекулярную водородную связь, к атому азота,

(1)

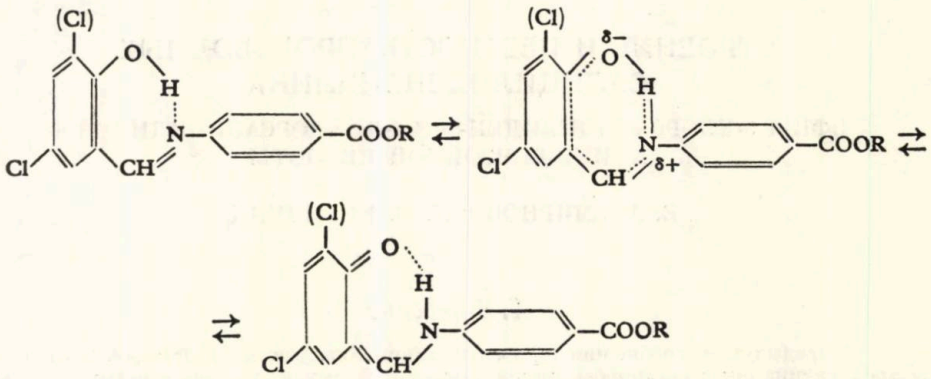


R — алкилы нормального строения от C_1 до C_8 включительно.

что ведет к бо ее равномерному распределению электронной плотности в шестичленном квазиароматическом цикле [2]. В образовании этой формы и следует искать основную причину весьма яркой окраски указанных эфиров и их способности интен-

сивно люминесцировать. В растворе квазихиноидная форма в значительной степени (в зависимости от характера растворителя) превращается в менее глубоко окрашенную бензоидную форму (а), которая в некоторых случаях может быть выделена и в кристаллическом виде [3].

С целью дальнейшего подтверждения полученных выводов и выяснения влияния, которое будут оказывать на возможность образования квазихиноидной формы заместители вводимые в ядро альдегидной компоненты, нами были синтетизированы эфиры 5-хлорсалицилиден- и 3.5-дихлорсалицилиден-*п*-аминобензойной кислоты (формула (2)):



R — алкилы нормального строения от C_1 до C_6 включительно.

В таблице 1 приведена сводка синтезированных соединений.

Таблица 1

Эфиры 5-хлорсалицилиден- (I...VI) *и 3.5-дихлорсалицилиден-* (VII...XII) *п-аминобензойной кислоты*

№№ соединений	*R*	Темп. пл. °С	Формула брутто	% Cl	
				найдено	вычислено
I	CH_3	193...193,5	$C_{15}H_{12}ClNO_3$	12,29	12,24
II	C_2H_5	144,5...145	$C_{16}H_{14}ClNO_3$	11,57	11,67
III	*н*-C_3H_7	119...120	$C_{17}H_{16}ClNO_3$	11,24	11,16
IV	*н*-C_4H_9	112...112,5	$C_{18}H_{18}ClNO_3$	11,03	10,98
V	*н*-C_5H_{11}	105...105,5	$C_{19}H_{20}ClNO_3$	10,28	10,25
VI	*н*-C_6H_{13}	107...108	$C_{20}H_{22}ClNO_3$	10,14	9,85
VII	CH_3	170...171	$C_{15}H_{11}Cl_2NO_3$	21,90	21,87
VIII	C_2H_5	160...161	$C_{16}H_{13}Cl_2NO_3$	20,88	20,97
IX	*н*-C_3H_7	138...139	$C_{17}H_{15}Cl_2NO_3$	20,20	20,13
X	*н*-C_4H_9	141...141,5	$C_{18}H_{17}Cl_2NO_3$	19,42	19,36
XI	*н*-C_5H_{11}	119...120	$C_{19}H_{19}Cl_2NO_3$	18,75	18,65
XII	*н*-C_6H_{13}	94,5...95,5	$C_{20}H_{21}Cl_2NO_3$	18,04	17,98

2. *Обсуждение результатов и выводы*

Все эфиры 5-хлорсалицилиден-*n*-аминобензойной кислоты, за исключением метилового, имеющего зеленовато-желтую окраску, окрашены в оранжевые цвета, лишь немного отличающиеся от желто-оранжевой окраски соответствующих эфиров, не содержащих хлора. Эфиры с двумя атомами хлора окрашены несколько глубже: в красно-оранжевые цвета, но опять за исключением метилового эфира, который имеет лишь бледно-желтую окраску. Это отличие метиловых эфиров ярко иллюстрируется спектральными кривыми поглощения света, измеренными у веществ взятых в виде тонких порошков, нанесенных на поверхность белой бумаги (ватманской) (рис. 1 и 2). Проявляется оно и в различной интенсивности люминесценции: метиловые эфиры люминесцируют слабо, тогда как все остальные эфиры обладают довольно сильной люминесценцией (в твердом состоянии)[1]).

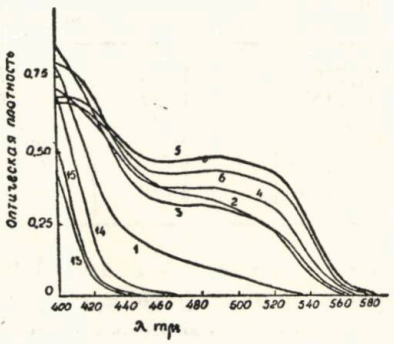


Рис. 1. — Спектры поглощения света поверхностью порошков; цифры кривых соответствуют номерам соединений в табл. 1 и 2.

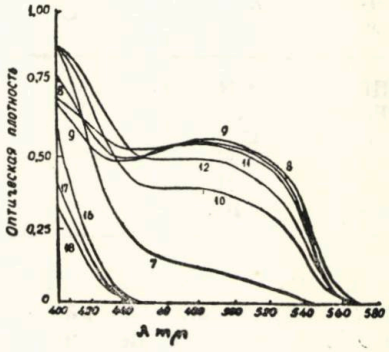


Рис. 2. — Спектры поглощения света поверхностью порошков; цифры кривых соответствуют номерам соединений в табл. 1 и 2.

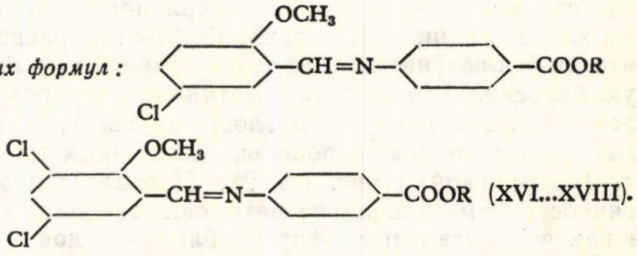
Наличие сравнительно глубокой и интенсивной окраски у большинства рассматриваемых эфиров может быть объяснено тем, что они так же, как и большинство эфиров салицилиден-*n*-аминобензойной кислоты, в твердом состоянии находятся в виде квазихиноидной формы (б). Подтверждением этому может служить тот факт, что аналогичные им эфиры, у которых гидроксильная группа метилирована (таблица 2) и которые поэтому не могут образовать квазихиноидной формы, обладают лишь весьма слабой бледно-желтоватой окраской. Соответствующие им кривые поглощения сильно отличаются от кривых большинства рассматриваемых эфиров и сходны с кривыми двух, упоминавшихся

[1]) Вопрос о люминесценции эфиров будет рассмотрен отдельно.

выше, метиловых эфиров. Это говорит о том, что метиловые эфиры, подобно О-метилированным эфирам, находятся в виде бензоидной формы (б).

Таблица 2

Эфиры общих формул:



№№ соединений	*R*	Темп. пл. °С	Формулы-брутто	% Cl	
				найдено	вычислено
XIII	CH_3	87	$C_{16}H_{14}ClNO_3$	11,62	11,67
XIV	C_2H_5	116	$C_{17}H_{16}ClNO_3$	11,27	11,16
XV	*н*-C_4H_9	67	$C_{19}H_{20}ClNO_3$	10,15	10,25
XVI	CH_3	127,5	$C_{16}H_{13}Cl_2NO_3$	20,85	20,97
XVII	C_2H_5	112	$C_{17}H_{15}Cl_2NO_3$	20,03	20,13
XVIII	*н*-C_4H_9	74	$C_{19}H_{19}Cl_2NO_3$	18,50	18,65

На рис. 3 приведены кривые поглощения света в видимой части спектра, полученные для растворов эфиров в дихлорэтане и в хлороформе. Исследование видимой части спектра у производных салицили-

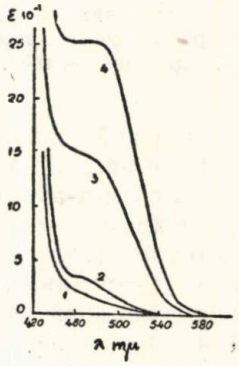


Рис. 3. — Спектры поглощения растворов; *1* — кривая эфиров I...VI (та л. 1) в дихлорэтане, *2* — кривая эфиров I...VI (табл. 1) в хлороформе, *3* — кривая эфиров VII...XII (табл. 1) в дихлорэтане, *4* — кривая эфиров VII...XII (табл. 1) в хлороформе.

денанилина представляет в данном случае особый интерес потому, что появление в этой области полосы поглощения некоторые авторы приписывают образованию хиноидной формы [4], [5]. Все эфиры, содер-

жащие один атом хлора, независимо от величины радикала в растворе дихлорэтана практически дают одну и ту же спектральную кривую [1]. Эта кривая очень похожа на кривую метиловых эфиров в твердом состоянии (рис. 1 и 2) и на кривые О-метилированных эфиров (тоже в твердом состоянии), что свидетельствует о том, что в дихлорэтане все эфиры практически полностью находятся в виде бензоидной формы. Однако в полярном растворителе (хлороформе) наблюдается появление слабой полосы поглощения в области 460...500 mμ, что можно рассматривать как свидетельство того, что в хлороформе равновесие смещается в сторону образования квазихиноидной формы.

У эфиров, содержащих два атома хлора, эти изменения проявляются значательно более ярко (рис. 3). В этом случае уже в растворе дихлорэтана наблюдается появление ясновыраженной полосы поглощения, интенсивность которой еще больше возрастает в растворе хлороформа. Отсюда можно сделать выводы, что введение в молекулу эфира второго атома хлора (в положение *3*) способствует значительному смещению равновесия в сторону квазихиноидной структуры, а возможно, и дальнейшему превращению ее в хиноидную (в). Причину этого следует искать, очевидно, в сильном индуктивном действии атома хлора в положении *3*, который оттягивая электронную пару, связывающую водород гидроксильной группы, тем самым облегчает переход протона к атому азота и способствует таким образом образованию квазихиноидной формы.

3. *Экспериментальная часть*

Необходимые для синтеза рассматриваемых эфиров 5-хлор- и 3.5-дихлор-салициловые альдегиды и их О-метильные производные были получены нами согласно литературным данным [6], [7].

Синтез эфиров 5-хлор- и 3.5-дихлорсалицилиден-*п*-аминобензойной кислоты осуществлялся следующим образом: эквимолекулярные количества альдегида и соответствующего аминоэфира растворялись порознь в пропиловом спирте при нагревании почти до кипения, горячие растворы смешивались, и смесь нагревалась еще в течение нескольких минут. По охлаждении выделившийся осадок отделялся и очищался перекристаллизацией: I — из смеси толуола с диоксаном, III — из диоксана, VII и XII — из петролейного эфира, все остальные — из толуола.

При получении метилированных эфиров смесь исходных продуктов, растворенная в пропаноле, нагревалась до слабого кипения в течение часа. Выделившийся, обычно лишь на следующий день, осадок перекристаллизовывался из метанола.

Спектры поглощения измерялись на спектрофотометре СФ-10$_2$

Поступила 28 XI 1967 г.

Московский текстильный институт, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов Е. А., Кириченко Л. Н., ДАН СССР, 1967, **177**.
2. Шигорин Д. Н., *Водородная связь*. Сб. статей, Изд. „Наука", М., 1965 г.
3. Manchot W., Furlong I. R., Ber., 1909, **42**, S. 3031.
4. Kiss A., Auer G., Z. phys. Chem., 1941, **189 A**, S. 344.
5. Казицина Л. А., Куплетская Н. В., Полстянко Л. Л., Кикоть Б. С., Колесник Ю. А., Терентьев В. П., ЖФХ, 1964, **38**, стр. 1718.
6. Biltz H., Stepe K., Ber., 1904, **37**, S. 4024, 4027.
7. Shapiro H., Smith K., J. chem. Soc., 1946, p. 143.

STRUCTURA ŞI CULOAREA DERIVAŢILOR SALICILIDENANILINEI

Eterii acizilor 5-clorsaliciliden- şi 3,5-diclorsaliciliden-*p*-aminobenzoici

(Rezumat)

S-au sintetizat două serii de eteri, ai acizilor 5-clorsalicilidenanilină şi 3,5-diclorsalicilidenanilină *p*-aminobenzoic, de la metil la hexil inclusiv (cu radicali de constituţie normală).

În baza comparării culorii eterilor sintetizaţi cu culoarea compuşilor O-metilaţi şi din compararea spectrelor de absorbţie stabilite la substanţe în stare pulverulentă, cu spectrele soluţiilor lor în solvenţi polari şi nepolari, se conchide că eterii examinaţi (cu excepţia celor metalici), în stare solidă, sînt într-o formă cuasichinoidică, ce stă la baza coloraţiei lor intense. Eterii metalici slab coloraţi sînt de formă benzoidică.

În soluţie de dicloretan forma cuasichinoidică a eterilor ce conţin un atom de clor, practic se schimbă complet într-o formă benzoidică, care în solvenţi polari (cloroform) revine numai parţial în forma cuasichinoidică.

Apariţia în molecula eterului a celui de-al doilea atom de clor (în poziţia *3*) determină deplasări însemnate ale echilibrului de partea structurilor cuasichinoidice, ce pot fi explicate prin acţiunea puternic inductivă a atomului de clor în poziţia *3*.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Spectrele de absorbţie cu suprafaţa pulberilor; cifrele curbelor corespund numerelor de ordine ale compuşilor din tabelele 1 şi 2.

Fig. 2. — Spectrele de absorbţie cu suprafaţa pulberilor; cifrele curbelor corespund numerelor de ordine ale compuşilor din tabelele 1 şi 2.

Fig. 3. — Spectrele de absorbţie ale soluţiilor; *1* — curba eterurilor I...VI (tabelul 1) în dicloretan, *2* — curba eterurilor I...VI (tabelul 1) în cloroform, *3* — curba eterurilor VII...XII (tabelul 1) în dicloretan, *4* — curba eterurilor VII...XII (tabelul 1) în cloroform.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

C. Z. 547.497.1

O NOUĂ METODĂ DE CICLIZARE A ACIL-TIOSEMICARBAZIDELOR-4-SUBSTITUITE (IV)

DE

ILIE MATEI
Membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România
şi
EUGENIA COMANIŢĂ

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. Introducere

Se cunoaşte de multă vreme că 1-acil-4-aril-tiosemicarbazidele prin încălzire, puţin deasupra punctului de topire, se transformă trecînd în produşi de ciclizare.

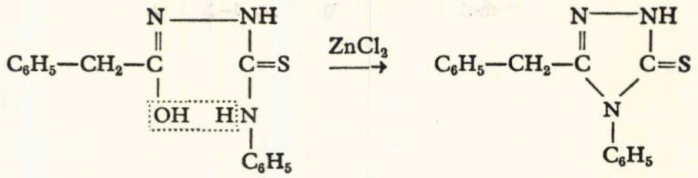
Cercetări mai recente au arătat că reacţia de ciclizare termică se desfăşoară de fapt în două sensuri, cu formare a două tipuri de compuşi: mercapto-triazoli şi arilamino-triazoli [1], [2].

La încălzirea unei acil-aril-tiosemicarbazide la temperatură ridicată, se observă imediat reacţia care are loc. Se simte miros de H_2S şi anilină, care împreună cu apa care se degajă din reacţie, formează pe refrigerent picături uleioase.

Noi am găsit că dacă înainte de a se topi substanţa se adaugă clorură de zinc anhidră, reacţia decurge cu totul altfel, *devenind predominantă deshidratarea la mercapto-triazol.*

2. Partea teoretică

Dacă 1-fenilacetil-4-fenil-tiosemicarbazida se încălzeşte cu clorură de zinc la 170°...180° C, timp de o oră, se obţine 3-benzil-4-fenil-5-mercapto-1,2,4-triazolul, identic cu cel preparat prin ciclizare alcalină [3]:



Analog 1-benzoil-4-fenil-tiosemicarbazida încălzită în prezenţa clorurii de zinc, se ciclizează la 3,4-difenil-5-mercapto-1, 2, 4-triazol.

Am extins această metodă şi la *ciclizarea semicarbazidelor*. Prin încălzirea 1-benzoil-4-fenil-semicarbazidei la 200°C şi adăugarea unui exces de $ZnCl_2$, are loc o intensă degajare de apă, care după circa o oră de încălzire se încheie. Masa sfărămicioasă rezultată se tratează cu HCl diluat pentru îndepărtarea zincului. Produsul obţinut, purificat din alcool, are acelaşi punct de topire cu 3,4-difenil-5-hidroxi-1, 2, 4-triazolul, preparat prin oxidarea cu clorură ferică, în tub închis, a 4-fenil-1-benzal-semicarbazonei [4].

Triazolii obţinuţi prin această metodă au spectre IR identice cu cele prezentate într-o lucrare anterioară, în care ciclizarea acil-tiosemicarbazidelor s-a realizat în mediu alcalin [3].

3. Partea experimentală

1. *3,4-Difenil-1,2,4-triazol-5-onă*

3 g 1-benzoil-4-fenil-semicarbazidă se încălzesc la 200°C şi se adaugă 3 g clorură de zinc anhidră, proaspăt mojarată. Se ridică temperatura la 210°C, cînd masa de reacţie devine fluidă şi se observă o intensă degajare a apei care se formează în reacţie. După puţin timp se mai adaugă o nouă porţiune de clorură de zinc şi se continuă încălzirea timp de o oră. Masa sfărămicioasă obţinută se tratează cu HCl diluat şi se încălzeşte scurt timp pentru o bună dispersare. Se filtrează, spălînd precipitatul pe filtru cu multă apă. Produsul brut se recristalizează din alcool etilic şi are acelaşi punct de topire cu substanţa preparată prin oxidarea cu $FeCl_3$ a 4-fenil-1-benzal-semicarbazonei (254°C).

		N%
$C_{14}H_{11}N_3O$ (237)	Calculat	17,72
	Găsit	17,75; 17,89

2. *3,4-Difenil-1,2,4-triazol-tionă-5*

2 g 1-benzoil-4-fenil-tiosemicarbazidă se încălzesc cu clorură de zinc în exces la 180°...190°C circa o oră. Se procedează ca la compusul precedent. Se recristalizează din alcool etilic; p. t. 278°C. Produsul a fost preparat şi prin tratarea 4-fenil-tiosemicarbazidei cu clorură de benzoil [5] sau prin ciclizare în mediu alcalin [6].

		N%
$C_{14}H_{11}N_3S$ (253)	Calculat	16,60
	Găsit	16,92; 16,83

3. *3-Benzil-4-fenil-5-mercapto-1,2,4-triazol*

2 g 1-fenilacetil-4-fenil-tiosemicarbazidă şi 3 g clorură de zinc se încălzesc la 170°...180°C. Produsul separat ca în cazurile de mai sus, se recristalizează din alcool etilic sau amilic şi are acelaşi punct de topire cu substanţa obţinută prin ciclizare alcalină [3] (p.t. 199°...200°C).

		N%
$C_{15}H_{13}N_3S$ (267)	Calculat	15,73
	Găsit	16,02; 16,11

4. Concluzii

1. Se propune o nouă metodă de ciclizare a acil-tiosemicarbazidelor la mercapto-triazoli. Prin încălzire în prezenţa clorurii de zinc, la o temperatură puţin superioară punctului de topire, acil-tiosemicarbazidele se transformă în mercapto-triazoli, identici cu cei obţinuţi prin ciclizare în mediu alcalin.

2. Ciclizarea cu clorură de zinc a fost aplicată şi 1-benzoil-4-fenil-semicarbazidei, obţinîndu-se 3,4-difenil-5-hidroxi-1,2,4-triazolul.

Reacţia pare interesantă şi va fi extinsă şi la ciclizarea altor compuşi.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de chimie organică

BIBLIOGRAFIE

1. Dymek W., Dziewonska M., Dissert. Pharm., 1961, **13,** p. 313.
2. Dymek W., Ann. Univ. M. Curie Sklodovska, 1954, **9,** p. 61.
3. Matei I., Comaniţă E., Bul. Inst. polit. Iaşi., 1967, **XIII (XVII),** *1—2,* p. 269.
4. Bailey, Mc. Pherson, J. Amer. Chem. Soc., **39,** p. 1333.
5. Pulvermacher G., Ber. dtsch. chem. Ges., 1894, **27,** S. 615.
6. Fromm E., Trnka A., Liebigs Ann. Chem., 1924, **442,** S. 150.

UNE NOUVELLE MÉTHODE DE CYCLISATION DES ACYL-THIOSEMICARBAZIDES-4-SUBSTITUÉES (IV)

(Résumé)

On propose une nouvelle méthode de cycliser des acyl-thiosemicarbazides à des mercapto-triazoles. Il suffit pour cela d'en chauffer les acyl-thiosemicarbazides en présence de $ZnCl_2$, à une température un peu plus élevée que leur point de fusion. On obtient des mercapto-triazoles tout à fait semblables à ceux obtenus par cyclisation en milieu alcalin.

La cyclisation avec $ZnCl_2$ a été appliquée aussi à 1-benzoyle-4-phényl-semicarbazide.

La réaction, qui semble intéressante, fera l'object des recherches ultérieures.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

C. D. 667.212

PRÉPARATION DE NOUVEAUX COLORANTS DE SOUFRE (II)

PAR

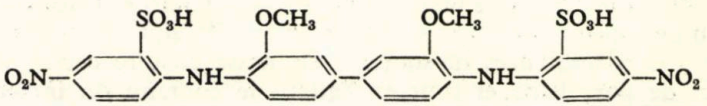
GH. LUPUŞOR et SAVEL IFRIM

Communication présentée dans la session scientifique de l'Institut Polytechnique de Jassy, 28—30 Septembre 1967

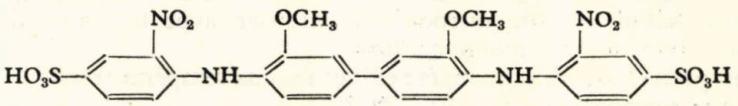
1. Introduction

Dans un travail antérieur [1] on a déjà montré qu'il est possible d'obtenir des colorants de soufre, en utilisant les produits de condensation de la benzidine, de la orto-dianisidine et de la orto-tolidine avec le 2-4-dinitroclorbenzène. Dans d'autres travaux plus récents on a montré que l'orto-dianisidine et l'orto-tolidine peuvent se condenser avec l'acide 4-nitrochlorbenzène 2-sulfonique [2] et avec son isomère, l'acide 2-nitrochlorbenzène-4-sulfonique [3] en différentes conditions, et l'on obtient les produits suivants: l'acide dianisidine-N, N-bis-4-nitrophényl-2-sulfonique (I), l'acide dianisidine-N, N-bis-2-nitrophényl-4-sulfonique (II), l'acide tolidin-N, 4-nitrophényl-2-sulfonique (III) et l'acide dianisidine-N-4-nitrophényl-2-sulfonique (IV):

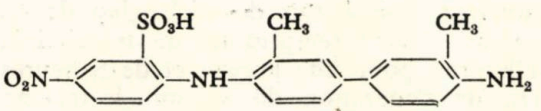
(I)



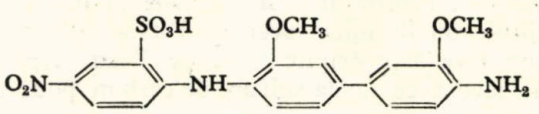
(II)



(III)



(IV)



Selon les informations fournies par la littérature les produits organiques résultés par la condensation des arilamines avec les dérivés du nitrochlorbenzène, peuvent être utilisés comme matières premières pour la préparation des colorants de soufre [4].

Les recherches expérimentales ont montré que les produits (I)...(IV) peuvent être utilisés pour l'obtention de quelques colorants de soufre, si ces produits sont soumis au processus de sulfuration à l'aide des polisulfures de sodium. On réalise le processus de sulfuration en réchauffant les substances qui réagissent, lorsque s'élimine de l'eau par évaporation. Puis en continuant le réchauffage de la masse solidifié, on réalise ce qu'on appelle l'opération de „la cuisson". La sulfuration peut être effectuée aussi dans un milieu de glycérine; dans ce cas il en est possible à maintenir la masse de réaction dans un état semi-fluide jusqu'à une température supérieure à 170°C, lorsque l'agitation des produits de réaction devient facile.

Le processus de sulfuration effectué, on trouve dans la masse de réaction la matière colorante obtenue, qui est soluble dans un milieu alcalin et en présence de sulfure de sodium; on trouve toutefois un résidu insoluble dans ce milieu. La fraction soluble ainsi que le résidu sont ensuite soumis au processus de séparation et de purification.

2. Partie expérimentale

Par des essais pratiques on a poursuivi l'établissement des conditions optimes de travail, qui peuvent permettre l'obtention d'une quantité maximum de produit soluble et d'une quantité minimum de substance insoluble.

Chaque fois ont été soumis à l'expérience seulement 2 g des produits (I)...(IV), indiqués ci-dessus, 5 g NaOH dissouts en 100 ml eau et 6 g de soufre. On dissout le hydroxyde de sodium en l'eau, dans un verre Berzélius, puis on introduit le soufre et on le fait bouillir jusqu'à l'obtention d'une solution ayant une teinte cerise-brune, lorsque le soufre se dissout en passant en polysulfures de sodium. On passe ensuite cette solution dans un creuset de porcelaine et tout en agitant le contenu on introduit graduellement la substance organique. On continue le réchauffage jusqu'à ce que la masse se solidifie. On introduit le creuset avec la masse de réaction dans une étuve où la cuisson continue.

Des preuves de cuisson ont été effectués aux températures de 210°...215°C et aussi aux température de 240°...245°C.

Compte tenu que le processus de sulfuration dépend aussi de la durée de l'expérience, pour chaque température de travail il a été fixé la durée de cuisson de 4 heures pour une preuve et de 8 heures pour la suivante.

Après la fin de l'opération de cuisson, le mélange de réaction est laissé se refroidir. On l'introduit ensuite dans l'eau, on l'agite, on le filtre et la solution filtrée on l'acidifie avec de l'acide chlorhydrique. On répète la filtration et on lave le précipité avec de l'eau. Après le séchage et la trituration, on le lave avec de la sulfure de carbon pour éloigner les résidus

de soufre. On sèche le produit et on le pèse. C'est ce qui constitue le colorant proposé pour être préparé. On lave également avec de l'eau la partie insoluble obtenue antérieurement. On la sèche, on la triture et puis on la lave avec de la sulfure de carbon. On la laisse sécher et finalement on la pèse. Ce produit constitue le pigment insoluble.

Les données obtenues lors de ces expériences sont indiquées dans le tableau 1.

Tableau 1

Sulfuration en absence de la glycérine

Nr. crt.	Le produit utilisé	Température 210°...215°C				Température 240°...245°C			
		4 h		8 h		4 h		8 h	
		Colorant soluble g	Pigment g	Colorant soluble g	Pigment g	Colorant soluble g	Pigment g	Colorant soluble g	Pigment g
1.	I	1,80	0,50	2,80	0,10	2,50	0,85	0,61	2,55
2.	II	2,26	0,59	3,28	0,25	3,00	0,60	0,40	6,50
3.	III	1,60	1,66	2,51	1,00	1,85	1,80	0,50	1,92
4.	IV	3,35	0,24	3,20	0,55	3,40	0,31	1,62	1,80

Dans le cas du processus de sulfuration en milieu de glycérine ont été utilisées les mêmes quantités de substance que celles indiquées ci-dessus mais dans la solution de polysulfure de sodium après l'introduction de la substance organique, on a introduit 20 ml glycérine, pour chaque preuve. Dans cettes conditions il est possible à maintenir l'agitation pour une duré plus longue. Il est nécessaire de conduire le réchauffage et l'agitation avec précaution parce que les produits de réaction écument.

Après la solidification, le creuset de porcelaine, dans lequel on effectue l'opération, est introduit dans une étuve chauffée à 200°...210°C.

On réalise la séparation de la matière colorante et du résidu à l'aide d'un procédé similaire a celui utilisé dans le cas précédent. Dans ce cas la durée du processus de la sulfuration a été de 4 heures et respectivement de 8 heures. Les données obtenues dans le cas de la sulfuration en milieu de glycérine sont données dans le tableau 2.

Avec les matières colorantes préparées on a coloré nombre de fibres cellulosiques (coton, cellofibre et viscose).

Cette opération a été effectuée au bouillonnement pendant 30 min, avec un hydromodule de 1/20 et avec 10% chlorure de sodium. On a réalisé la solubilisation des matières colorantes à l'aide de sulfure de sodium 10% et aussi du carbonate de sodium 10% [5].

Les colorants ont été utilisés à différentes concentrations, entre 3% et 10%. Les preuves colorées ont été soumises aux épreuves de résistance au lavage, au bouillonnement en l'eau et au bouillonnement alcalin.

Tableau 2

Sulfuration en milieu de glycérine

Nr. crt.	Le produit utilisé	Température 200°...210°C			
		4 heures		8 heures	
		Colorant soluble g	Pigment g	Colorant soluble g	Pigment g
1.	I	3,00	0,50	1,10	2,50
2.	II	3,75	0,40	1,00	2,60
3.	III	1,50	1,10	1,30	3,50
4.	IV	1,90	1,20	1,80	4,10

3. Interprétation des résultats

En analysant les données contenues dans le tableau 1 il en résulte que le meilleur rendement en matière colorante est obtenu à la température de 200°...210°C et à une durée de 8 heures, tandis qu'à la même durée mais à la température de 240°...245°C, la quantité de matière colorante obtenue est plus petite.

On peut expliquer, probablement, la diminution du rendement en matière colorante à la température de 240°...245°C et à la durée de 8 heures, par un processus très avancé de sulfuration et de cyclisation des produits organiques, tout en tenant compte que leur solubilisation n'est pas plus possible.

Les données contenues dans le tableau 1 montrent qu'en prolongeant la durée de la réaction à la température de 210°...215°C, on favorise la formation des matières colorantes.

Dans le cas de la sulfuration en milieu de glycérine, les meilleurs résultats ont été obtenus à la température de 200°...210°C et à une durée de 4 heures. Dans cettes conditions, en prolongeant la durée de la réaction, la quantité de produit soluble n'augmente pas, ce qu'on peut expliquer, probablement, par le même processus avancé de sulfuration et de cyclisation des produits organiques, qui conduit à la diminution de la solubilité.

Parmi les produits de condensation utilisés à la préparation des colorants, les meilleurs rendements fournissent les produits (II) et (IV).

Les teintures effectuées avec les colorants préparés montrent que ceux-ci confèrent aux fibres cellulosiques de différentes teintes de gris, brun jusqu'au noire et beige jusqu'à la couleur café foncé.

On peut souligner le fait que lors des teintures effectuées avec une concentration très faible en matière colorante — seulement de 3% — on obtient en tous les cas des teintes bien définies. Cettes propriétés des

colorants préparés conduissent à la conclusion qu'ils ont de bonnes capacités tinctoriales.

Le colorant obtenu du produit (I) imprime aux fibres cellulosiques des teintes gris-noires, mais lorsqu'on le prépare en milieu de glycérine, les teintures ont des couleurs beiges-foncés.

Le colorant obtenu du produit (II) imprime aux fibres cellulosiques une couleur gris (en l'utilisant en concentrations faibles) et une couleur beige-foncé (en l'utilisant en concentrations élevées).

Le colorant obtenu du produit (III) imprime une teinte grise-verdâtre lorsqu'on le prépare en absence de la glycérine et une teinte beige au cas opposé.

Le colorant obtenu du produit (IV) fournit une couleur gris-olive et brun lorsqu'on le prépare en absence de la glycérine et une couleur beige et café au cas opposé.

Lors des teintures effectuées avec les colorants obtenus ci-dessus on a déterminé la résistance au lavage, au bouillonnement en l'eau et au bouillonnement alcalin [5]. Dans tous les cas les couleurs des échantillons soumis aux preuves de détermination de la résistance, ne se sont pas modifiées par de rapport aux étalons. Ce comportement permet à tirer la conclusion que résistances des teintures effectuées avec cettes matières colorantes, sont très les bonnes.

La partie insoluble, obtenue parfois en quantité appréciable, de couleur noire, a été utilisée avec de l'huile de lin polymérisé à la préparation de quelques laques pour la protection des surfaces ligneuses. Les expériences effectuées montrent qu'il est bien possible d'obtenir de laques ayant de bonnes propriétés de protection; par conséquent il est indiqué d'utiliser la partie insoluble comme pigment noir.

4. Conclusions

1. Les produits de condensation de la orto-dianiside et de la orto-tolidine avec l'acide 4-nitrochlorbenzène-2-sulfonique et avec l'acide 2-nitrochlorbenzène-4-sulfonique, donnent des colorants de soufre par sulfuration avec des polisulfures de sodium.

2. On obtient la quantité maximum en matière colorante à une température de 210°...215°C et à une durée de 8 heures.

3. Les colorants de soufre préparés ont de bonnes propriétés tinctoriales.

4. La partie insoluble obtenue, peut être utilisée comme pigment noir.

Institut Polytechnique de Jassy,
Chaire d'Industries organiques

BIBLIOGRAPHIE

1. Lupuşor Gh., Ifrim S., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1961, **VII (XI)**, *1—2*, p. 125.
2. Lupuşor Gh., Secure V., Travail non publié.

3. Lupuşor Gh., Lixandru T., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI** (**XV**), *3—4*, p. 163.
4. Lange O., *Die Schwefelfarbstoffe*. Leipzig, 1912, S. 396.
5. * * * *Coloranţi organici*. Colecţia STAS-1964, p. 74.

PREPARAREA UNOR NOI COLORANŢI DE SULF

(Rezumat)

Se arată posibilitatea obţinerii unor noi coloranţi de sulf, folosind produşii de condensare ai ortodianisidinei şi tolidinei cu acizii nitro-clorbenzensulfonici.

Procesul de sulfurare s-a realizat prin metoda „coacerii", lucrîndu-se la temperatura de 210°...215°C şi 240°...245°C, precum şi în mediu de glicerină, lucrîndu-se la temperatura de 200°...210°C.

Coloranţii obţinuţi au bune proprietăţi tinctoriale şi vopsesc fibrele celulozice în nuanţe de bej, maro, gri şi negru.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

D. K. 547.553 ; 667.212

PREPARATION OF SOME AROMATIC AMINES BY REDUCTION OF THE AZOIC STUFFS

BY

SAVEL IFRIM

Paper presented at the Scientific Sesion of the Polytechnic Institute of Jassy, September the 28–30 st, 1967

1. Introduction

The aromatic amines are substances which can be prepared only on the synthetic way The oldest method of preparation of the aromatic amines, consists in the reduction of the corresponding nitric derivates, method which owing to the chemist I. A. Béchamp [1] could be applied in industrie too, thus becoming the most important method to obtain such substances.

There are cases when the preparation of the aromatic amines can not be achieved by the reduction of the corresponding nitric derivates, because of the imposibility of the introduction of the nitric group, in a certain position confronted by the substitutes existing previously in the nucleus. In these cases it is used some other methods for the preparation of the halogene atomes or the oxidrilic group with the aminic group, or the scission by the reduction of the azo-dyes [2]. The method of the reduction of the azo-dyes to obtain the aromatic amines is known in the litterature [3] and it is used in the present paper too.

2. Theoretics

The reduction of the azo-dyes is achieved with the help of the $Na_2S_2O_4$ in a neutral solution, in a little alkaline solution or in an alcoholic solution [4] when it takes place the following reaction:

$$R-N=N-R+2Na_2S_2O_4+4H_2O\rightarrow R-NH_2+R-NH_2+4NaHSO_3\ .$$

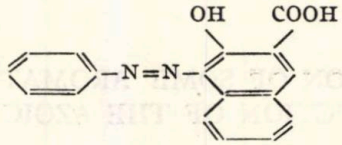
The reaction of reduction of the azo-dyes can be achieved using other reductive agents as $SnCl_2$ and HCl, Zn and CH_3-COOH too, etc.

In this paper we aime the introduction of the aminic group in the nucleus of some naphtoles, obtaining unknown amines in litterature, as well as the preparation of the acid 1-amino-2-hidroxi-3-naphtoic, a known com-

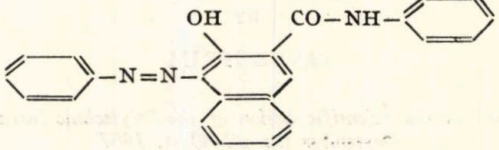
pound which was prepared by other authors by the reduction of the corresponding nitric derivated [5].

In order to obtain such substances, it was first of all synthetized — according the well known methods — five azo-dyes, coupling in an alkalin medium the diazotizated anilin with the acid 2-hidroxi-3-naphtoic (1), the naphtol AS (2), the naphtol AS-D (3), the naphtol AS-OL (4) and the naphtol AS-LC (5). The azo-dyes obtained have the following chemical structures:

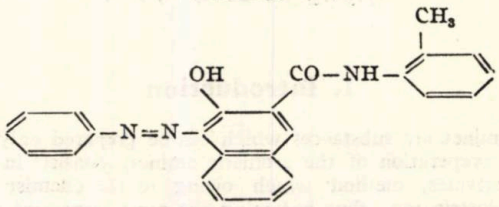
(1)



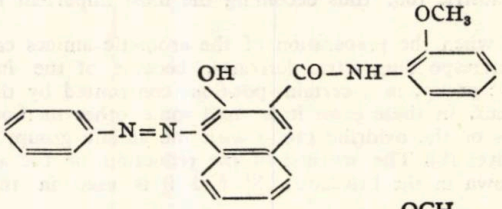
(2)



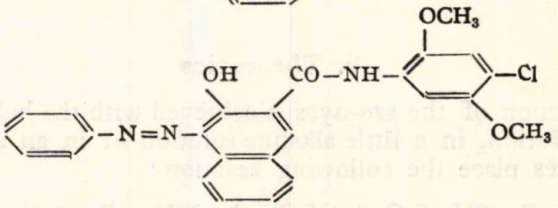
(3)



(4)



(5)



These dye-stuffs by reduction splits up in two compouds both having an amine group. One of the compounds is in all the cases the aniline, and the second is the amine proposed to be prepared.

It is well known that the dye-stuffs mentioned above, make part from the category of the azoinsoluble dyes and consequently their reduction in an aqueous medium is very difficult; in the same time the reduction in

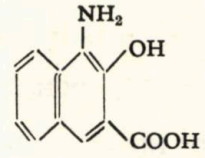
alcohol is very difficult too. From the previous tastes it was ascertained that the reduction takes better place if we work with a heated solution of NaOH 10%. In this conditions the solubility of the dye-stuffs increases, it being favoured by the existing of the hydroxilic groups from their structure.

As a reduction agent we used the $Na_2S_2O_4$ which reacts at 40°...50°C. In proportion as the reduction took place the dye-stuff is solving continually and when the dissolving is achieved totally, the colour becomes lighter and the reduction is considered to be finished.

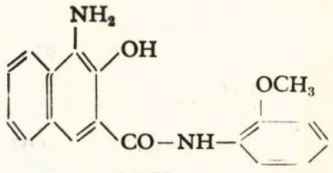
After the reduction the amines were separeted, purified and analysed. In order to verify if the products resulted are realy substances with aminic groups in the molecule, they were subjected to the reaction of diazotization and coupled with naphtols, obtaining thus some new azo-dyes, whose structure is perfectly symmetrical confronted by the azoic chromophore.

On this way there were preparated the following compounds: the acid 1-amino-2-hidroxi-3-naphtoic (I), 1-amino-2-hidroxi-3-naphtanilide (II), 1-amino-2-hidroxi-3-naphta-orto-toluidide (III), 1-amino-2-hidroxi-3-naphta-orto-anisidide (IV) and 1-amino-2-hidroxi-4'-chloro-2'-5'-dimetoxi-3-naphtanilide (V):

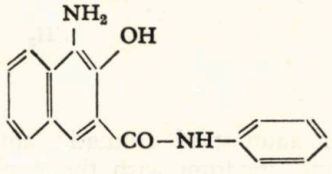
(I)



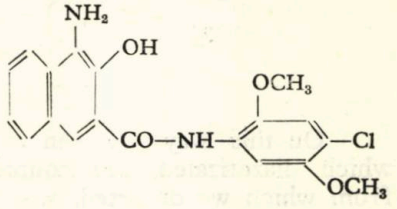
(IV)



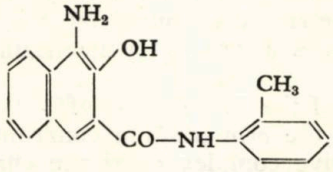
(II)



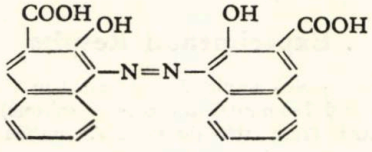
(V)

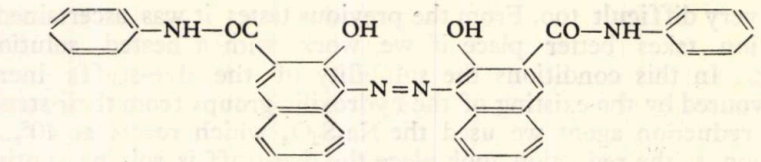


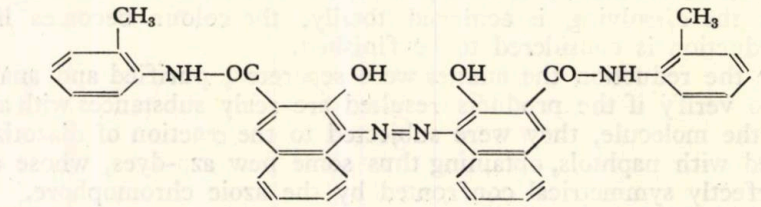
(III)

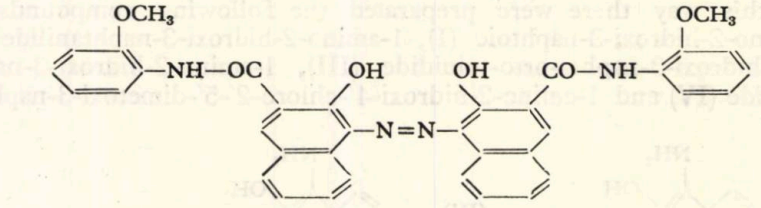


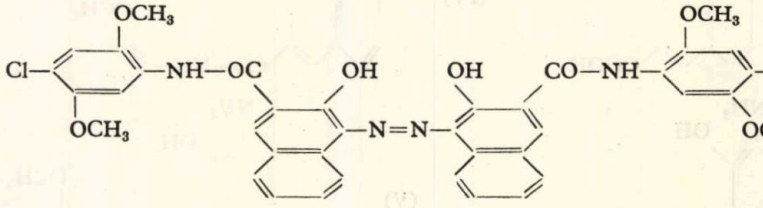
The dye-stuffs which result by the diazotization of the above amines and their coupling in an alkaline medium with the initial corresponding naphtoles have the following chemical structures:











On this way we can synthetise a great amount of aromatic amines, which diazotizated and coupled in an alkaline medium with the naphtols from which we departed, we can obtain a range of azoic dyes, with the structure perfectly symmetric, confronted by the azoic chromophore. It can be estimated that this is a way of symmetrizing of the organic molecules.

From the structure of the above dye-stuffs we observe that they have the hidroxilic groups in the *orto* position confronted by the azoic chromophore, thus they can give complexes with the chromium or other metals and consequently they will change the colour. In reality synthetizing this dye-stuffs on cotton samples and then subjecting the samples to croming we observe a pronounced darkening of the colour.

3. Experimental Results

In order to obtain the proposed amines we proceded in the following manner:

The first product (the acid 1-amino-2-hidroxi-3-naphtoic) was prepared by the reduction of the obtained dye-stuff from the diazotizated aniline and coupled in an alkaline

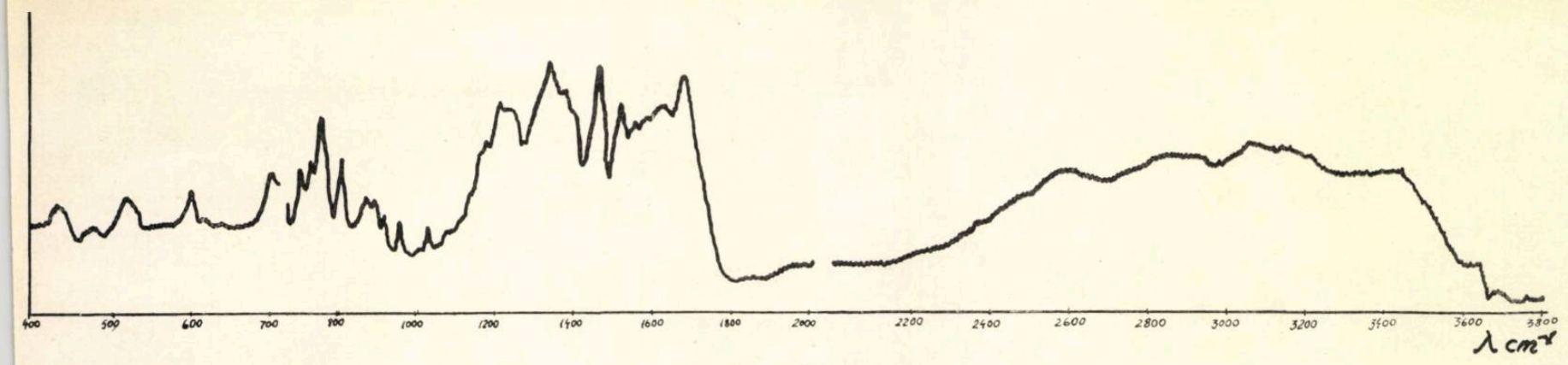


Fig. 1

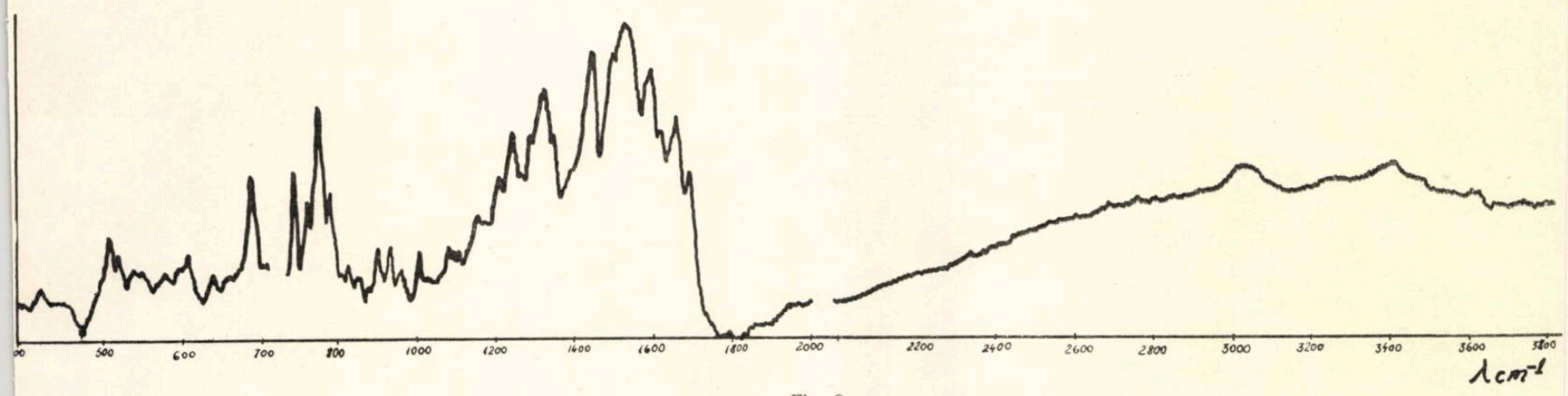


Fig. 2

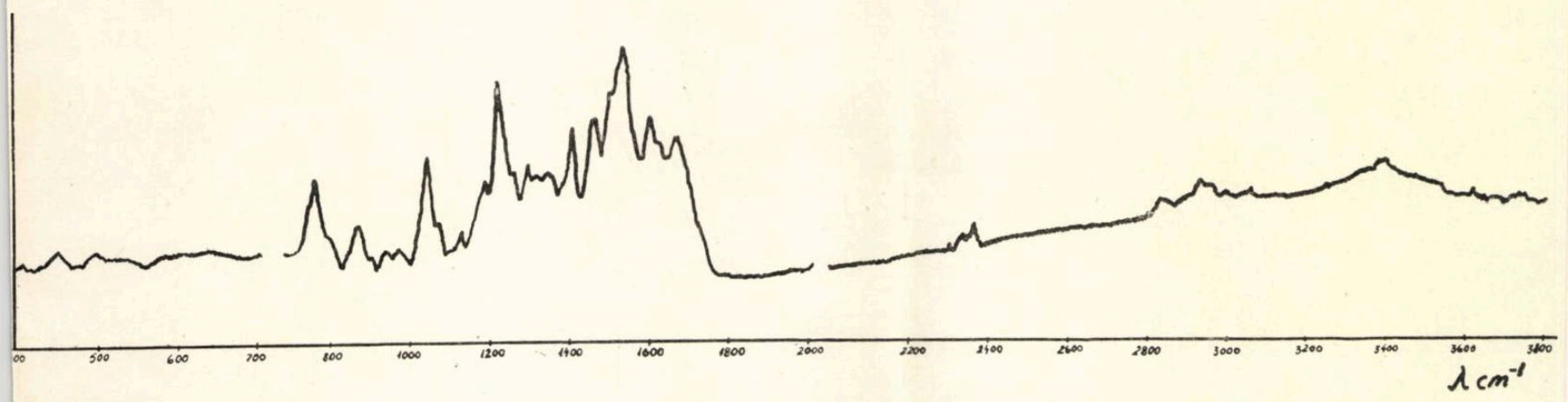


Fig. 3

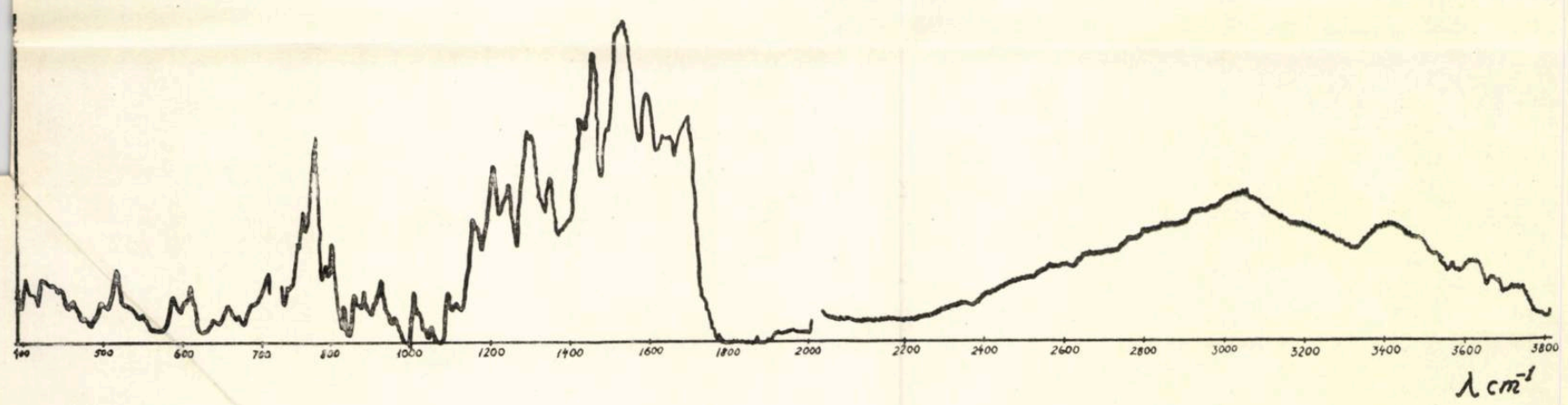


Fig. 4

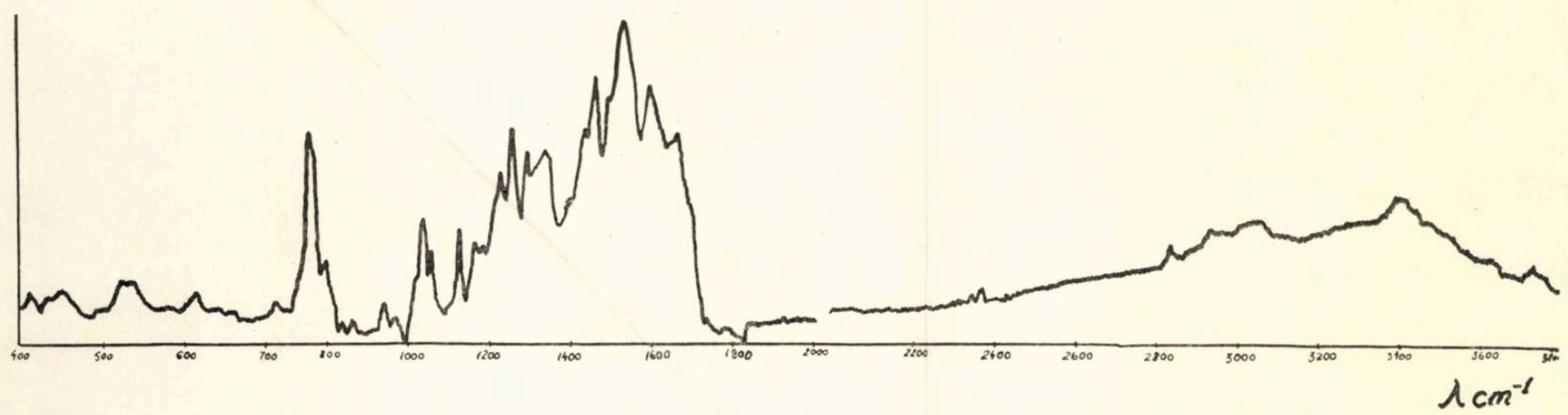
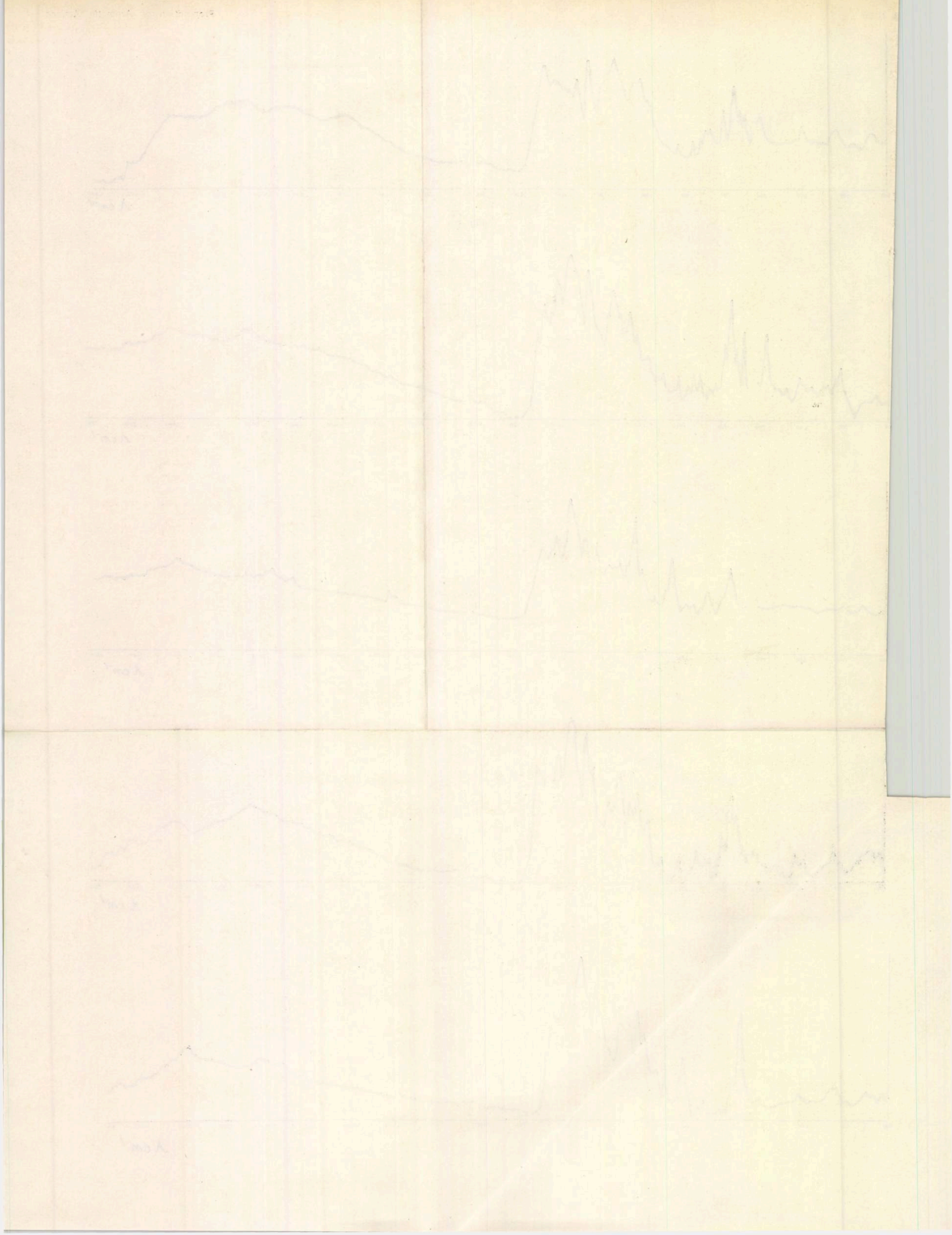


Fig. 5



medium with the acid 2-hidroxi-3-naphtoic. A quantity of 5 g of dye-stuff is introduced iu 200 ml solution of NaOH 10%, is heated to the temperature of 40°..50°C and it is introduced gradualy a quantity of 10 g $Na_2S_2O_4$ sterring continously. The content of the vessel is brought to boiling, maintaining it so some minutes, time in which we observe that the colour becomes lighter. The mass of reaction is subdue to the training with water steamer, when the aniline is removed. After the training it is filtered and the filter is treated with HCl by pH=4, when the prepared product precipitates. The precipitate is filtered and washed with distiled water and after drying it is recrystalized from alcohol. The alcoholic solution of the product is red.

Analyses. $C_{10}H_9O_3N$ M=191,17

N%	
Calculated	6,89
Founded	7,02

The second product (1-amino-2-hidroxi-3-naphtanilide) was prepared by the reduction of the obtained dye-stuff from diazotizated aniline and coupled in an alkaline medium whith the naphtol AS (the anilide of the acid 2-hidroxi-3-naphtoic). We worked as in the preceding case, using for the reduction a quantity of 5 g dye-stuff, 8 g $Na_2S_2O_4$. The alcoholic solution of the product has a red-dark colour.

Analyses. $C_{17}H_{14}O_2N_2$ M=278,28

N%	
Calculated	10,07
Founded	10,40

The third product (1 amino-2-hidroxi-3-naphta-orto-toluidide) was prepared by the reduction of the dye-stuff obtained from the diazotizated aniline and coupled in an alkaline medium with naphtol AS-D (the orto-toluidide of the acid 2-hidroxi-3-naphtoic). We worked in the same way as for the second product. The alcoholic solution of the product is coloured in dark-red too.

Analyses. $C_{18}H_{16}O_2N_2$ M=292,30

N%	
Calculated	9,58
Founded	9,69

The fourth product (1-amino-2-hidroxi-3-naphta-orto-anisidide) was prepared by the reduction of the obtained dye-stuff from diazotizated aniline and coupled in an alkaline medium with the naphtol AS-OL (orto-anisidide of the acid 2-hidroxi-3-naphtoic). We worked in the same way as for the second and third products. The alcoholic solution of the product in this case is also coloured in red-dark.

Analyses. $C_{18}H_{16}O_3N_2$ M=308,30

N%	
Calculated	9,09
Founded	9,03

The fifth product (1-amino-2-hidroxi-4'-chloro-2'-5'-dimetoxi-3-naphtanilide) was prepared by the reduction of the obtained dye-stuff from diazotizated aniline and coupled in an alkaline medium with the naphtol AS-LC (4'-chloro-2'-5'-dimetoxi-anilide of the acid 2-hidroxi-3-naphtoic), working identically as above. In this case the alcoholic solution has a red-dark colour too.

Analyses. $C_{19}H_{17}O_4N_2Cl$ M=372,82

N%	
Calculated	7,52
Founded	7,59

The aminic group is rendered evident by the studying in infra-red (I. R.) of the synthetized products. The determinations in infra-red were made with a spectrograph UR_{10}, Karl Zeiss, Jena, working with solid substances under pastile form, in KBr. The spectres are presented in the Figures 1...5, coresponding to the prepared amines.

The first observation which results from the studying of these spectres is their great resemblance (excepting that of the Fig. 1), which demonstrate the structural resemblace of the analysed substance too. We must underline that in all the spectres it is observed the characteristic belt of the primary aminic group (aromatic amine), which appears at 1,600...1,605 cm^{-1} and in the spectres from the Fig. 1, this belt is more removed towards 1,677 cm^{-1} [6]. We can observe at all the spectres the characteristic belt of the oxidrilic group about the wave length of 3,420 cm^{-1}.

At the spectres represented in fig. 2...5 it is observed a belt around the wave lenght of 1,667 cm^{-1}, which characterises the =NH group and in litterature is shown that the —CO—NH— group comprised between phenyle nucleus appears at 1 663 cm^{-1}.

At a wave length comprised between 700...800 cm^{-1} it is observed a belt characteristic to the phenil group.

The study of the I. R.-spectres demonstrate that the structure of the studied compounds is that proposed.

4. Conclusions

1. By the reduction of some azoic dyes we obtained the following products: the acid 1-amino-2-hidroxi-3-naphtoic; 1-amino-2-hidroxi-3-naphtanilide; 1-amino 2-hidroxi-3-naphta-orto-toluidide; 1-amino-2-hidroxi-3-naphta-orto-anisidide and 1-amino-2-hidroxi-4'-chloro-2'-5'-dimetoxi-3-naphtanilide.

2. The structure of the compounds syntetizied were verified by the dozing of nitrogen and I. R.-spectres.

3. With the obtained amines we syntetizied 5 new azoic dye-stuffs, which have the structure perfectly symmetrical confronted by the azoic chromophore.

4. The new obtained dye-stuffs forme complexes on the fibre with the chromium.

Pedagogical Institute, Jassy

REFERENCES

1. Béchamp A., Ann. Chim. Phys. (3), **42**, p. 186.
2. Grandmougin E., Ber., 1906, **39**, S. 2494.
3. * * * Brevet S. U. A., *1882758* (cf. C. Z., 1933, **I**, *1*, p. 126).
4. Grandmougin E., Ber., 1906, **39**, S. 3929.
5. Robertson S., J. Pr. Chem., 1893, **48**, p. 535.
6. Avram M., Mateescu Gh. D., *Spectroscopia în infraroşu — aplicaţii în chimia organică*. Buc., 1966, pp. 417, 503.

PREPARAREA UNOR AMINE AROMATICE PRIN REDUCEREA DE COLORANŢI AZOICI

(Rezumat)

Se indică modul de preparare a unor amine aromatice prin reducerea de coloranţi azoici. Coloranţii supuşi reducerii au fost obţinuţi din anilină diazotată şi cuplată cu naftoli. Reducerea coloranţilor s-a efectuat cu ajutorul hidrosulfitului de sodiu în mediu alcalin. Prin analize de azot şi spectre I. R. s-a verificat structura substanţelor. Aminele obţinute, diazotate şi cuplate cu naftoli corespuzători, folosiţi la prepararea coloranţilor supuşi reducerii, conduc la obţinerea de noi coloranţi azoici cu structura perfect simetrică faţă de cromoforul azoic.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

C. D. 542.952.6 ; 662.766

ÉTUDE DE LA POLYMÉRISATION DES DÉRIVÉS ACÉTYLÉNIQUES

Note II

SUR LA CAPACITÉ DE POLYMÉRISATION DU PHÉNYLACÉTYLÈNE

PAR

SVETLANA DUMITRESCU, C. GHIRVU,
CRISTOFOR SIMIONESCU
membre de l'Académie de la République Socialiste de Roumanie
et
VICTOR SAHINI
membre correspondant de l'Académie de la République Socialiste de Roumanie

Dans ce qui suit on présente le calcul des orbitales moléculaires — Hückel [1] et des niveaux d'énergie respective des électrons π pour le monomère phénylacétylène (I), le dimère 1,4 (II) et 1,3 (III), respectivement le trimère 1,4,6 (IV), considérés plans.

En analysant les énergies de résonance données dans le tableau 1, dont les valeurs coïncident aux celles fournies par la littérature [2], il résulte qu'en augmentant le degré de polymérisation du polyphénylacétylène on obtient une plus grande stabilité des oligomères et des polymères correspondants.

On peut apprécier de même que le dimère du type tête à tête (II) possède une stabilité plus grande que celui du type tête à queue (III) ce qui coïncide avec l'hypothèse emise par Chantarovitch dans son travail [3] concernant la polymérisation thermique du phénylacétylène.

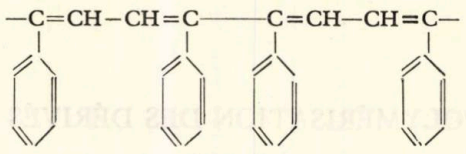
Tableau 1

Nr.	Dénomination de la substance	Énergie de résonance (unités β)
1.	(I) Phénylacétylène	2,4242
2.	(II) Dimère 1,4	5,4010
3.	(III) Dimère 1,3	5,3134
4.	(IV) Trimère 1,4,6	8,3440

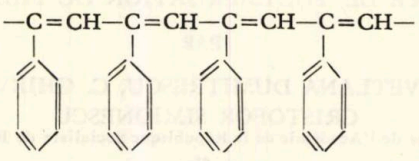
Cette conclusion thermodynamique est en concordance avec les données expérimentales concernant les mesures d'électro-conductibilité spécifique effectuées sur le polyphénylacétylène obtenu avec le triisopropyl-bor

($\rho \simeq 10^9$ Ω cm) [4], sur le polyphénylacétylène obtenu par les catalyseurs complexes organo-métalliques stéréospécifiques solubles dans les hydrocarbures ($\rho \simeq 10^{13}$ Ω cm) [5] et sur le copolymère à base de phénylacétylène et acétylène ($\rho \simeq 10^6$ Ω cm.) [6].

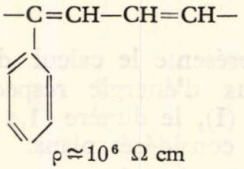
Les structures des chaînes macromoléculaires proposées pour les trois cas mentionnés ci-desus sont les suivantes:



$\rho \simeq 10^9$ Ω cm



$\rho \simeq 10^{13}$ Ω cm



$\rho \simeq 10^6$ Ω cm

Si l'on analyse les valeurs des énergies de résonance et les données expérimentales il en résulte une plus grande probabilité des structures des chaînes basées sur le dimère 1,4 par rapport au dimère 1,3, obtenus dans le cas des polymérisations nonstéréospécifiques.

Des diagrammes moléculaires (fig. 1...4) il résulte aussi qu'au fur et à mesure que le degré de polymérisation augmente, la valence libre des atomes de carbone terminaux de la chaîne polyphénylacétylénique diminue (fig. 5), fait confirmé par voie expérimentale par la diminution de la capacité de polymériser ultérieure des fractions à poids moléculaire grand. Ainsi la moyenne des coefficients de valence libre est pour le monomère 0,6176, pour les dimères 0,6041 et pour le trimère 0,5171 (tableau 2).

À l'aide des diagrammes des niveaux d'énergie on a calculé les énergies de transition pour les produits (I)...(IV) en obtenant les données du tableau 3.

La diminution de l'énergie de transition du monomère vers le trimère doit conduire à un déplacement du maximum de la bande d'absorption vers des longueurs d'onde de plus en plus grandes. D'autre part la différence entre

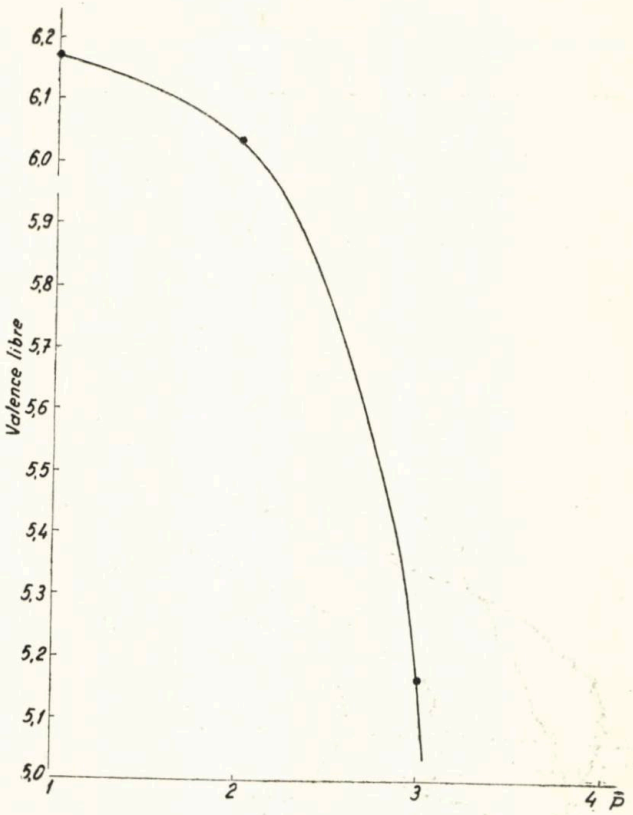


Fig. 5. — Variation de la valence libre des atomes de carbone terminaux fonction du degré de polymérisation du P.F.A.

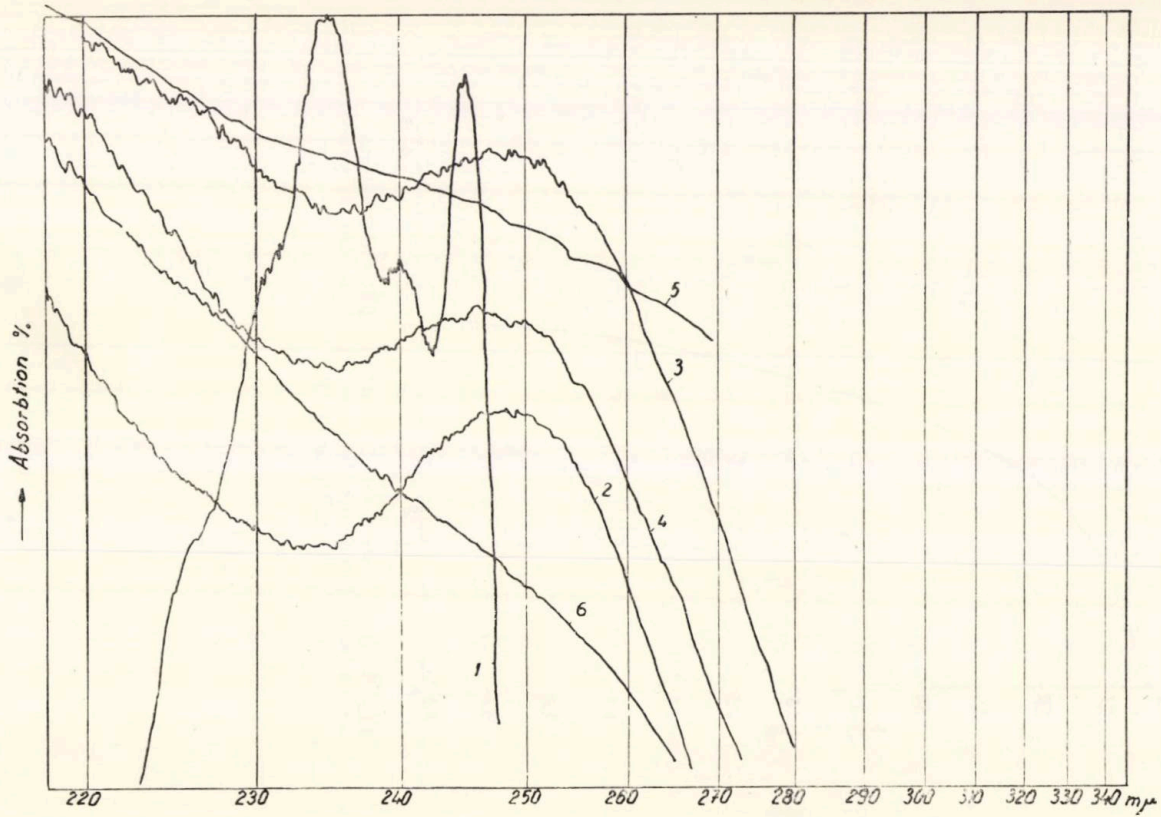


Fig. 6. — Spectres électroniques du phénylacetylène et du *1* — monomère ; *2* — fraction ayant $M = 245$; *3* — fraction ayant $M = 414$; *4* — fraction ayant $\overline{M} = 527$; *5* — fraction ayant $\overline{M} = 1\,143$; *6* — fraction ayant $\overline{M} = 1\,901$.

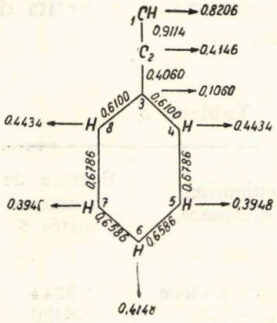


Fig. 1. — Diagramme moléculaire du monomère phénylacétylène.

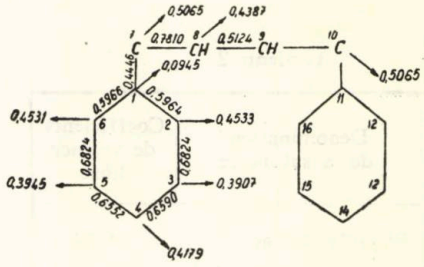


Fig. 2. — Diagramme moléculaire du dimère 1,4.

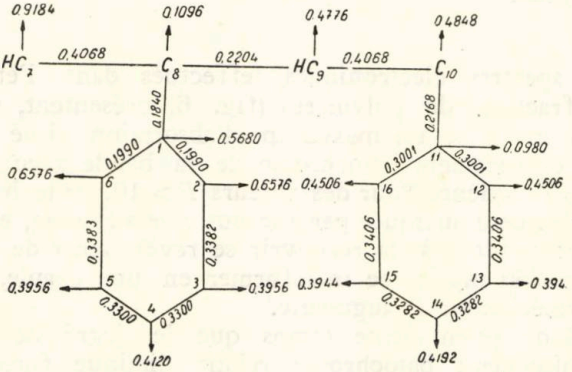


Fig. 3. — Diagramme moléculaire du dimère 1,3.

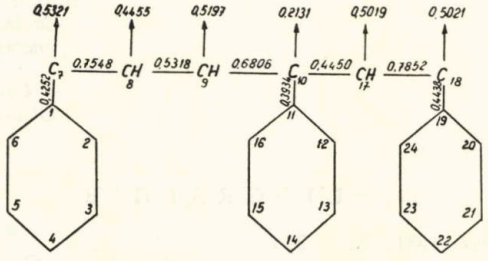


Fig. 4. — Diagramme moléculaire du trimère 1,4,6.

les énergies de transition du monomère vers le trimère est de moins en moins grande, ce qui implique des déplacements de plus en plus petits de la bande, confirmés, d'ailleurs, par voie expérimentale.

Tableau 2

Nr.	Dénomination de la substance	Coefficients de valence libre
1.	Phénylacétylène	0,6176
2.	Dimères 1,3 et 1,4*)	0,6041
3.	Trimère 1,4,6	0,5171

*) Valeur moyenne.

Tableau 3

Nr.	Dénomination de la substance	Énergie de transition unités β
1.	(I) Phénylacétylène	1,3244
2.	(III) Dimère 1,3	0,8920
3.	(II) Dimère 1,4	0,7718
4.	(IV) Trimère 1,4,6	0,5704

Ainsi les spectres électroniques (effectués dans l'éther éthylique) des différentes fractions de polymères (fig. 6) présentent, lorsqu'il s'agit des oligomères à $P=3...5$, un maximum d'absorption situé à $\lambda \simeq 250$ mμ, probablement le déplacement batochrome de la bande avec $\lambda \simeq 245$ mμ du spectre de phénylacétylène. Pour des valeurs $P > 10$, cette bande n'apparaît plus, étant probablement masquée par une autre, très intense, en U.V. eloigné. Le comportement tendant à la recouvrir se révèle aussi de la tendance de la bande avec $\lambda \simeq 250$ mμ de se transformer en une épaule, à mesure que le degré de polymérisation P augmente.

Il résulte donc qu'en même temps que le degré de polymérisation augmente, le déplacement batochrome relatif diminue fortement, ce qui expliquerait la valeur presque constante du maximum d'absorption pour les oligomères étudiés avec $P = 3...5$.

Reçue le 20 XII 1967

Institut Polytechnique de Jassy,
Chaire de Macromolécules
naturelles et synthétiques
et
Université de Bucarest,
Chaire de Chimie physique

BIBLIOGRAPHIE

1. Hückel E., Z. Physik, 1931, **70**, S. 204.
2. Coulson C. A., Streitwieser, *A Dictionary of π-Electron Calculation.* 1965.
3. Шантарович П. С., Шляникова И. А., Высокомол. соед., 1961, *3.*
4. Simionescu Cr., Dumitrescu Sv., Revue roumaine de chimie, 1967, **12**, *4.*
5. — (sous presse).
6. Паушкин Я. М., Марков. Ю. Я., Высокомол. соед., 1965, **7**, *9.*

STUDIUL POLIMERIZĂRII DERIVAŢILOR ACETILENEI

Nota II

Asupra capacităţii de polimerizare a fenilacetilenei

(Rezumat)

Se expune calculul orbitalilor moleculari Hückel şi cel al nivelelor de energie ale electronilor π pentru fenilacetilenă şi oligomeri.

Din examinarea valorilor energiilor de rezonanţă se formulează unele concluzii referitoare la structura catenelor de PFA.

Calculul coeficienţilor de valenţă liberă a atomilor de carbon terminali ai lanţului polifenilacetonic justifică faptul că gradul de polimerizare al PFA scade pe măsura creşterii greutăţii sale moleculare.

Valorile energiilor de tranziţie pentru monomeri şi oligomeri furnizează unele indicaţii despre efectul deplasării batocrome a maximului benzii de absorbţie, confirmat experimental de către spectrul electronic.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Diagrama moleculară a monomerului fenilacetilenă.

Fig. 2. — Diagrama moleculară a dimerului 1,4.

Fig. 3. — Diagrama moleculară a dimerului 1,3.

Fig. 4. — Diagrama moleculară a trimerului 1,4,6.

Fig. 5. — Variaţia valenţei libere a atomilor de carbon terminali în funcţie de gradul de polimerizare al polifenilacetilenei.

Fig. 6. — Spectrele electronice ale fenilacetilenei şi ale unor fracţii de PFA; *1* — spectrul electronic al monomerului, *2* — spectrul electronic al fracţiei având $\bar{M} = 245$, *3* — spectrul electronic al fracţiei având $\bar{M} = 414$, *4* — spectrul electronic al fracţiei având $\bar{M} = 527$, *5* — spectrul electronic al fracţiei având $\bar{M} = 1143$, *6* — spectrul electronic al fracţiei având $\bar{M} = 1901$.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

D. K. 676.1.02

VERWENDUNG VON NATRIUMALUMINAT ZUR ERZEUGUNG VON NEUTRALEN PAPIEREN

VON

EMANUEL POPPEL, SIMION PETROVAN
und
CRISTOFOR SIMIONESCU
Mitglied der Akademie der Sozialistischen Republik Rumänien

Mitteilung an der XI-ten technisch-wissenschaftlichen Tagung der Cellulose- und Papier-Industrie Leipzig, 21—24. November 1966

1. Problemstellung

Die klassische Methode der Papierleimung — in saurem Medium — mittels Kolophoniumleimen verwendet Aluminiumsulfat als Koagulierungselektrolyt, wobei die Menge von der Natur des Leimes und des Zellstoffs abhängt, bei einem pH-Wert von 4,5...5,5.

Die Durchführung der Leimung in solch einem sauren Medium hat zahlreiche Nachteile, wie: Möglichkeit der Zerstörung der Zellstoff-faser, stärkere Korrosion der Einrichtungen und von Organen der Fabrikationsmaschine, verhältnismässig geringe Aufbewahrungsfähigkeit der Papiere, Unmöglichkeit der Herstellung von geleimten Papiersorten von neutraler oder schwach basischer Reaktion, Verwendung von Füll- oder Zusatzstoffen, die sich in saurem Medium zersetzen, grosser Aufwand von Leim- und Hilfsstoffen, u. s. f.

Die ernsten Nachteile, die bei der Herstellung von Papier in saurem Medium auftreten, haben die Aufnahme einer Studienfolge veranlasst [1]...[12], welche die Verlagerung des Prozesses in ein neutrales, bzw. basisches Medium zum Gegenstand hatten.

Von den Substanzen, die im Hinblick auf ihre Verwendbarkeit zur Verlagerung des Leimungsmediums analysiert wurden, wollen besonders erwähnt werden die kation-aktiven Stoffe [13] und das Natriumaluminat.

Die Verwendung von Natriumaluminat hat den Weg der Ausarbeitung von Fabrikationsverfahren in neutralem oder schwach basischen Medium von mit Kolophoniumleimen oder synthetischen hochmolekulären Verbindungen geleimten oder von ungeleimten Papieren eröffnet. Auf diese Weise können also die Nachteile des klassischen Schemas der Papierherstellung in saurem Medium vermieden werden.

2. Untersuchungen zur Herstellung von neutralen Papieren

2. 1. Mit Kolophoniumleimen in neutralem Medium hydrophobisierte Papiere

Seit einigen Jahren werden bei uns Studien bezüglich der Werwendung von Natriumaluminat in der Papierindustrie angestellt [6]...[11].

Die Ergebnisse unserer Untersuchungen — die in Laboratoriums- und Fabriksmasstab ausgeführt wurden — zur Ausarbeitung von industriellen Betriebsverfahren, wie auch die

Studien, welche die theoretische Untermauerung [9], [11], [14] der Vorgänge bezweckten, die bei der gleichzeitigen Anwendung von Natriumaluminat und Aluminiumsulfat als Koagulierungselektrolyte der Leimungsdispersionen stattfinden, bildeten den Gegenstand mehrerer Referate und Mitteilungen.

In der Hoffnung, dass diese Arbeiten grösstenteils bekannt sind, werden wir uns im folgenden gestatten, nur einige der wichtigsten Schlussfolgerungen zu unterstreichen, die sich aus den Untersuchungen ergaben, die wir in dieser Richtung angestellt haben.

a) Die gleichzeitige und in einem bestimmten Verhältnis durchgeführte Verwendung von Natriumaluminat und Aluminiumsulfat als Koagulierungselektrolyten für die Leimungsdispersionen auf Kolophoniumbasis, gestattet die Gewinnung von praktisch neutralen Papieren, deren Leimungsgrad, sowie die wichtigsten physikalisch-mechanischen Kennwerte, denen der unter klassischen Bedingungen in saurem Medium erhaltenen überlegen sind. Diese Schlussfolgerung wurde auch von anderen Forschern, die sich dem Studium dieses Problems widmeten [15]...[18] vollständig bestätigt.

Tabelle 1

Bei der Herstellung von in neutralem Medium geleimtem Konzeptpapier erhaltene Ergebnisse, vergleichsweise mit einer Blindprobe in saurem Medium

Lfd. Nr.	Arbeitsbedingungen und Kennwerte	Probe Nr. *1*	Probe Nr. *2*	Probe Nr. *3*	Probe Nr. *4*	Probe Nr. *5*
1.	Bewoidleim (% auf arto Stoff)	2,60	2,60	2,60	2,60	1,38
2.	Aluminiumsulfat (%)	4,50	2,00	2,00	2,00	2,00
3.	Natriumaluminat (%)	–	0,5	0,5	0,25	0,25
4.	Gesamt Aluminiumsalze, ausgedrückt in $Al_2(SO_4)_3 . 18H_2O$(%)	4,50	4,00	4,00	3,00	3,00
5.	Abweichung in %-en der Aluminiumsalzmenge gegen über Probe Nr. *1*	–	-11	-11	-33	-33
6.	Kaolin (%)	10	10	10	10	10
7.	Mahlgrad (°S.R.)	45	37,5	48	45	39
8.	End pH-Werte (im Holländer)	4,55	6,90	6,95	6,55	6,50
9.	Flächengewicht (g/m²)	62,3	58,4	63,8	66,3	68,5
10.	Leimungsgrad (mm)	1,25	1,75	2,00	1,75	1,50
11.	Reisslänge (m)	2 190	2 630	2 520	2 770	2 660
12.	Dehnung (%)	0,85	1,0	0,97	0,98	1,00
13.	Doppelfalzungen	7	14	13	29	21
14.	Rellative Berstfestigkeit (kg/cm²)	0,48	0,51	0,50	0,53	0,51
15.	Asche (%)	7,51	6,27	7,91	7,52	8,13

Konstante Faktoren: 48% nichtgebleichte Sulfitcellulose, 52% weiser Holzschliff

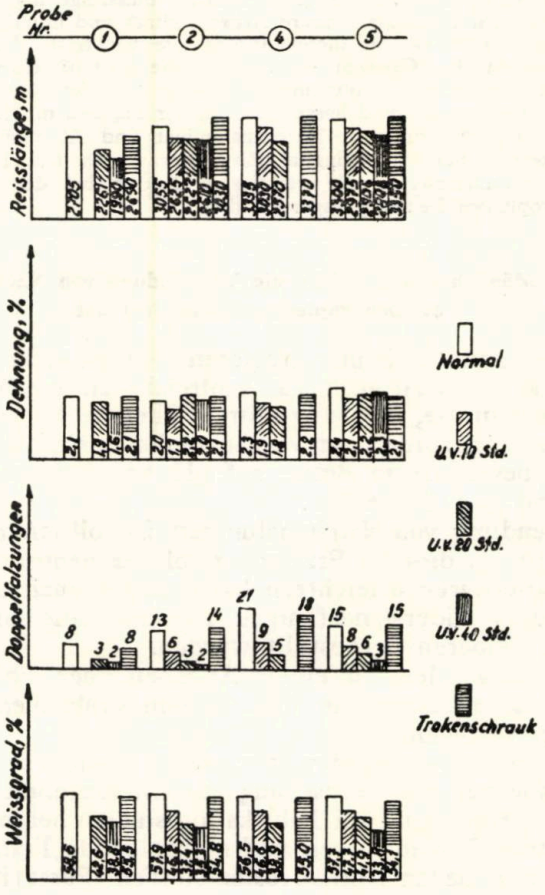
Die Vergleichswerte, die bei einem Unternehmen in der Sozialistischen Republik Rumäniet bei der Herstellung von Konzeptpapier erhalten wurden und die auf der Tabelle 1 dargestelln sind, sind in dieser Hinsicht aufschlussreich.

b) Dieselben in neutralem Medium erzeugten Papiere (pH=6,5...7,0), welche einer künstlichen Alterung unter Ultraviolettbestrahlung während 10, 20 und 40 Stunden oder im Trockenschrank bei 105°C während 72 Stunden ausgesetzt worden waren, haben sich viel besser bewährt als die in saurem Medium erzeugte Vergleichsprobe [19].

Das Schaubild aus Abb. 1 erhärtet diese Behauptung.

c) Alle angestellten Berechnungen bezeugen die Wirtschaftlichkeit der Erzeugunsverfahren von in neutralem Medium geleimten Papier, wobei Natriumaluminat verwendet wird, obwohl dieses zur Zeit bei uns im Lande nicht industriell hergestellt wird.

d) Bei der Erzeugung von Papieren, die mit Kolophoniumleimen in neutralem Medium — durch die Verwendung von Natriumaluminat bedingt — hydrophobisiert wurden, erhält man gleichzeitig auch zahlreiche andere technologischen Vorteile, von welchen wir hervorheben: geringe Empfindlichkeit des Leimungsvorganges gegenüber von Wässern mit hohem Härtegrad,



Abs. 1. — Verhalten bei der künstlichen Alterung von in neutralem Medium geleimten Papieren (Probe Nr. *2*, *4* und *5*) in Vergleiche mit einem unter denselben Bedingungen in saurem Medium erzeugten Papier (Probe Nr. *1*).

geringere Korrosion der Apparatur, Möglichkeit der Herstellung von neuen Sorten von neutralen Papiererzeugnissen mit Füll- und Zusatzstoffen, die in saurem Medium empfindlich oder zerstörbar sind, Verbesserung der Ausbeute der Zurückhaltung von Füllstoffen [20], [21] und von kurzfaserigen Zellstoffen [22], u. s. f.

e) Grundlageforschungen, die mit modernen Untersuchungsmitteln an den dispersen Leimungssystemen angestellt wurden, haben uns die Formulierung eines dokumentierten Gesichtspunktes über den Mechanismus des Hydrophobierungsprozesses von Zellstoff-fasern unter den Bedindungen der Leimung in neutralem Medium gestattet, wie auch in Hinsicht auf die Zwischenwirkung der Bestandteile des Systems: Faser — Hydrophobisierungsmittel — Koagulierungselektrolyt [14]...[22]. Die Ergebnisse und Schlussfolgerungen, zu welchen wir bei diesem Studium gelangten, bestätigen unsere Arbeitstechnik und unterbauten sie gründlicher.

Es wurde festgestellt, dass in diesem Prozess die wichtigste Bedingung, die Haltung des pH-Wertes zwischen den Grenzen 6,3...7,3 ist; die wird für einen bestimmten, vorher festgesetzten Zusatz von totalen Aluminiumsalzen — je nach der Natur des Zellstoffes, der Menge and Art des Leimes, den Endcharakteristiken der Papiere, u. s. f. — durch Einhaltung eines gewissen Verhältnisses zwischen Natriumaluminat und Aluminiumsulfat erreicht. So ergibt sich die Sicherheit der Unterbringung des Vorganges in Bereiche der vorherschenden Bildung von Aluminiumhydroxyd, als wichtigsten Faktor bei der Niederschlagung und Fixierung der hydrophoben Leimungsdispersion [23].

2. 2. Neue Möglichkeiten, welche die Verwendung von Natriumaluminat bei der Papiererzeugung eröffnet

Papier wird heute in immer grösseren Mengen nicht nur für Schreib- und Druckzwecke sondern auch für zahlreiche andere Wirtschaftssparten (Industrien: Metallurgie, Nahrungsmittel, Chemie, Pharmazie, u. s. f.) für Spezialpackungen angefordert, an welche in den meinsten Fällen besondere Anforderungen besonders in Bezug auf pH und Widerstandsfähigkeit im feuchten Zustand gestellt werden.

Die Verwendung von Natriumaluminat ist vollständig auch in diesem Bereiche möglich, da dies die Erzeugung solcher neutraler, geleimter oder ungeleimter Papierwaren erleichtern kann, sowie auch die von in nassen Zustand besonders widerstandsfähigen Papieren, die unter Zusatz von synthetischen Polymeren hergestellt wurden.

In folgenden werden wir einige Angaben über die Art der Anwendung von Natriumaluminat zur Lösung von Problemen in der Art der oben erwähnten vorlegen.

Antikorrosionspapiere werden gegenwärtig mit Vorliebe und in sehr grossem Masstabe bei der Verpackung von Metallteilen und Kugellagern verwendet. Sie werden in zwei Fabrikationsstadien hergestellt: Erzeugung von antikorrosiven Trägepapieren und nachfolgende Tränkung der Trägepapiere mit verschiedenen Antikorrosionsstoffen (Paraffin, flüchtige Korrosionsinhibitoren, u. s. f.).

Um einen zufriedenstellenden Schutz der metallischen Flächen mit denen sie in Berührung gelangen, zu sichern, muss das antikorrosive Trägepapier minimale Mengen von Cl^- und SO_4^{-2}-ionen enthalten; das pH des wässrigen Auszuges muss neutral oder schwach alkalisch sein. Von den andern bezeichnenden Kennziffern sind die Werte bezüglich der Durchlässigkeit von Fetten und Wasser gleichfalls bedeutend.

Zur Verwirklichung dieser Bedingungen erzeugt man in einigen Ländern diese Sorten ungeleimt. Da in der Praxis festgestellt wurde, dass diese Papiere sich nicht beim Druck gewisser Texte sowie bei der

Impregnierung mit verschiedenen antikorrosiven Reagentien bewähren, haben wir uns die Aufgabe gestellt, ein in neutralem Medium geleimtes Antikorrosions-trägepapier herzustellen, wobei gleichzeitig — in minimalen Mengen — Natriumaluminat und Aluminiumsulfat als Koagulierungselektrolyten des dispersen Hydrophobisierungsmittels (Kolophoniumleim) verwendet werden.

Auf Grund von Versuchen im Laboratorium konnten wir die Betriebsbedingungen für ein solches Papier feststellen, welches den oben angegebenen Bedingungen entsprechen soll.

Aus der Warenkalkulation für natürliches Pergament imitieren des Papier ergibt sich die Wirtschaftlichkeit dieses Erzeugungsverfahrens, sogar im Falle der *ad-hoc*-Bereitung von Natriumaluminat in der Papierfabrik.

Wegen seines neutralen Charakters sind wir der Ansicht, dass das Antikorrosionsträgepapier vom Pergamentimitationstypus, sei es geleimt oder ungeleimt, unter Zusatz von Natriumaluminat bereitet, auch in zahlreichen andern Fällen verwendbar ist, so z. B. bei der Verpackung von Nahrungsmitteln, pharmazeutischen Spezialitäten, u. s. f.

Die Verlagerung der Leimung von sauer nach neutral durch unmittelbare Anwendung von Natriumaluminat oder mittelbar durch Korektur mittels NaOH- oder Na_2CO_3-Zusatz erscheint praktisch angebracht in zahlreichen Fällen. Dieses Verfahren wird zur Zeit in einer der grössten Fabriken von Papiersäcken aus Sulfatzellstoff bei uns zu Lande angewendet; die Verwendung zur Verbesserung des Herstellungsverfahrens einer der wichtigsten ungeleimten Papiersorte, des Zeitungspapiers, wird studiert.

Eine besonders interessante Fragestellung, die seit langem von uns aufgeworfen wurde [6], [7], [10] und die heute gründlich und kompetent von prof. Ed. Szwarcsztajn und Mitarbeiter [24] studiert wird, besteht in der Verwendung von Natriumaluminat bei der Herstellung von geleimten und mit $CaCO_3$ chargierten Papieren. Für dieses Problem hoffen wir eine günstige Lösung bei einer Fabrik in Rumänien zu finden, die gegenwärtig über eigene Anlage zur Herstellung von gefällten $CaCO_3$ unter rentablen Bedingungen verfügt.

Eine der bedeutendsten Richtungen, in welche zur Zeit die Aufmerksamkeit der Forscher und Praktiker gelenkt ist, besteht in der Herstellung und Nutzung neuer Zusatzstoffe, besonders auf Grundlage der synthetischen Polymere, um Papierprodukte hoher Widerstandsfähigkeit in nassem Zustand zu erhalten.

Da im allgemeinen die bis zum gegenwärtigen Zeitpunkt bekannten synthetischen Polymere dem Papier nicht den herkömmlich so genannten Leimungsgrad verleihen, beziehen sich zahlreiche Studien auf die Untersuchung der gleichzeitigen Anwendung — in bestimmten Verhältnissen — von Leimen aus Kolophonium oder modifiziertem Kolophonium und Emulsionen oder Dispersionen von synthetischen Polymeren.

Das ständig wachsende Interesse dieser Studien erklärt sich einerseits durch den grossen Bedarf in Weltmasstab von in nassem Zustande wider-

standsfähigen Papieren (im Vorjahre wurden ungefähr 3 Mill. Tonnen erzeugt), anderseits durch die immer grösser werdenden Möglichkeiten, welche die in vollem Aufstieg befindliche Industrie der synthetischen Polymere bietet.

In diesem Zusammenhang der erwähnten Fragenkomplexe verzeichnen wir auch unsere gegenwärtigen Forschungsarbeiten, die nicht nur die Schaffung von in nassem Zustand widerstandsfähigen Papierwaren bezwecken und zwar durch Verwendung als Stoffzusatz einer grossen Auswahl von synthetischen Polymeren und Leimen aus Kolophonium und aus modifiziertem Kolophonium, sondern auch die gleichzeitige Herstellung von Papieren neutralen Charakters. Wir sind der Ansicht, dass solche Erzeugnisse ein grösseres Interesse für verschiedene Industriezweige und Wirtschaftssparten vorstellen.

Von den bei uns in dieser Richtung ausgeführten Arbeiten werden wir nur einige Ergebnisse vorlegen, die mit Emulsionen von Vinylpolyacetat (VPA) — einem industriell in der Sozialistischen Republik Rumänien hergestelltem Erzeugnis, welches hier verwendet wird, um dem Papier Widerstandsfähigkeit in nassem Zustande zu verleihen — erhalten wurden. Die neutrale Natur des Papiers wurde durch die Verwendung Koagulierungselektrolyten — für die Emulsion von VPA und der Kolophoniumdispersion — und zwar von Natriumaluminat und Aluminiumsulfat gesichert.

Die Proben gingen von ungebleichten Kraft-Sulfatzellstoff auf 45° Sch. R. vermahlen, aus. Es wurden Papiere mit einem Zusatz von 1...3% Bewoidleim, ohne VPA und mit steigenden Mengen von VPA zwischen 1...3%, hergestellt. Die Koagulierung wurde bei allen Proben mit einer konstanten Menge von 5% $Al_2(SO_4)_3 . 18H_2O$ in saurem Medium (pH = 4,5) und mit 0,4% AlO_2Na assoziert mit 3,4% Aluminiumsulfat (pH=6,9) in neutralem Medium durchgeführt.

Die Hälfte der erhaltenen Proben wurde nachträglich einer thermischen Behandlung im Trockenschranck bei 105°C während 90 Minuten unterzogen.

Die erhaltenen Papiere von einem konstanten Flächengewicht von 70 g/m² wurden nach vorausgehender Konditionierung der Proben zur Bestimmung der wichtigsten Kennwerte unterworfen.

Die erhaltenen Resultate sind in den Schaubildern der Abb. 2...9 dargestellt.

3. Schlussfolgerungen

Aus unsern Darlegungen können folgende Schlussfolgerungen gezogen werden:

1. Der Zusatz von VPA-Emulsion zum Stoff hat einem positiven Einfluss auf alle physikalisch-mechanischen Kennwerte des Papiers in trockenen oder in nassem Zustande, sowohl in saurem als auch in neutralem Medium.

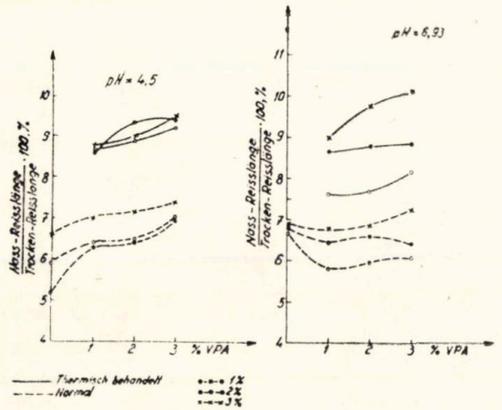


Abb. 2. — Einfluss eines VPA-Zusatzes auf das Verhältnis zwischen Reisslänge in nassem Zustand und der im Trockenzustand, in Prozenten, bei Papieren mit 1, 2 und 3% Kolophoniumleim, in saurem und neutralem Medium erhalten, normal und nach thermischer Behandlung.

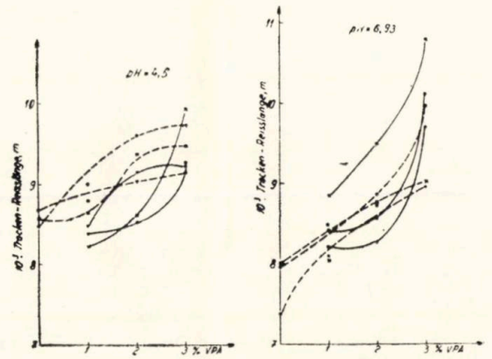


Abb. 3. — Einfluss eines VPA-Zusatzes auf die Reisslänge im Trockenzustand, von Papieren mit 1, 2 und 3% Kolophoniumleim, in saurem und neutralem Medium erhalten, normal nach thermischer Behandlung.

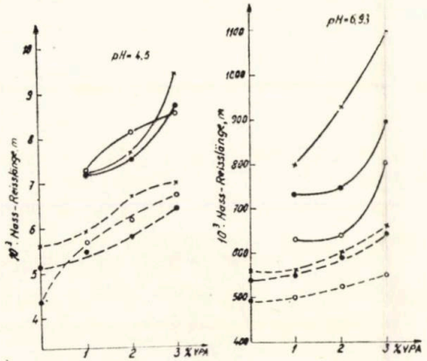


Abb. 4. — Einfluss eines VPA-Zusatzes auf die Reisslänge in nassem Zustand bei Papieren mit 1, 2 und 3% Kolophoniumleim, in saurem und neutralem Medium erhalten, normal und nach thermischer Behandlung.

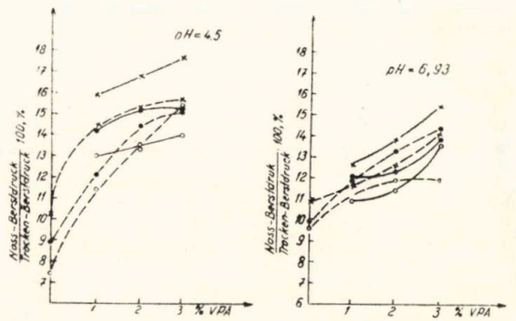


Abb. 5. — Einfluss eines VPA-Zusatzes auf das Verhältnis zwischen der Berstfestigkeit im nassen Zustand und der im Trockenzustand, in Prozenten, bei Papieren mit 1, 2 und 3% Kolophoniumleim, in saurem und neutralem Medium erhalten, normal und nach thermischer Behandlung.

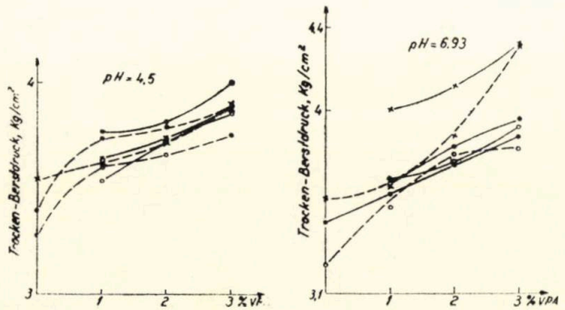


Abb. 6. — Einfluss eines VPA-Zusatzes auf die Berstfestigkeit im Trockenzustand bei Papieren von mit 1, 2 und 3% Kolophoniumleim, in saurem und neutralem Medium erhalten, normal und nach thermischer Behandlung.

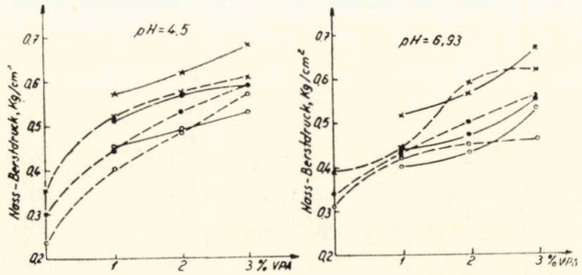


Abb. 7. — Einfluss des VPA-Zusatzes auf die Berstfestigkeit im nassen Zustand bei Papieren von mit 1, 2 und 3% Kolophoniumleim, in saurem und neutralem Medium erhalten, normal und nach thermischer Behandlung.

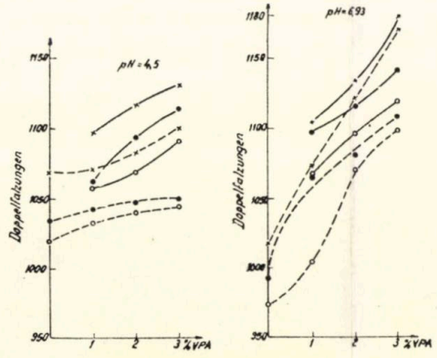


Abb. 8. — Einfluss eines VPA-Zusatzes auf die Doppelfalzzahl bei Papieren von mit 1, 2 und 3% Kolophoniumleim, in saurem und neutralem Medium erhalten, normal und nach thermischen Behandlung.

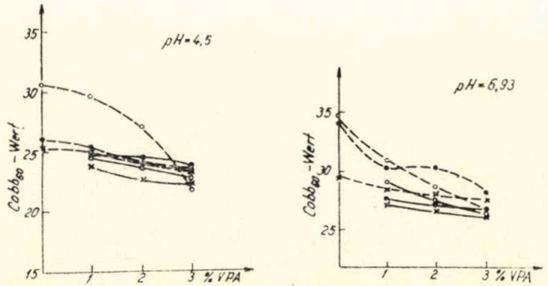


Abb. 9. — Einfluss eines VPA-Zusatzes auf die Kennziffer $COBB_{60}$, bei Papieren mit 1, 2 und 3% Kolophoniumleim, in saurem und neutralem Medium erhalten, normal und nach thermischer Behandlung.

2. Die Mengen von nur 1% VPA genügen um — unter wirtschaftlichen Bedingungen — Verbesserungen der wichtigsten Festigkeitszahlen in nassem Zustande, besonders der Reisslänge und der Berstfestigkeit, zu erzielen.

3. Die thermische Behandlung, welcher die Papiere dann unterzogen wurden, hat eine positive Auswirkung gezeigt, besonders bei den im neutralen Medium geleimten Papieren; die Anwendung dieses Mediums bei geleimten feuchtigkeitsfesten und neutralen Papieren erscheint gerechtfertigt.

4. Aus der Analyse der Ergebnisse bezüglich der $COBB_{60}$-Zahl und des Leimungsgrades lässt sich folgern, dass eine vollständige Verträglichkeit des Kolophoniumleimes (Bewoidtypus) mit VPA besteht, wobei das letztere einen günstigen Einfluss auf diese Kennwerte und zwar proportionell der Menge des angewendeten Polymerzusatzes aufweist.

5. Die vollständige Ersetzung des Kolophoniumleimes durch VPA bei Papieren, bei welchen neben der Nassfestigkeit auch ein gewisser Leimungsgrad gefordert wird, ist unmöglich. Trotzdem ist die kombinierte Anwendung von Kolophoniumleim und VPA äusserst wichtig.

6. Es wurde endlich die Möglichkeit der Anwendung von VPA als wirksamen Zusatz bei der Herstellung von nassfesten geleimten und neutralen Papieren bewiesen. Wir sind der Ansicht, dass diese Sorten eine breite Verwendbarkeit für verschiedene Typen von Spezialpackungen finden könnten.

* * *

Die Untersuchungsarbeiten im Bereiche der Erzeugung mittels synthetischer Polymere von nassfesten Papieren werfen natürlich auch zahlreiche Probleme experimenteller Natur — bei der Synthese dieser Produkte — wie auch bedeutende Fragen theoretischer Natur bezüglich der Natur der Bindung auf, die sich zwischen dem synthetischen Polymer und dem Zellstoff im Papierblatt ergibt. Auf diese Fragen, die gegenwärtig von zahlreichen Forschern behandelt werden [25], [26], versuchen auch wir einen bescheidenen Beitrag zu liefern.

Technische Hochschule, Jassy,
Abteilung für Zellstoff, Papier und Kunstfasern

LITERATURVERZEICHNIS

1. Dohne W. P., Libby C. E., Techn. Assoc. Papers, 1942, **25**, pp. 663—669.
2. Chêne M., Chemie et Ind., 1943, **50**, pp. 16—20.
3. Schur M. O., Levy R. M., Techn. Assoc. Papers, 1946, **29**, pp. 160—163.
4. Chêne M., An. Univ. de Grenoble, 1947—1948, **23**, pp. 451—461.
5. Barr P. E., Pulp a. Paper Ind., 1947, *3*, pp. 451—461.
6. Simionescu Cr. u. Mitarb., Ind. Lemnului, Cel. şi Hîrtiei, 1954, *4*, p. 132.
7. Simionescu Cr. u. Mitarb., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1955, **I** (V), *1—2*, pp. 107—122.
8. Симионеску Кр., Поппел Эм., Бум. пром., 1956, *12*, стр. 7—9.
9. Poppel Em., St. şi cerc. şt., Acad. R.P.R, filiala Iaşi, Chimie, 1957, **8**, *2*, pp. 341—356.
10. Simionescu Cr., Zellstoff u. Papier, 1957, *1*, S. 1.

11. Simionescu Cr., Poppel E., *Einige theoretische und praktische Ergebnisse über Papierleimung.* Vortrag an der III-ten Konferenz für Papier- und Polygraphische Industrie, Budapest, Okt. 1959.
12. Chêne M., La Papeterie, 1959, *6—9,* pp. 399—401.
13. Poppel E., Simionescu Cr., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1962, **VIII (XII)**, *1—2,* pp. 177—188.
14. Poppel E., Petrovan S., Simionescu Cr., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1964, **X (XIV)**, *1—2,* pp. 165—168.
15. Ploetz Th., Scheuring I., Das Papier, 1955, *13/14,* S. 311—316; Ibid., 1956, *10,* S. 183.
16. Szwarcsrtajn Ed. ed al., Przeglad Papierniczy, 1951, *8.*
17. Fujinami ed al., J. Jap. Tappi, 1960, *10,* pp. 675—682.
18. Slipka K., Papir a celuloza, 1966, **21**, *4,* pp. 104—109.
19. Simionescu Cr., Poppel Em., Rozmarin Gh., Cel. şi Hîrtie, 1961, *11,* pp. 358—404.
20. Reich G., Huber O., Das Papier, 1959, *17/18,* S. 438—442.
21. Topinka V., Vargic L., Papir a celuloza, 1966, **21**, *3,* p. 80.
22. Poppel Em., Simionescu Cr., Bul. Instit. polit. Iaşi 1967, **X (XIV)**, *1-2,* pp. 155—168.
23. Lagally P., Lagally H., Tappi, 1959, **42**, *11,* pp. 889—899.
24. Szwarcsztajn Ed., Maj J., ATIP, Bull., 1965, **19**, *2,* pp. 75—82.
25. Ronnaby B., Celuloză şi Hîrtie, 1955, *7-9,* pp. 354—351.
26. Stannett V., *Mechanisms of wet stregth development in paper.* Held at „Simposium on properties of Surfaces and surface Coatings Related to Paper and Wood", State University College of Forestry, Syracuse, N.Y., 29-30 Nov., 1965.

OBŢINEREA HÎRTIILOR NEUTRE PRIN UTILIZAREA ALUMINATULUI DE SODIU

(Rezumat)

Se prezintă rezultatele obţinute în cercetările referitoare la obţinerea hîrtiilor încleiate în mediu neutru, cu dispersii de colofoniu, aluminat de sodiu corectat cu sulfat de aluminiu, ca agenţi de coagulare. Gradul de încleiere, principalii indici fizico-mecanici şi rezistenţa la îmbătrînire a hîrtiilor neutre astfel obţinute sînt superioare celor realizate în condiţii clasice. În fabricaţia hîrtiilor hidrofobizate în mediu neutru se pun în evidenţă totodată şi numeroase alte avantaje tehnologice dintre care se menţionează: sensibilitatea scăzută a procesului de încleiere faţă de apele cu duritate ridicată, coroziune micşorată a utilajului, posibilitatea folosirii unor materiale de umplere şi aditivi sensibili sau destructibili în mediu acid, îmbunătăţirea randamentului de reţinere a materialelor de umplere a celulozelor cu fibre scurte etc.

Principala condiţie în procesul de încleiere în mediu neutru o constituie menţinerea pH-ului între limitele 6,1...7,3, ceea ce se realizează — pentru un anumit adaus prestabilit de săruri totale de aluminiu şi determinat de natura celulozei, cantitatea şi tipul celulozei, caracteristicile finale ale hîrtiei etc. — prin păstrarea unui anumit raport între aluminatul de sodiu şi sulfatul de aluminiu.

Se prezintă în continuare rezultatele obţinute privind fabricarea unei hîrtii anticorozive neutre, hidrofobe, realizată prin încleierea în mediu neutru. Produsul realizat corespunde cerinţelor din toate punctele de vedere, valoarea pH-ului extractului apos fiind în limitele impuse, iar cantitatea de ioni SO_4^{2-} scăzînd în mod simţitor şi ajungînd sub limitele stabilite de normele prezente în vigoare.

În sfîrşit se abordează problema utilizării unor noi aditivi, în deosebi pe bază de polimeri sintetici, în vederea realizării unor produse papetare cu rezistenţă ridicată în stare umedă.

Rezultatele obţinute la utilizarea latexului de poliacetat de vinil în proporţie de 1...4%, împreună cu clei de colofoniu în proporţie de 1...3%, în mediu acid şi neutru, conduc la următoarele concluzii:

1. Adausul în masă a emulsiei de poliacetat de vinil exercită o influenţă favorabilă asupra tuturor indicilor fizico-mecanici ai hîrtiei, în stare uscată sau umedă, atît în mediu acid cît şi în mediu neutru.

2. Cantitatea de numai 1% poliacetat de vinil este suficientă pentru a realiza, în condiţii economice, sporuri ale principalilor indici de rezistenţă în stare umedă, în deosebi a lungimii de rupere şi a rezistenţei la plesnire.

3. Tratamentul termic la care au fost supuse ulterior hîrtiile, a avut un efect pozitiv, îndeosebi în cazul hîrtiilor încleiate în mediu neutru; utilizarea acestuia în cazul hîrtiilor încleiate, rezistente, în stare umedă şi neutre, apare justificată.

4. Din analiza rezultatelor privind indicele $Cobb_{60}$ şi a gradului de încleiere se poate trage concluzia că există o deplină compatibilitate între cleiul de colofoniu (tip Bewoid) şi poliacetatul de vinil, acesta din urmă exercitînd o influenţă favorabilă asupra acestor indici şi anume proporţional cu cantitatea de polimer adăugat. Tratamentul termic se dovedeşte, din acest punct de vedere, favorabil.

5. Înlocuirea totală a cleiului de colofoniu cu poliacetat de vinil în cazul hîrtiilor la care pe lîngă rezistenţă în stare umedă se cere şi un anumit grad de încleiere, nu este posibilă. Totuşi, apare deosebit de utilă folosirea combinată a cleiului de colofoniu cu poliacetatul de vinil.

6. În sfîrşit, s-a dovedit posibilitatea folosirii poliacetatului de vinil ca aditiv eficient în obţinerea unor hîrtii rezistente în stare umedă, încleiate şi neutre. Considerăm că astfel de sortimente ar putea găsi o largă utilizare pentru diverse tipuri de ambalaje speciale.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Comportarea la îmbătrînire artificială a hîrtiilor încleiate în mediu neutru (probele nr. *2*, *4*, şi *5*), faţă de o hîrtie fabricată în aceleaşi condiţii (proba nr. *1*), în mediu acid.

Fig. 2. — Influenţa adausului de PAV asupra raportului dintre lungimea de rupere în stare umedă, faţă de cea în stare uscată, în procente, în cazul hîrtiilor cu 1%, 2% şi 3% clei de colofoniu, obţinute în mediu acid şi neutru, normale şi tratate termic.

Fig. 3. — Influenţa adausului de PAV asupra lungimii de rupere în stare uscată, în cazul hîrtiilor cu 1%, 2% şi 3% clei de colofoniu, obţinute în mediu acid şi neutru, normale şi tratate termic.

Fig. 4. — Influenţa adausului de PAV asupra lungimii de rupere în stare umedă, în cazul hîrtiilor cu 1%, 2% şi 3% clei de colofoniu, obţinute în mediu acid şi neutru, normale şi tratate termic.

Fig. 5. — Influenţa adausului de PAV asupra raportului dintre rezistenţa la plesnire în stare umedă, faţă de cea în stare uscată, în cazul hîrtiilor cu 1%, 2% şi 3% clei de colofoniu, obţinute în mediu acid şi neutru, normale şi tratate termic.

Fig. 6. — Influenţa adausului de PAV asupra rezistenţei la plesnire în stare uscată, în cazul hîrtiilor cu 1%, 2% şi 3% clei de colofoniu, obţinute în mediu acid şi neutru, normale şi tratate termic.

Fig. 7. — Influenţa adausului de PAV asupra rezistenţei la plesnire în stare umedă, în cazul hîrtiilor cu 1%, 2% şi 3% clei de colofoniu, obţinute în mediu acid şi neutru, normale şi tratate termic.

Fig. 8. — Influenţa adausului de PAV asupra numărului de duble îndoituri, în cazul hîrtiilor cu 1%, 2% şi 3% clei de colofoniu, obţinute în mediu acid şi neutru, normale şi tratate termic.

Fig. 9. — Influenţa adausului de PAV asupra indicelui $Cobb_{60}$, în cazul hîrtiilor cu 1%, 2% şi 3% clei de colofoniu, obţinute în mediu acid şi neutru, normale şi tratate termic.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

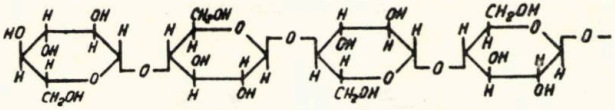
УДК 661.728

СТРОЕНИЕ МОЛЕКУЛ ЦЕЛЛЮЛОЗЫ И ИХ ДЕСТРУКЦИЯ

В. И. ИВАНОВ и Н. Я. КУЗНЕЦОВА-ЛЕНШИНА

1. Техника предъявляет все более высокие требования к качеству изделий из целлюлозы. Качество этих изделий существенно зависит от химического строения полимерной молекулы. Поэтому детали химического строения молекулы целлюлозы приобретают существенное значение.

Известные химические, поляриметрические, кинетические и статистические исследования показали [1], что целлюлозные звенья связаны в цепь 1-4-β-глюкозидными связями



Для первой половины 20-го столетия было достаточно этих знаний о строении молекулы целлюлозы. Однако точность методов определения этого строения составляет около одного процента. Это означает, что прежними работами обосновано строение 99 глюкозных остатков из 100. Следовательно, в макромолекуле со степенью полимеризации 1 000 десять звеньев могут иметь строение, отличающееся то ангидро-глюкозного звена.

Если эти звенья по химическим свойствам менее устойчивы, то в случае их регулярного расположения по цепи, молекула под влиянием относительно слабо агрессивных сред распадается на десять частей, т. е. степень полимеризации снизится с 1 000 до 10. При слабом кислотном и щелочном гидролизе однако, степень полимеризации снижается лишь на 20...30%, что дает некоторое основание предположить нерегулярное расположение неглюкозных звеньев по цепи главных валентностей.

Развитие науки и интересы промышленности за последние 25 лет вызвало многочисленные работы по уточнению строения молекулы целлюлозы.

Изучение неоднородности по молекулярному весу, гидролиза в гомогенной и гетерогенной средах, статистическая обработка электронно-микроскопических данных об обрывках фибрилл и другие работы с несомненностью подтвердили наличие в молекуле целлюлозы химических связей, значительно менее устойчивых, чем 1-4-β-глюкозидные.

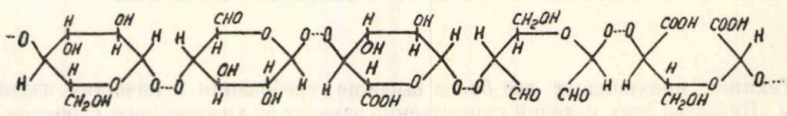
Наличие отклонений от классической формулы целлюлозы подтверждают и общеизвестные данные. Мы их напомним таблицей 1.

Таблица 1

Содержание CHO *и* COOH *групп в хлопковой целлюлозе*

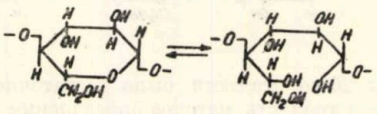
Название функциональных групп	Количество			
	в весов. %		в молях	
	вычислено	найдено	вычислено	найдено
Карбоксильные	0	0,04	0	10...15
Альдегидные	0,002	0,04	1	20

Наличие в цепи альдегидных и карбоксильных групп приводит к следующей формуле реальной молекулы целлюлозы, предложенной нами [2]:



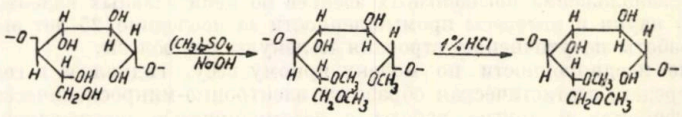
Точками обозначены неизмененные ангидроглюкозные звенья

2. За последние годы мы заняты изучением оксоцепной таутомерии моносахаридов и гликозидов. Полученные данные в этой области привели нас к выводу о том, что по аналогии с оксоцепной таутомерией пиранозный цикл ангидроглюкозных звеньев целлюлозы может быть подвижен по схеме



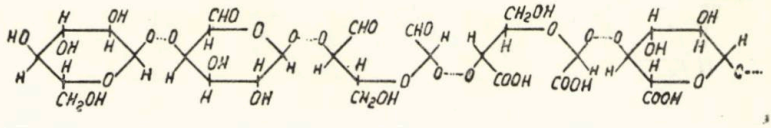
Такая возможность допускалась в научной литературе (напр. Стрепихеев).

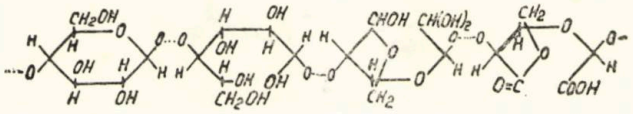
Мы поставили задачу экспериментально подтвердить наличие раскрытых по 1...5 циклов в макромолекуле целлюлозы. Хлопковая целлюлоза подвергалась метилированию. В случае наличия в молекуле разомкнутых пиранозных циклов реакция будет протекать по схеме



Вероятное метилирование гидроксилов у C_2, C_3, C_4, C_6 ведет к образованию устойчивых в данных условиях простых метиловых эфиров. Метильные группы у полуацетального гидроксила не устойчивы и легко

переходят в гидролизат, образуя метиловый спирт. В результате метиловый спирт однозначно определялся в виде 3,5 динитробензоата. Эти данные позволяют сделать вывод, что часть ангидроглюкозных звеньев в молекуле целлюлозы находится в открытой форме [3]. Таким образом реальная молекула целлюлозы имеет химическое строение

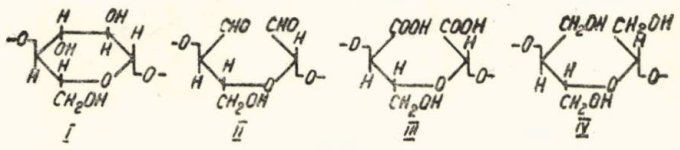




3. Изделия из целлюлозы эксплуатируются в разных условиях, но понижение их физико-механических, т. е. износ, всегда связан с существенным понижением степени полимеризации, т. е. с деструкцией молекулы. Принимая во внимание предложенное химическое строение, нами изучалась деструкция молекулы целлюлозы, главным образом, в кислой среде.

Возникает первый вопрос о том, какие химические факторы ответственны за повышенную устойчивость ацетальных связей молекулы целлюлозы. Из наших экспериментальных данных вытекает, что существенную роль играет гетероциклическая природа пиранозного цикла.

Полученные полиацетали с разомкнутым пиранозным циклом являются значительно менее устойчивыми по сравнению с целлюлозой. Были изучены следующие полиацетали.

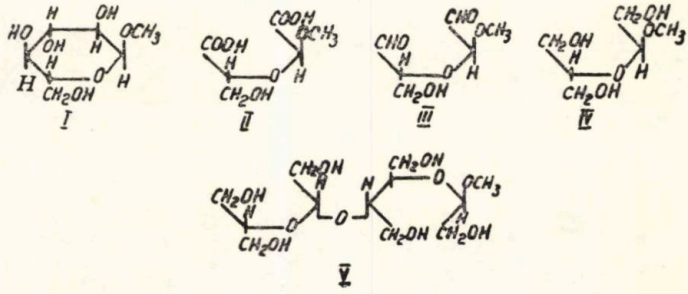


По относительной устойчивости к кислому гидролизу эти полиацетали располагаются в следующий ряд [4]:

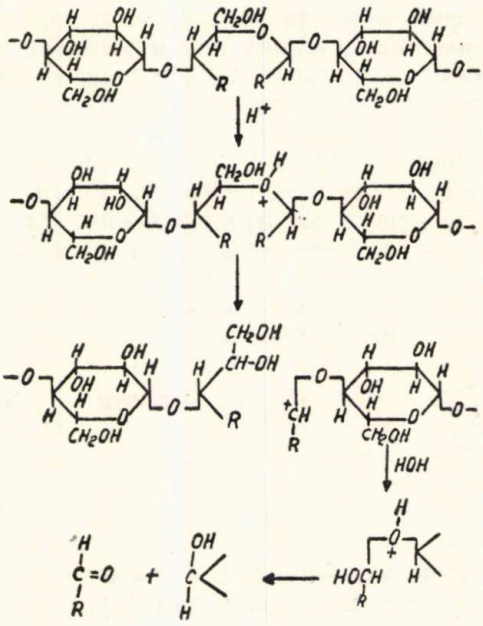
$$I > II > III > IV.$$

Изменение устойчивости к кислому гидролизу вполне удовлетворительно согласуется с вицинальным эффектом для III и IV, определяемого заместителями разной степени отрицательности (карбоксильные > гидроксильных).

Легкая гидролизуемость диспиртцеллюлозы, имеющей аналогичного соседа (ОН группу) по сравнению с целлюлозой, может быть обусловлена лишь перекрывающим влиянием *I*-эффекта пиранозного кольца. Эти полученные данные были подтверждены на следующих модельных соединениях



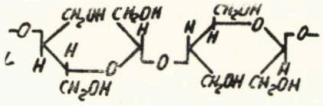
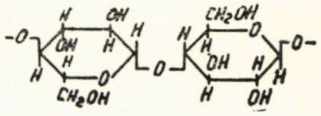
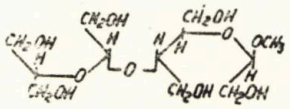
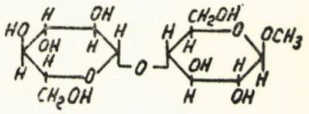
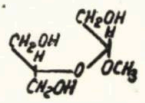
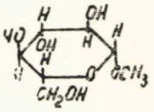
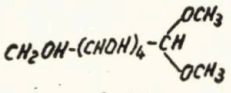
Общая картина деструкции данна на схеме



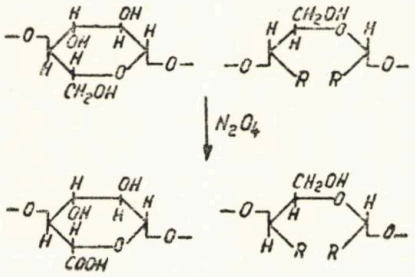
4. Введение функциональных групп в молекулу целлюлозы существенно не изменяет устойчивости ацетальных связей (например, в работах Рэнби COOH в положение 6 и CO в положении 2...3 в работах Тендера). На таблице 2 даны структуры легко и быстро гидролизующихся фрагментов.

Таблица 2

Сравнительная устойчивость ацеталей в кислой среде

Легкогидролизуемые	Трудногидролизуемые
 Диспиртцеллюлоза	 Целлюлоза
 Гексаспирт	 Метилцеллобиозид
 D′-метокси-D-окси метилдигликолевый спирт	 Метилглюкозид
 1,1-О-диметоксиглюкоза	

Из этой таблицы видно, что все ацетали с разомкнутым циклом имеют пониженную устойчивость к кислому гидролизу. Мы сделали вывод, что в молекуле целлюлозы глюкопиранозный цикл обладает отрицательным *I*-эффектом, стабилизирующим ацетальную связь. *I*-эффект глюкопиранозного цикла нами показан и на других реакциях. Например, окисление по C_6 до COOH N_2O_4 не идет в разомкнутых циклах



Поэтому вскрытая подвижность пиранового цикла в молекуле целлюлозы открывает новые возможности как объяснения известных фактов, так и развития исследований в новом направлении. Главную роль в первичной деструкции целлюлозы, которая оказывает решающее влияние на понижение качества изделий из целлюлозы, играют химические факторы — изменение строения даже незначительной части элементарных структурных единиц макромолекулы. Особенно важное значение имеют изменения, связанные с раскрытием пиранозного цикла ангидроглюкозного звена.

Поступила 3 III 1966 г.

Институт органической химии
Академии наук Киргизской ССР,
СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. **Freudenberg K., Blomquist G.,** Ber., 1935, **68,** S. 2070.
2. Иванов В. И., Кузнецова З. И., Леншина Н. Я., Иванова В. С., Тр. лесотехн. акад., 1960, *91,* стр. 33—37.
3. Иванов В. И., Корнева Г. М., Сучкова Л. А., ДАН СССР, 1964, **156,** *5,* стр. 1112.
4. Леншина Н. Я., Иванов В. И., Высокомолекулярные соединения, 1962, **IV,** *11,* стр. 1647.

STRUCTURA MOLECULELOR DE CELULOZĂ ŞI DESTRUCŢIA LOR

(Rezumat)

Se arată că prin tautomerie oxocatenară ciclul piranic din celuloză poate fi labilizat. Pe baze experimentale (metilare şi hidroliză) se încearcă demonstrarea acestei tautomerii. Se ajunge la descoperirea unei mobilităţi a ciclului piranic din macromoleculele de celuloză care, sub acţiunea factorilor chimici, determină modificarea unui număr neînsemnat de verigi elementare. O importanţă deosebită prezintă în aceste condiţii trecerea ciclului piranozic în formă liniară.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

C. D. 547.992.3

DYNAMIQUE ET STRUCTURE DES PRINCIPAUX CONSTITUANTS CHIMIQUES DES TISSUS VÉGÉTAUX NORMAUX ET DES TUMEURS

III. INFLUENCE DE QUELQUES FACTEURS CLIMATIQUES SUR LA COMPOSITION CHIMIQUES DES ARBRES

PAR

AGATA CERNĂTESCU-ASANDEI et MARGARETA GRIGORAŞ

1. Dans des travaux antérieurs [1], [2] on a étudié l'influence exercée par nombre de facteurs naturels concernant la variation de la composition chimique des arbres. À savoir, en étudiant dans une section transversale la composition chimique de quelques arbres séculaires (sapin, mélèze, hêtre) de la forêt Slătioara, région Suceava, on a constaté des variations significatives des principaux constituants chimiques.

On a remarqué [12] que le pourcentage de cellulose pour les conifères et les feuillus qui se sont développés dans un climat froid, est moindre que celui des arbres cultivés dans un climat tempéré ou tropical.

Dans les conditions des régions étudiées l'influence des températures minima quant au contenu en cellulose de quelques arbres est évidente. Les valeurs les plus petites en cellulose ont été trouvées pour des échantillons récoltés à Miercurea Ciuc, Tuşnad et Sf. Gheorghe (tableau 1).

Tableau 1

Contenu en cellulose pour quelques espèces récoltées dans les localités avec des températures annuelles minima

Espèce	Cellulose %	Localité
Sapin	48,24	Miercurea Ciuc
Bouleau	45,22	Tuşnad
Chêne	42,15	Sfîntul Gheorghe

2. Pour compléter les recherches effectuées jusqu'à présent concernant l'influence du climat sur les constituants chimiques du bois, on a effectué des études sur un échantillon de mélèze *Picea excelsa* Lam (link), âgé de 210 années, de la localité Întorsura Buzăului, région où ont été enregistrées les températures minima annuelles les plus basses.

La fig. 1 représente un segment d'une coupe transversale d'une tronc de mélèze, sur laquelle sont indiquées les pourcentages de cellulose, lignine et pentonsanes des cernes annuels correspondants aux années avec des précipitations maxima et minima. (Les donneés météorologiques ont été fournies par la chaire de Géograghie physique de l'Université de Jassy).

En mesurant les cernes annuels on a constaté que leur épaisseur est plus grande pour les années à temperatures et precipitations maxima par rapport aux périodes végétatives habituelles (tableau 2).

Tableau 2

Influence de la température et des précipitations sur l'épaisseur du cerne annuel

	Température °C	Précipitations mm	Année	Cerne annuel no.	Épaisseur du cerne annuel mm
Temp. maximum moyenne annuelle	+ 7	—	1934	179	3,4
Temp. maximum moyenne (Juillet)	+18				
Temp. minimum moyenne annuelle	+ 5	—	1942	187	1,8
Temp. minimum moyenne (Juillet)	− 9,6				
Précipitations maxima	—	1 150	1889	134	4,6
Précipitation minima	—	570	1945	190	1,8

Les méthodes analytiques utilisées pour la détermination des constituants chimiques sont les standards TAPPI [3]...[9] ; la cellulose a été déterminée d'après la méthode Kurschner-Hoffer [10] et l'holocellulose à l'aide de la méthode au chlorite de sodium [11].

La composition chimique de quelques cernes annuels développés dans des conditions de températures maxima et minima est donnée dans le tableau 3.

En comparant les résultats on observe que le contenu en cellulose diminue de façon appréciable (environ 3%) dans les années à températures minima pendant que la lignine augmente approximativement avec la même valeur.

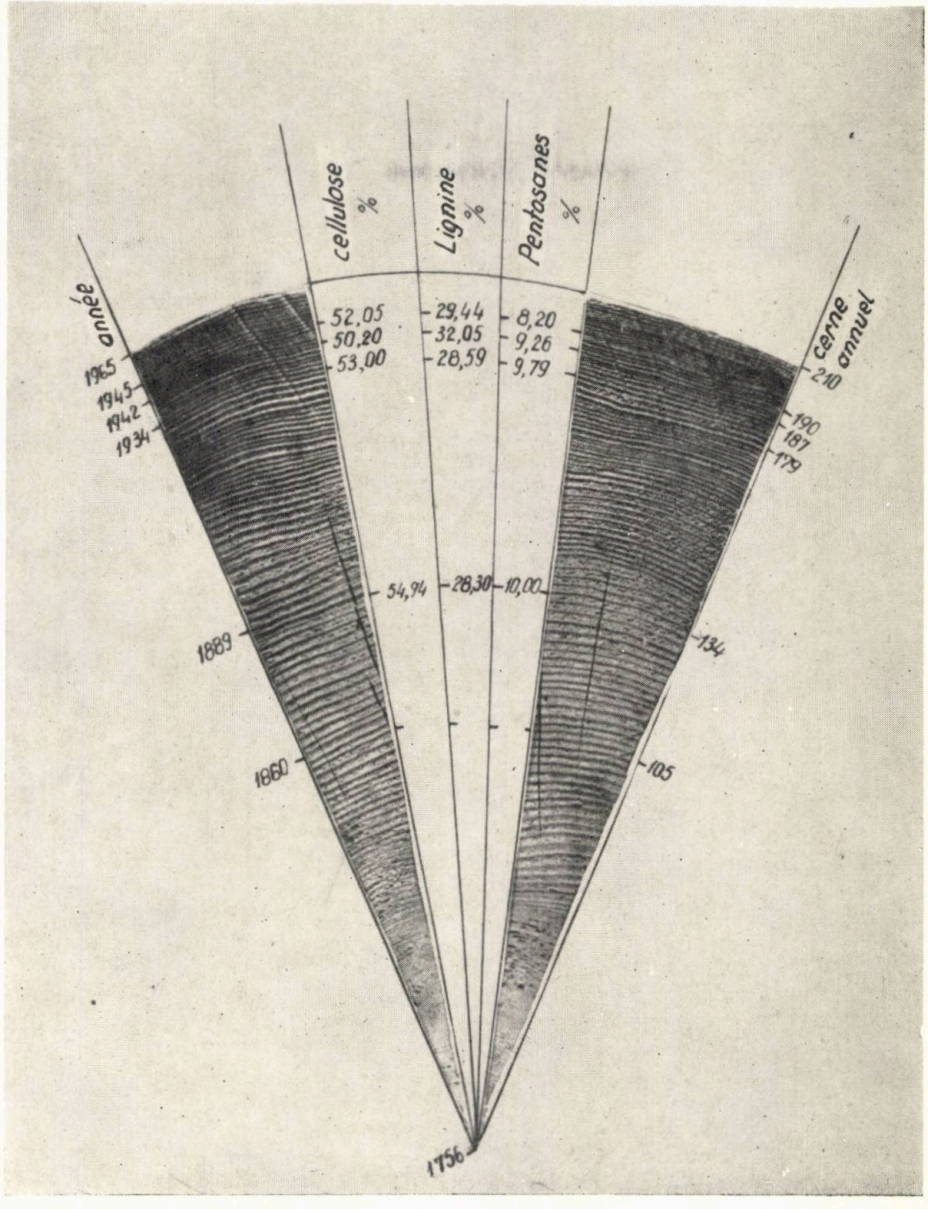

année
cellulose %
Lignine %
Pentosanes %
cerne annuel
1965
1945
1942
1934
52,05
50,20
53,00
29,44
32,05
28,59
8,20
9,26
9,79
240
190
187
179
54,94
28,30
10,00
1889
1860
1756
134
105

Fig. 1.

Tableau 3

Variations de la compositon chimique en fonction des températures maxima et minima annuelles

Composition chimique	Température	
	maxima	minima
	cerne annuel	
%	179	187
Extrait à l'éther éthylique	1,09	1,04
Extrait à l'alcool–benzène	1,18	1,97
Extrait à la soude 1%	12,10	13,17
Extrait à l'eau bouillante	1,50	1,68
Cellulose	53,00	50,20
Lignine	28,59	32,05
Pentosanes	9,79	9,26
Cendres	0,43	0,46
Holocellulose	68,73	68,45

Tableau 4

Variation de la composition chimique en fonction des précipitations anuelles maxima et minima

Composition chimique	Precipitations	
	maxima	minima
	cerne annuel	
%	134	190
Extrait à l'éther éthlique	1,03	1,10
Extrait à l'alcool–benzène	1,20	1,68
Extrait à la soude 1%	11,23	12,38
Extrait à l'eau bouillante	1,18	1,53
Cellulose	54,94	52,02
Lignine	28,30	29,44
Pentosanes	10,00	8,20
Cendres	0,36	0,44
Holocellulose	75,52	72,20

Tableau 5

Variation des principaux constituants en fonction des cernes annuels (de vingt en vingt ans)

Épaisseur du cerne annuel mm / Composants chimiques %	Cerne annuel							
	20	30...80	100	120	140	160	180	200
	1,8	*)	1,4	4,0	4,0	2,8	2,8	1,0
Extrait à l'éther éthylique [3]	1,80	0,67	0,83	1,93	1,29	1,06	0,76	2,39
Extrait à l'alcool–benzène [4]	4,32	1,96	2,19	2,01	2,60	1,40	2,26	2,93
Extrait à la soude 1% [5]	13,35	13,61	14,52	13,38	12,26	10,51	11,21	11,73
Extrait à l'eau bouillante [6]	1,63	1,71	1,23	0,85	0,81	1,13	1,16	2,03
Cellulose [7]	54,24	54,05	53,44	53,02	51,00	53,29	53,63	52,20
Lignine [7]	28,55	28,12	28,55	29,14	28,59	29,10	27,79	28,66
Pentosanes [8]	10,98	9,31	9,65	9,95	9,40	8,79	7,47	6,82
Cendres [9]	0,42	0,86	0,87	0,52	0,47	0,52	0,54	0,52

*) Croissance anormale ; cernes annuels très étroits

Les autres constituants n'accusent pas de variations essentielles, sauf une augmentation de l'extrait à l'alcool-benzène et à la soude 1% et une diminution des pentosanes.

La composition chimique en fonction des précipitations annuelles minima et maxima (tableau 4) indique une augmentation de l'extrait à l'alcool benzéne, à l'eau bouillante, à la soude 1% et de la lignine (environ 1%) et une diminution de la cellulose, des pentosanes et de l'holocellulose (2...3%) dans les années à précipitations abondantes.

Pour avoir une vue d'ensemble quant à la variation de la composition chimique dans une coupe transversale on a étudié aussi les cernes annuels de vingt en vingt ans (tableau 5).

La région entre 30...80 ans a été exclue de la discussion parce que dans cette région les cernes annuels sont trés étroits.

Les cernes anuels les plus larges se trouvent dans la région entre 120...180 années.

L'extrait à l'alcool benzéne, à la soude 1%, ainsi que les pentosanes présentent des valeurs qui diminuent du centre à la périphérie sans qu'on ait pu remarquer une rigoureuse uniformité pour tous les cernes étudiés. L'extrait à l'eau bouillante fournit des valeurs maxima dans les cernes 20 et 200 et minima pour les 120-ième et 140-ième cernes.

Tandis que les pentosanes diminuent de la moelle à l'écorce, les cendres augmentent et présentent un maximum pour le 100-ième cerne.

Le vingtième cerne contient le plus grand pourcentage de cellulose, tandis que le 140-ième le plus petit.

En général, on peut affirmer que la cellulose diminue de la moelle vers l'écorce.

La lignine, par opposition au cas dans lequel on l'a analysé par groupes des cernes annuels [1] et où l'on a remarqué une diminution du centre vers l'extérieur, avec un minimum vers le milieu de cette distance, dans notre cas les résultats ne présentent pas de variations significatives.

Dans les tableaux 3 et 4 on peut remarquer une diminution évidente du pourcentage en cellulose et une augmentation du contenu en lignine dans les cernes annuels correspondants aux années à températures et précipitations minima. De cette façon on peut aboutir à la conclusion que la température et les precipitations exercent une influence manifeste sur le développement des arbres et sur leur composition chimique.

Reçue le 27 IX 1967

Académie de la République Socialiste de Roumanie, Jassy, Institut de Chimie Macromoléculaire «P. Poni»

BIBLIOGRAPHIE

1. Grigoraș M., Asandei-Cernătescu A., Simionescu Cr., Celuloză și hîrtie, 1961, 10, p. 355.

2. Simionescu Cr., Grigoraş M., Asandei-Cernătescu A., *Chimia lemnului din R. P. R.* Ed. Acad. R. P. R., Buc., 1964.
3. * * * TAPPI T 5*m*—59.
4. * * * TAPPI T 6*m*—59.
5. * * * TAPPI T 4*m*—59.
6. * * * TAPPI T 1*m*—59.
7. * * * TAPPI T 13*m*—54.
8. * * * TAPPI T 19*m*—50.
9. * * * TAPPI T 15*m*—58.
10. Lévy Hulot G., *L'analyse immédiate des bois.* Paris, Masson et Cie, Editeur, 1946, p. 103.
11. Карачони С., ЖПХ, 1963, **36**, стр. 895.

DINAMICA ŞI STRUCTURA PRINCIPALILOR COMPONENŢI CHIMICI DIN ŢESUTURI VEGETALE NORMALE ŞI TUMORALE

III. Influenţa unor factori climaterici asupra compoziţiei chimice a arborilor

(Rezumat)

S-au efectuat studii asupra unui trunchi de molid, *Picea excelsa* (Lam) Link, în vîrstă de 210 ani, de la Întorsura Buzăului, regiunea în care se înregistrează cele mai scăzute temperaturi minime anuale.

Se remarcă o scădere evidentă a procentului de celuloză şi o creştere a conţinutului de lignină din inelele anuale corespunzătoare anilor cu temperaturi şi precipitaţii minime, încît se manifestă evident influenţa temperaturii cît şi a precipitaţiilor asupra dezvoltării arborelui şi compoziţiei sale chimice.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

C. D. 675.041

RECHERCHES SUR LA DIFFUSION DES TANINS VÉGÉTAUX ET SYNTHÉTIQUES DANS LA PEAU, PENDANT LES TANNAGES COMBINÉS

PAR

GH. CHIRIŢĂ, AGLAIA CHIRIŢĂ et ELISABETA IVĂŞCANU

Communication présentée dans la session scientifique de l'Institut Polytechnique de Jassy, 28—30 Septembre 1967

1. Introduction

Les nombreux procédés d'accélération du tannage des cuirs à semmelles que l'on connait en ce moment se basent surtout sur l'utilisation des solutions tannantes concentrées et même des extraits en poudre. Dans la majorité des cas on traite la peau avec des solutions tannantes concentrées après un prétannage effectué d'une façon quelconque.

Les recherches les plus récentes [1]...[4] concernant les propriétés chimiques et colloïdales et le comportement au tannage des solutions concentrées des tanins végétaux et synthétiques, ont montré quelques différences par rapport aux solutions diluées.

Dans les solutions diluées la vitesse de pénétration est déterminée surtout par l'affinité des particules tanniques pour la protéïne de la peau, aussi bien que par l'astringence de solutions.

La pénétration des substances tannantes des solutions concentrées dans la peau en tripe est fortement influencée par la viscosité des solutions et aussi par l'effet osmotique qui se manifeste avec une intensité accrue.

Afin d'augmenter la vitesse de diffussion des substances tannantes végétales et synthétiques et pour réduire la durée du tannage, on a étudié et appliqué dans la pratique de nombreux procédés de tannage combiné.

Dans tous les cas, un prétannage, soit avec les sels basiques de chrôme, soit avec formaldéhyde ou bien avec une autre substance tannante, produit la fixation de la structure de la peau en tripe et modifie l'affinité des groupes réactifs de la peau vis-à-vis des tanins végétaux et synthétiques, en augmentant la vitesse de diffussion des substance tannantes et en réduisant la durée de pénétration des tanins [3].

En diminuant les possibilités de liaison des particules tannantes à la peau en tripe, on facilite l'accélération de la pénétration. Cela est possible, par exemple, à l'aide d'un prétannage de la peau en tripe avec la formaldéhyde ou avec des sels basiques de chrôme anioniques. De même par le blocage des groupes carboxyliques des collagènes avec les sels basiques de chrôme cationiques, on favorise la réaction des substances tannantes avec les groupes basiques, ce qui, dans certaines conditions, peut faciliter la diffusion des tanins végétaux et synthétiques dans la peau en tripe [3]

Il n'existe pas une interdépendence très étroite entre la grosseur des particules tannantes végétales et synthétiques en solution et la vitesse de diffusion de ces particules dans la peau en tripe ou dans le peau prétannée, c'est-à-dire que les extraits les plus astringents n'ont pas toujours une vitesse réduite de diffusion dans le peau [3].

Les particules tannantes de la solution sont constituées par des molécules de substance tannantes qui sont liées entre elles par des liaisons d'hydrogène, auxquelles participent les hydroxyles phénoliques de leurs molécules. Il est possible que, pendant le processus de diffusion, sous l'influence de l'affinité des groupes réactifs de la peau, une partie des liaisons d'hydrogène qui unissent les molécules de tanin dans les particules se rompe en augmentant leur dispersion et en accélérant de cette façon la vitesse de diffusions [3].

Dans un travail antérieur nous avons étudié quelques aspects de la diffusion des tanins végétaux et synthétiques dans les tannages combinés [3] en utilisant des solutions concentrées de 2° Bé jousqu à 10°Bé.

Dans ce qui suit, on continue les recherches, en utilisant des solutions de concentration de 5° Bé jusqu'à 30° Bé en étudiant surtout:

a) l'influence de la concentration des solutions tannantes;

b) l'influence de l'affinité des groupes réactifs de la peau et de la fixation de la structure de la peau sur la vitesse de diffusion des tanins végétaux et synthétiques;

c) l'influence de la déshydratation de la peau due à la pression osmotique.

2. Résultats expérimentaux

On a soumis au tannage statique, dans des solutions de 5°, 10°, 12°, 14°, 16°, 18°, 20°, 22°, 24°, 26°, 28°, 30° Bé, des morceaux de peau en tripe, complètement décalcifiés, provenant de croupons de bovidés, ayant une épaisseur de 6 mm, de sorte que: a) une série des échantillons n'ont pas été prétannés; b) les autres échantillons ont été prétannés avec 2% et 4% formaldéhyde de 36%; c) les autres échantillons ont été prétannés avec 1% et 2,5% Cr_2O_3.

Tableau 1

Analyse chimique des extraits tannants végétaux et synthétiques

Extrait tanant	Données analytiques					
	Humidité	Residu total	Matières solubles	Non tanin	Tanin	Chiffre de pureté
Quebracho sulfité	9,78	90,22	89,63	14,60	74,83	83,48
Châtaignier	12,76	87,24	86,83	22,05	64,78	74,60
Bois de chêne	8,51	91,49	89,63	31,25	58,38	65,13
Écorce de sapin	4,76	95,24	94,75	38,21	56,54	59,67
Romatan B.C.F. *)	5,86	94,14	93,29	23,97	69,32	74,30

*) Le Romatan B.C.F. est un extrait synthétique de remplacement, obtenu en partant du naphtol et phénol, par sulfonation et condensation avec la formaldéhyde.

Tableau 2

Influence de la concentration des solutions tannantes sur la vitesse de pénétration (la pénétration a été mesurée seulement en partant de la surface de la peau vers l'intérieur et a été raportée en % à toute l'épaisseur de la peau)

Durée du tannage jours	Extrait tannant																		
	Quebracho				Chataignier				Chêne				Sapin				Romatan B.C.F.		
	Concentrations des solutions °Bé																		
	5	10	20	30	5	10	20	30	5	10	20	30	5	10	20	30	5	10	18
Peau en tripe																			
1	40,07	42,74	35,10	26,70	28,35	30,20	27,53	18,35	21,70	23,35	20,10	16,70	26,70	10,00	6,67	5,0	19,20	20,0	20,80
3	—	—	38,40	26,70	31,75	36,74	30,20	20,80	32,55	35,10	28,35	18,35	30,20	11,67	6,67	5,0	27,60	28,40	31,80
5	—	—	—	26,70	—	—	—	20,83	33,40	36,74	28,35	18,35	35,10	11,67	6,67	5,0	34,20	33,40	35,80
7	—	—	—	T.M.	—	—	—	T.M.	35,10	38,40	T.M.	T.M.	36,74	T.M.	T.M.	T.M.	42,0	41,70	38,40
10									36,74	41,74			38,40				50,60	42,07	40,50
12									38,40	41,74			41,74				—	—	48,0
14									40,07	43,40			45,90					—	—
16									44,20	46,50			—						
18									—	—									
Peau en tripe prétannée avec 2% formaldéhyde de 36%																			
1	41,93	44,93	46,0	47,23	30,20	31,75	41,74	38,35	26,70	30,20	12,50	8,34	28,10	25,10	16,70	13,33	33,40	34,75	25,10
3	—	—	—	—	35,10	38,40	46,73	40,74	32,35	35,40	16,70	9,17	31,75	32,60	22,53	16,70	36,74	35,10	26,70
5					—	—	50,0	46,40	33,40	36,74	16,70	9,17	38,40	39,74	22,53	16,70	38,40	37,40	30,20
7									36,74	40,07	T.M.	T.M.	46,73	47,07	T.M.	T.M.	41,74	41,70	35,10
10									46,07	45,07			50,0	50,0			45,07	44,40	42,80
12									46,73	50,0			—	—			—	—	—
14									—	—									
Peau en tripe prétanée avec 4% formaldéhyde de 36%																			
1	42,10	47,25	50,0	50,0	31,40	33,75	42,0	43,40											
3	—	—	—	—	36,74	38,40	48,40	50,0											
Peau en tripe prétannée en chrôme avec 1% Cr_2O_3																			
1	37,74	38,40	46,73	50,0	26,35	26,70	27,70	28,35	25,10	26,10	31,75	25,10					20,0	26,70	36,70
3	43,40	45,07	—	—	33,40	35,40	41,74	45,74	28,40	30,50	35,10	30,20					25,10	28,35	40,07
5	—	—	—	—	37,20	39,40	46,73	50,0	32,50	34,60	36,74	32,60					26,70	33,40	43,40
7					—	—	—	T.M.	38,25	39,50	38,70	32,80					33,40	36,74	46,73
10									—	—	—	T.M.					—	—	—
Peau en tripe prétanée en chrôme avec 2,5% Cr_2O_3																			
1	36,75	37,20	43,40	50,0	25,0	25,70	30,75	31,40											
3	40,80	42,70	48,20	—	32,35	35,10	36,74	44,07											
5	—	—	—		38,74	40,07	41,74	47,73											
7																			

Avec T.M. on a noté „le tannage mort" et avec une petite ligne la pénétration complète.

Tous les essais de tannage ont été effectués avec les extraits suivants extrait de quebracho, extrait de châtaignier, extrait de sapin, extrait de bois de chêne et extrait synthétique Romatan B. C. F.; ces extraits ont la composition chimique indiquée dans le tableau 1. Les essais de tannage avec les tanins végétaux et synthétiques ont été effectués dans des solutions fraîches, avec une flotte de 200% rapportée au poids des morceaux de peau en tripe mis en oeuvre.

La pénétration des substances tannantes dans l'épaisseur de la peau en tripe, a été mesurée périodiquement, seulement en partant de la surface de la peau vers l'intérieur et a été calculée en % rapportée à tout l'épaisseur de la peau. Les résultats des mesures effectuées sur les morceaux tannés avec les solutions de 5°, 10°, 20° et 30° Bé sont donnés dans le tableau 2. On a établi aussi la durée de pénétration complète des morceaux soumis au tannage statique (v. les tableaux 3...5) et on a déterminé la variaton de l'épaiseur des morceaux de peau pendant le tannage (fig. 1).

Tableau 3

Concentrations des solutions tannantes qui correspondent à une vitesse de pénétration maximum (en °Bé)

Extrait tannant	Peau en tripe	Peau en tripe prétanné avec 2% formaldéhyde de 36%	Peau en tripe prétanné avec 4% formaldéhyde de 36%	Peau en tripe prétanné en chrôme avec 1% Cr_2O_3	Peau en tripe prétanné en chrôme avec 2,5% Cr_2O_3
Quebracho	16...18	24...26	28...30	28...30	28...30
Châtaignier	12...14	22...24	24...26	22...24	24...26
Chêne	12...14	14...16	—	18...20	—
Sapin	5...6	12...14	—	—	—
Romatan B.C.F.	12...14	12...14	—	16...18	—

La vitesse de diffusion des substances tannantes dans les échantillons des peaux croît au fur et à mesure que s'intensifie la concentration des solutions, jusqu'à une certaine valeur de celle-ci (v. les tableaux 2 et 3), fonction de la nature des tanins et du mode de préparation de la peau en tripe pour la tannage végétal, et ensuite diminue. La diffusion des particules des substances tannantes dans les solutions concentrées est influencée, en dehors de l'action de l'affinité (qui se manifeste fortement dans le cas des solutions diluées) aussi par la viscosité et l'effet osmotique de deshydratation des couches médiannes de la peau, encore non pénétrées par le tanin, qui ont, dans les solutions plus concentrées, une plus grande intensité.

La deshydratation des couches médiannes de la peau dans les solutions tannantes concentrées, de même que la viscosité accrue des solutions, mènent au tannage mort (v. les tableaux 4 et 5); la deshydratation provo-

Tableau 4

Pénétration complète de la peau (en jours)

Concentration des solutions (°Bé)		5	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
Peau en tripe	Quebracho	3	3	3	3	3	3	5	7	tannage mort			
	Châtaignier	4	4	4	4	5	5	5	tannage mort				
	Chêne	18	18	17	17	18	tannage mort						
	Sapin	16	tannage mort										
Peau en tripe prétanné avec 2% formaldéhyde de 36%	Quebracho	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3
	Châtaignier	5	4	4	4	5	5	7	7	7	8	8	8
	Chêne	12	12	12	12	12	14	14	tanage mort				
	Sapin	12	12	12	12	12	tannage mort						
	Romatan B.C.F.	11	11	11	11	12	12	—	—	—	—	—	—
Peau en tripe prétanné avec 4% formaldéhyde de 36%	Quebracho	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1
	Châtaignier	5	4	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5
Peau en tripe prétanné en chrôme avec 1% Cr_2O_3	Quebracho	5	5	3	3	3	3	3	3	1	1	1	1
	Châtaignier	6	6	6	6	6	6	6	6	6	7	7	7
	Chêne	9	9	9	9	9	9	9	9	9	10	tannage mort	
	Romatan B.C.F.	9	9	9	9	9	9	—	—	—	—	—	—
Peau en tripe prétanné en chrôme avec 2,5% Cr_2O_3	Quebracho	5	5	5	5	5	3	3	3	3	3	1	1
	Châtaignier	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	7	7

Tableau 5

Concentrations des solutions tannantes, au dessus des quelles on obtient un tannage mort

Extrait tannant	Peau en tripe	Peau en tripe prétanné avec 2% formaldéhyde de 36%	Peau en tripe prétanné avec 4% formaldéhyde de 36%	Peau en tripe prétanné en chrôme avec 1% Cr_2O_3	Peau en tripe prétanné en chrôme avec 2,5% Cr_2O_3
Quebracho	24	non	non	non	non
Châtaignier	22	non	non	non	non
Chêne	18	22	—	28	—
Sapin	5	18	—	—	—
Romatan B.C.F.	non	non	—	—	—

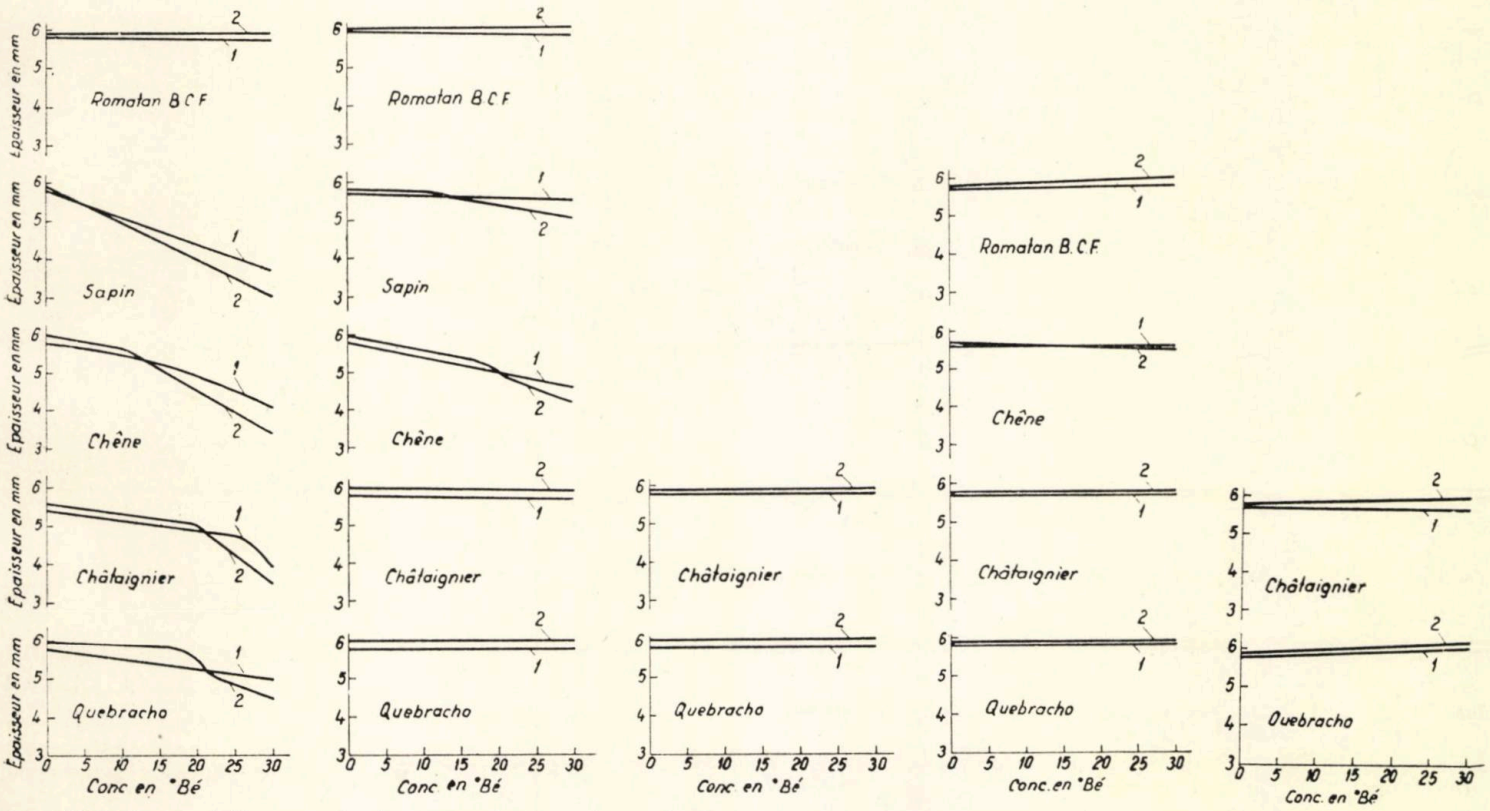


Fig. 1. — Influence de la concentration des solution tannantes sur l'epaisseur des échantillons de peau soumis au tannage ; *a* — peau en tripe, *b* — peau en tripe prétannée avec 2% formaldéhyde à 36%, *c* — peau en tripe prétannée avec 4% formaldéhyde à 36%, *d* — peau en tripe prétannée avec 1% Cr_2O_3, e — peau en tripe prétannée avec 2,5% Cr_2O_3 ; *1* — variation de l'épaisseur après un jour, 2 — variation de l'épaisseur au pénétration complète des peaux.

que une diminution des pores de la peau, particulièrement dans la peau en tripe qui n'a pas la structure fixée par un prétannage quelconque. Dans ces conditions, les substances tannantes des solutions concentrées à haute viscosité, ne pénètrent pas dans la peau et il se produit alors une stagnation du tannage.

La vitesse de diffusion des substances tennantes dans la peau soumise au tannage est fortement influencée par la nature des extraits tannants.

En prétannant la peau avec des quantités différentes de formaldéhyde ou de sels basiques de chrôme, on a obtenu, d'une part, une fixation de la structure de la peau, ce qui supprime presque complètement le tannage mort et facilite considérablement la diffusion des substances tannantes dans la peau et d'autre part modifie l'affinité des groupes réactifs de la peau ce qui exerce aussi une influence sur la vitesse de diffusion des tanins dans le peau soumise au tannage.

En prétannant la peau avec la formaldéhyde on constate une augmentation du pouvoir de pénétration des tanins végétaux, parce qu'on diminue l'affinité entre la peau et les substances tannantes, compte tenu que la la formaldéhyde se fixe aux mêmes groupes basiques de la peau que les tanins végétaux.

La vitesse de pénétration des tanins végétaux dans la peau prétannée avec des sels basiques de chrôme est plus grande que dans la peau en tripe, et, pour quelques extraits elle est un peau plus petite que dans la peau prétannée avec la formaldéhyde. En augmentant la quantité d'oxyde de chrome utilisé au prétannage de 1% à 2,5%, on réalise un ralentissement de la pénétration, qu'on explique par l'accroîssement de l'affinité de la peau prétannée au chrome au dessus de la limite favorable à l'augmentation de la pénétration des tanins végétaux et synthétiques dans la peau soumise au tannage.

Même si sa concentration est maximum (18° Bé) le tanin synthétique Romatan B. C. F. ne produit pas de tannage mort; ce tanin est fabriqué à l'état liquide et il a un plus grand pouvoir de pénétration dans la peau prétannée au chrôme que dans la peau pretannée avec la formaldéhyde.

Les substances tannantes végétales et synthétiques peuvent provoquer la réduction de l'épaisseur des peaux, par le processus de deshydratation, comme conséquence du phénomène d'osmose. Si la deshydratation de la peau n'est pas importante, elle peut favoriser l'augmentation de la vitesse de pénétration des substances tannantes dans la peau, sans exercer aucune influence négative sur l'effet du tannage, tel que serait par exemple, la diminution de l'epaisseur.

De la fig. 1 il en résulte que la deshydratation (dans les solutions concentrées) se manifeste d'une manière plus accentuée sur la peau en tripe. Le plupart des échantillons de la peau prétannée avec des sels de chrôme ou de la formaldéhyde accusent une augmentation de l'épaisseur après le tannage.

La nature du tanin influence sensiblement la variation de l'épaisseur des échantillons de peau tannée avec des solutions concentrées. Les extraits tannants qui tendent à produire des tannanges morts (extraits de sapin et de chêne) même avec des solutions moins concentrées, provoquent une réduction de l'épaisseur de la peau.

Le tanin synthétique Romatan B. C. F. ne réduit pas l'épaisseur de la peau même si la structure de la peau n'a pas été fixée par un prétannage quelconque. Ce tanin pourrait être utilisé dans un procédé de tannage rapide des peaux à semelles comme agent de fixation de la structure de la peau avant le tannage végétal proprement dit.

3. Conclusions

1. La peau en tripe peut être tannée directement avec des solutions tannantes végétales à concentrations élevées ; dans ce cas on peut accélérer la pénétration par rapport au cas on l'on effectue d'abord un tannage avec des solutions diluées et puis avec des solutions de concentrations croîssantes. Fonction de la nature des extraits tannantes végétaux, à partir d'une certaine concentration il se produit un tannage morte. Le tanin synthétique Romatan B. C. F. (fabriqué sous forme de solution concentrée), même utilisé à une concentration maximum, n'a pas produit de tannage mort.

2. Le prétannage de la peau en tripe avec la formaldéhyde ou avec les sels de chrôme, permet l'utilisation directe des solutions tannantes plus concentrées que dans le cas de la peau en tripe non prétannée, en éliminant de cette façon dans la plupart des cas, le tannage mort.

3. Les prétannages (effectués avant le tannage végétal) permettent à fixer la structure fibreuse du collagène et modifient l'affinité des groupes réactifs de celui-ci par rapport aux substances tannantes végétales et synthétiques. Les prétannages avec la formaldéhyde sont accompagnés d'une accélération plus grande de la pénétration des substances tannantes dans la peau que lors des prétannages avec les sels de chrôme. En augmentant la quantité d'oxyde de chrôme utilisé au prétannage, au dessus de 1 % Cr_2O_3, on obtient un ralentissement de la pénétration des substances tannantes, car l'affinité de la peau vis-à-vis des tanins végétaux et synthétiques croît au dessus de la limite favorable à l'augmentation de la vitesse de pénétration des tanins.

4. Compte tenu de la deshydratation de la peau en tripe dans les solutions tannantes végétales avec des concentrations élevées, comme conséquence de l'effet osmotique, l'épaisseur de la peau tannée diminue. Cet inconvenient peut-être supprimé par un prétannage qui assure la fixation de la structure fibreuse du collagène.

5. Le Romatan B. C. F. ne produit pas une diminution de l'épaisseur de la peau dans les solutions concentrées, même sur la peau en tripe non prétannée. Ce tanin pourrait être certainement utilisé comme agent de fixa-

tion de la structure et aussi pour consolider les couches superficielles de la peau, soumises au tannage végétal avec des solutions concentrées, même si la peau n'a pas été prétannée préalablement avec un agent quelconque.

Institut Polytechnique de Jassy,
Chaire de la Technologie de la peau,
des Substituts de la peau et des
Matières tannantes

BIBLIOGRAPHIE

1. Holmes N. L., Wollenberg H. G., J.S.L.T.C., 1958, 42, p. 268.
2. Heidemann E., Das Leder, 1960, *5*, S. 99—105.
3. Chiriță Gh., Chiriță A., Boți El., Rev. Ind. Ușoară, 1967, *4*, p. 202.
4. Chiriță Gh., Manciu M., Bul. Inst. polit. Iași, 1968, XIV (XVIII), *3—4*, (sous presse).
5. Woofhead T., Research Bull. L.I.R.I., 1946, p. 14.
6. Hough A. T., Revue Technique des industries du cuir, 1957, *11*, p. 239.

CERCETĂRI ASUPRA DIFUZIEI TANINURILOR VEGETALE ȘI SINTETICE ÎN TĂBĂCIRILE COMBINATE

(Rezumat)

Difuzia taninurilor vegetale în pielea gelatină constituie un fenomen complex condiționat de numeroși parametri ce se referă atît la soluțiile tanante cît și la pielea supusă tăbăcirii.

În vederea scurtării duratei de tăbăcire vegetală diferitele cercetări și procedee urmăresc creșterea vitezei de difuzie a taninurilor vegetale, asigurîndu-se în același timp o fixare cît mai intensă a substanțelor tanante.

În lucrarea de față se studiază influența afinității grupelor reactive ale pielii, influența fixării structurii pielii gelatină prin pretăbăciri cu formaldehidă, săruri de crom și influența naturii taninurilor și a concentrației soluțiilor, asupra difuziei taninurilor vegetale. În urma acestor studii se aduc contribuții la lămurirea fenomenului de difuzie a taninurilor vegetale în pielea gelatină, care prezintă o importanță practică în procesul de tăbăcire combinată a pieilor.

Explicația figurilor

Fig. 1. — Influența concentrației soluțiilor tanante asupra grosimii eșantioanelor de piele supuse tăbăcirii: *a* — piele gelatină, *b* — piele gelatină pretăbăcită cu 2% formaldehidă de 36%, *c* — piele gelatină pretăbăcită cu 4% formaldehidă de 36%, *d* — piele gelatină pretăbăcită cu 1% Cr_2O_3, *e* — piele gelatină pretăbăcită cu 2,5% Cr_2O_3; *1* — variația grosimii după o zi, *2* — variația grosimii la pătrunderea completă a pieilor.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

C. D. 631.82

INFLUENCE DES ENGRAIS MINÉRAUX SUR LA PRODUCTION DES POMMES DE TERRE SUR TERRAINS EN PENTE

PAR

CHIRIL POPESCU

Communication présentée dans la session scientifique de l'Institut Polytechnique de Jassy, 28—30 Septembre 1967

1. Introduction

Pour l'économie de notre pays, le blé représente une des plus importantes cultures. Ayant une grande densité sur l'unité de superficie, il entrave l'érosion du sol et peut être cultivé avec de bons résultats sur des terrains en pente.

La pomme de terre a de nombreuses utilisations et occupe une large superficie sur les terrains ayant un relief ondulé, particulièrement en Transilvanie et au Nord de la Moldavie, de même que dans d'autres zones autour des centres populés. En ce qui concerne la lutte contre l'érosion du sol, M. Moţoc [9] et d'autres chercheurs citent la pomme de terre parmi les cultures peu indiquées pour cette fin. Tout de même elle peut être cultivée sur des terrains avec des pentes jusqu' a 6% ou sur des versants plus abrupts sous forme de bandes alternantes avec d'autres cultures denses.

I. Fodor [6] et d'autres chercheurs montrent qu'en assolement, les variétés précoces de pommes de terre représentent l'une des plus indiquées récoltes antérieures pour le blé d'automne.

Les engrais apportent d'importantes augmentations des récoltes sur les terrains erodés, mais leur application doit être faite compte tenu du type de sol, de la plante cultivée, des conditions climatiques, etc.

Dans ce qui suit nous nous sommes proposés d'étudier l'influence des engrais minéraux appliqués en doses différentes à la pomme de terre, et puis au blé d'automne cultivé l'année prochaine sur la même place.

2. Conditions pédo-climatiques

Les expériences ont été effectuées dans la période 1961...1964 sur un tchernoziom moyen dégradé avec une inclination de 9...10% vers le Sud, situé aux environs de la ville de Jassy.

L'horizont *A* avait une épaisseur de 25...30 cm étant un peu érodé; la teneur en azote, phosphore et potassium de la couche arable était comprise entre les limites suivantes: 0,21...0,26%N, 0,16...0,17% P_2O_5 et 2,04...2,16% K_2O. La quantité de humus était de 3,25...3,33% et le pH était 6,23...7,05.

La quantité des précipitations qui tombent dans la région est de 517,8 mm en moyenne et la température moyenne annuelle est de 9,6°C.

Les précipitations enregistrées entre 1961...1964 ont été près de la normale, plus abondantes les premiers deux ans et plus réduites dans les derniers deux. La répartition des précipitations n'a pas été uniforme le long d'une année et les périodes de sécheresse enregistrées ont réduit la récolte de blé et de pommes de terre. Il n'y a pas eu dans cette période des pluies torrentielles qui entraînent le sol.

3. Organisation des expériences

La pomme de terre a été cultivée après *Sorghum Sudanense*. La préparation du terrain a été commencée pendant l'automne et avec le labourage on a enfoui dans le sol le superphosphate et le sel potassique; l'azotate d'ammonium a été appliqué pendant le printemps avant de planter les pommes de terre. On a planté la variété de pomme de terre „Viola" et la distance entre les plantes a été de 60/30 cm.

Après avoir récolté la pomme de terre on a préparé le terrain, on a appliqué les engrais phosphatiques et, dans la première moitié du mois d'Octobre on a semé le blé d'automne de la variété nr. 301. L'azotate d'ammonium a été appliqué au commencement du printemps.

L'année prochaine on a ensemencé de nouveau et sur la même place du blé d'automne sans appliquer des engrais, de sorte qu'on a pu suivre l'effet prolongé des engrais appliqués à la pomme de terre et au blé les années précédentes.

La préparation du terrain, l'encemencement et les travaux d'entretien ont été effectués sur la direction des courbes de niveau.

La dose et la proportion des différents engrais appliqués à la pomme de terre et au blé, est indiquée dans le tableau 1.

Tableau 1

La dose d'engrais minéraux appliqué à la pomme de terre et au blé
(kg/ha substance active)

Variante	Pomme de terre			Blé			Totale		
	N	P_2O_5	K_2O	N	P_2O_5	K_2O	N	P_2O_5	K_2O
1	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	45	45	40	—	—	—	45	45	40
3	60	45	40	30	45	—	90	90	40
4	90	60	60	30	45	—	120	105	60
5	90	60	—	30	45	—	120	105	—
6	120	75	60	30	45	—	150	120	60
7	60	45	40	45	60	—	105	105	40
8	60	45	40	60	45	—	120	90	40
9	60	45	40	30	—	—	90	45	40
10	60	45	40	—	45	—	60	90	40
11	90	60	60	60	45	—	150	105	60
12	—	—	—	45	45	40	45	45	40

4. Résultats obtenus et leur analyse

Les résultats obtenus à la récolte des pommes de terre sont indiqués dans la fig. 1 et ils montrent que les engrais minéraux utilisés contribuent a l'augmentation de la récolte qui atteint jusqu'à 4952 kg/ha ou 30,6% (V_6). En général les doses plus élevées peuvent augmenter d'avantage la récolte des pommes de terre. Sur terrain en pente, le sel potassique appliqué avec de l'azotate d'ammonium et du superphosphate (V_4) contribue à l'augmentation de la récolte.

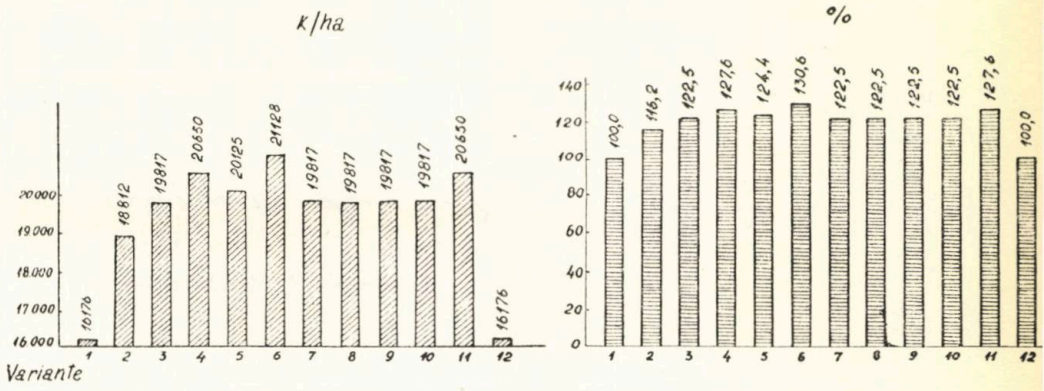


Fig. 1. — La production chez la pomme de terre, moyenne 1961—1963.

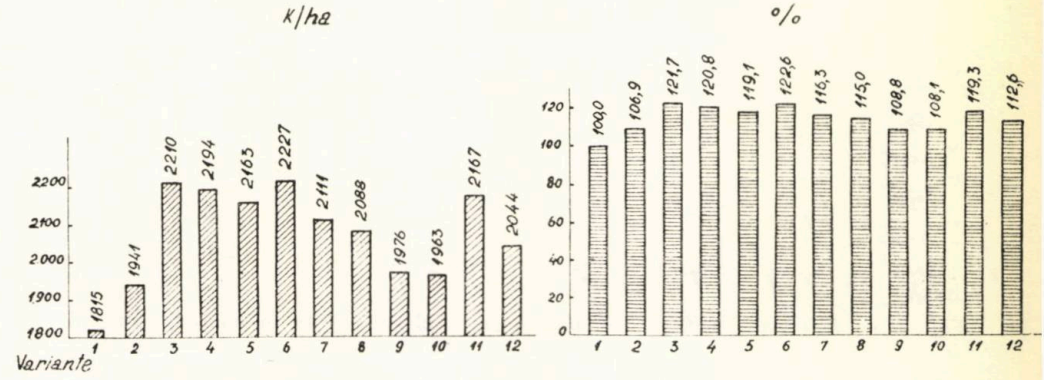


Fig. 2. — La production chez le blé cultivé après la pomme de terre, première anneé, moyenne 1962—1964.

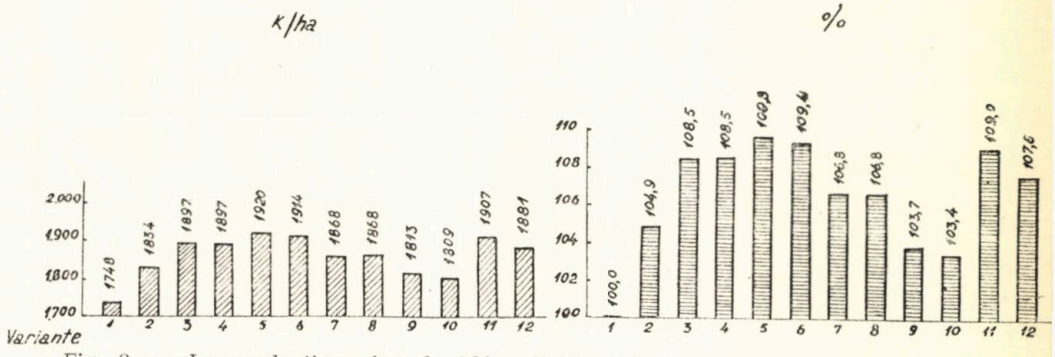


Fig. 3. — La production chez le blé cultivé après la pomme de terre, deuxième année, moyenne 1963—1964.

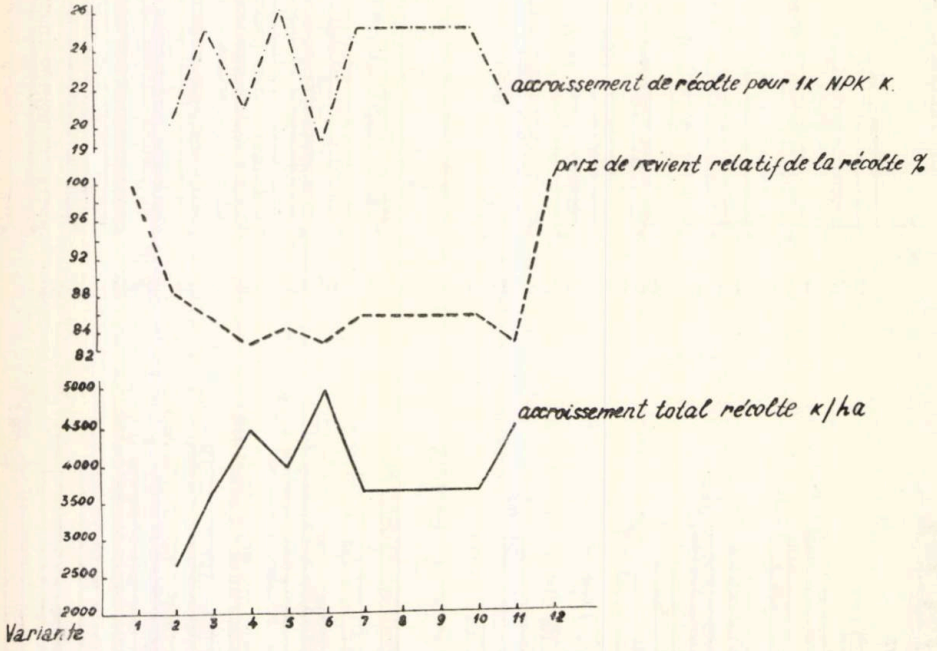


Fig. 4. — Efficacité des engrais minéraux appliqués à la pomme de terre.

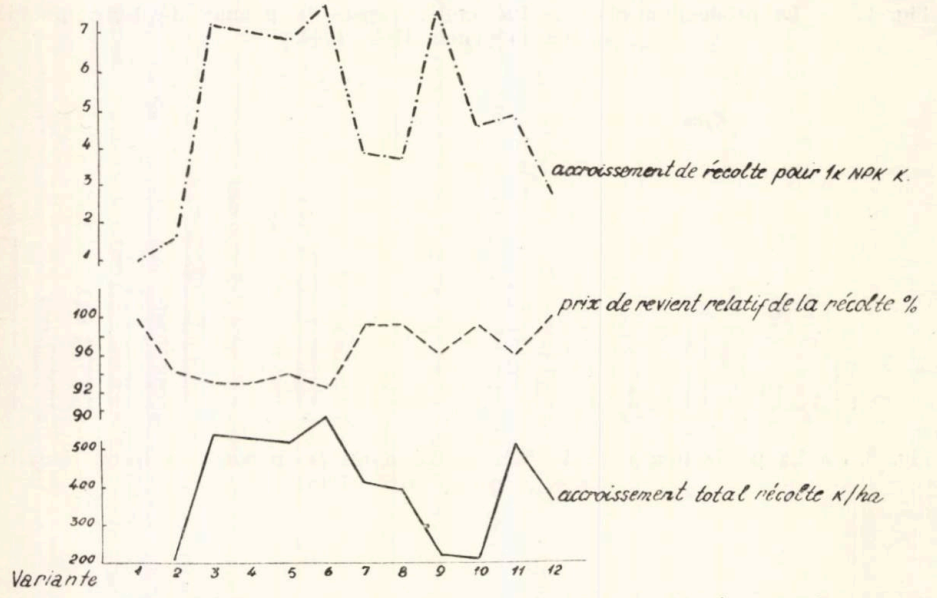


Fig. 5. — Efficacité des engrais minéraux appliqués au blé 1ère et 2ème année après la pomme de terre.

En déterminant la proportion (en %) de tubercules qui dépassent 100 g et la teneur des tubercules en amidon, on a constaté que les engrais ont influencé favorablement la grandeur des tubercules tout autant que leur teneur en amidon. F. Canţăr [2] et collaborateurs, employant du fumier et des engrais minéraux pour la fertilisation de la pomme de terre sur terrain plan dans la dépression de Jijia–Bahlui, ont obtenu des augmentations de la récolte un peu plus basses.

Dans la fig. 2 on représente les productions obtenues chez le blé d'automne cultivé après la pomme de terre, résultats qui montrent que pour cette culture on a réalisé aussi une augmentation de la récolte qui atteint jusqu'à 412 kg/ha ou 22,6% (V_6).

Les engrais appliqués à la pomme de terre un an auparavant (V_2) ont une action tout aussi favorable pour le blé. Le blé cultivé après la pomme de terre et fertilisé seulement avec de l'azotate d'ammonium ou du superphosphate donne des productions moindres par rapport a celui qui reçoit une fertilisation complexe (V_3). Par l'application des engrais minéraux et des engrais organiques à la fois, D. Pînzaru et ses collaborateurs [10] ont obtenu sur des terrains en pente très érodés, des augmentations de récolte chez le blé qui atteignent 1 090 kg/ha. N. Giosan [7] et Gr. Coculescu [3] montrent que sur des terrains étant dans un stade avancé d'érosion et qui ont perdu en partie l'horizon avec du humus, les engrais minéraux appliqués en grande doses, permettent à obtenir chez le blé des augmentations de récolte de 781...1 645 kg/ha.

Le blé cultivé l'an prochain sur la même place, après blé, a donné les récoltes indiqués dans la fig. 3 en réalisant une augmentation de récolte qui atteint 172 kg/ha ou bien 9,8% (V_5).

Une augmentation importante de la récolte a été obtenue dans les variantes lorsqu'on a appliqué des doses considérables d'engrais (V_5, V_6, V_{11}). En général lors de cette expérience on a obtenu des augmentations de récolte moins importantes que dans l'expérience précedente. Al. Luca et ses collaborateurs [8], à l'aide des engrais organo–minéraux, obtiennent chez le blé d'automne une augmentation de récolte de 260 kg/ha, à la deuxième année après l'application.

Lors de la détermination du poids pour 1 000 grains, du poids hectolitrique et de la proportion (en %) de gluten chez les grains de blé obtenus dans les expériences ci–dessus, ou a pu établir que les engrais ont exercé une influence favorable.

En calculant l'augmentation de récolte qu'on peut obtenir chez la pomme de terre pour chaque kilo de substance active des engrais employés, et le prix de revient de la récolte, exprimé en % par rapport au témoin, on a obtenu les données indiquées dans la fig. 4. Cettes données prouvent que chez la pomme de terre pour chaque kilo de substance active, on peut obtenir des augmentations de récolte entre 19,4 et 26,3 kg tubercules. Chez les variétés tardives (Merkur), D. Scurtu et ses collaborateurs [11] obtiennent pour chaque kilo d'engrais, substance active, de considérables augmentations de la récolte qui atteignent jusqu'à 32,5 kg tubercules, tandis qu'à l'aide des engrais minéraux appliqués sur fond de fumure, N. Berindei et ses collaborateurs [1] ont obtenu des augmentations plus grandes encore.

Compte tenu de l'augmentation totale de la récolte, de l'augmentation de récolte obtenue pour chaque kilo de substance active des engrais appliqués et du prix de revient de la récolte, il est aisé à conclure que les doses d'engrais les plus économiques pour la pomme de terre ont été celles de 90...120 kg/ha N, 60...75 kg/ha P_2O_5 et 60 kg/ha K_2O (V_4, V_6).

D. Davidescu recommande aussi des doses pareilles d'engrais pour la pomme de terre cultivée sur tchernoziom lévigé dans la partie nordique de la Moldavie. Pour la variété jaune précoce, sur sol brun–roux, N. Zamfirescu et ses collaborateurs [12] obtiennent les plus grandes productions en utilisant des engrais phosphatés en doses plus grandes que celles azotés et potassiques.

Chez le blé cultivé les deux années qui suivirent après la pomme de terre, on a obtenu des augmentations de récolte de 1,6...7,7 kg grains pour 1 kg substance active. On a établi que les meilleurs doses étaient celles de 30 kg/ha N et de 45 kg/ha P_2O_5 (V_6) et que des doses plus grandes (V_7, V_8, V_{11}) ne sont plus économiques. Le manque d'engrais azotés réduit considérablement la récolte de blé (V_{10}).

Gr. Coculescu [4], sur tchernoziom couleur chocolat, à Ileana, district Lehliu, as obtenu les plus économiques augmentations de récolte chez la variété de blé nr. 301 avec de doses de 40 kg/ha N et 64 kg/ha P_2O_5. Pour d'autres variétés de blé conviennent des doses d'engrais encore plus grandes.

5. Conclusions

a) Sur terrain en pente peu erodé, les engrais minéraux avec de l'azote, du phosphore et du potassium permettent à obtenir chez le blé et la pomme de terre des augmentations de récolte qui atteignent 4 952 kg/ha ou 30,6% et respectivement 412 kg/ha ou 22,6%.

b) Les doses d'engrais les plus convenables pour la pomme de terre sont celles de 90...120 kg/ha N, de 60...75 kg/ha P_2O_5 et de 60 kg/ha K_2O.

c) Le blé cultivé après la pomme de terre, qui avait reçu des engrais, fournit des augmentations économiques de récolte avec la dose de 30 kg/ha N et de 45 kg/ha P_2O_5.

d) Les engrais minéraux appliqués à la pomme de terre exercent leur action favorable tout de même pendant la deuxième année après leur application.

e) Le sel potassique appliqué avec les engrais azotés et phospatiques exerce une influence favorable sur la récolte de pommes de terre.

f) Des doses considérables d'engrais appliquées au blé cultivé après la pomme de terre ne sont pas économiques.

g) Les engrais minéraux améliorent les traits qualitatifs de la récolte de blé et de pommes de terre.

Institut Polytechnique de Jassy, Chaire de la lutte contre l'erosion du sol et d'agriculture

BIBLIOGRAPHIE

1. Berindei M., Bretan I., Tănăsescu E., Scurtu D., Tuşa Gh., Vasiliu M., Bîrsan N., *Sistemul de lucrare a solului şi folosirea raţională a îngrăşămintelor la cultura cartofului.* Probleme agricole, 1963, *6.*
2. Canţîr F., Dumitrescu N., *Influenţa îngrăşămintelor aplicate la cuib asupra producţiei cartofului în partea de sud a depresiunii Jijia-Bahlui.* Probleme agricole, 1958, 3.
3. Coculescu Gr., *Sistemul de îngrăşare la grîul de toamnă.* Probleme agricole, 1962, *10.*
4. — *Aplicarea diferenţiată a îngrăşămintelor la grîu în raport cu soiul cultivat.* Probleme agricole, 1963, *9.*
5. Davidescu D., *Contribuţiuni la problema eficienţei îngrăşămintelor cu azot.* Probleme actuale de biologie şi ştiinţe agricole. Ed. Acad. R. S. R., Buc., 1960.
6. Fodor I., *Producerea materialului de plantare la cartof.* Probleme agricole, 1963, *6.*
7. Giosan N., *Caracterizarea agrobiologică a soiurilor de grîu şi agrotehnica lor în lumina noilor rezultate experimentale.* Probleme agricole, 1963, *10.*
8. Luca Al., Iurăşcu C., Popa A., Popa G., *Combaterea eroziunii şi refacerea fertilităţii solului în Podişul Central Moldovenesc.* Probleme agricole, 1963, *8.*
9. Moţoc M., *Eroziunea solului pe terenurile agricole şi combaterea ei.* Ed. Agro-silvică, Buc., 1963.
10. Pînzaru D., Costache I., Dumitrescu N., Petrovici P., *Aspecte ale agrotehnicii grîului din regiunea Iaşi.* Probleme agricole, 1963, *9.*
11. Scurtu D., Reichbuch L., *Măsuri agrotehnice pentru sporirea producţiei de cartof în regiunea Suceava.* Probleme agricole, 1963, *3.*
12. Zamfirescu N., Valuţă Gh., Bîlteanu Gh., Voinea R., *Comportarea plantelor de cartof la diferite raporturi între azot, fosfor şi potasiu pe sol brun roşcat de pădure.* Probleme agricole, 1959, *12.*

INFLUENŢA ÎNGRĂŞĂMINTELOR MINERALE ASUPRA PRODUCŢIEI DE CARTOFI PE TERENURI ÎN PANTĂ

(Rezumat)

Cercetările au dovedit că îngrăşămintele minerale cu azot, fosfor şi potasiu, aplicate pe soluri puţin erodate, dau sporuri de recoltă la cartof şi grîu care ajung pînă la 30,3% şi respectiv 22,6%.

S-a căutat să se stabilească dozele cele mai potrivite de îngrăşăminte pentru cartof, care s-au dovedit a fi de 90...120 kg/ha N, 60...75 kg/ha P_2O_5 şi 60 kg/ha K_2O. De asemenea s-a urmărit acţiunea favorabilă a îngrăşămintelor în anul al doilea după aplicare şi s-a constatat că grîul cultivat după cartof dă sporuri economice de recoltă la doza de 30 kg/ha N şi 45 kg/ha P_2O_5.

Îngrăşămintele minerale îmbunătăţesc şi însuşirile calitative ale recoltei de cartof şi grîu.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Producţia la cartof (media anilor 1961—1963).
Fig. 2. — Producţia la grîul cultivat după cartof, anul I (media anilor 1962—1964).
Fig. 3. — Producţia la grîul cultivat după cartof, anul II (media anilor 1963—1964).
Fig. 4. — Eficienţa îngrăşămintelor minerale aplicate la cartof.
Fig. 5. — Eficienţa îngrăşămintelor minerale aplicate la grîu, anul I şi II după cartof.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

C. D. 631.82

LES POSSIBILITÉS DE L'UTILISATION DE LA POUDRE DE CLINKER EN AGRICULTURE

PAR

IONELA POPESCU et M. DIMA

1. Introduction

Les recherches effectuées, jusqu'à présent, concernant la teneur en éléments nutritifs de divers résidus industriels et la possibilité de leur utilisation en vue de la fertilisation du sol, ne sont qu'à leur début.

Dans cette Note nous nous sommes proposés de déterminer la teneur en éléments fertilisants de la poudre de clinker, provenue des fours rotatifs, afin de pouvoir l'appliquer comme engrais à quelques plantes de culture : maïs, blé, tournesol et betterave à sucre.

2. Méthode de travail

Dans les recherches effectuées nous avons utilisé les prélèvements pris à la fabrique de ciment de Bicaz. L'humidité de la poudre de clinker a été de 0,56 % et le pH = 11,6.

On a établi la composition chimique de ce résidu par l'analyse spectrale et, en utilisant les techniques quantitatives, on a déterminé sa teneur en : SiO_2, R_2O_3, (Al_2O_3, Fe_2O_3), TiO_2, MgO, CaO, Na_2O, K_2O, P_2O_5, N, SO_3, CO_2, Mn, Cu, Zn, Mo, Co et B.

Grâce à l'analyse spectrale, ont été également mis en évidence d'autres éléments tels que : Ba, Cr, Sr, V, W. On ne trouve ces éléments qu'en quantités réduites et ils présentent peu d'importance pour la nutrition des plantes.

L'identification qualitative a été effectuée d'après les lignes spectrales les plus intenses apparues dans le spectre, tandis que par les techniques chimiques quantitatives on a pu vérifier les observations déjà faites.

En analysant la poudre de clinker, outre la quantité totale, on a aussi déterminé, pour certains éléments, la teneur de la forme assimilable.

Pour effectuer ces analyses, on a examiné les diverses méthodes fournies par la littérature de spécialité, proposées par J. H. Yoe [4], B. Sandell [12], E. Jouis [5], H. G. Vinogradova [17], P. I. Vasiliev [14], K. V. Verighina [15], [16], etc., et l'on a appliqué les méthodes gravimétriques, flammephotométriques, spectrophotométriques et colorimétriques, les plus convenables.

La réaction dans la solution de KCl de la poudre de clinker a été établie par voie potentiométrique.

3. Résultats obtenus et leur interprétation

Les valeurs obtenues lors de la détermination des macrocomponents du résidu sont exprimées en % de la matière sèche tandis que ceux obtenues lors de la détermination des microéléments sont données en mg/kg de substance sèche (tableaux 1 et 2).

Tableau 1

Teneur en macrocomposants de la poudre de clinker

Composants	Teneur %	Composants	Teneur %
SiO_2	14,27	K_2O	1,74
Al_2O_3	3,84	SO_3	0,89
TiO_2	0,21	P_2O_5	0,09
Fe_2O_3	6,30	N	0,02
MgO	1,00	Na_2O	0,73
CaO	47,50	Perte à la calcination (CO_2)	22,72

Tableau 2

Teneur en microéléments de la poudre de clinker

Microéléments	Teneur		
	Total	Mobile mg/kg	Mobile du total %
Mn	150,00	0,00	0,00
Cu	59,60	1,00	1,67
Zn	535,00	2,83	0,52
Mo	1,05	0,07	6,62
Co	3,00	0,00	0,00
B	5,00	3,20	64,00

K. P. Magniţki et collaborateurs [6], effectuant l'analyse de la poudre de ciment, provenue de différentes entreprises, constatent que la composition chimique de ce résidu varie par rapport à la matière première utilisée et aux conditions de la cuite. Ils trouvent pour le potassium une teneur comprise entre 20...50% K_2O et signalent la présence des éléments: Mg, Si, Ca, Al, Fe, Na, Cu et Mn.

Les analyses effectuées sur nos prélèvements de poudre de clinker ont mis en évidence la présence des mêmes éléments. Quant au potassium, on le trouve en proportion peu élevée.

Ayant cependant une teneur plus élevée en calcium, on considère que la poudre de clinker pourrait être utilisée tout d'abord comme amendement pour améliorer les sols acides.

Au point de vue de la teneur en calcium, ce résidu est analogue à la mousse de défécation des fabriques du sucre, ayant la composition chimique suivante: 30... 40% CaO, 0,3... 0,5% N, 0,8... 2% P_2O_5, 0,04...0,15% K_2O [3]. La poudre de clinker contient donc plus de CaO, de K_2O et moins de N et de P_2O_5.

I. Maxim et Gr. Sorop [7], utilisant à l'amendement des sols podzoliques la mousse de défécation de la fabrique de sucre et le précipité de la fabrique de sodium, obtiennent une amélioration des propriétés du sol et une augmentation du rendement de l'avoine.

Bien que la teneur en microéléments de la poudre de clinker ne soit pas trop élevée, on a étudié l'influence qu'elle exerce sur la qualité et la quantité de la récolte de quelques plantes qui présentent de l'importance pour l'économie nationale à savoir, blé, maïs, tournesol et betterave à sucre.

Le sol sur lequel ont été effectuées les expériences et qui est un tchernoziom dégradé, fut soumis aux analyses conformément aux recommandations de I. V. Peive [9], [10]. On a déterminé les éléments fertilisants en vue d'établir les réserves existantes et les formes assimilables des différents microéléments.

Les résultats de ces analyses sont présentés dans les tableux 3 et 4.

Quant aux analyses du sol et des plantes, la littérature de spécialité nous renvoie aux diverses méthodes [8], [11], [13]... [16], [18] dont nous avons choisi les plus propices et qui ont donné des résultats reproductibles.

Tableau 3

Teneur des composants nutritifs du sol

Profondeur cm	pH en KCl	Teneur des composants nutritifs %					
		N	P_2O_5	K_2O	Na_2O	Humus	$CaCO_3$
0...10	6,05	0,21	0,17	2,04	0,99	3,33	0,00
10...20	6,07	0,26	0,17	2,08	0,94	3,33	0,00
20...30	6,15	0,23	0,17	2,16	0,96	3,25	0,00
30...40	6,23	0,23	0,17	2,08	0,90	3,09	0,00
40...60	6,14	0,23	0,17	2,24	0,96	2,93	0,00
60...80	7,05	0,19	0,05	2,10	0,94	2,61	0,10

Tableau 4

Teneur des microéléments (Mn, Zn, Cu, Co, Mo, B) *du sol*

Profondeur cm	Teneur de microéléments mg/kg											
	Mn		Zn		Cu		Co		Mo		B	
	Total	Mobile	Total	Mobile	Total	Mobile	Total	Mobile	Total	Mobile	Total	Mobile
0...10	800,00	135	32	0,33	22,00	6,10	11,00	7,33	2,50	0,18	37	1,20
10...20	810,10	140	39	2,80	23,00	7,03	12,00	7,16	1,45	0,15	37	1,07
20...30	850,00	—	61	—	30,10	—	12,00	—	2,85	—	—	—
30...40	502,00	—	30	—	23,10	—	12,40	—	2,50	—	—	—
40...60	744,00	—	58	—	22,00	—	16,10	—	1,60	—	—	—
60...80	570,00	—	63	—	26,40	—	10,60	—	1,90	—	—	—

Le sol utilisé pour l'analyse a été séché à l'air et la forme mobile des microéléments ne fut déterminée qu'à l'horizon supérieur (0...20 cm).

En comparant les résultats analytiques des tableaux 3 et 4 avec ceux cités par d'autres auteurs [1], [2], on constate que le sol sur lequel nous avons effectué nos expériences a une teneur convenable en azote, phosphore, potassium et un peu plus réduite en humus.

Quant aux microéléments étudiés ce sol en possède des quantités suffisantes.

Pendant les trois années d'expérimentation, les précipitations et les températures enregistrées à la station météorologique de Jassy [19] prouvent qu'au cours des premières deux années (1961 et 1962) la somme annuelle des précipitations a dépassé la moyenne de 70,5 mm et respectivement de 33,8 mm. En 1963 il y a eu moins de précipitations et les plantes soumises aux expérimentations ont donné des rendements plus faibles qu'aux années précédentes.

Les expériences ont porté sur les variétés et les hybrides suivants : blé d'automne nr. 301 ; maïs H. D – 203 ; tournesol VNIIMK 8931 et la betterave à sucre Bod 165.

Les expériences ont été effectuées en quatre répétitions sur parcelle récoltable, étant de 24 m² pour le blé et la betterave à sucre, et de 36 m² pour le maïs et le tournesol.

L'espacement de semis entre les lignes de blé d'automne a été de 12...14 cm; entre celles de maïs et tournesol du 80/30 cm et de 50/20 cm pour celles de betterave à sucre.

Les variantes on été les suivantes:

V_1: 60 kg/ha N+45 kg/ha P_2O_5 (témoin);
V_2: 60 kg/ha N+45 kg/ha P_2O_5+ 500 kg/ha de poudre de clinker;
V_3: 60 kg/ha N+45 kg/ha P_2O_5+ 750 kg/ha de poudre de clinker;
V_4: 60 kg/ha N+45 kg/ha P_2O_5+1000 kg/ha de poudre de clinker.

a) *Expériences sur le blé d'automne*

Les résultats présentés dans le tableau 5 permettent à constater que le rendement, après que la poudre de clinker a été appliquée comme engrais, est tout réduit, la dose à laquelle on obtient un certain rendement de production (3,3%) est de 1 000 kg/ha. Il en résulte de la détermination d'un nombre de propriétés qualitatives des grains de blé que la poudre de clinker ne contribue pas à modifier d'une façon évidente le poids des grains, leur teneur en substances protéiques et en microéléments.

Tableau 5

Rendement en grains du blé expérimenté avec poudre de clinker (kg/ha)

Variante	Grains	Différence par rapport au témoin		Grains	Différence par rapport au témoin		Grains	Différence par rapport au temoin	
	kg/ha	kg/ha	%	kg/ha	kg/ha	%	kg/ha	kg/ha	%
	1962			1963			Moyenne 1962—1963		
V_1	2 026	—	100,0	1 901	—	100,0	1 963	—	100,0
V_2	2 010	16	99,2	1 907	6	100,3	1 958	4	99,7
V_3	2 045	10	100,4	1 890	11	99,4	1 963	—	100,0
V_4	2 045	19	100,9	2 011	11	105,7	2 028	65	103,3

b) *Expériences sur le maïs*

Les résultats obtenus à la récolte du maïs sont donnés dans le tableau 6.

Il s'en suit que la poudre de clinker ne contribuie à l'augmentation du rendement en grains du maïs non plus. Pour connaître si ce résidu exerce une influence sur la composition chimique des grains de maïs, on a procédé aux déterminations analytiques: on constate également une influence faible exercée par la poudre de clinker sur les propriétés principales de ceux-ci ainsi que sur leur teneur en microéléments.

c) *Expérience sur le tournesol*

Les conditions de l'organisation des expériences étant analogues à celles précédentes on a obtenu à la récolte les résultats présentés dans le tableau 7, qui montrent que la poudre de clinker exerce une influence favorable sur la production de tournesol. Ainsi à la dose de 750 kg/ha on a obtenu un rendement moyen de 140 kg/ha ou de 8,1%.

Tableau 6

Rendement en grains du maïs expérimenté avec la poudre de clinker (kg/ha)

Variante	Grains	Différence par rapport au témoin		Grains	Différence par rapport au témoin	
	kg/ha	kg/ha	%	kg/ha	kg/ha	%
	1961			1962		
V_1	4 469	—	100,0	4 062	—	100,0
V_2	4 476	7	100,0	4 143	81	101,9
V_3	4 476	7	100,1	4 121	69	101,4
V_4	4 591	122	102,7	4 070	8	100,1
	1963			Moyenne 1961—1963		
V_1	3 541	—	100,0	4 024	—	100,1
V_2	3 500	41	98,8	4 039	15	100,3
V_3	3 574	33	100,9	4 057	33	100,8
V_4	3 666	125	103,2	4 109	85	102,1

Tableau 7

Rendement en grains du tournesol expérimenté avec la poudre de clinker (kg/ha)

Variante	Grains	Différence par rapport au témoin		Grains	Différence par rapport au témoin	
	kg/ha	kg/ha	%	kg/ha	kg/ha	%
	1961			1962		
V_1	1 821	—	100,0	1 875	—	100,0
V_2	1 928	107	105,8	1 890	15	100,8
V_3	1 957	136	107,4	2 085	210	111,2
V_4	1 928	107	105,8	1 962	87	104,6
	1963			Moyenne 1961—1963		
V_1	1 795	—	100,0	1 830	—	100,0
V_2	1 779	16	98,4	1 862	32	101,7
V_3	1 897	102	105,7	1 979	149	108,1
V_4	1 874	79	104,6	1 921	91	104,9

La poudre de clinker détermine également une certaine augmentation du taux de graisse des graines ce qui fait accroître la quantité d'huile par ha jusqu'à 12,8% (tableau 8).

Ce résidu produit de même un certain changement de la quantité de microéléments des graines, en augmentant leur teneur en Mn et Co.

Tableau 8

Certaines propriétés des grains du tournesol aprés l'expérience avec la poudre de clinker

Variante	Poids hectolitre	Poids de 1 000 grains	Noyau	Substances protéiques	Substances grasses	Huile	
	kg/hl	g	%	%	%	kg/ha	%
1961							
V_1	36,9	70,2	68,0	24,19	60,07	754,7	100,0
V_2	36,4	71,1	70,0	24,09	60,46	811,9	107,5
V_3	36,8	72,4	68,3	23,82	61,38	820,4	108,7
V_4	36,8	71,3	69,0	24,09	61,21	814,2	107,8
1962							
V_1	36,4	65,4	67,6	24,40	69,98	772,6	100,0
V_2	36,7	64,7	67,2	26,03	61,16	776,7	100,5
V_3	36,2	64,5	67,5	27,26	61,93	871,5	112,8
V_4	36,4	66,7	66,2	24,01	60,88	790,7	102,3
1963							
V_1	40,2	77,5	73,7	21,47	57,63	762,3	100,0
V_2	41,5	78,7	74,2	22,91	57,39	757,5	99,3
V_3	40,0	77,9	73,8	22,42	58,59	820,2	107,5
V_4	40,2	77,1	73,7	22,57	57,87	799,1	104,8

d) *Expérience sur la betterave à sucre*

La poudre de clinker exerce une influence favorable sur le rendement des racines de la betterave à sucre (tableau 9). Pour une dose de l'ordre de 500 kg/ha de poudre de clinker l'augmentation du rendement est de 2 239 kg/ha ou de 7,3%. Les doses plus élevées de résidu font baisser la production.

K. P. Magnițki et collaborateurs [16], en apportant la poudre de clinker à la betterave à sucre sur des sols à réaction acide, obtiennent une augmentation du rendement des racines entre 1 300 et 3 000 kg/ha. Ils constantent que les feuilles des plantes expérimentées assimilent aussi bien le potassium de la poudre de ciment que les sels purs.

Les recherches que nous avons effectuées au moyen des analyses de laboratoire montrent que la poudre de ciment, utilisée comme engrais, détermine une certaine augmentation de la teneur en sucre des racines de betterave ainsi que l'élévation de la production de sucre à l'ha qui atteint jusqu'à 114 kg/ha ou 18% (tableau 10). La quantité d'azote nocif des racines ne change pas d'une telle manière qu'elle puisse exercer une influence négative sur les propriétés technologiques de la betterave à sucre.

Tableau 9

Rendement en racines de la betterave à sucre après l'expérience avec la poudre de clinker (kg/ha)

Variante	Grains kg/ha	Différence par rapport au témoin kg/ha	Différence par rapport au témoin %	Grains kg/ha	Différence par rapport au témoin kg/ha	Différence par rapport au témoin %
	1961			1962		
V_1	31 200	—	100,0	32 580	—	100,0
V_2	34 320	3 120	110,1	34 920	2 340	107,3
V_3	33 605	2 405	107,7	33 900	1 320	104,0
V_4	33 218	2 015	106,4	33 840	1 260	103,8
	1963			Moyenne 1961—1963		
V_1	27 628	—	100,0	30 468	—	100,0
V_2	28 883	1 255	104,5	32 707	2 239	107,3
V_3	28 756	1 128	104,0	32 087	1 619	105,3
V_4	28 161	533	101,9	31 740	1 276	104,1

Tableau 10

Teneur en sucre des racines de la betterave à sucre après l'expérience avec de la poudre de clinker

Variante	Substance sèche %	Teneur en sucre %		Rendement	
		de la substance sèche	des racines à 25% de substance sèche	kg/ha	%
		1961			
V_1	27,84	72,60	18,15	631	100,0
V_2	28,73	75,60	18,90	745	118,0
V_3	28,52	73,72	18,43	706	111,8
V_4	28,20	75,48	18,87	707	112,0
		1962			
V_1	27,67	71,80	17,95	647	100,0
V_2	27,80	70,88	17,72	688	106,3
V_3	28,44	69,72	17,43	672	103,8
V_4	27,36	70,08	17,52	448	100,1
		1963			
V_1	23,59	72,04	18,01	470	100,0
V_2	23,67	72,44	18,11	495	105,3
V_3	23,68	74,80	18,70	509	108,2
V_4	23,73	74,48	18,62	497	105,7

Compte tenu des résultats des analyses effectuées on peut affirmer que le résidu expérimenté modifie la teneur en microéléments des racines de betterave en élevent la quantité de molybdène et en réduisant la proportion d'autres microéléments (Mn, Cu, Co, Zn).

4. Conclusions

1. La teneur élevée en calcium (47,50% Ca) ainsi que la réaction alcaline de la poudre de clinker (pH = 11,6) nous déterminent à la recommander pour être expérimentée comme amendement à corriger la réaction des sols acides.

2. L'utilisation de la poudre de clinker comme engrais avec des microéléments sur le tchernoziom dégradé contribue à l'augmentation du rendement du tournesol en moyenne de 8,1% et de la betterave à sucre de 7,3%.

3. Ce résidu élève le rendement de l'huile à l'ha en moyenne de 7,5 ... 12,8% et le rendement de sucre à l'ha de 5,3...18,0%, en modifiant en même temps la teneur en microéléments des produits agricoles.

4. La dose la plus convenable de la poudre de clinker dans l'expérimentation s'est avérée d'être de l'ordre de 750 kg/ha pour le tournesol et de 500 kg/ha pour la betterave à sucre.

5. Ce résidu ne contribue à l'augmentation du rendement du blé d'automne et du maïs.

6. Étant donné que la poudre de clinker contribue à une certaine élévation des rendements du tournesol et de la betterave à sucre et qu'on obtient couramment aux fabriques de ciment des quantités considérables de poudre de clinker qui n'a pas d'autre application, nous considérons que l'utilisation de ce résidu dans l'agriculture contribuerait à l'augmentation des rendements de certaines plantes de culture.

Institut Agronomique „Ion Ionescu de la Brad", Jassy
et
Institut Polytechnique de Jassy,
Chaire de Technologie chimique

BIBLIOGRAPHIE

1. Chiriţă C. D., *Pedologia generală.* Ed. Agrosilvică de stat, Bucureşti, 1955.
2. Davidescu D., *Sur les cartes agrochimiques des sols de la République Populaire Roumaine.* Agrochimica, 1956, **1**, pp 70–80.
3. — *Agrochimia.* Ed. II-a, Ed. Agrosilvică de stat, Buc., 1963.
4. Yoe J. H., Vill F., *A New Colorimetric Reagent for Molybdenum.* Anal. Chim. Acta, 1952, **6**, pp. 420–451.
5. Jouis E., Lecacheux M. Th., *Recherches sur des méthodes de dosage pratique des oligoéléments cuivre, zinc, manganèse dans les plantes et dans les sols en vue d'applications de routine dans les laboratoires agricoles.* Ann. Agron., 1959, *3*, pp. 349–365.
6. Магницкий К. П., Жуков К. Н., Капустянский А. Н., *Цементная калийная пылъ удобрение для полей.* Земледелие, 1963, *3*, стр. 64.
7. Maxim I., Sorop Gr., *Folosirea deşeurilor industriale cu calciu pentru ameliorarea solurilor podzolice.* Ştiinţa solului, 1963, *2*, p. 139.
8. Peach, Tracey M. V., *Moderne Methoden der Pflanzen Analyse.* Springer Verlag, Berlin, 1955.
9. Пеиве И. В., *Почвы микроэлементов в повышение продуктивности сельскохозяйственных культур.* Земледелие, 1961, *4*, стр. 73.
10. — *Recherches pédologiques et agrochimiques pour l'emploi différencié des engrais.* Rapports présentés aux sixiéme Congrés de la Science du sol, 1956, **IV**, pp. 173–185.
11. Prevot P., Anual Review of Plant Physiology, 1962, **131**, pp. 131–181.
12. Sandell E. B., *Colorimetric Determination of Traces of Metals.* Sec. Ed., Intersci. publ., New-York, 1950, p. 572.

13. Сердобольский И. П., *Методы определения* pH *и окислительно восстановительного потенциала при агрохимических исследованиях.* В сб. *Агрохимические методы исследования почвы.* М., 1954, стр. 150.
14. Басилиев П. И., *Методы ускоренного анализа карбонатных пород.* М., 1951, стр. 4, 12, 18, 20.
15. Беригина К. В., *Мемоды определения меди в форме диэтилдитиокарбоната.* В сб. *Методы определения микроэлементов в почвах и растениях.* Изд. АН СССР, М., 1958, смр. 20.
16. — *Методы определения цинка и кобальта.* В сб. *Методы определния микроэлементов в почвах и растениях.* Изд. АН СССР, М., 1958, стр. 23.
17. Виноградова Х. Г., *Молибденъ и его биологическая роль.* М., 1952.
18. Wear J. I., *Effect of Soil* pH *and Calcium on the Uptake of Zinc by Plants.* Soil Sci., 1956, **81**, pp. 311—315.
19. * * * *Anuarul statistic al R. P. R.* 1963, p. 68.

POSIBILITĂŢI DE VALORIFICARE A PRAFULUI DE CLINKER ÎN AGRICULTURĂ

(Rezumat)

Se stabileşte conţinutul în macrocomponente şi microelemente a prafului de clincher obţinut de la fabrica de ciment Bicaz, şi posibilitatea valorificării acestui reziduu ca îngrăşământ, la grîu, porumb, floarea soarelui şi sfecla de zahăr.

Analizele efectuate arată că praful de clincher are reacţie alcalină (pH = 11,6) şi un conţinut ridicat în calciu (47,50% CaO), ceea ce pledează pentru a fi experimentat în vederea corectării reacţiei solurilor acide. Acest reziduu conţine de asemenea 1,7% K_2O, 1,00% MgO, 535 mg/kg Mn; 59,6 mg/kg Cu şi în cantităţi mai mici alte elemente ca: B, Co, Ti, In, W, V.

Aplicarea pe cernoziom degradat a prafului de clincher, a sporit recolta la floarea soarelui cu 8,1% iar la sfecla de zahăr cu 7,3%. La porumb şi grîu nu a determinat o creştere a producţiei.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

Electrotehnică. Electronică

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том XIV (XVIII), вып. 1—2, 1968

Электротехника. Электроника

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

Electrical Engineering. Electronics

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

C. D. 537.226 ; 621.315.6

PHOTO-ÉLECTRÈTES EN DIÉLECTRINE

PAR

EMIL LUCA et VICTOR SCUTARU

Comunication présentée dans la session scientifique de l'Institut Polytehnique de Jassy, 28-30 Septembre 1967

1. Considérations générales

En prenant comme point de départ les processus de photo-conductibilité, de même que ceux de polarisation et de dépolarisation du soufre sous l'action d'un fascicule lumineux ou d'un fascicule de rayons X [1] ... [10], dans deux travaux antérieurs [11] et [12], les auteurs de cet ouvrage ont étudié les processus de polarisation qui ont lieu dans la diélectrine (mélange isolant de paraffine et de soufre), de même que ses propriétés termo-électriques.

En continuant ces travaux, les auteurs se proposent à étudier les propriétés de la diélectrine comme photo-électrète sous l'action des rayons X, fonction de la concentration en soufre et de l'intensité du champ électrique continu polarisant.

2. Résultats expérimentaux

La diélectrine utilisée sous forme d'échantillons cylindriques ayant une hauteur de 0,3 cm et un diamètre de 4,5 cm a été obtenue d'un mélange de paraffine et de soufre en état α (fleur de soufre).

Les échantillons, placées entre les électrodes en feuilles minces d'etain, étaient soumises à l'action simultanée d'un fascicule de rayons X et du champ électrique continu polarisant.

On a utilisé comme source de rayons X un tube 4ВДМ-100 alimenté sous une tension de 53 kV et un courant de 6 mA, ce qui a permis que l'intensité ionometrique du fascicule du rayons X, donnée par la relation $I=CNiU^2$ [13], reste inchangée pendant les mesures.

Toutes les échantillons ont été exposées à l'action des rayons X et des champs polarisants de 6,6 kV/cm et 13,3 kV/cm, pendant une minute, temps suffisant pour l'orientation de tous les dipoles.

Pour la mesure de la charge superficielle du photo-électrète et de la nature de cette charge électrique, on a utilisé la méthode du deplacement de l'électrode mobile dans le champ électrique du photo-électrète et la méthode de l'induction électrostatique [12].

On a mesuré le courant de polarisation à l'aide d'un dispositif à lampe électromètre, ayant une sensibilité de 10^{-13} A/div. Les photo-électrètes ont été maintenus en court-circuit, en mesurant à certains intervalles de temps leur charge superficielle σ, dont les valeurs, pour les deux intensités du champ polarisant et pour diverses concentrations en soufre, sont données dans les courbes des fig. 1 et 2.

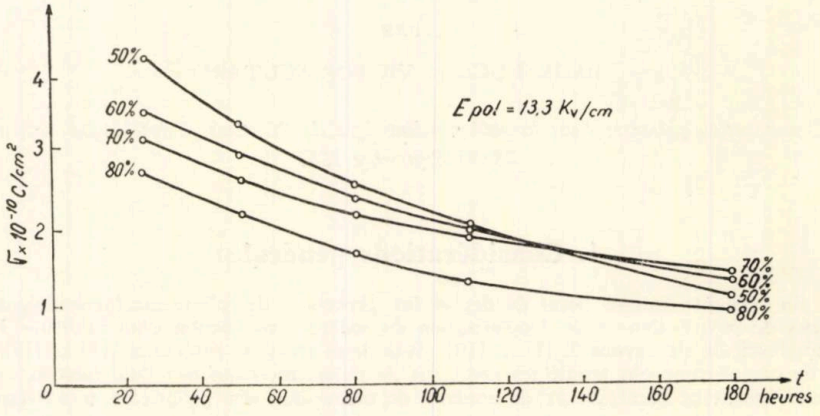


Fig. 1

De l'analyse de ces courbes résultent les conclusions suivantes :

a) La diélectrine présente des propriétés photo-électrétiques remarquables lorsqu'elle est soumise à l'action des rayons X dans un champ électrique continu intense.

b) La valeur de la charge superficielle dépend de la concentration en soufre de la diélectrine qui se comporte différemment pour les deux intensités du champ utilisées. C'est-à-dire que pour l'intensité de 6,6 kV/cm, du champ polarisant, la valeur de la charge superficielle, mesurée immédiatement après la constitution du photo-électrète, augmente au fur et à mesure que la concentration en soufre augmente, résultat mis en évidence aussi chez les thermo-électrètes obtenus à l'aide de la diélectrine [12], tandis que pour l'intensité du champ polarisant de 13,3 kV/cm, la valeur de la charge superficielle, mesurée immédiatement après la formation du photo-électrète, diminue avec l'augmentation de la concentration en soufre.

Dans les deux cas on constate des hétéro-charges.

Si l'on augmente la concentration en soufre, grâce à l'intensification des processus de ionisation qui ont lieu sous l'action des fascicules de rayons X,

et qui sont mis en évidence par la courbe de variation du courant de polarisation (fig. 3), le nombre de hétéro-charges augmente également.

Pour une intensité du champ polarisé de 6,6 kV/cm, donc inférieure à 10 kV/cm, la compensation des hétéro-charges par les homo-charges n'est pas essentielle [14], et, dans l'ensemble, le nombre des hétéro-charges augmentera au fur et à mesure que la concentration en soufre augmente.

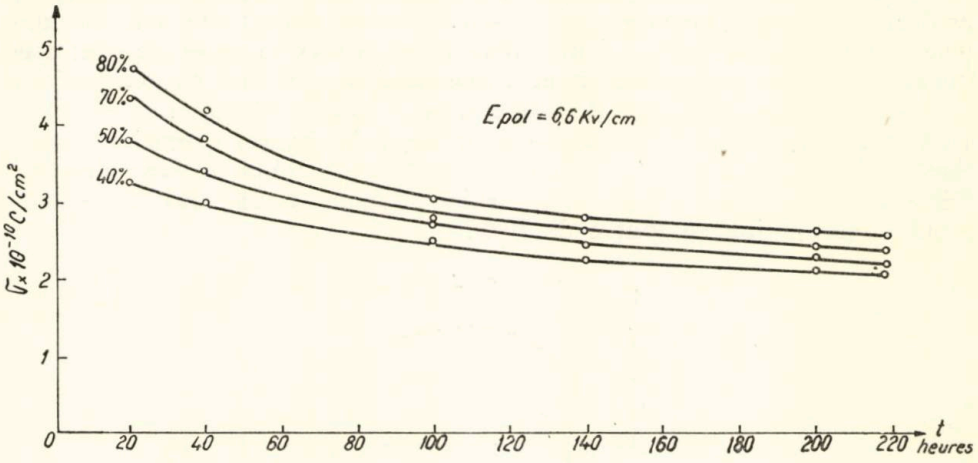


Fig. 2

Pour une intensité du champ polarisant de 13,3 kV/cm, donc supérieure à 10 kV/cm, bien que le nombre des homo-charges dépasse celui des hétéro-charges, on a obtenu aussi, chez les photo-électrètes formés, des hétéro-charges, dont le nombre, dans le processus final de polarisation, diminue au fur et à mesure que la concentration augmente; compte tenu des processus intenses de ionisation sous l'action des rayons X qui ont lieu pour des concentrations élevées en soufre, le processus de compensation des hétéro-charges par les homo-charges n'est plus total, mais partiel.

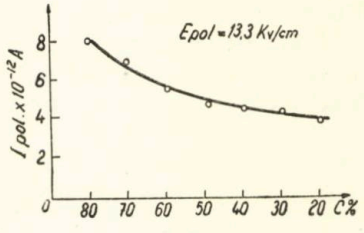


Fig. 3

c) Ce résultat est encore plus évident si l'on observe les courbes de variation en fonction de temps, de la charge superficielle des photo-électrètes.

Bien que la charge superficielle des photo-électrètes obtenus diminue avec le temps, on constate qu'aux photo-électrètes formés dans un champ de polarisation de 6,6 kV/cm les courbes de variation restent parallèles, tandis que chez les photo-électrètes formés dans le champ de 13,3 kV/cm les courbes s'intersectent, ce qui permet à observer qu'après un certain interval

de temps ceux, dont la concentration en soufre est plus grande, présentent une charge superficielle accrue, parce que les homo-charges qui compensent, dans la phase initiale, un grand nombre de hétéro-charges, disparaissent beaucoup plus vite que les hétéro-charges.

d) La diminution de la charge superficielle des photo-électrètes obtenus est plus accentuée dans la phase qui suit immédiatement leur formation, ayant cependant la tendance de maintenir une valeur constante, après environ 100 heures, lorsque les photo-électrètes présentent une stabilité manifeste, en conservant des valeurs appréciables des charges qui se sont maintenues pendant quelques mois et même pendant quelques années.

Dans le cas des photo-électrètes formés dans le champ polarisant de 13,3 kV/cm, en traçant la courbe de variation de la charge superficielle fonction de la concentration en soufre, après 180 h depuis la formation de l'électrète (fig. 4), on observe l'apparition d'un maximum, qui correspond a une concentration en soufre de 70 %.

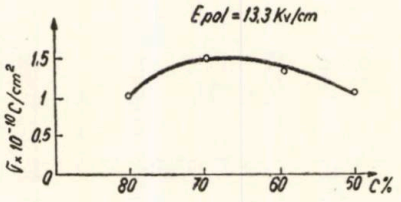


Fig. 4

Ce maximum bien qu'il a un caractère relatif, car après environ 1800 heures il correspond à une concentration en soufre de 80 %, se maintient pendant longtemps en gardant une valeur de la charge superficielle appréciable, ce qui nous permet d'affirmer que la concentration optimum en soufre de la diélectrine, en vue d'obtenir des photo-électrètes, est de 70 %.

D'ailleurs, du point du vue mécanique aussi, la diélectrine ayant une concentration en soufre de 70 % présente des propriétés améliorées par rapport à celle ayant une concentration plus grande.

3. Conclusions

1. On peut obtenir, par l'irradiation de la diélectrine avec des rayons X dans un champ électrique intense, des photo-électrètes qui présentent de remarquables propriétés électrétiques et qui maintiennent pendant longtemps une charge superficielle stable.

2. Tant aux photo-électrètes formés dans un champ polarisant de 6,6 kV/cm, qu'aux électrètes formés dans un champ polarisant de 13,3 kV/cm, on a obtenu des hétéro-charges, dont la présence, qui atteste la non-compensation par les homo-charges pour des champs polarisants ayant une

intensité supérieure à 10 kV/cm, est déterminée par les processus intenses de ionisation qui ont lieu dans la diélectrine à la suite de l'irradiation avec des rayons X.

3. En général, la valeur de la charge superficielle augmente au fur et à mesure que la concentration en soufre de la diélectrine devient plus grande. L'anomalie qui aparaît aux photo-électrètes formés dans le champ polarisant de 13,3 kV/cm, immédiatement après leur formation, est dûe aux processus de compensation partielle des hétéro-charges par les homo-charges, processus plus accentué aux concentration élevées en soufre, ce qui a pour effet que la charge superficielle résultée, formée par des hétéro-charges non-compensées, diminue avec l'augmentation de la concentration en soufre.

Cette anomalie disparait après un certain interval de temps après la formation des photo-électrètes grâce à la disparition plus rapide des charges. de compensation. C'est pourquoi les courbes de variation en fonction de temps, de la charge superficielle des photo-électrètes ayant diverses concentrations en soufre s'intersectent aboutissant à une distribution normale de la charge superficielle, d'augmentation avec la concentration en soufre.

4. Pour les photo-électrètes formés dans le champ polarisant de 13,3 kV/cm, il y a une concentration en soufre optimum, de 70%, et en paraffine de 30%, pour laquelle les échantillons de diélectrine présentent aussi, sauf un maximum de la charge superficielle de valeur élevée pour un intervalle de deux mois, de bonnes propriétés mécaniques.

Institut Polytechnique de Jassy,
Chaire de Physique
et
Institut Pédagogique de Jassy

BIBLIOGRAPHIE

1. Воробьев А. А., ЖЕТФ, 1934, **4**, *4*, стр. 368—383.
2. Головин В. М., Физ. тв. тела, 1960, **2**, *5*, стр. 1004—1010.
3. Четкаров М. Л., Физ. тв. тела, 1961, **3**, *8*, стр. 2197—2201.
4. Kurrellmeyer B., Phys. Rev., 1927, pp. 893—910.
5. Маников Н. А., Тр. гидрограф. ин-та, глав. морпути, 1939, *1*, стр. 141—154.
6. Nadjakof G., Phys. Ztschr., 1938, **39**, *6*, S. 226—227.
7. Фридкин Б. Н. и др., ДАН СССР, 1957, **117**, *5*, стр. 807—844.
8. Тортаковский П. С., Рекалов Г., ЖЕТФ, 1940, **10**, *2*, стр. 145—149.
9. Кашукеев Н., Изв. Болг. АН, отд. физ., мат. и техн., 1957, **7**, стр. 71—81.
10. Маников Н. А., ЖЕТФ, 1936, **6**, *10*, стр. 1191—1040.
11. Luca E., Reus N., Tacu Gh., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1963, **IX (XII)**, *1—2*, p. 223.
12. Reus N., Scutaru V., Univ. „Al. I. Cuza", Inst. Péd. Jassy, Session Scientifique, 13—15 Mart 1965, p. 403.
13. Destriau G., *Physique appliquée à des instalation à rayons X*. Dunod, Paris, 1945.
14. Gubkin N. N., *Electreţi*. Ed. Tehn., Buc., 1963.

FOTOELECTREŢI DIN DIELECTRINĂ

(Rezumat)

1. În urma iradierii dielectrinei, cu radiaţii X, într-un cîmp electric intens, se pot obţine fotoelectreţi ce prezintă remarcabile proprietăţi electretice şi care se menţin cu o bună stabilitate timp suficient de îndelungat.

2. Atît la fotoelectreţii formaţi în cîmpul polarizant de 6,6 kV/cm, deci mai puţin intens decît cel de 10 kV/cm, cît şi la cei formaţi în cîmpul polarizant de 13,9 kV/cm, s-au obţinut eterosarcini a căror prezenţă, deci necompensare de către omosarcini, pentru cîmpuri polarizante mai intense decît 10 kV/cm, este determinată de procesele de polarizare ce au loc în dielectrină în urma iradierii cu radiaţii X.

3. În general valoarea sarcinii superficiale a fotoelectreţilor creşte cu mărirea concentraţiei în sulf a dielectrinei, o anomalie apărînd la fotoelectreţii formaţi în cîmpul polarizant de 13,3 kV/cm unde, în faza imediat următoare procesului de formare a fotoelectreţilor, datorită unor procese parţiale de compensare a eterosarcinilor de către omosarcini, mai accentuate la concentraţii ridicate în sulf, sarcina superficială rezultată, formată din eterosarcinile necompensate, scade odată cu creşterea concentraţiei în sulf. Această anomalie dispare însă după un anumit interval de timp de la formarea fotoelectreţilor, datorită dispariţiei mai rapide a omosarcinilor de compensare. Din această cauză curbele de variaţie a sarcinii superficiale în timp a fotoelectreţilor, cu diverse concentraţii în sulf, se întretaie ducînd la o repartiţie normală a sarcinii superficiale de creştere cu concentraţia în sulf.

4. Pentru fotoelectreţii formaţi în cîmpul polarizant de 13,3 kV/cm există o concentraţie optimă de 70% sulf şi 30% parafină, pentru care probele de dielectrină prezintă, pe lîngă un maxim al sarcinii superficiale de valoare ridicată pe un interval de circa 2 luni şi bune proprietăţi mecanice.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

C. D. 538.24

RÉSULTATS NOUVEAUX CONCERNANT L'„EFFET PROCOPIU"

PAR

GH. VASILIU

Hommage à Mr. le prof. ȘTEFAN PROCOPIU
membre de l'Académie de la République Socialiste de Roumanie

1. Sous le nom d'„effet Procopiu", découvert en 1927 [1], [2], il est connu le phénomène d'induction d'une f. é. m. dans une bobine coaxiale (fig. 1) avec un conducteur ferromagnétique, parcouru par un courant alternatif et le long duquel actionne un champ magnétique constant.

Vu que les lignes du champ magnétique variable, produit par le courant alternatif, n'intersectent pas la surface des spires il n'y a, apparement, aucun processus d'induction électromagnétique.

Dans les travaux ultérieurs à la découverte de ce phénomène on a tenté à expliquer l'induction d'une f. é. m. [4], [5] par la restructuration des domaines élémentaires, en plans différents de ceux de la magnétisation légère.

Autres recherches, plus récentes (1937—1963), [6], [10], ont été dirigées vers une justification par voie expérimentale de l'effet Procopiu.

Pour élucider le mécanisme de l'apparition de cette f. é. m. nous avons recouru, dans une Note antérieure [11], à un théorème de l'électrotehnique à savoir le théorème de Maurice Leblanc. Compte tenu que dans la Note ci-dessus nous avons admis que le conducteur n'est soumis à l'action d'acun champ magnétique constant, nous avons justifié l'existence de la f. é. m. induite par l'anisotropie magnétique du matériel.

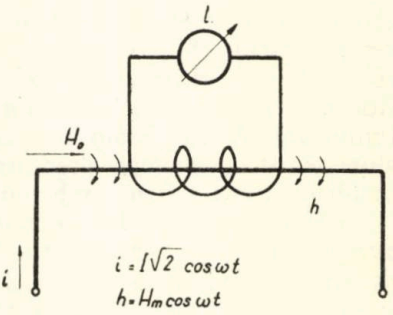


Fig. 1

2. Dans ce qui suit nous allons appliquer le même théorème mais nous considérerons le cas lorsque le long du conducteur actionne un champ magnétique H_0 constant, d'une intensité suffisante pour réaliser la saturation du matériel.

On considère que l'intensité du courant alternatif est $i = \sqrt{2}I\cos\omega t$; le champ magnétique produit par ce courant est un champ circulaire d'intensité $h = H_m \cos\omega t$. La direction des lignes de ce champ est perpendiculaire à celle du conducteur, d'une telle façon qu'en apparence actionne efectif seulement le champ constant H_0.

Dans n'importe quel point P appartenant à la section du conducteur actionnent sur le matériel deux champs dirigés selon des directions perpendiculaires: h et H_0 (fig. 2).

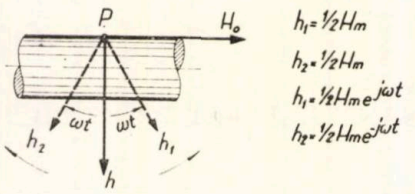


Fig. 2

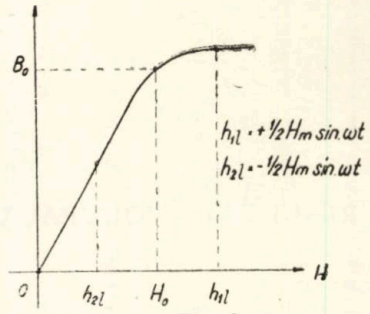


Fig. 3

Conformément au théorème de Leblanc on peut décomposer le champ $h = H_m \cos \omega t$ en deux champs constants, égaux, d'amplitude $H_m/2$ chacun, tournants en sens contraires avec la vitesse ω. Les deux champs (h_1, h_2) actionnent le long du conducteur par l'intermède de leurs composantes selon cette direction, à savoir, $h_{1l} = \frac{1}{2} H_m \sin \omega t$ et $h_{2l} = -\frac{1}{2} H_m \sin \omega t$.

Dans chaque moment la somme des intensités de ces champs est nulle et par conséquent il paraît que le champ résultant le long du conducteur reste constant. Si l'on tient compte du comportement nonlinéaire du matériel, mis en évidence par la courbe de magnétisation (fig. 3) et l'on considère, par exemple, le cas lorsque le point de fonctionnement, établi par l'intensité H_0 du champ constant, se trouve dans la région de saturation, alors les deux champs alternatifs, sinusoïdaux, h_{1l} et h_{2l}, vont magnétiser le matériel d'une façon nonhomogène.

Si l'on analyse les composantes tournantes du champs h (fig. 4) notées avec ① et ②, on constate que dans l'intervale [0, π], ② exerce une action démagnétisante sur le matériel, tandis que ① exerce une action magnétisante. Au contraire, dans l'intervalle [π, 2π] ① actionne (à gauche) d'une manière démagnétisante tandis que ② actionne (à droite) d'une manière magnétisante.

La ligne XY, qui passe par le point P, divise le matériel en deux régions, l'une, à droite, soumise à l'action magnétisante permanente des composantes ① et ②, et l'autre, à gauche, soumise à l'action démagnétisante permanente des mêmes composantes, dans les intervalles correspondants. C'est comme à la gauche de la ligne XY actionnerait, en permanence, un champ démagnétisant ayant l'intensité $h_d = \frac{1}{2} H_m \sin \omega t$ et à la droite de la même ligne un champ magnétisant d'intensité égale.

L'effet du champ magnétisant est nul, compte tenu de la saturation.

Le champ démagnétisant h_d peut être représenté par la fonction $h_d = (H_m/2) \sin^2 \omega t$ qui satisfait à la condition d'atteindre sa valeur maximum (positive) en même temps que $|\sin \omega t|$.

Par conséquent le champ résultant qui actionne dans le matériel, à gauche de la ligne XY, sera:

$$h_r = H_0 - \frac{1}{2} H_m \sin^2 \omega t$$

et l'induction longitudinale sera :

$$B_r = \mu H_0 - \frac{1}{2} \mu H_m \sin^2 \omega t .$$

La f. é. m. induite dans la bobine est:

$$(I) \qquad e = -\frac{d\psi}{dt} = -wA\frac{dB_r}{dt} = \frac{1}{2} wA\mu\omega H_m \sin 2\omega t.$$

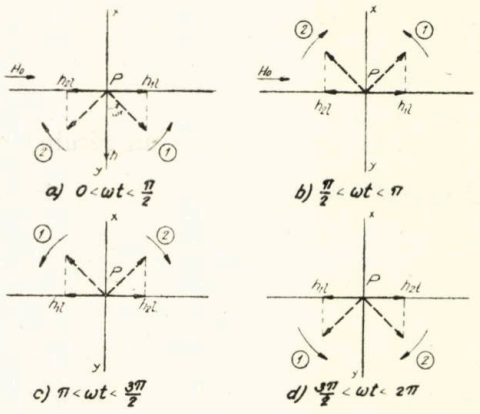


Fig. 4

3. On peut aboutir au même résultat si l'on admit l'hypothèse que le champ h_d produit une induction magnétique:

$$B_d = \frac{1}{2} \mu_d H_m \sin \omega t,$$

où μ_d représente la perméabilité dynamique $\mu_d = dB/dH$. Cette perméabilité à une valeur plus petite que celle de la perméabilité statique μ_s et dépend de la vitesse de variation du champ. On peut admettre que la perméabilité dynamique est donnée par:

$$\mu_d = \mu_s \sin \omega t,$$

qui revèle le fait que $\mu_d = \mu_s$ lorsque h_l atteint son maximum, à savoir lorsque la vitesse de variation du champ est très petite et s'anulle lorsque la vitesse de variation du champ h_l est grande.

Avec cette expression pour la perméabilité dynamique l'induction devient

$$B_d = \frac{1}{2} \mu_s H_m \sin^2 \omega t \ ;$$

cette induction actionne seulement à gauche de la ligne XY, en démagnétisant le matériel, où $\mu_d \neq 0$.

L'induction résultante, pulsatoire, est donnée par:

$$B_r = B_0 - \frac{1}{2} \mu_s H_m \sin^2 \omega t .$$

Pour la f. é. m. on retrouve de cette manière l'expression (I), où μ est substitué par μ_s.

La f. é. m. est de fréquence double, ce qu'on peut constater et par voie expérimentale. Les conclusions quant au point P peuvent être retrouvées lorsqu'on considère des points voisins et symétriqes par rapport à P, à sa droite ou à sa gauche, d'une telle manière que la f. é. m. induite dans la bobine coaxiale représente une moyenne de ces processus élémentaires; celle-ci sera périodique et riche en harmoniques paires.

4. On peut obtenir un résultat analogue si l'on utilise l'expression du champ démagnétisant $h_d = \frac{1}{2} H_m |\sin \omega t| = a \cos \theta$, en considérant la fonction périodique rectifiée du sinus.

Le développement en série de cette fonction est:

$$y = \frac{2a}{\pi} - \frac{2a}{\pi} \cdot \frac{2}{1.3} \cos 2\theta - \frac{2a}{\pi} \cdot \frac{2}{3.5} \cos 4\theta - \cdots,$$

et, dans le cas considéré, on peut écrire:

$$h_d = \frac{H_m}{\pi} - \frac{H_m}{\pi} \cdot \frac{2}{3} \cos 2\omega t - \frac{H_m}{\pi} \cdot \frac{2}{15} \cdot \cos 4\omega t - \cdots$$

L'induction résultante est alors:

$$B_r = \mu H_0 - \mu \frac{H_m}{\pi} + \frac{\mu H_m}{\pi} \cdot \frac{2}{3} \cos 2\omega t + \frac{\mu H_m}{\pi} \cdot \frac{2}{15} \cos 4\omega t - \cdots$$

La f.é.m. induite sera:

$$e = \frac{\mu H_m}{\pi} \cdot \frac{2}{3} \cdot wA\, 2\omega \sin 2\omega t + \frac{\mu H_m}{\pi} \cdot \frac{2}{15} wA 4\omega \sin 4\omega t \ldots,$$

ou, en négligeant les harmoniques d'ordre supérieur:

$$e = \frac{4}{3\pi} \mu w A \omega H_m \sin 2\omega t.$$

L'expression de la f.é.m., donnée ci-dessus, est analogue à celle trouvée par Aschenbrenner et Goubau [12] pour la sonde magnétique à saturation (en approximant la caractéristique $B(H)$ avec la fonction $B = aH - bH^3$, le champ magnétique étant $H_1 = H_0 \pm H_1 \sin \omega t$), à savoir

$$e = 6w\omega AbH_1^2 H_0 \sin 2\omega t.$$

5. D'ailleurs, compte tenu de l'hypothèse quant à l'équivalence de l'action du champ magnétique alternatif et celle de ses composantes longitudinales, on peut modéler le système étudié. Le modèle a été réalisé en laboratoire à l'aide d'un dispositif constitué par deux solénoïdes (fig. 5), ayant le même nombre de spires, mais bobinées en sens contraires conformément aux composantes longitudinales h_{1l}, h_{2l} du champ.

Les solénoïdes ayant un noyau magnétique (lamme de Mumétal) ont été alimentés en courant alternatif et l'ensemble a été placé à l'intérieur d'une bobine connectée à un oscillographe. L'équilibre du système, en absence du champ extérieur constant, une fois réalisé, on observe à l'oscil-

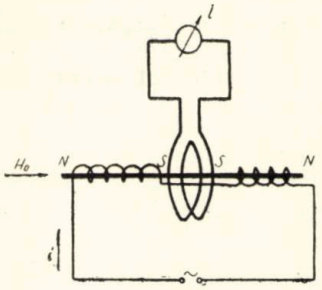


Fig. 5

a) Sonde Förster *b) Modèle équivalent à l'effet Procopiu*

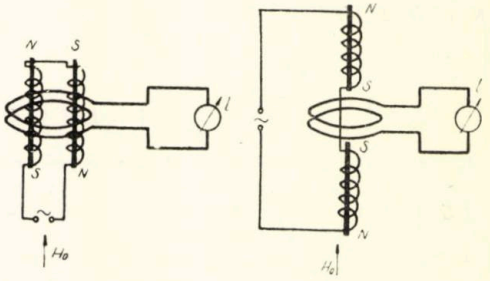


Fig. 6

lographe, lorsqu'on applique le champ H_0, une f.é.m. de fréquence double, tout comme lors de l'„effet Procopiu". On a alimenté le circuit d'excitation et en courant redressé, en obtenant des résultats analogues.

Le schéma du modèle equivalent de l'„effet Procopiu" suggère le fait que ce phénomène est le même que celui qui se produit dans la sonde magnétique à saturation, du type Förster. En effet, dans cette sonde, le dispositif des circuits est indiqué dans la fig. 6a; on peut passer de ce schéma à celle représentée dans la fig. 6b en déplaçant l'un des solenoïdes d'une telle manière qu'il soit placé en prolongement de l'autre; dans ce cas la bobine collectrice est commune aux deux solenoïdes.

On a pu modéler l'effet Procopiu toutefois avec un dispositif qui ne nécessite pas l'utilisation d'un amplificateur. Les bobines d'excitation ont été dimensionées d'une façon convenable d'une telle manière qu'aux bornes de la bobine coaxiale on a obtenu une f.é.m. de 0,3 V, le noyau étant une lamme de Mumétal ayant les dimensions $0{,}3 \times 2 \times 60$ mm.

Conclusions

1. On décrit le mécanisme de l'apparition d'une induction magnétique longitudinale pulsatoire, qui permet à générer une f.é.m. de fréquence double, dans une bobine coaxiale à un fil ferromagnétique, parcouru par un courant alternatif, en présence d'un champ magnétique constant, en confirmant de cette façon l'existence de l'„effet Procopiu".

2. On réussit à réaliser un modèle du phénomène à l'aide du quel on peut établir une connexion étroite avec le principe de fonctionnement de la sonde magnétique à saturation, utilisée à la mesure des champs magnétiques de faible intensité.

3. Le modèle créé s'avère avantageux pour prouver l'utilité de l'application du théorème de Leblanc.

4. L'existence des composantes longitudinales, pulsatoires, de l'induction magnétique, justifie les explications fournies en [4], [5] quant à la modification des domaines élémentaires.

Reçue le 20 III 1968

Institut Polytechnique de Jassy,
Chaire d'Electrotechnique

BIBLIOGRAPHIE

1. Procopiu Şt., *L'influence des actions mécaniques et du courant alternatif sur les discontinuités d'aimantation.* Ann. Sci. de l'Univ. de Jassy, 1927, **XV**, *1—2*, pp. 59–64.
2 Stierstadt K., *Der magnetische Barkhausen-Effekt. Springer Tracts in Modern Physics.* Vol. **40**, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-N.Y., 1966, p. 59.
3. Procopiu Şt., *L'influence d'un champ alternatif circulaire sur les discontinués d'aimantation du fer. Un nouvel effet.* J. de Phys., 1930, **1**, p. 306.
4. Procopiu Şt., Vasiliu Gh., *Les discontinuités d'aimantation en champ alternatif.* C. r. Ac. Sci., Paris, 1937, **204**, p. 673.
5. — *La torsion d'un fil de fer ou de nickel facilite les discontinuités d'aimantation en courant alternatif.* C. r. Ac. Sci., Paris, 1937, **204**, p. 971.
6. Procopiu Şt., *Les discontinuités d'aimantation produits par la variation du magnétisme circulaire d'une substance feromagnétique.* Ann. Sci. Univ. de Jassy, 1937, **XXIII**, *2*, p. 168.
7. Procopiu Şt., *Efect Barkhausen circular la fire de fier prin care trece un curent alternativ.* St. şi cerc. şt., Acad. R.P.R., filiala Iaşi, 1951, **II**, *3—4*, p. 143.
8. Procopiu Şt., Viscrian I., *Intensităţile de magnetizare la fire de fier electrolitice şi oţel în cimp alternativ longitudinal şi circular. Efectul Barkhausen circular.* St. şi cerc. şt., Acad. R.P.R., filiala Iaşi, Fiz. şi şt. tehn, 1963, **XIV**, *1*, p. 13.
9. Sorohan M. *Efect Barkhausen circular.* An. şt. Univ. „Al. I. Cuza", 1962, s. I, **VIII**, *1*, p. 253—260.
10. — *L'anisotropie des fils ferromagnétique faiblement torsionnés.* Ann. şt. Univ. „Al. I. Cuza", 1962, s. I, **VIII**, *2*, pp. 487—492.
11. Vasiliu Gh., *Contribuţii la studiul magnetizării firelor subţiri.* St. şi cerc. şt., Acad. R.P.R., filiala Iaşi, Fiz. şi şt. tehn., 1960, **XI**, *1*, p. 119.
12. Wiese H., Schmidt H., Lucke O., Frölich Fr., *Geomagnetische Instrumente und Messmethoden.* Bd. 2, D. V. W., Berlin, 1960, S. 224—225.

REZULTATE NOI ÎN LEGĂTURĂ CU „EFECTUL PROCOPIU"

(Rezumat)

Se demonstrează cu ajutorul unei teoreme din Electrotehnică, existenţa unei inducţii magnetice pulsatorii, dirijată în lungul conductorului feromagnetic situat într-un cîmp magnetic constant şi parcurs de un curent alternativ sinusoidal.

Se stabileşte cu această ocazie şi expresia analitică (I) a t. e. m. ce ia naştere, în condiţiile arătate mai înainte, într-o bobină coaxială cu conductorul.

Totodată se arată posibilitatea reproducerii fenomenului prin model, fapt ce prezintă numeroase avantaje pentru studiul laturii aplicative şi permite stabilirea unei legături principiale cu fenomenele ce au loc în sondele magnetice cu saturaţie.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

C. Z. 621.3.016.24

ASUPRA TEOREMEI TRANSFERULUI PUTERII ACTIVE MAXIME

DE

HUGO ROSMAN

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 28—30 septembrie 1967

1. Determinarea condiţiilor în care un dipol (sau un multipol) liniar activ este capabil să furnizeze unui receptor liniar pasiv, reductibil la un dipol (sau un multipol), puterea (activă—în cazul regimului permanent periodic) maximă este posibilă dacă se recurge la *teorema transferului puterii* (active) *maxime*.

Stabilită iniţial pentru cazul cel mai simplu, cînd un dipol liniar activ alimentează, în curent continuu, printr-o reţea liniară pasivă, de rezistenţă neglijabilă, un dipol receptor liniar pasiv (de ex. [1]), aplicată apoi la cazul similar în regim permanent periodic sinusoidal (de ex. [2, p. 126]), această teoremă a suferit ulterior diferite extensiuni. Anume, au fost stabilite succesiv teoreme ale transferului puterii active maxime atunci cînd : a) între dipolul generator şi cel receptor se intercalează un element pasiv (cuadripol) de transfer (de ex. [2, p. 138]), b) un multipol activ alimentează printr-o reţea pasivă de impedanţă neglijabilă, un multipol pasiv [3], c) un multipol activ alimentează printr-un element de transfer (multipol) un multipol receptor pasiv [3]. În toate aceste cazuri se admite că structura elementelor de transfer este invariabilă, determinîndu-se parametrii receptorului care realizează regimul de transfer al puterii active maxime, valorile efective ale *tensiunilor* la porţile multipolului generator (activ) fiind menţinute constante.

2. Scopul acestei Note este de a stabili o teoremă de transfer a puterii active maxime, de la un dipol liniar activ, printr-un cuadripol diport liniar, pasiv şi reciproc, la un dipol liniar pasiv, în cazul cînd structura cuadripolului este invariabilă iar valoarea efectivă a *curentului* la poarta dipolului generator este menţinută constantă, regimul fiind permanent sinusoidal.

Astfel de regimuri prezintă un vădit interes practic şi au fost studiate în diverse cazuri particulare. Astfel C. Ş o r a [4] atrage atenţia asupra faptului că puterea maximă transferată printr-un cuadripol nereciproc, echivalent unui generator Hall, calculată de F. K u h r t şi W. H a r t e l [5], corespunde cazului în care curentul la poarta de intrare a generatorului este menţinut constant.

3. Se consideră un cuadripol diport liniar, pasiv şi reciproc (CDLPR), în regim permanent sinusoidal, avînd ecuaţiile (fig. 1):

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

cu

$$\det |\underline{A}_{st}| = 1, \ (s, \ t = 1, \ 2). \tag{2}$$

Dacă CDLPR, considerat de structură invariabilă, este alimentat cu o tensiune de valoare efectivă constantă (fig.1 a), puterea activă transferată receptorului devine maximă atunci cînd parametrii receptorului sînt [2, p. 138]:

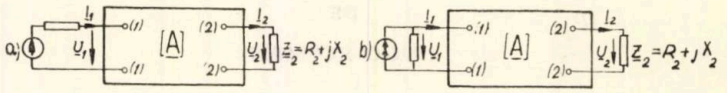


Fig. 1

$$R_{2P(U_1)}^{2\max} = \frac{\mathcal{R}e\,(A_{11}^{*}A_{12}^{*})}{A_{12}^{2}}, \qquad X_{2P(U_1)}^{2\max} = \frac{\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{11}\,\underline{A}_{12}^{*})}{A_{12}^{2}} \tag{3}$$

sau

$$\underline{Z}_{2P(U_1)}^{2\max} = R_{2P(U_1)}^{2\max} + jX_{2P(U_1)}^{2\max} = \frac{\underline{A}_{12}^{*}}{\underline{A}_{11}^{*}} = \underline{Z}_{e2sc}^{*}, \tag{4}$$

expresia puterii active maxime fiind:

$$P_{2\max}^{(U_1)} = \frac{U_1^2}{4\,\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{11}\,\underline{A}_{12}^{*})}. \tag{5}$$

Randamentul cu care se transferă receptorului puterea activă maximă este dat, în acest caz, de [6]:

$$\eta_{P_{2\max}^{(U_1)}} = \frac{1}{2\,\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{11}\,\underline{A}_{22}^{*} + \underline{A}_{12}\,\underline{A}_{21}^{*})} \leqslant 0{,}5. \tag{6}$$

Pentru a putea determina condiţiile în care acelaşi CDLPR, alimentat cu un curent de valoare efectivă constantă (fig. 1 b), transferă receptorului o putere activă maximă, se urmăreşte exprimarea puterii P_2 ca o funcţie de parametrii R_2, X_2 ai receptorului şi de valoarea efectivă I_1, a curentului la poarta de intrare. Anume, se are în vedere că:

$$P_2 = R_2 I_2^2, \tag{7}$$

iar din ecuaţiile (1) rezultă

$$\underline{I}_2 = \frac{I_1}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_2 + \underline{A}_{22}}, \tag{8}$$

încît

$$P_2^{(I_1)} = P_2(R_2, X_2; I_1) =$$

$$= \frac{R_2 I_1^2}{A_{21}^2 (R_2^2 + X_2^2) + 2\mathcal{R}e(\underline{A}_{21}\underline{A}_{22}^*) R_2 - 2\mathcal{I}m(\underline{A}_{21}\underline{A}_{22}^*) X_2 + A_{22}^2}. \tag{9}$$

Zererurile sistemului $dP_2^{(I_1)}/dR_2 = 0$, $dP_2^{(I_1)}/dX_2 = 0$ sînt:

$$R_{2P_{2\max}^{(I_1)}} = \frac{\mathcal{R}e(\underline{A}_{21}\underline{A}_{22}^*)}{A_{21}^2}, \quad X_{2P_{2\max}^{(I_1)}} = \frac{\mathcal{I}m(\underline{A}_{21}\underline{A}_{22}^*)}{A_{21}^2} \tag{10}$$

şi corespund unui maxim al funcţiei (9) căci

$$\begin{cases} \left[\dfrac{\partial^2 P_2^{(I_1)}}{\partial R_2^2} \cdot \dfrac{\partial^2 P_2^{(I_1)}}{\partial X_2^2} - \left(\dfrac{\partial^2 P_2^{(I_1)}}{\partial R_2 \partial X_2}\right)^2\right]_{\substack{R_2 = R_{2P_{2\max}^{(I_1)}}, \\ X_2 = X_{2P_{2\max}^{(I_1)}}}} = \dfrac{A_{21}^8 I_1^4}{64[\mathcal{R}e(\underline{A}_{21}\underline{A}_{22}^*)]^6} > 0, \\ \left[\dfrac{\partial^2 P_2^{(I_1)}}{\partial R_2^2}\right]_{\substack{R_2 = R_{2P_{2\max}^{(I_1)}}, \\ X_2 = X_{2P_{2\max}^{(I_1)}}}} = -\dfrac{A_{21}^4}{8[\mathcal{R}e(\underline{A}_{21}\underline{A}_{22}^*)]^3} < 0, \end{cases} \tag{11}$$

deoarece în cazul oricărui CDLPR $\mathcal{R}e(\underline{A}_{21}\underline{A}_{22}^*) = P_{20}/U_1'^2 > 0$, ($U_1'$ — tensiunea la poarta *1*, *1'* cînd cuadripolul este alimentat în sens invers).

Substituind în (9) parametrii R_2, X_2 ai receptorului cu expresiile (10) se obţine valoarea maximă a puterii active transferată de cuadripol receptorului în acest caz, anume:

$$P_{2\max}^{(I_1)} = \frac{I_1^2}{4\mathcal{R}e(\underline{A}_{21}\underline{A}_{22}^*)}. \tag{12}$$

4. Este uşor de constatat că parametrii receptorului care asigură transferul puterii active maxime printr-un CDLPR alimentat cu un curent de valoarea efectivă constantă, daţi de relaţiile (10), pot fi exprimaţi sub forma echivalentă:

$$\underline{Z}_{2P_{2\max}^{(I_1)}} = R_{2P_{2\max}^{(I_1)}} + jX_{2P_{2\max}^{(I_1)}} = \frac{\underline{A}_{22}^*}{\underline{A}_{21}^*} = \underline{Z}_{e20}^*. \tag{13}$$

Confruntînd expresiile (4) şi (13) rezultă că

$$\underline{Z}_{2P_{2\max}^{(U_1)}} \neq \underline{Z}_{2P_{2\max}^{(I_1)}}. \tag{14}$$

5. Pentru a calcula randamentul sub care un CDLPR alimentat cu un curent de valoare efectivă constantă, transferă receptorului puterea activă maximă, se face uz de relaţia

$$\frac{1}{\eta_{12}} =$$

$$= \frac{\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{11}\underline{A}^{*}_{21})\,(R_2^2 + X_2^2) - \mathcal{I}m\,(\underline{A}_{11}\underline{A}^{*}_{22} + \underline{A}^{*}_{12}\underline{A}_{21})\,X_2 + \mathcal{R}e\,(\underline{A}_{12}\underline{A}^{*}_{22})}{R_2} + \tag{15}$$

$$+ \mathcal{R}e\,(\underline{A}_{11}\underline{A}^{*}_{22} + \underline{A}_{12}\underline{A}^{*}_{21}),$$

stabilită în [7].

Substituind în (15) rezistenţa R_2 şi reactanţa X_2 cu expresiile (10) se obţine

$$\eta_{P^{(I_1)}_{2\max}} = \frac{1}{2\,\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{11}\underline{A}^{*}_{22} + A_{12}\underline{A}^{*}_{21})}\,. \tag{16}$$

Comparînd acum relaţiile (5) şi (16) se constată că

$$\eta_{P^{(U_1)}_{2\max}} = \eta_{P^{(I_1)}_{2\max}} = \frac{1}{2\,\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{11}\underline{A}^{*}_{22} + \underline{A}_{12}\underline{A}^{*}_{21})} \leqslant 0{,}5. \tag{17}$$

Prin urmare, *randamentul transmisiei puterii active maxime printr-un CDLPR alimentat în regim permanent sinusoidal, fie sub o tensiune de valoare efectivă constantă, fie cu un curent de valoare efectivă constantă este acelaşi, neputînd depăşi valoarea de 50 %.*

6. Cunoscînd parametrii receptorului corespunzători regimului de transfer al puterii active cu randament maxim, anume [3]

$$\begin{cases} R_{2\eta_{\max}} = \dfrac{\sqrt{[\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{11}\underline{A}^{*}_{22} + \underline{A}_{12}\underline{A}^{*}_{21})]^2 - 1}}{2\,\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{11}\underline{A}^{*}_{21})}, \\ X_{2\eta_{\max}} = \dfrac{\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{11}\underline{A}^{*}_{22} + \underline{A}_{12}\underline{A}^{*}_{21})}{2\,\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{11}\underline{A}^{*}_{21})}, \end{cases} \tag{18}$$

unde s-a ţinut seama de identitatea [9]

$$[\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{11}\underline{A}^{*}_{22} + \underline{A}_{12}\underline{A}^{*}_{21})]^2 + [\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{11}\underline{A}^{*}_{22} + \underline{A}^{*}_{12}\underline{A}_{21})]^2 -$$
$$- 4\,\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{11}\underline{A}^{*}_{21})\,\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{12}\underline{A}^{*}_{22}) = 1, \tag{19}$$

valabilă pentru orice CDLPR, este posibil să se determine puterea activă $P^{(I_1)}_{2\eta_{\max}}$ transferată receptorului de către un CDLPR alimentat cu un curent de valoare efectivă constantă. În acest scop se substituie expresiile (18) în relaţia (9), obţinînd :

$$P^{(I_1)}_{2\eta_{\max}} = \frac{I_1^2}{2\,\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{21}\underline{A}^{*}_{22})} \times$$
$$\times \frac{\sqrt{[\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{11}\underline{A}^{*}_{22} + \underline{A}_{12}\underline{A}^{*}_{21})]^2 - 1}}{\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{11}\underline{A}^{*}_{22} + \underline{A}_{12}\underline{A}^{*}_{21}) + \sqrt{[\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{11}\underline{A}^{*}_{22} + \underline{A}_{12}\underline{A}^{*}_{21})]^2 - 1}}\,. \tag{20}$$

Calculînd raportul $p_{12}^{(I_1)} = P_{2\eta_{max}}^{(I_1)} / P_{2max}^{(I_1)}$, ţinînd seama în acest scop de expresiile (12) şi (20), rezultă:

$$(21) \quad p_{12}^{(I_1)} = 2 \frac{\sqrt{[\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}^{*} + \underline{A}_{12}\underline{A}_{21}^{*})]^2 - 1}}{\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}^{*} + \underline{A}_{12}\underline{A}_{21}^{*}) + \sqrt{[\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}^{*} + \underline{A}_{12}\underline{A}_{21}^{*})]^2 - 1}}.$$

Raportul $p_{12}^{(U_1)} = P_{2\eta_{max}}^{(U_1)} / P_{2max}^{(U_1)}$ fiind dat de [9]:

$$(22) \quad p_{12}^{(U_1)} = 2 \frac{\sqrt{[\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}^{*} + \underline{A}_{12}\underline{A}_{21}^{*})]^2 - 1}}{\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}^{*} + \underline{A}_{12}\underline{A}_{21}^{*}) + \sqrt{[\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}^{*} + \underline{A}_{12}\underline{A}_{21}^{*})]^2 - 1}},$$

rezultă în definitiv

$$(23) \quad p_{12}^{(U_1)} = p_{12}^{(I_1)}.$$

7. Particularizînd pentru cazul regimului staţionar rezultatele obţinute în paragrafele precedente, se obţine pentru puterea maximă transferată receptorului de către un CDLPR, alimentat cu un curent constant, expresia:

$$(24) \quad P_{2max}^{(I_1)} = \frac{I_1^2}{4 A_{21} A_{22}},$$

rezistenţa receptorului fiind în acest caz

$$(25) \quad R_{2P_{2max}^{(I_1)}} = \frac{A_{22}}{A_{21}}.$$

Este util de observat că aceste expresii sînt valabile şi pentru cuadripolii diporţi, liniari, pasivi, *antireciproci*, deci în particular şi pentru un generator Hall, care poate fi asimilat unui astfel de cuadripol. Ţinînd seama că, în acest caz [10]:

$$(26) \quad A_{21} = -\frac{1}{k_0 B}, \quad A_{22} = -\frac{R_{20}}{k_0 B},$$

unde: R_{20} — rezistenţa la gol la bornele secundare, în cazul efectului Hall secundar, $k_0 = U_H / I_1 B$, cu U_H — tensiunea Hall în cazul efectului Hall primar, B — inducţia magnetică, rezultă:

$$(27) \quad P_{2max} = \frac{k_0^2 B^2}{4 R_{20}} I_1^2,$$

$$(28) \quad R_{2P_{2max}^{(I_1)}} = R_{20}.$$

Se regăseşte pe această cale expresia puterii maxime transferate receptorului de un generator Hall, stabilită de Kuhrt şi Hartel (*op. cit.*).i Aşadar observaţia din [10] cu privire la caracterul eronat al rezultatului obţinut de autorii citaţi este incorectă.

8. Rezultatele obţinute pot fi extinse şi la cazul, mai general, al transferului puterii active maxime printr-un multipol liniar, pasiv şi reciproc, valorile efective ale curenţilor la porţile receptoare ale multipolului fiind menţinute constante.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de electrotehnică

BIBLIOGRAFIE

1. Răduleţ R., *Bazele teoretice ale electrotehnicii.* Vol. **II**, Lit. Învăţ., Buc., 1954.
2. — *Bazele teoretice ale electrotehnicii.* Vol. **III**, Lit. Învăţ. Buc., 1955.
3. Mocanu C. I., *Contribuţii la studiul transferului puterii electrice între reţele interconectate.* St. şi cerc. de energ., 1959, **IX**, *1*, pp. 85—104.
4. Şora C., *Despre condiţiile de putere maximă şi randament maxim la generatorul Hall.* Bul. şt. şi tehn., Inst. polit. Timişoara, 1964, **9 (23)**, *1*, pp. 208—214.
5. Kuhrt F., Hartel W., *Der Hallgenerator als Vierpol.* AfE, 1957, **43**, *1*, S. 1—5.
6. Rosman H., Braier A., *Randamentul transmisiei energiei electrice prin cuadripoli* (II). Rev. Univ. „Al. I. Cuza" şi a Inst. polit. Iaşi, 1954, **I**, *1—2*, pp. 141—144.
7. — *Randamentul transmisiei energiei electrice prin cuadripoli* (I). St. şi cerc. şt., Acad. R. P. R., filiala Iaşi, 1952, **III**, *1—4*, pp. 57—70.
8. — *Randamentul transmisiei energiei electrice prin cuadripoli* (IV). Bul. Inst. polit. Iaşi, 1955, **I (V)**, *1—2*, pp. 159—172.
9. Rosman H., Braier A., Saal C., *Rezonanţa în sistemele de tip cuadripol* (I). Bul. Inst. polit. Iaşi, 1964, **X (XIV)**, *3—4*, pp. 233—242.
10. Rosman H., Braier A., *Asupra regimului energetic al generatorului Hall.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1960, **VI (X)**, *1—2*, pp. 235—250.

SUR LE THÉORÈME DU TRANSFERT DE LA PUISSANCE ACTIVE MAXIMUM

(Résumé)

On établit les conditions dans lesquelles un quadripôle linéaire, passif et réciproque (QLDPR), alimenté en régime permanent sinusoïdal par un courant de valeur efficace constante, transfère à un récepteur passif la puissance active maximum. À cet égard on aboutit à la conclusion que les paramètres du récepteur doivent être donnés par (10), la valeur de la puissance active maximum fournie au récepteur étant déterminée par (12).

Si l'on compare les paramètres du récepteur qui assurent la réalisation, en régime permanent sinusoïdal, du transfert de la puissance active maximum lorsqu'on alimente un QDLPR soit sous une tension de valeur efficace constante, soit par un courant de valeur efficace constante, on constate que ces deux régimes ne peuvent être réalisés simultanément. En même temps la valeur du rendement de la transmission de la puissance active maximum, dans les deux régimes ci-dessus, est la même étant donnée par (17) et ne pouvant dépasser 50%.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

C. D. 538.551.23

CIRCUIT FERRORÉSONNANT MULTISTABLE

PAR

GH. SAVIN, SAVEL MITREA, ILIE POPESCU, EMIL SIMION et NORBERT ZITRON

Communication présentée dans la session scientifique de l'Institut Polytechnique de Timişoara, 25-27 Mai 1967

1. Généralités

Les circuits non-linéaires résonnants peuvent être obtenus soit á l'aide de bobines non-linéaires associées à des condensateurs linéaires, soit à l'aide de bobines linéaires et de condensateurs non-linéaires, soit enfin à l'aide de bobines non-linéaires et de condensateurs non-linéaires.

On obtient un ou deux états de résonance, selon que la caractéristique tension-courant de la bobine coupe en un point ou deux la caractéristique du condensateur.

Même si la bobine et le condensateur sont simultanément non-linéaires, le nombre d'intersections des caractéristiques ne peut être supérieur à deux (fig. 1).

Si l'on obtient, dans le circuit, un seul état de résonance, deux régimes stables de fonctionnement sont possibles; si l'on réalise deux états de résonance on peut obtenir trois régimes stables de fonctionnement (fig. 2 a et 2 b).

Un circuit ferrorésonnant tristable a été décrit par nous [1] et étudié ensuite lorsque tous les paramètres du circuit varient [2]. Ce circuit est constitué par une bobine non-linéaire

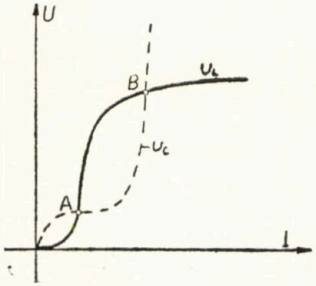
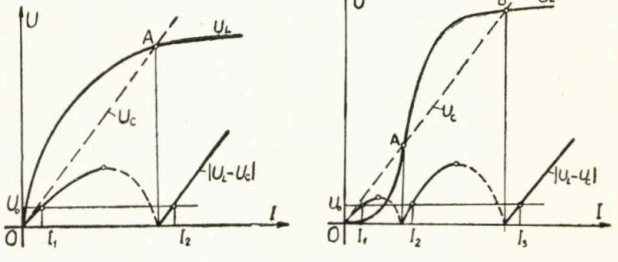


Fig. 1. — Caractéristique tension-courant d'un condensateur non-linéaire (ligne interrompue) et d'une bobine non-linéaire commandée (ligne pleine).



a *b*

Fig. 2. — Réalisation de deux, respectivement trois états stables de fonctionnement.

commandée (réalisée par un groupe de deux bobines montées en amplificateur magnétique), dont la caracteristique $U=f(I)$, en forme de „marches d'escalier", peut être coupée en deux points par la caractéristique $U=I/\omega C$ d'un condensateur linéaire connecté en série ou en parallèle avec la bobine non-linéaire (fig. 1).

La correspondance entre le nombre des intersections de la caractéristique de la bobine avec la caractéristique du condensateur et le nombre des régimes stables de fonctionnement est évidente: pour n intersections, $n+1$ régimes stables de fonctionnement y sont possibles.

2. Déscription du circuit ferrorésonnant multistable

On peut obtenir n ou bien $n+1$ regimes stables de fonctionnement à l'aide d'un circuit multiferrorésonnant réalisé par la connexion en série (ou en parallèle) d'un condensateur linéaire et d'un ensemble de bobines non-linéaires commandées.

L'ensemble des bobines non-linéaires commandées est réalisé par la connexion en série des enroulements de travail, aussi bien que de ceux de commande des $n/2$ bobines non-lineaires commandées.

Compte tenu du fait que la caractéristique de l'ensemble des bobines commandées $U=f(I)$ est en forme „d'escalier", une intersection multiple de la caractéristique linéaire du condensateur est possible. La largeur des „marches" de la caractéristique peut être fixée par le nombre des spires de chaque circuit de commande, tandis que leur hauteur (pour une certaine fréquence) par le nombre des spires de chaque circuit de travail.

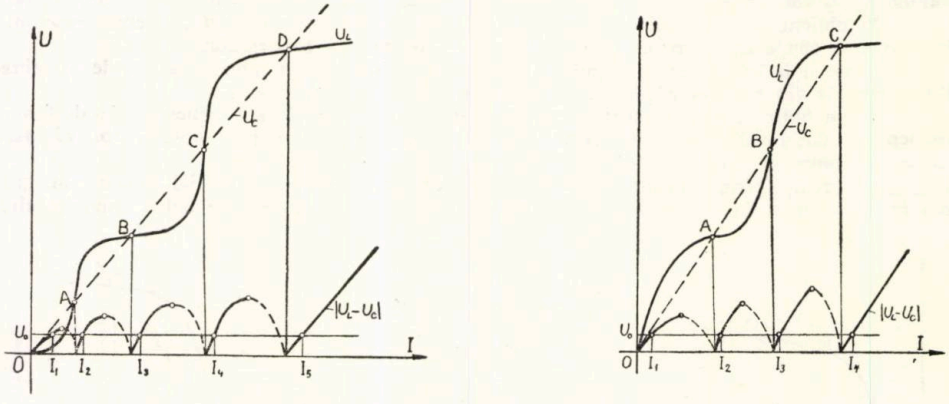
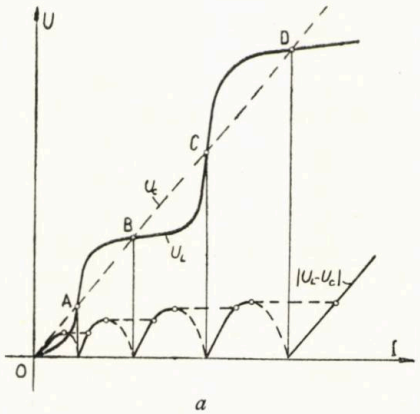


Fig. 3. — Circuits où l'on obtient $n+1$ ou n états stables de fonctionnement.

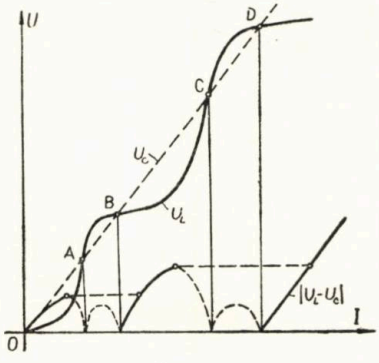
On peut obtenir $n+1$ états stables si l'on commande en courant continu l'ensemble des $n/2$ bobines et n états stables si la première bobine de l'ensemble n'est pas commandée (fig. 3 a et 3 b).

En modifiant la pente de la droite $U=1/\omega C$ on peut obtenir: a) des sauts par tous les états stables possibles (fig. 4 a, b) des sauts par certaints états stables (fig. 4 b et c) en particulier, un saut du premier jusqu'au dernier

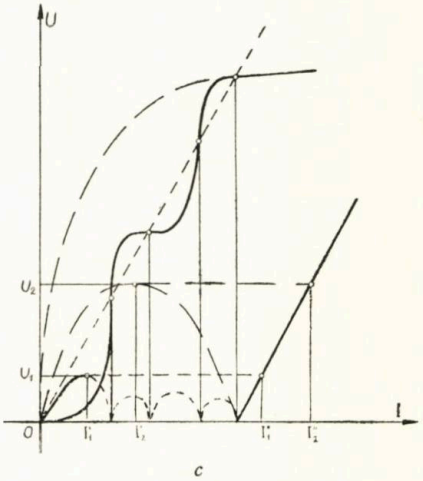
état stable (fig. 4 c). C'est par ce dernier type de saut qu'on peut obtenir des augmentations brusques de courant ayant des valeurs trés élevées, les tensions étant nettement inférieures à celles relatives au cas où l'on emploie une seule bobine non-linéaire. Dans la fig. 4 c on a indiqué par une ligne



a



b



c

Fig. 4.— Caractéristique $U = f(I)$ du circuit multiferrorésonnant série avec mise en évidence des sauts de courant.

interrompue le saut obtenu à l'aide d'une seule bobine non-linéaire non-commandée.

En ce qui concerne les augmentations par saut de la tension pour le circuit multiferrorésonnant parallèle, on peut faire des observations analogues à celles de l'augmentation par saut du courant lorsqu'on a un circuit série.

Dans une étude systématique effectuée par nous en vue d'une application pratique du phénomène décrit ci-dessus, nons avons pris en considération l'apparition des états stables multiples par la variation de tous les paramètres du circuit multiferrorésonnant.

3. Résultats expérimentaux

Les essais expérimentaux ont été effectués avec trois bobines non-linéaires commandées, à noyaux, d'ultraperm Z, connectées en série (fig. 5).

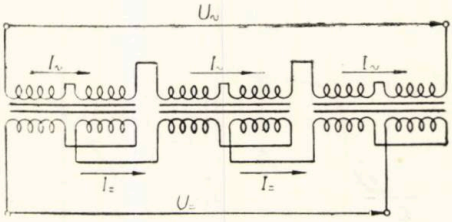


Fig. 5. — Connexion en série de trois bobines non-linéaires commandées.

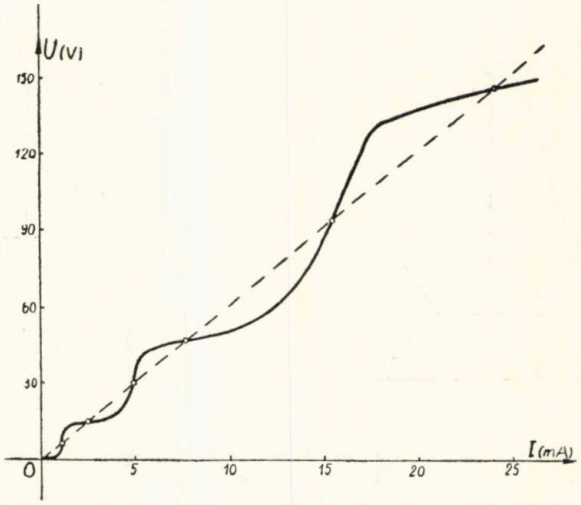


Fig. 6. — Caractéristique $U = f(I)$ l'ensemble des bobines de la fig. 5.

La caractéristique tension-courant de l'ensemble est représentée dans la fig. 6. Nous avons représenté par une ligne interrompue la caractéristique linéaire du condensateur $U = I/\omega C$ qui coupe la caractéristique de l'ensemble de bobines non-linéaires commandées, en six points.

Par connexion en série d'un condensateur de 0,52 μF avec cet ensemble de bobines, on obtient par voie expérimentale la caractéristique donnée dans la fig. 7, où l'on a mis en évidence les six sauts du courant lors de l'augmentation de la tension, et de six autres sauts lors de sa diminution.

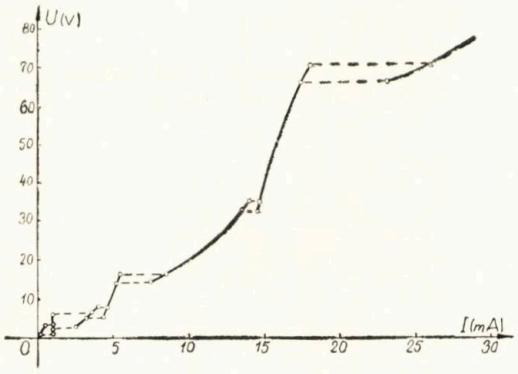


Fig. 7. — Caractéristique expérimentale $U = f(I)$ du circuit multiferrorésonnant série.

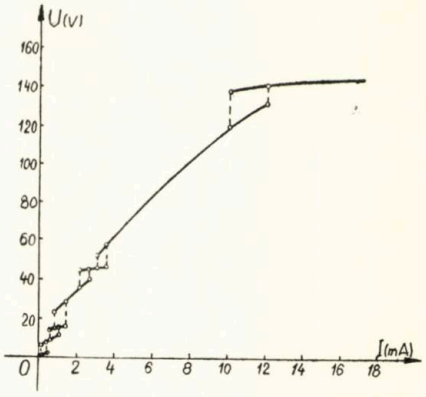


Fig. 8. — Caractéristique expérimentale $U = f(I)$ du circuit multiferrorésonnant parallèle.

Dans le cas de la connexion en parallèle du même condensateur avec l'ensemble, on obtient la caractéristique de la fig. 8.

Les essais expérimentaux ont été effectués a une tension sinusoïdale pour le circuit parallèle, à une fréquence de 50 Hz.

4. Conclusions

Les domaines d'utilisation du circuit multistable décrit ci-dessus sont bien plus nombreux que ceux des circuits bistables 'et tristables connus. Bien entendu, pour réaliser des performances élevées, il est nécessaire d'utiliser des matériaux magnétiques à faibles pertes et de réaliser la filtration des harmoniques qui apparaissent lors de ce processus.

Reçue le 28 II 1967

Institut Polytehnique de Jassy,
Chaire d'Électrotechnique

BIBLIOGRAPHIE

1. Savin G., Simion E., Popescu I., *Circuits à double ferrorésonnance utilisant des bobines à noyaux ferromagnétiques magnetisés en courant continu.* RGÉ, 1965, **74**, *5*, pp. 393—396.
2. Simion E., *Circuit série double ferrorésonnant avec des paramètres variables.* Revue E, 1967, 5, *6*, pp. 209—213.

CIRCUIT FEROREZONANT MULTISTABIL

(Rezumat)

Autorii arată cum se poate realiza un circuit ferorezonant multistabil, cu n stări stabile de funcţionare, cu ajutorul unui circuit serie sau paralel constituit dintr-un condensator liniar şi un ansamblu de $n/2$ bobine neliniare comandate.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Caracteristica tensiune-curent a unui condensator neliniar (linie întreruptă) şi a unei bobine neliniare comandate (linie plină).

Fig. 2. — Realizarea a două, respectiv trei stări stabile de funcţionare.

Fig. 3. — Circuitele cu care se obţin $n + 1$ sau n stări stabile de funcţionare.

Fig. 4. — Caracteristica $U = f(I)$ a circuitului ferorezonant serie cu punerea în evidenţă a salturilor de curent.

Fig. 5. — Montajul în serie a trei bobine neliniare comandate.

Fig. 6. — Caracteristica $U = f(I)$ a ansamblului de bobine din fig. 5.

Fig. 7. — Caracteristica experimentală $U = f(I)$ a circuitului multiferorezonant serie.

Fig. 8. — Caracteristica experimentală $U = f(I)$ a circuitului multiferorezonant paralel

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

C. D. 538.551.23

CIRCUIT PARALLÈLE, DOUBLE FERRORÉSONNANT, AVEC DES PARAMÈTRES VARIABLES

PAR

EMIL SIMION

Communication présentée dans la session scientifique de l'Institut Polytechnique de Jassy, 28—30 Septembre 1967

1. Généralités

Dans la fig. 1 on a tracé la famille des caractéristiques $U=f(I)$, pour une bobine à noyau ferromagnétique (BNF) magnétisée supplémentaire avec des valeurs différentes du courant continu I_{cc}.

La caractéristique $U=I/C\omega$ d'un condensateur linéaire étant une droite qui passe par l'origine, il en résulte que sa symétrique par rapport à l'axe OI peut intersecter la caractéristique de la BNF en deux points (A et B, fig. 1). Ces points correspondent aux regimes ferrorésonnants.

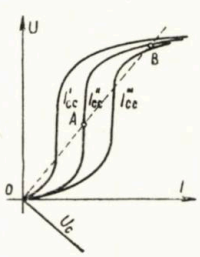


Fig. 1

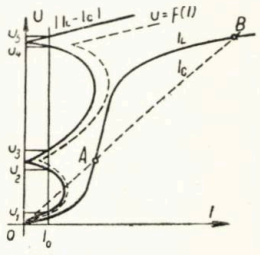


Fig. 2

Si l'on considère le circuit idéal (sans pertes), constitué par une BNF magnétisée supplémentaire, en parallèle avec un condensateur linéaire, on obtient par voie graphique la caractéristique résultante $U=f(I)$ du circuit, représentée dans la fig. 2.

De cette figure il résulte que dans un pareil circuit on obtient la même valeur du courant I_0, pour cinq valeurs distinctes de la tension appliquée aux bornes. Les valeurs U_1, U_3 et U_5 correspondent aux régimes stables tandis que U_2 et U_4 aux régimes instables.

Dans un autre travail [2] on a montré que pour mettre en évidence d'une manière plus nette les deux régimes de ferrorésonnance il est convenable à utiliser deux bobines identiques en montage d'amplificateur magnétique. Le schéma de principe utilisé pour les expérimentations est représenté dans la fig. 3 a.

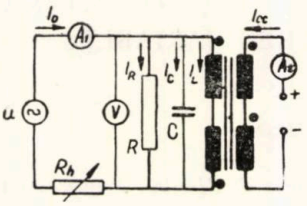


Fig. 3 a

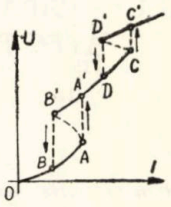


Fig. 3 b

En augmentant le courant, on peut constater l'existence de deux sauts (les sauts AA' et CC') de la tension aux bornes du circuit, tandis qu'à sa diminution la tension diminue elle aussi deux fois par saut (les sauts DD' et BB'), comme l'indiquent les flèches de la fig. 3 b.

Dans ce qui suit on montre que dans un pareil circuit on peut obtenir deux augmentations et deux diminutions par saut de la tension aux bornes, par la variation de n'importe quel paramètre du circuit, en gardant une valeur constante I_0 du courant.

2. Approximation des caractéristiques de la bobine commandée. Équation du circuit

La caractéristique de la BNF, commandée en courant continnu, peut être considérée linéaire par portions. Une approximation par trois segments de droite (fig. 4) s'avère satisfaisante.

Les droites OM et NT ont la même pente $1/a$, et la droite MN a la pente $1/b$.

Les équations des trois segments de droite sont:

$$(1) \qquad [OM]: I = aU\,; \quad [MN]: I = bU + I'\,; \quad [NT]: I = aI - I''.$$

Compte tenu des caractéristiques expérimentales de la fig. 1 on peut considérer $I' = k_1 I_{cc}$. On connait aussi le fait que la tension de saturation d'une BNF est proportionelle à la fréquence à savoir $I' = k_2 \omega$.

Après ces considérations les équations (1) deviennent:

$$(1') \qquad I = aU; \quad I = k_1 I_{cc} + bU; \quad I = -k_2\omega + aU.$$

En appliquant la méthode de calcul symbolique pour l'onde fondamentale, le courant du circuit représenté dans la fig. 3a est donné par:

$$(2) \qquad \underline{I}_0 = \underline{I}_R + \underline{I}_C + \underline{I}_L = g\underline{U} + j\omega C\underline{U} - j\underline{I}_L,$$

ou, du diagramme phasoriel il en résulte:

$$(3) \qquad |UC\omega - I_L| = \sqrt{I_0^2 - g^2U^2}.$$

Le premier membre de l'équation (3) représente la ligne brisée $OM'A'N'B'T'$ (fig. 4) tandis que le deuxième membre représente l'arc d'ellipse tracé par une ligne interrompue, avec les demi-axes I_0 et I_0/g.

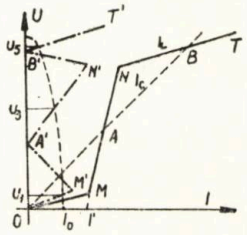


Fig. 4

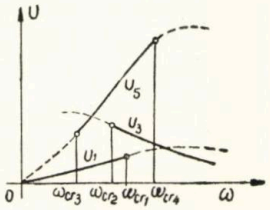


Fig. 5

Les points correspondants aux régimes de fonctionnement stable du circuit se trouveront à l'intersection de l'arc d'ellipse avec les segments de droite OM', $A'N'$ et $B'T'$. La fig. 4 met en évidence l'existence de trois régimes stables du circuit, qui correspondent aux valeurs U_1, U_3 et U_5.

Si dans (3) on remplace I_L par (1'), on élève au carré et l'on ordonne, on obtient:

$$(4) \qquad U^2[g^2 + (a - C\omega)^2] - I_0^2 = 0,$$

$$(5) \qquad U^2[g^2 + (C\omega - b)^2] - 2k_1 I_{cc}(C\omega - b)\, U - I_0^2 + k_1^2 I_{cc}^2 = 0,$$

$$(6) \qquad U^2[g^2 + (a - C\omega)^2] - 2k_2\omega\,(a - C\omega)\, U - I_0^2 + k_2^2\,\omega^2 = 0.$$

Les équations (4) ... (6) déterminent d'une manière implicite les valeurs U_1, U_3 et U_5 respectivement.

Pour certains paramètres du circuit ces valeurs peuvent exister simultanément (le circuit est tristable), deux par deux (circuit bistable), ou bien on peut avoir une seule valeur (circuit unistable).

Nous appellerons „critique" la valeur du paramètre pour laquelle cesse d'exister un des états stables du circuit.

3. Courbes de résonance pour l'onde fondamentale

3. 1. Variation de la fréquence

Dans la fig. 5 on a représenté la variation de la tension U aux bornes du circuit de la figure 3 a, en fonction de la pulsation de celle-ci, selon les équation (4) ... (6.)

L'équation (4) admet des solutions seulement pour des valeurs réduites de la pulsation. Pour des pulsation qui dépassent une certaine valeurs, la pente de la caractéristique du condensateur (fig. 4) diminue et l'abscisse du point M' diminue d'une telle manière que l'arc d'ellipse n'intersecte plus le segment de droite OM'. Nous noterons par $\omega_{cr\,1}$ la valeur de la pulsation pour laquelle le régime de fonctionnement sur la portion OM' disparait.

On peut raisonner d'une manière analogue quant aux domaines d'existence des caractéristiques $U = f(\omega)$ données par les équations (5) et respectivement (6).

Dans la fig. 5, les domaines d'existence de ces caractéristiques sont racées en ligne accentuée.

Il est facile d'observer que le circuit présente un état tristable seuletment si $\omega_{cr\,1} > \omega_{cr\,2}$.

3. 2. Variation de la capacité

Étant donné que dans les équations (4) et (5) intervient partout le produit $C\omega$, il en résulte que la variation de la tension en fonction de la capacité est similaire à celle de la tension en fonction de la pulsation, représentée dans la fig. 5.

L'équation (6) détermine une variation plus lente de la tension en fonction de la capacité, par rapport à celle de la tension en fonction de la pulsation, d'une telle manière que la caractéristique $U_5 = f(C)$ a une pente plus petite.

En principe, la caractéristique $U = f(C)$ est similaire à la caractérisitque $U = f(\omega)$ sauf la remarque faite ci-dessus.

3. 3. Variation du courant de prémagnétisation

En analysant les équations (4) ... (6) on constate que la seule variable qui dépend du courant continuu de prémagnétisation c'est la valeur U_3, donnée par (5).

Les caractéristiques $U = f(I_{cc})$ sont représentées dans la fig. 6. Les domaines d'existence de celles-ci sont déterminées comme ci-dessus et sont tracés en ligne accentuée. Le circuit présente un état tristable si $I_{cc\ cr\,1} < I_{cc\ cr\,2}$.

On remarque que même si le courant continuu de prémagnétisation est absent, le circuit possède un état bistable (les valeurs I_3 et I_5). La

cause en est due au fait que la BNF noncommandée forme avec le condensateur un circuit simple ferrorésonnant qui, c'est une chose bien connue, admet deux régimes stables de fonctionnement.

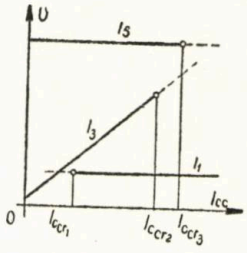


Fig. 6

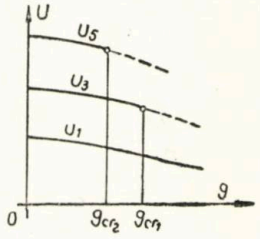


Fig. 7

3. 4. Variation de la résistance

La résistance est contenue dans la conductance équivalente, en parallèle avec le circuit L-C. Les caractéristiques $U = f(g)$ sont représentées dans la fig. 7. Le domaine tristable existe seulement pour des valeurs réduites de la conductance.

4. Résultats expérimentaux

Les expérimentations ont été effectuées à l'aide du schéma de la fig. 3 a, en employant un amplificateur magnétique à noyau toroidal de Ultraperm-Z de dimensions $50 \times 40 \times 5 \times 0{,}05$ mm, l'enroulement de travail ayant $2 \times 1\,850$ spires et l'enroulement de commande 1 000 spires. La résistance propre de la bobine est négligeable.

4. 1. Variation de la fréquence

Dans la fig. 8 sont tracées les courbes de résonance $U = f(f)$ si $C = 1{,}5\,\mu\text{F}$, $I_{cc} = 20\,\text{mA}$, avec I_0 comme paramètre.

Pour $I_0 = 5$ mA le circuit présente une zone tristable entre 80 et 110 Hz. Pour $I_0 = 6{,}5$ mA le circuit présente deux domaines distincts bistables. Dans chacun de ces domaines le circuit peut fonctionner comme relais sans contacts. Le premier domaine (55 ... 70 Hz) caractérise un domaine direct (la tension croît par saut à l'augmentation de la fréquence) tandis que le deuxième domaine (85 ... 120 Hz) caractérise un relais inverse (à une augmentation de la fréquence la tension diminue par saut). Les sauts de la tension sont indiqués sur la figure par des flèches.

4. 2. Variation de la capacité

Dans la fig. 9 sont tracées les courbes $U = f(C)$, pour $I_{cc} = 20\,\text{mA}$, $f = 50\,\text{Hz}$, I_0 étant paramètre.

Pour $I_0 = 6{,}5\,\text{mA}$ le circuit présente une zone tristable entre 4 et 7,5 μF et pour $I_0 = 7{,}5\,\text{mA}$ on a les domaines bistables.

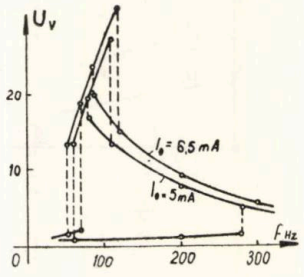


Fig. 8

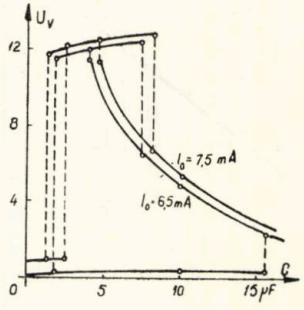


Fig. 9

4. 3. Variation du courant continuu de prémagnétisation

Dans la fig. 10 sont tracées les courbes $U = f(I_{cc})$, pour $C = 5\,\mu\text{F}$, $f = 50\,\text{Hz}$, ayant I_0 comme paramètre.

Pour $I_0 = 6\,\text{mA}$ le circuit présente une zone tristable entre 17 et 29 mA, et pour $I_0 = 10\,\text{mA}$ les deux domaines bistables se trouvent situés entre 0 et 20 mA, respectivement 27 et 55 mA.

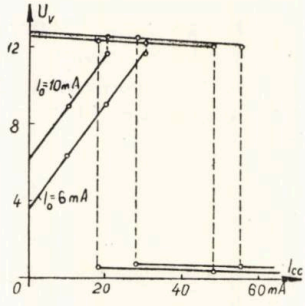


Fig. 10

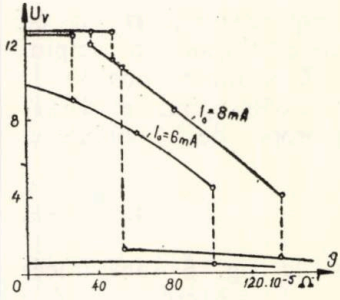


Fig. 11

4. 4. Variation de la conductance équivalente

Dans la fig. 11 sont tracées les courbes $U = f(g)$, pour $I_{cc} = 20\,\text{mA}$, $f = 50\,\text{Hz}$, $C = 5\mu\text{F}$, avec I_0 comme paramètre. Pour $I_0 = 6\,\text{mA}$ le circuit est tristable entre 0 et $28.10^{-5}\Omega^{-1}$, et pour $I_0 = 8\,\text{mA}$ les deux domaines bistables se trouvent situés entre 36.10^{-5}... $48.10^{-5}\Omega^{-1}$, respectivement 52.10^{-5}... $132.10^{-5}\Omega^{-1}$.

5. Conclusions

Prenant comme point de départ une approximation simple de la caractéristique volt-ampère des BNF prémagnétisées, on obtient tout d'abord par voie théorique et l'on vérifie ensuite par voie expérimentale, certaines propriétés importantes du circuit double ferrorésonnant parallèle.

Ces propriétés (le fonctionnement en tant que double relais sans contacts et l'apparition d'états tristables) peuvent conduire à de nombreuses applications pratiques.

Institut Polytechnique de Jassy,
Chaire d'Electrotechnique

BIBLIOGRAPHIE

1. Simion E., *Circuit série, double ferrorésonnant, avec des paramètres variables.* Revue E, 1967, V, *6*, pp. 209–213.
2. Savin G., Simion E., Popescu I., *Circuits à double ferrorésonnance utilisant des bobines à noyaux ferromagnétiques magnétisées en courant continu.* RGÉ, 1965, **74**, *5*, pp. 393–396.
3. Santesmases G., *Circuit déclancheur ferrorésonnant parallèle à réaction.* L'Onde Électrique, 1955, **XXXV**, pp. 165–171.

CIRCUIT PARALEL, DUBLU FEROREZONANT, CU PARAMETRII VARIABILI

(Rezumat)

Plecînd de la o aproximare simplă a caracteristicii volt-amper la bobinele cu miez feromagnetic magnetizate suplimentar în curent continuu, se obţin mai întîi pe cale teoretică apoi se verifică experimental unele proprietăţi importante ale circuitului dublu ferorezonant paralel.

Aceste proprietăţi (funcţionarea ca dublu releu fără contacte şi obţinerea de stări tristabile) pot conduce la numeroase aplicaţii practice.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

C. D. 681.142

ADDITIONNEUR SÉRIE À TRANSISTORS

PAR

AL. VALACHI et C. HARJA

Communication présentée dans la session scientifique de l'Institut Polytehnique de Jassy, 28 — 30 Septembre 1967

Dans la littérature de spécialité (par ex. [1]) on indique nombre de méthodes permettant à realiser la retenue, en addition parallèle.

Dans cette Note nous proposons une nouvelle méthode capable à réaliser la retenue en addition série; cette méthode présente l'avantage de permettre à obtenir une vitesse accrue par rapport à celle réalisée à l'aide d'autres schémas.

Tableau 1

A_{i-1}	B_{i-1}	S_{i-1}	Q_i
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Soient: A_i, B_i — les chiffres de rang i, Q_i — la retenue de rang $i-1$, S_i — la somme de rang i, „+" — la somme logique (fonction „ou"), „·" — la multiplication logique (fonction „et"), „$\oplus$" désigne l'opération „ou exclusif" (la somme mod 2).

Si l'on écrit Q_i comme fonction de A_{i-1}, B_{i-1}, S_{i-1} et q_{si} (impulsion de synchronisation) nous obtenons:

$$(1) \qquad Q_i = (\overline{A_{i-1}} \cdot B_{i-1} \cdot \overline{S_{i-1}} + A_{i-1} \cdot \overline{B_{i-1}} \cdot \overline{S_{i-1}} + A_{i-1} \cdot B_{i-1} \cdot \overline{S_{i-1}} + A_{i-1} \cdot B_{i-1} \cdot S_{i-1}) \cdot q_{si}.$$

Après quelques transformations il en résulte:

$$(2) \qquad Q_i = (\overline{S_{i-1}} + A_{i-1} \cdot B_{i-1}) \cdot (A_{i-1} + B_{i-1}) \cdot q_{si}$$

Nous avons réalisé cette fonction logique au moyen du module „ou-non". La formule (2) devient alors:

$$Q_i = \overline{\overline{S_{i-1}} + \overline{\overline{A_{i-1}} + \overline{B_{i-1}}} + \overline{\overline{A_{i-1}} + \overline{B_{i-1}} + q_{si}}}. \tag{3}$$

Si l'on tient compte que [2]:

$$S_i = [A_i \oplus B_i \oplus Q_i] \cdot q_{si} \tag{4}$$

et en introduisant la notation $S_{i1} = A_i \oplus B_i$ on obtient:

$$\overline{S_{i1}} = \overline{\overline{A_i} + B_i} + \overline{A_i + \overline{B_i}}, \tag{4'}$$

$$S_i = \overline{\overline{\overline{S_{i1}} + \overline{Q_i}} + \overline{S_{i1} + Q_i} + q_{si}}. \tag{4''}$$

Le schéma de l'additionneur réalisé selon les relations (3), (4'') est représenté dans la fig. 1.

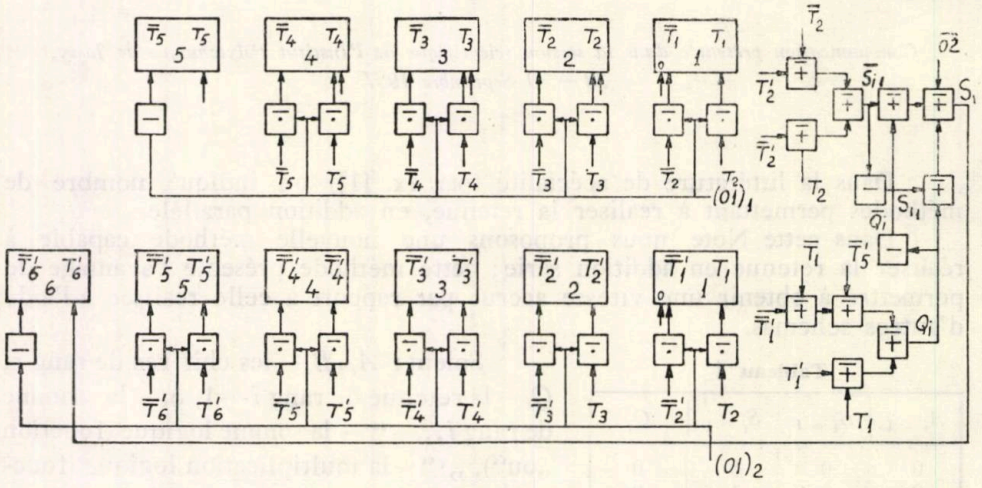


Fig. 1

Dans cette figure on a symbolisé par ⊡ le circuit „et-non" et par ⊞ le circuit „ou-non".

L'additionneur réalisé contient les registres à décalage (R_1), (R_2) et l'additeur combinationnel qui réalise les expressions logiques (3) et (4'').

Le schéma de commande, qui permet à réaliser les microopérations nécessaires (décalage, addition, remise à zéro des registres) n'est pas indiqué dans cette figure.

L'additionneur nécesite encore deux basculeurs (1), (1') pour mémoriser les chiffres A_{i-1}, B_{i-1} et un basculeur (6') pour S_{i-1}.

Les termes sont contenus dans les registres R_1 et R_2 en obtenant la somme dans R_2.

Aux barres de commande 01_1 et 01_2 on applique des impulsions de décalage, et à la barre $\overline{02}$ une impulsion d'addition.

Les impulsions appliquées à la barre $\overline{02}$ sont opposées par rapport aux impulsions de décalage.

Dans une même tacte on effectue simultanément l'addition et le décalage dans les registres R_1, R_2.

Nous allons examiner les retards dans le processus d'addition.

Soient : t_b — le temps de basculement d'un basculeur, t_p — le retard des circuits logiques, t_{d1} — la durée de l'impulsion positive, t_{d2} — la durée de l'impulsion negative, $T = t_{d1} + t_{d2}$ — la période du tacte, $f = 1/T$ — la fréquence du signal de rythme.

Pendant l'impulsion positive (t_{d1}) on effectue l'opération de décalage tandis que l'addition est effectuée pendant l'impulsion negative (t_{d2}).

Si l'on tient compte de cettes remarques il en résulte :

$$(5) \qquad t_{d1} \geqslant (t_p)_{\max} + (t_b)_{\max}, \qquad (6) \quad t_{d2} \geqslant (t_b)_{\max} + 5\,(t_p)_{\max},$$

$$(7) \quad T = t_{d1} + t_{d2} \geqslant 6\,(t_p)_{\max} + 2\,(t_b)_{\max}, \qquad (8) \quad f \leqslant \frac{1}{6\,(t_p)_{\max} + 2\,(t_p)_{\max}}.$$

Nous avons réalisé les circuits logiques nonsaturés en utilisant des transistors EFT-353. Le retard maximum est $(t_p)_{\max} = 0{,}2\,\mu s$ et le temps de basculement $(t_b)_{\max} = 1{,}5\,\mu s$. Donc $f \leqslant 240\,\text{kHz}$.

Conclusions

1. À l'aide du procédé indiqué ci-dessus on évite la mémorisation de la retenue Q_i, en la réalisant par voie logique.

2. On réussit à diminuer la durée d'addition et de décalage jusqu'à l'ordre de grandeur des temps de retard des circuits logiques et des temps de basculement.

3. Le schéma proposé permet la réalisation d'un additionneur à vitesse très grande.

Institut Polytechnique de Jassy,
Chaire d'Electrotechnique,
Laboratoire de Calculatrices Automatiques

BIBLIOGRAPHIE

1. Дашевский Л. Н., Погребинский С. Б., Шкабара Е. А., *Вычислительная машина „Киев"*. Техника, Киев, 1964, стр. 136 — 138.

2. Бруевич Н. Г., Доступов Б. Г., *Основы теории счетно-решающих устройств*. Сов. радио, М., 1964, стр. 554—558.

SUMATOR SERIE TRANZISTORIZAT

(Rezumat)

Se prezintă o nouă metodă de realizare a transferului în adunarea serie. Procesul de adunare şi deplasare se realizează într-un singur tact, astfel că frecvenţa de lucru este limitată numai de timpii de întîrziere introduşi de circuitele logice şi bistabile.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

D. C. 681.142; 621.3.07

ANALOG TO DIGITAL CONVERTER FOR CONTROL APPLICATIONS

BY

COSTIN GHIBU

Paper presented at the Scientific Session of the Polytechnic Institute of Jassy, September the 28–30 st, 1967

1. Introduction

In the control systems, when the controller is a digital device, it is necessary an analog to digital converter for the transducers.

There are two principal types of the analog to digital converters [1]... [4]:

a) ramp comparator converter,

b) converter with digital to analog converter feedback.

The first is uncomplicated, but its output is not continuously equal to its input due to the principle. This have not a storage function. The second, more complicated, is adequat for our pourpous. Its output can be continuous processed by a digital device.

2. Digital Converter

The subject of this paper is an analog to digital converter with feedback. The converter is continuously coupled to a digital system.

Whole converter was designed only by indigen semiconductors.

Caracteristics:

Number of bits	7,
Maximum speed	100 units/sec,
Sensitivity	1 μA/100 units,
Input impedance	3 kΩ.

These caracteristics correspond almost all the industrial processes and transducers.

The block diagram is shown in Fig. 1.

The analog signal X_i is amplified by d. c. amplifier A_1 and introduced in C comparator. The outputs of the comparator are e_1 and e_2.

The e_1 output is given by:

$$e_1 = q|X_i - X_e|, \tag{1}$$

where q is a constant.

The e_2 output is given by:

$$e_2 = a \ \text{sign}\{U_1 - U_2\}, \tag{2}$$

where a is a constant.

The signal e_2 switches the electronic switch K so that the pulses from G are added or substracted from the number stored in the reversibile counter (RC).

The sense of this operation is determined by the rate between X_i and X_e and tends to maintain this rate equal to unity.

The comparison is possibly only if X_i and X_e are of same nature. Because of this reason it is necessary to reconvert the digital X_e in an analog form, by the digital to analog converter DCA. The analog signal from DCA is amplified by the A_2 amplifier.

A great improvement in this device is aquired by the introduction of the signal e_1 that comands the G frequency.

Considering this system as a closed loop system, the signal e_1 changes the system from an integral with dead zone system to proportional plus integral with dead zone system. The new dead zone is smaller.

The stability and precision are improved. In this case the bandwidth of the A_2 amplifier may be very small.

In the further sections we shall make a short presentation of component parts.

a) *Direct Current Amplifiers*

A_1 and A_2 amplifiers are identical. Their characteristics are:

Transfer impedance	10 MΩ,
Input impedance	3 kΩ,
Drift	0.80 V (output),
Band	0...10 Hz,
Maximum output	10 V,
Output impedance	100 Ω.

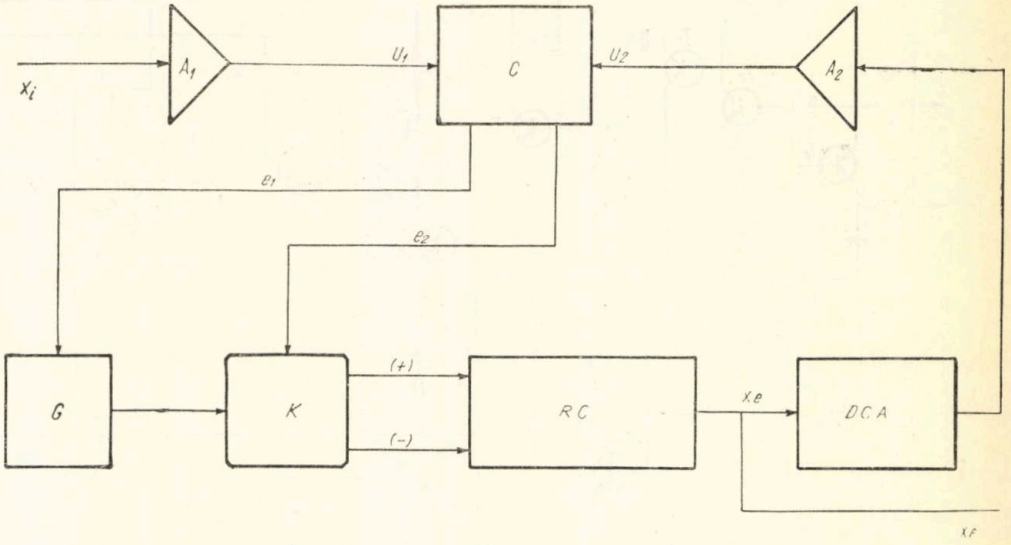
The electrical circuit is shown in Fig. 2. The amplifier is composed by two parts: a chopper amplifier [5] with $T_1 \ldots T_8$ transistors and a direct coupled amplifier with $T_9 \ldots T_{11}$ transistors.

The direct coupled amplifier $T_9 \ldots T_{11}$ increase the chopper amplifier output from 3 V to 10 V and reduces the output impedance from 10 kΩ to 100 Ω.

In laboratory experiments the maximum drift observed was 0.08 V (output).

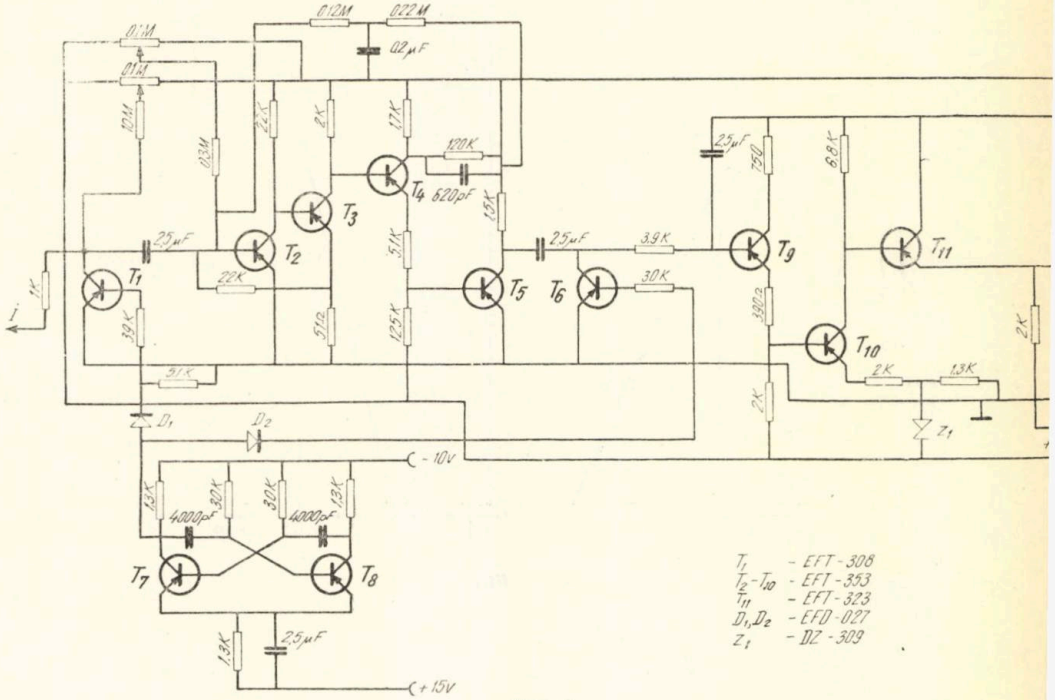
b) *Comparator and Oscillator and Switch*

The comparator is formed by a chopper differential amplifier. The transistor T_1 (Fig. 3), has no mass connection for d. c. thus the phase and the amplitude of modulated signal is determined only by the difference between U_1 and U_2.



x_i
A_1
U_1
C
U_2
A_2
e_1
e_2
G
K
(+)
(−)
RC
x.e
DCA
x.f

Fig. 1



0.12M
0.22M
0.2μF
0.1M
0.1M
10M
0.3M
2K
2K
1.7K
120K
620pF
1.5K
2.5μF
750
6.8K
2.5μF
2.5μF
3.9K
30K
22K
51Ω
1.25K
51K
39K
1K
i
T_1
T_2
T_3
T_4
T_5
T_6
T_7
T_8
T_9
T_{10}
T_{11}
390Ω
2K
1.3K
2K
2K
D_1
D_2
Z_1
−10V
1.3K
30K
30K
1.3K
4000pF
4000pF
1.3K
2.5μF
+15V
T_1 - EFT-308
T_2-T_{10} - EFT-353
T_{11} - EFT-323
D_1,D_2 - EFD-027
Z_1 - DZ-309

Fig. 2

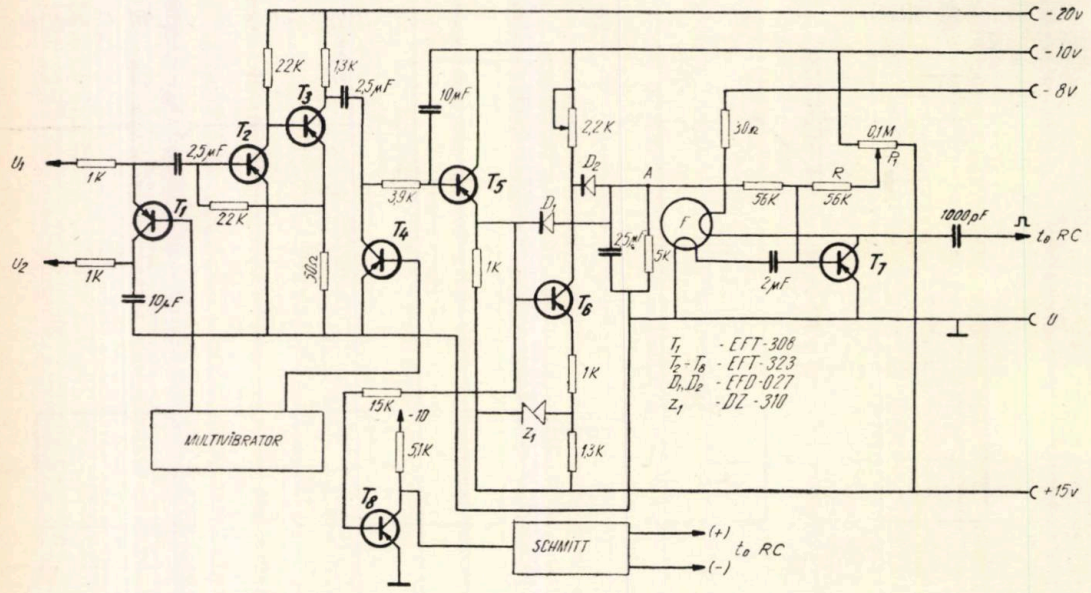

-20v
-10v
-8v
22K
1,3K
2,5μF
10μF
2,2K
30Ω
0,1M
P_1
U_1
1K
2,5μF
T_2
T_3
T_5
D_2
A
R
56K
56K
T_1
22K
3,9K
D_1
F
1000pF
t_0 RC
U_2
1K
50Ω
T_4
1K
25μF
5K
T_7
2μF
10μF
T_6
U
T_1 - EFT-308
T_2-T_8 - EFT-323
D_1,D_2 - EFD-027
Z_1 - DZ-310
1K
15K
-10
Z_1
MULTIVIBRATOR
5,1K
1,3K
+15v
T_8
SCHMITT
(+)
t_0 RC
(-)

Fig. 3

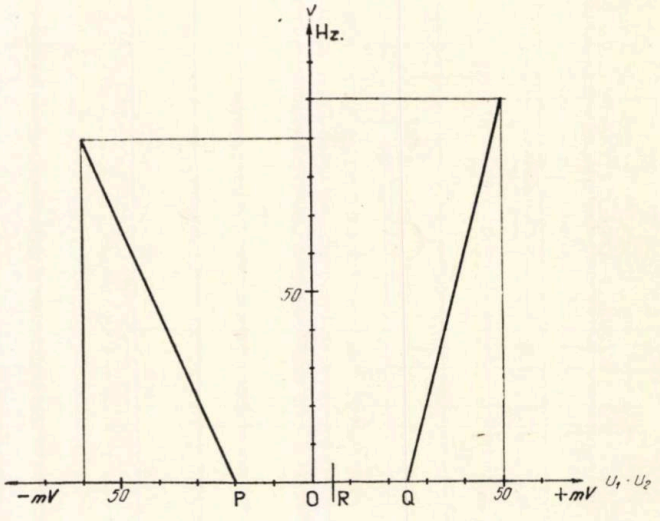

V
Hz.
50
-mV
50
P
O
R
Q
50
+mV
$U_1 \cdot U_2$

Fig. 4

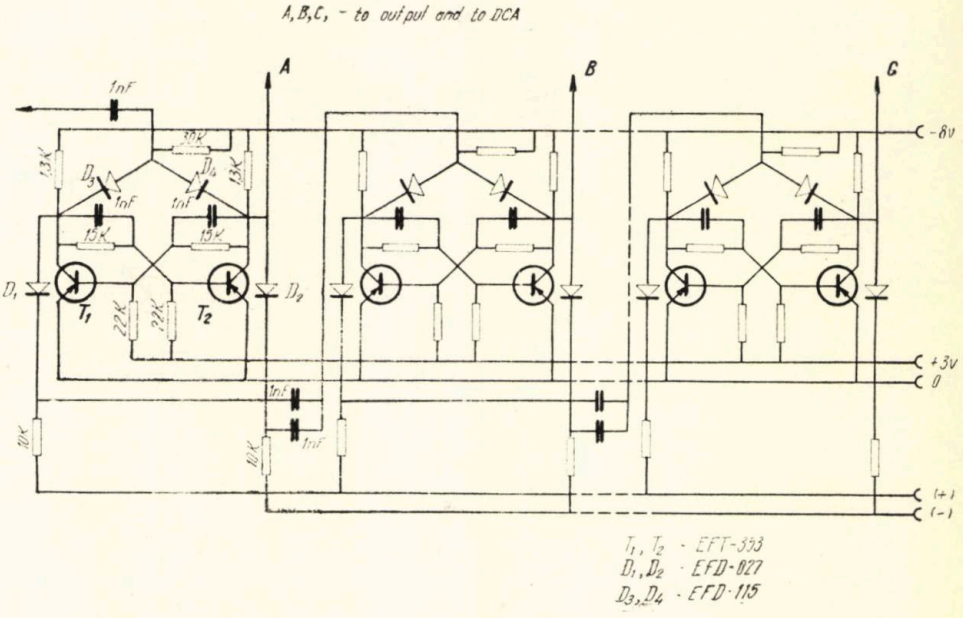

A, B, C, - to output and to DCA
A
B
C
1nF
30K
13K
D3
D4
1nF
1nF
15K
15K
D1
T1
T2
D2
22K
22K
-8V
+3V
0
1nF
1nF
10K
10K
(+)
(-)
T1, T2 - EFT-353
D1, D2 - EFD-027
D3, D4 - EFD-115

Fig. 5

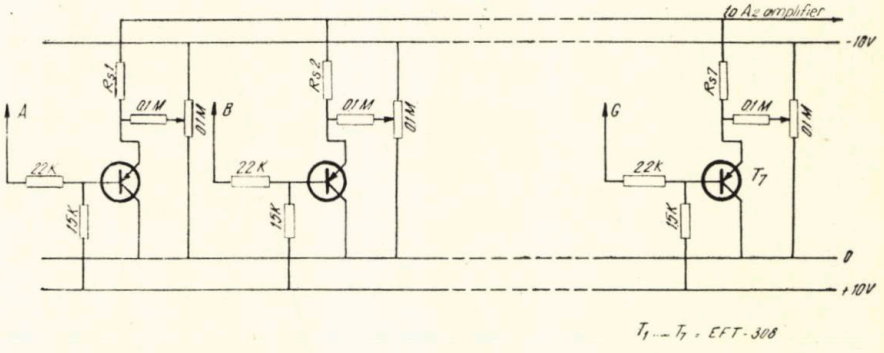

to A2 amplifier
-10V
Rs1
Rs2
Rs7
A
B
G
0.1M
0.1M
0.1M
0.1M
0.1M
0.1M
22K
22K
22K
15K
15K
15K
T7
0
+10V
T1 ... T7 - EFT-308

Fig. 6

From the amplifier, by the circuit T_5, T_6, D_1, D_2 in the A point is avaible a tension equal to absolute value of U_1, U_2 difference, conform to (1). This tension modulates the frequency of blocking oscillator G. The blocking oscillator is formed by the T_7 transistor and F ferrite. A suplimentar biasis on the T_7 base provides in caracteristic a small dead zone around the origin. The dead zone increase the system stability.

A Schmitt circuit preceded by the T_8 amplifier transistor forms the switch (Fig. 3). The switching point R is shown in Fig. 4.

c) *Reversibile Counter*

The electrical circuit of the three cells of the reversibile counter are shown in Fig. 5. The entire counter has 7 cells.

The count sense is determined by the polarization of (+) and (−) wire. Polarization of these wires are made up by the comparator and switch.

d) *Digital to Analog Converter*

As digital to analog converter is employed a transistor system switch. The transistors are in inverse connection. Three such cells of the converter are shown in Fig. 6. The $T_1 \ldots T_7$ transistor bases are comanded by the collector circuits of RC cells. When the RC cell is in zero state, the corresponding transistor of the digital to analog converter is saturated, its collector potential is near 15 mV, through r_s resistencens is no current. When the converter transistor is off the current pass through r_s resistences and totalize in the input resistence of A_2 amplifier. The size of $r_{s1} \ldots r_{s7}$ resistences is proportional to the powers of two.

Whole system are supplied by a 1 % stabilized redresor. The d. c. amplifiers are supplied by a 0.1 % stabilized tension.

3. Concluding Remarks

The system above described is a precise and stable system although the amplifier bandwidth is very narrow, because of the variyng frequency of the oscillator.

The system can be used separatly or togheter a digital control system. In our laboratory the device was used in an optimal control system.

The whole system, except some special circuits, can be built by UNILOG and UNIDIN ansambles.

Center for Technical Researches,
Academy of the Socialist Republic
of Romania,
Jassy

REFERENCES

1. Korn A. G., Korn T. M., *Electronic Analog and Hybrid Computers*. McGraw Hill, New York, 1964.
2. Barbour C. W., *Capacoder A|D Converter*. Inst. a. Control Systems, Aug, 1962.
3. *** *Tranzistoare in automatică şi telemecanica feroviară*. Tehnica Nouă, M.T.T.C., 1962.
4. Pelegrin M., *Machines à calculer electroniques*. Dunod, Paris, 1964.
5. Felea I., *Circuite cu tranzistoare în industrie*. Vol. I, Ed. Tehn., Buc., 1964.

CONVERTOR ANALOGIC DIGITAL PENTRU APLICAŢII IN REGLAJ AUTOMAT

(Rezumat)

Se prezintă un convertor analogic digital cu reacţie, proiectat şi construit pentru un sistem de optimizare.

Sistemul este conceput pentru o adaptare simplă la traductorii uzuali.

Printr-un sistem de modulare în frecvenţa oscilatorului s-a reuşit să se obţină o stabilitate şi precizie bună, deşi amplificatoarele de curent continuu au o bandă de frecvenţă foarte îngustă (10 Hz).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

C. D. 621.317.373

SUR UNE MÉTHODE DE MESURE DE L'ANGLE ENTRE DEUX TENSIONS ALTERNATIVES EN EMPLOYANT LES DIODES SEMICONDUCTRICES

PAR

V. PETRESCU et M. CREŢU

Communication présentée dans la session scientifique de l'Institut Polytechnique de Jassy, 28—30 Septembre 1967

1. La mesure précise de l'angle électrique entre deux tensions alternatives peut être effectuée à l'aide des phasemètres chiffriques, des vecteurmètres ou des compensateurs de courant alternatif. Moins précises mais cependant acceptables pour les mesures courantes sont les méthodes qui emploient des circuits à diodes semiconductrices, du type redresseurs sensibles à la phase.

La méthode la plus avantageuse parait être celle du circuit à trois diodes et batterie continue d'alimentation [1]... [3], stabilisée à l'aide des éléments semiconducteurs Zener.

2. Dans cette Note on montre que la stabilisation de la source continue ne résout pas complètement le problème concernant la précision de la méthode, particulièrement à cause de la forme réelle, trapézoïdale, du courant commandé et que surtout pour les mesures des angles petits il est convenable d'employer comme instrument indicateur un logomètre magnétoélectrique.

Dans ce but on propose le schéma indiqué dans la fig. 1 où : $D_1 \ldots D_4$ sont des diodes semiconductrices choisies d'une telle manière que leurs caractéristiques soient approchées ; R_3, R_3' sont des résistance égales, fixes, et r_3 une résistance semi-variable d'ajustage ; N_1, N_2 représentent les enroulements des deux cadres du logomètre magnétoélectrique ou les cadres de deux milliampermètres identiques ; u_1, u_2 sont les tensions alternatives dont l'angle de déphasage va être mesuré ; e represente la tension électromotrice continue de la batterie d'alimentation, ayant une résistance intérieure r.

En l'absence des tensions alternatives de commande les courants continus qui circulent par les enroulements du logomètre sont égaux. Cette égalité n'est pas influencée pratiquement par la nonlinéarité des résistances de conduction des diodes D_1 et D_2 car les résistances R_3 et R'_3 en série avec cettes diodes sont beaucoup plus grandes (approximativement 100 fois) que la résistance d'une diode en état de conduction.

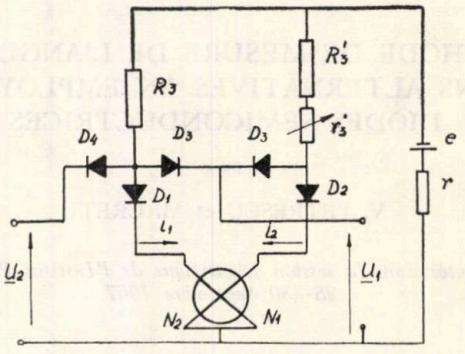


Fig. 1

En appliquant la tension alternative u_1, qui commande simultanément les diodes D_1 et D_2, les courants i_1 et i_2 continuéront à rester égaux, mais leurs valeurs diminuent à moitié car les diodes conduisent seulement dans les alternances positives de la tension de commande. Dans le cas idéal les courants i_1 et i_2 devraient avoir une forme rectangulaire dont la longueur soit égale à la moitié de la période de la tension de commande (fig. 2); compte tenu que la valeur de seuil pour le déblocage d'une diode ist atteinte en un temps fini, les courants ont la forme approximative de trapèzes isosceles ayant la base petite égale à la moitié de la période de la tension alternative (fig. 3).

Le rapport des valeurs moyennes des courants i_1 et i_2, de forme rectangulaire, sera égal au rapport des surfaces des rectangles ayant l'hauteur égale à h:

$$(1) \qquad K_I = \frac{i_{1\text{moyen}}}{i_{2\text{moy}}} = \frac{\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^{\varphi/\omega} i_1\,dt}{\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} i_2\,dt} = \frac{h\,(\pi-\varphi)}{\pi} = 1-\frac{\varphi}{\pi}.$$

La déviation de l'aiguille du logomètre magnétoélectrique étant fonction seulement des rapports des valeurs moyennes des courants circulant par le cadres, conformément à la relation (1) elle dépendra seulement de l'angle de déphasage entre les tensions alternatives de commande.

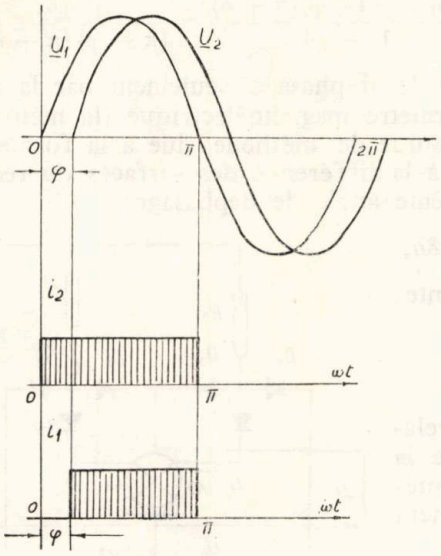


Fig. 2

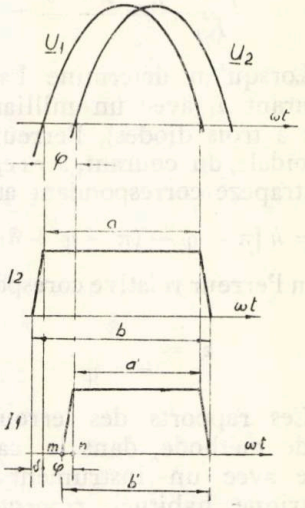


Fig. 3

Dans le cas réel (forme trapézoïdale des courants) les couples du logomètre seront proportionnels aussi aux valeurs moyennes, donc aux surfaces des trapèzes isosceles. On peut considérer que par le choix convenable des diodes D_1 et D_2 leur blocage et déblocage s'effectue dans les mêmes conditions. Le déblocage d'une diode (fig. 3) commence peu avant le point n correspondant au déphasage réel, et la commande s'effectue dans cettes conditions-ci approximativement selon la droite mk. Le point m, qui caractérise le commencement du déblocage, correspond à un potentiel nul de l'anode de la diode commandée.

Dans ce cas le rapport des valeurs moyennes des courants i_1 et i_2 est donné par :

$$K_I' = \frac{i_{1\text{moyen}}'}{i_{2\text{moyen}}'} = \frac{(a'+b')\,h/2}{(a+b)\,h/2} = 1 - \frac{\varphi}{\pi+\delta}. \tag{2}$$

La forme idéale, rectangulaire, des impulsions du courant qui circule par les cadres du logomètre, peut être obtenue pratiquement en commandant les diodes D_1 et D_2 par des tensions alternatives de forme rectangulaire.

Soient α et α' les déviations du logomètre dans le cas de la commande à l'aide des tensions rectangulaires, respectivement sinusoïdales. En consi-

dérant la mesure exacte lors de l'emploi des tensions de commande rectangulaires, l'erreur de méthode due à la forme trapezoïdale des courants, si l'on effectue la mesure à l'aide du logomètre magnétoélectrique, est donnée par:

$$(3) \quad \varepsilon = \frac{K_I - K'_I}{K_I} = \frac{\alpha - \alpha'}{\alpha} = \frac{1 - \varphi/\pi - 1 + \varphi/(\pi + \delta)}{1 - \varphi\delta} = \frac{-\varphi\delta}{(\pi - \varphi)(\pi + \delta)}.$$

Lorsqu'on détermine l'angle de déphasage seulement par la mesure du courant i_1 avec un milliampermètre magnétoélectrique (la méthode du circuit à trois diodes), l'erreur absolue de méthode due à la forme réelle, trapézoïdale, du courant, sera égale à la différence des surfaces du rectangle et du trapèze correspondant au même angle de dephasage:

$$|\Delta| = h[\pi - \varphi - (\pi - \varphi + \delta)] = \delta h,$$

ou bien l'erreur relative corespondante:

$$(4) \quad \varepsilon' = \frac{\delta}{\pi - \varphi}.$$

Les rapports des erreurs relatives de méthode, dans le cas de la mesure avec un instrument magnétoélectrique habituel, respectivement avec un logomètre, est:

$$(5) \quad \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = \frac{\pi + \delta}{\varphi}.$$

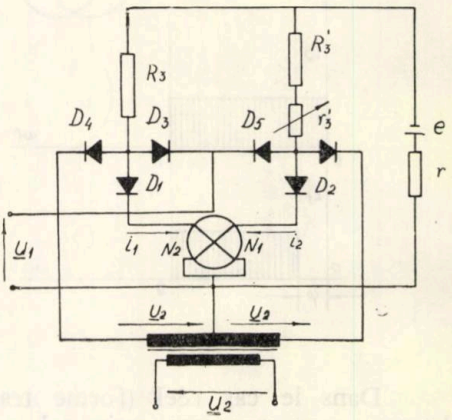


Fig. 4

On observe de cette relation que pour des valeurs élevées de l'angle de déphasage ($\varphi \approx \pi + \delta$) les erreurs relatives ont approximativement le même ordre de grandeur, et par conséquent la précision de ces deux méthodes est la même, tandis que pour des angles petits l'erreur de méthode due à la mesure à l'aide d'un milliampermètre est sensiblement plus importante, car $\pi + \delta \gg \varphi$. Donc l'emploi du logomètre est bien justifié lorsqu'on mesure des angles de déphasage de valeur réduite.

Compte tenu que pour la majorité des logomètres magnétoélectriques, la position de l'aiguille au milieu de l'échelle graduée correspond à un rapport des courants égal à l'unité et vu que $i_{1\text{moyen}} \leqslant i_{2\text{moyen}}$ (fig. 1), il en résulte que pour la mesure du déphasage on emploie seulement la moitié de l'échelle du logomètre. Cet inconvénient peut être éliminé par deux procédés, à savoir: a) si l'on ajuste d'une manière convenable la résistance R_3 d'une telle façon que le courant i_2, dont la valeur moyenne reste constante pendant la mesure, ait une valeur maximum, égale à la moitié de la valeur maximum de i_1 (fig. 1); la position médiane de l'aiguille indicatrice du logomètre correspondera à un déphasage de 90°; b) si l'on applique en dehors de

la tension u_1 une deuxième tension u'_2, dephasée à 180° par rapport a u_2 qui commande la diode D_1 (fig. 4). Le déphasage de 180° peut être réalisé à l'aide d'un transformateur à prise mediane ou par d'autres procédés.

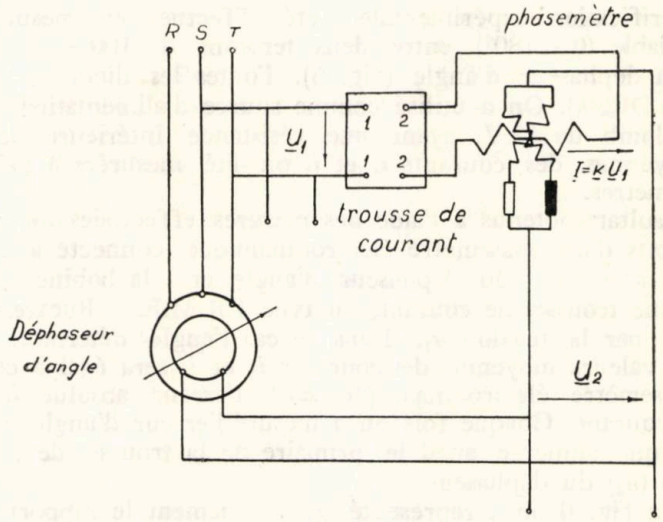


Fig. 5

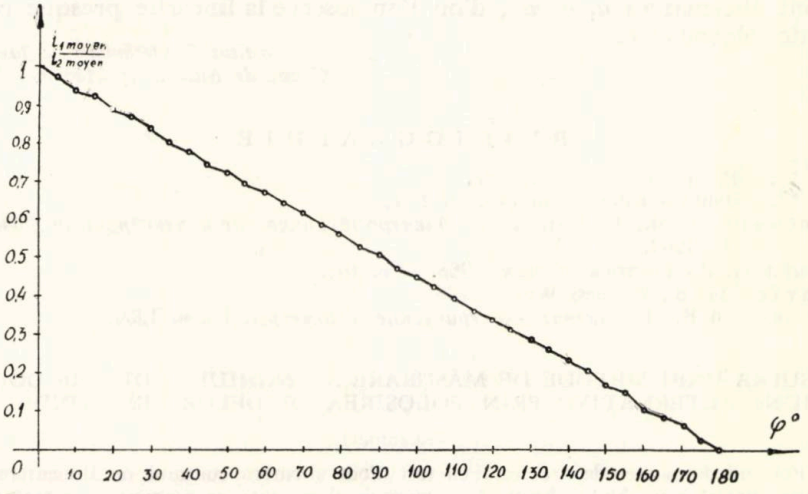


Fig. 6

L'erreur d'angle du transformateur de tension à prise médiane étant de l'ordre des minutes, elle peut être négligée par rapport à l'erreur globale minimum réalisable.

Dans les deux cas (fig. 1 et fig. 4) si l'instrument logométrique possède des limites infinies de mesure on obtient un phasemètre ayant la gamme de mesure 0... 180°; si le logomètre possède des limites finies, on obtient un instrument indicateur sensible à la quadrature des tensions alternatives.

La vérification expérimentale a été effectuée en mesurant un déphasage variable (0... 180°) entre deux tensions de 100 ± 20 V, obtenues à l'aide d'un déphaseur d'angle (fig. 5). Toutes les diodes employées ont été du type DR303. On a utilisé comme source d'alimentation un accumulateur de plomb de 12 V, ayant une résistance intérieure de 0,6 Ω. Les valeurs moyennes des courants i_1 et i_2 on été mesurées à l'aide de deux microampermètres.

Les résultats obtenus à l'aide des mesures effectuées ont été comparés aux indications d'un phasemètre électrodinamique, connecté à la bobine de tension à la sortie (u_2) du déphaseur d'angle et à la bobine de courant à la sortie d'une trousse de courant, du type I.R.M.E. — Bucarest, alimentée du primaire par la tension u_1. Dans ce cas l'angle déterminé à l'aide du rapport des valeurs moyennes des courants i_1 et i_2 sera égal à celui indiqué par le phasemètre électrodinamique sauf l'erreur absolue d'angle de la trousse de courant. Chaque fois on a mesuré l'erreur d'angle de la trousse de courant qui alimente aussi le primaire de la trousse de courant de la même sortie (u_2) du déphaseur.

Dans la fig. 6 on a représenté graphiquement le rapport des valeurs moyennes des courants i_1 et i_2, fonction de l'angle électrique entre les tensions alternatives u_1 et u_2, d'où l'on observe la linéarité presque parfaite de cette dépendance.

Institut Polytechnique de Jassy,
Chaire de Mesures et Machines électriques

BIBLIOGRAPHIE

1. * * * Радио, 1958, *12*, стр. 28.
2. * * * Электрические станции, 1962, *12*.
3. Висенчюк И. М., Котюк А. М., *Электромеханические и электронные фазометры*. Л., 1962.
4. Gould H. B., Electrical Review, 1963, *7*, p. 103.
5. Clayton G. B., Wireless World, 1966.
6. Сигорский В. П., *Магнитоэлектрические логометры*. Киев, 1956.

ASUPRA UNEI METODE DE MĂSURARE A UNGHIULUI DINTRE DOUĂ TENSIUNI ALTERNATIVE PRIN FOLOSIREA DIODELOR SEMICONDUCTOARE

(Rezumat)

Pornind de la metoda circuitului cu trei diode și baterie continuă de alimentare, pentru măsurarea directă a unghiului dintre două tensiuni alternative, se propune o schemă cu logometru magnetoelectric ca instrument indicator. Deși stabilizarea sursei continue de alimentare ar face la prima vedere inutilă folosirea logometrului, se arată că totuși în acest caz precizia măsurării crește. Se propun de asemenea două procedee pentru folosirea în întregime a scalei logometrului. În ambele cazuri dacă logometrul are limita de măsurare infinită se obține un fazmetru cu gama de măsurare 0... 180°, iar dacă limita de măsurare este finită se obține un indicator sensibil de cuadratură a tensiunilor alternative.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

C. Z. 621.317.77

DEFAZOR DE TENSIUNE UTILIZÎND UN CIRCUIT SERIE INDUCTIV CU REACTANŢE SEMICOMPENSATE

DE

D. BĂRBULESCU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 28 — 30 septembrie 1967

1. Introducere

Printre defazoarele de tensiune clasice de o largă răspîndire se bucură cele bazate pe o schemă în punte [1]. Unele dintre acestea sînt formate din trei braţe active (două rezistenţe constante şi egale şi a treia variabilă) şi unul reactiv (capacitate), altele sînt constituite din două braţe active (rezistenţe egale) şi două reactive (reactanţe egale). Primele se bucură de avantajul că modificarea fazei tensiunii la ieşire se realizează prin variaţia unui singur parametru (rezistenţă variabilă) dar tensiunea la ieşire reprezintă doar jumătate din tensiunea la intrare. Celelalte defazoare prezintă inconvenientul că modificarea fazei tensiunii la ieşire necesită variaţia simultană a doi parametri (două rezistenţe cuplate situate în braţe opuse), în schimb tensiunea la ieşire rămîne permanent egală cu cea de la intrare.

Într-o lucrare anterioară s-a arătat că un circuit serie capacitiv cu reactanţe semicompensate (în care reactanţele satisfac relaţia $X_L = X_C/2$) poate funcţiona ca defazor de tensiune [2]. Acesta posedă ambele avantaje de care se bucură — numai în parte — fiecare din tipurile de defazoare în punte şi anume: modulul tensiunii la ieşire rămîne permanent egal cu cel al tensiunii la intrare iar faza tensiunii la ieşire se modifică prin variaţia unui singur parametru.

În prezenta lucrare se arată că un circuit serie inductiv cu reactanţe semicompensate (în care reactanţele satisfac relaţia $X_L = 2X_C$) poate funcţiona ca defazor de tensiune. În acest caz rezistenţa interioară a bobinei de reactanţă, a cărei prezenţă nu poate fi eliminată, constituie o sursă de erori care afectează tensiunea la ieşire a defazorului (real). Se poate imagina un defazor de tensiune ideal, definit drept acela în a cărui structură intervine o bobină ideală (lipsită de rezistenţă) şi, prin urmare, a cărei tensiune la ieşire nu este afectată de erori. Se studiază condiţiile în care defazorul de tensiune real furnizează o tensiune la ieşire comparabilă cu cea a unui defazor ideal, în limitele erorilor admisibile.

2. Schema şi principiul de funcţionare

a) *Defazorul de tensiune ideal*

Din studiul proprietăţilor circuitelor cu reactanţe semicompensate rezultă că într-un circuit serie inductiv cu o bobină ideală (lipsită de rezistenţă, fig. 1) în care reactanţele satisfac relaţia:

$$X_L = 2X_C, \tag{1}$$

tensiunea la bornele rezistenţei şi capacităţii rămîne egală în modul cu tensiunea aplicată, independent de valoarea rezistenţei din circuit, în timp ce argumentul ei este funcţie de rezistenţa circuitului [3].

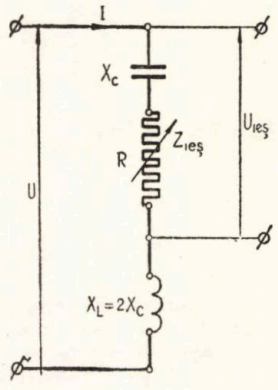


Fig. 1

În adevăr, într-un asemenea circuit tensiunea de la bornele rezistenţei şi capacităţii, reprezentînd tensiunea la ieşire a defazorului ($U_{ieş}$), se exprimă prin relaţia:

$$\underline{U}_{ieş} = \frac{\underline{Z}_{ieş}}{\underline{Z}} \underline{U}, \tag{2}$$

Impedanţa la ieşire $\underline{Z}_{ieş}$ se poate scrie sub forma:

$$\underline{Z}_{ieş} = R - jX_C = Z_{ieş} e^{-j\varphi}, \tag{3}$$

cu modulul

$$Z_{ieş} = \sqrt{R^2 + X_C^2} \tag{4}$$

şi argumentul

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{X_C}{R}. \tag{5}$$

Impedanţa la intrare $\underline{Z}$ se poate scrie sub forma

$$\underline{Z} = R + j(X_L - X_C) \tag{6}$$

şi ţinînd seama că reactanţele X_L, X_C satisfac condiţia (1), relaţia (6) devine

$$\underline{Z} = R + jX_C = Z e^{j\varphi'}, \tag{7}$$

cu modulul

$$\underline{Z} = \sqrt{R^2 + X_C^2} \tag{8}$$

şi argumentul

$$\varphi' = \operatorname{arc\,tg} \frac{X_C}{R}. \tag{9}$$

Din relaţiile (4), (8), rezultă:

$$Z_{ieş} = Z, \tag{10}$$

iar din relaţiile (5), (9);

$$\varphi = \varphi'. \tag{11}$$

Prin urmare, în conformitate cu relaţiile (3), (7), impedanţele $\underline{Z}_{ieş}$ şi $\underline{Z}$ au acelaşi modul şi argumente egale şi de semne contrare.

Considerînd tensiunea aplicată drept origine de fază şi substituind în relaţia (2) impedanţele $\underline{Z}_{ieş}$ şi $\underline{Z}$ cu expresiile (3), (7), rezultă:

$$\underline{U}_{ieş} = U e^{-j2\varphi} = U e^{-j\alpha}, \tag{12}$$

în care s-a notat cu α argumentul tensiunii la ieşire în raport cu tensiunea la intrare. Din relaţia (12) se deduc expresiile modulului şi argumentului tensiunii la ieşire:

$$U_{ieş} = U = \text{const.}, \tag{13}$$

$$\alpha = 2\varphi = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{X_C}{R} = f(R). \tag{14}$$

Rezultă că, aplicînd la bornele circuitului o tensiune constantă U, la bornele rezistenţei şi capacităţii se obţine o tensiune de ieşire ($U_{RC} = U_{ieş}$) constantă, egală în modul cu tensiunea la intrare şi al cărei argument este funcţie numai de rezistenţa circuitului.

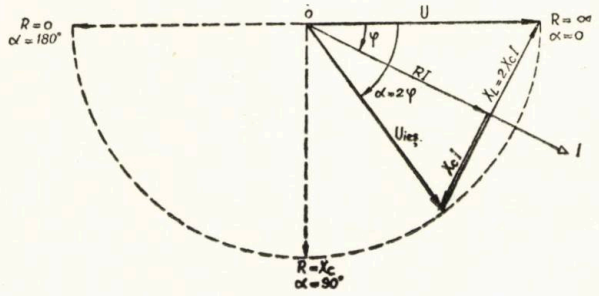


Fig. 2

Prin urmare circuitul inductiv cu reactanţe semicompensate (cu bobină ideală) poate funcţiona ca defazor de tensiune, tensiunea la ieşire putînd fi precis determinată (atît modulul cît şi argumentul ei).

Pe diagrama fazorială a tensiunilor (fig. 2) se observă că la variaţia rezistenţei R, modulul tensiunii la ieşire se păstrează constant, vîrful

fazorului reprezentativ deplasîndu-se pe un cerc de rază $U_{ieş} = U$, iar argumentul ei în raport cu tensiunea la intrare depinde de rezistenţa R, fiind egal cu dublul unghiului de defazaj dintre tensiunea aplicată şi curent.

b) *Defazorul de tensiune real*

În fig. 3 se consideră acelaşi circuit, ale cărui reactanţe satisfac relaţia de semicompensare (1), dar a cărui bobină de reactanţă posedă rezistenţa interioară r. În acest caz tensiunea la ieşire se exprimă prin relaţia:

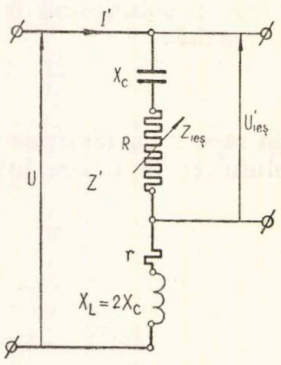


Fig. 3

$$\underline{U}'_{ieş} = \frac{\underline{Z}_{ieş}}{\underline{Z}'}\,\underline{U}. \tag{15}$$

Impedanţa la ieşire ($\underline{Z}_{ieş}$) rămînînd invariabilă, se exprimă în complex prin aceeaşi relaţie (3), modulul şi argumentul ei fiind date de relaţiile (4), respectiv (5).

Impedanţa totală $\underline{Z}'$ se exprimă prin relaţia:

$$\underline{Z}' = (R + r) + \mathrm{j}\,(X_L - X_C). \tag{16}$$

Ţinînd seama că reactanţele satisfac condiţia (1) relaţia (16) devine:

$$\underline{Z}' = R + r + \mathrm{j}X_C = Z' e^{j\varphi'}, \tag{17}$$

cu modulul

$$Z' = \sqrt{(R + r)^2 + X_C^2} \tag{18}$$

şi argumentul

$$\varphi' = \operatorname{arctg} \frac{X_C}{R + r}. \tag{19}$$

Considerînd tensiunea aplicată drept origine de fază şi înlocuind în relaţia (15) impedanţele exprimate prin relaţiile (3), (17) se obţine:

$$\underline{U}'_{ieş} = U \frac{Z_{ieş}}{Z'} e^{-j\varphi(1 + \varphi'/\varphi)}. \tag{20}$$

Dacă se notează:

$$m = \frac{Z_{ieş}}{Z'} = \sqrt{\frac{R^2 + X_C^2}{(R + r)^2 + X_C^2}} \quad \text{şi} \quad a = 1 + \frac{\varphi'}{\varphi} = 1 + \frac{\operatorname{arctg}\,[X_C/(R+r)]}{\operatorname{arctg}\,(X_C/R)} \tag{21, 22}$$

tensiunea la ieşire se poate exprima cu relaţia:

(23) $$\underline{U}'_{ieş} = mU e^{-ja\varphi} = mU e^{-j\alpha'}.$$

Rezultă că modulul tensiunii la ieşire se exprimă prin relaţia:

(24) $$U'_{ieş} = mU$$

iar argumentul tensiunii la ieşire — respectiv defazajul acesteia în raport cu tensiunea la intrare — este dat de relaţia:

(25) $$\alpha' = a\varphi = a \operatorname{arctg} \frac{X_C}{R}.$$

Luînd în considerare relaţiile (21) şi (22) rezultă că, în cazul cînd rezistenţa internă r a bobinei poate fi neglijată în raport cu rezistenţa R, coeficienţii m şi a tind către valorile fixe $m = 1$, $a = 2$. În acest caz modulul şi argumentul tensiunii la ieşire se exprimă prin relaţiile (13), respectiv (14), corespunzătoare cazului ideal adică:

$$U'_{ieş} = U_{ieş} = U = \text{const.}, \quad \alpha' = \alpha = 2\varphi = f(R).$$

În practică defazorul de tensiune este constituit dintr-un circuit cu bobină reală a cărui tensiune la ieşire se determină (în modul şi argument) cu relaţiile simple corespunzătoare cazului ideal. Considerînd valabile relaţiile (13) şi (14) pentru determinarea tensiunii la ieşire a defazorului real se comite o eroare care afectează atît modulul cît şi argumentul acesteia.

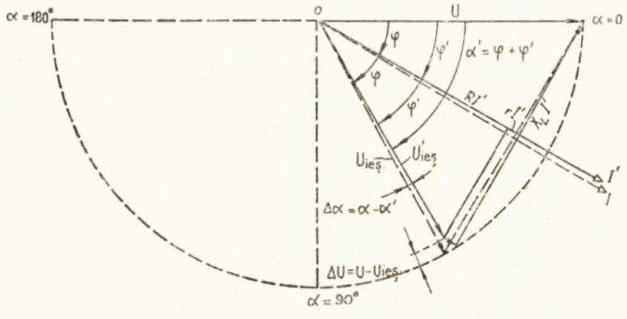


Fig. 4

Diagrama fazorială a tensiunilor, reprezentată în fig. 4, ilustrează modul în care rezistenţa bobinei introduce erori. Cu linii întrerupte sînt trasaţi fazorii reprezentativi ai tensiunilor şi curentului corespunzători circuitului cu bobină ideală ($r = 0$) iar cu linii pline fazorii aceloraşi mărimi în situaţia în care se ia în considerare existenţa rezistenţei interne a bobinei.

Studiul erorilor comise prin neglijarea rezistenţei interioare este necesar pentru deducerea condiţiilor în care defazorul poate funcţiona corect.

3. Studiul erorilor introduse de neglijarea rezistenţei interioare a bobinei defazorului

a) *Eroarea relativă asupra modulului*

Eroarea relativă asupra modulului tensiunii la ieşire, notată cu ε_m, este dată de relaţia:

$$\varepsilon_m = \frac{U_{ieş} - U'_{ieş}}{U_{ieş}},$$

care, ţinînd seama de relaţiile (13) şi (24), se poate scrie sub forma

$$\varepsilon_m = 1 - m = 1 - \sqrt{\frac{R^2 + X_C^2}{(R+r)^2 + X_C^2}}, \tag{26}$$

m fiind dat de (21).

Deoarece m este funcţie de rezistenţa variabilă R, eroarea relativă ε_m depinde de acelaşi parametru. Derivînd expresia erorii relative ε_m în raport cu variabila R şi anulînd-o rezultă că eroarea relativă asupra modulului tensiunii de ieşire are o valoare maximă corespunzătoare rezistenţei:

$$R_{(\varepsilon_m \max)} = \sqrt{X^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} - \frac{r}{2}, \tag{27}$$

relaţie care se poate scrie şi sub forma

$$R_{(\varepsilon_m \max)} = X_C \sqrt{1 + \frac{1}{Q^2}} - \frac{r}{2}, \tag{28}$$

prin introducerea factorului de calitate al bobinei

$$Q = \frac{X_L}{r} = \frac{2X_C}{r}. \tag{29}$$

Relaţia (28) se simplifică în cazul bobinelor cu factor de calitate relativ ridicat. Practic, pentru bobinele cu factor de calitate mai mare decît 10, termenul al doilea de sub radical devine neglijabil în raport cu primul şi rezistenţa pentru care are loc eroarea maximă în modul se exprimă prin relaţia:

$$R_{(\varepsilon_m \max)} = X_C - \frac{r}{2}, \tag{30}$$

sau, introducînd factorul de calitate al bobinei (29), rezultă:

$$R_{(\varepsilon_m \max)} = X_C \left(1 - \frac{1}{Q}\right). \tag{31}$$

Din relaţia (31) rezultă observaţia că în cazul bobinelor cu factor de calitate ridicat, eroarea relativă maximă în modul are loc pentru o rezistenţă de ordinul de mărime al reactanţei capacitive a circuitului, respectiv pentru un argument apropiat de 90°, adică în situaţia în care tensiunile la intrare şi la ieşire sînt în cuadratură.

Introducînd în relaţia (26) expresia (31) a rezistenţei se obţine:

$$\varepsilon_{m\,\max} = 1 - \sqrt{\frac{[(Q-1)/Q]^2 - 1}{[(Q+1)/Q]^2 + 1}}. \tag{32}$$

Din relaţia (32) rezultă că eroarea relativă maximă asupra modulului tensiunii depinde numai de factorul de calitate al bobinei.

În baza relaţiei (32) se poate deduce factorul de calitate pe care trebuie să-l posede bobina pentru a nu depăşi o eroare considerată admisibilă. Făcînd calculele rezultă:

$$Q = \frac{1 + A + \sqrt{(1+A)^2 - 2(1-A)^2}}{2(1-A)}, \tag{33}$$

unde s-a notat

$$A = (1 - \varepsilon_{m\,\max})^2. \tag{34}$$

Relaţia (33) se simplifică pentru erorile maxime admisibile de un ordin de mărime obişnuit. Se constată că pentru erorile relative maxime admisibile sub 5% al doilea termen de sub radical poate fi neglijat în raport cu primul. În adevăr, calculul arată că pentru erori de ordinul $\varepsilon_{m\,\max} = 1\,\% \ldots$ $\ldots 5\,\%$, în timp ce primul termen de sub radical ia valorile 3,92...3,62, cel de al doilea ia valorile corespunzătoare 0,0008...0,02.

Cifrele arată că în cazul cel mai dezavantajos termenul al doilea este de 180 de ori mai mic în raport cu primul şi deci poate fi neglijat.

În acest caz relaţia (33) devine

$$Q = \frac{1+A}{1-A} \quad \text{sau} \quad Q = \frac{1 + (1 - \varepsilon_{m\,\max})^2}{1 - (1 - \varepsilon_{m\,\max})^2}. \tag{35}$$

Efectuînd calculele rezultă:

$$Q = \frac{2(1 - \varepsilon_{m\,\max}) + \varepsilon^2_{m\,\max}}{2\varepsilon_{m\,\max} - \varepsilon^2_{m\,\max}}.$$

Deoarece termenii ridicaţi la pătrat pot fi neglijaţi, relaţia se simplifică, anume:

$$Q = \frac{1 - \varepsilon_{m\,\max}}{\varepsilon_{m\,\max}}. \tag{36}$$

Cu ajutorul relației (35) sau (36) se deduce că pentru a obține erori maxime în modul sub 5% factorul de calitate al bobinei utilizate trebuie să fie de ordinul $Q > 19$ iar pentru a obține erori maxime în modul sub 2%, acesta trebuie să fie de ordinul $Q > 49$.

Considerînd relația (35) se ajunge la o expresie mai simplă a erorii relative maxime:

$$\varepsilon_{m\,max} = 1 - \sqrt{\frac{Q-1}{Q+1}}; \tag{37}$$

de asemenea, dacă se recurge la relația (36) se ajunge la o expresie și mai simplă a erorii relative maxime, anume:

$$\varepsilon_{m\,max} = \frac{1}{1+Q}. \tag{38}$$

Ambele relații, (37) și (38), sînt valabile pentru circuite care conțin bobine cu factor de calitate $Q > 19$, deci care introduc erori maxime sub 5%.

Prin urmare pentru calculul erorii relative maxime în modul — introdusă de o bobină cu factor de calitate dat — se utilizează una din relațiile simple (37) sau (38), iar pentru a determina factorul de calitate care trebuie să caracterizeze bobina pentru a nu depăși o anume eroare maximă impusă, se utilizează una din relațiile (35) sau (36).

b) *Eroarea relativă asupra argumentului*

Eroarea relativă asupra argumentului tensiunii la ieșire, notată cu ε_a, este dată de relația:

$$\varepsilon_a = \frac{\alpha - \alpha'}{\alpha}.$$

Substituind argumentele α și α' cu relațiile (14) și (25), se obține

$$\varepsilon_a = 1 - \frac{a}{2}, \tag{39}$$

unde a este exprimat de relația (22). După înlocuirea coeficientului a în relația (39) se obține expresia finală a erorii relative în argument:

$$\varepsilon_a = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\varphi'}{\varphi}\right) \quad \text{sau} \quad \varepsilon_a = \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{\operatorname{arctg}\,[X_C/(R+r)]}{\operatorname{arctg}\,(X_C/R)}\right\}. \tag{40}$$

Din relația (40) rezultă că eroarea privind argumentul este funcție numai de rezistența R, respectiv de valoarea argumentului.

Derivînd funcția (40) în raport cu variabila R și anulînd derivata se obține ecuația:

$$\frac{1}{R^2+X_C^2}\operatorname{arctg}\frac{X_C}{R+r}-\frac{1}{(R+r)^2+X_C^2}\operatorname{arctg}\frac{X_C}{R}=0, \tag{41}$$

prin soluţionarea căreia se poate deduce rezistenţa R pentru care eroarea trece prin valoarea maximă. Folosind dezvoltarea în serie a expresiei arctgφ — valabilă pentru $\varphi \leqslant 1$ radian ($\alpha \leqslant 2$ radiani) — şi reţinînd numai primul termen al seriei, ecuaţia (41) devine:

$$\frac{1}{R^2+X_C^2}\cdot\frac{X_C}{R+r}-\frac{1}{(R+r)^2+X_C^2}\cdot\frac{X_C}{R}=0. \tag{42}$$

Soluţia ecuaţiei (42) este

$$R_{(\varepsilon_{a\,max})}=\sqrt{X_C^2+\left(\frac{r}{2}\right)^2}-\frac{r}{2}, \tag{43}$$

identică cu (27).

Pentru motivele indicate în § 3a, în cazul bobinelor cu factor de calitate $Q>10$ expresia rezistenţei pentru care are loc eroarea maximă se simplifică devenind

$$R_{(\varepsilon_{a\,max})}=X_C\left(1-\frac{1}{Q}\right), \tag{44}$$

identică cu (31).

Din considerarea relaţiilor (31) şi (44) rezultă că eroarea maximă în argument are loc simultan cu eroarea maximă în modul pentru o valoare a rezistenţei apropiată de cea a reactanţei capacitive, adică în vecinătatea argumentului $\alpha = 90°$, deci cînd tensiunile de intrare şi de ieşire sînt în cuadratură.

Introducînd în relaţia (40) expresia (44) a rezistenţei se determină expresia erorii maxime în argument:

$$\varepsilon_{a\,max}=\frac{1}{2}\left\{1-\frac{\operatorname{arctg}\,[Q/(Q+1)]}{\operatorname{arctg}\,[Q/(Q-1)]}\right\}. \tag{45}$$

Din relaţia (45) se observă că maximul erorii în argument depinde numai de factorul de calitate al bobinei.

4. Realizarea practică şi date experimentale

a) *Stabilirea parametrilor defazorului de tensiune*

Schema defazorului cuprinde trei elemente: o bobină de reactanţă constantă, un condensator fix şi o rezistenţă variabilă. Funcţionarea corectă a dispozitivului solicită ca bobina de reactanţă să îndeplinească următoarele condiţii: a) să posede o inductanţă mare într-un volum redus; b) valoarea inductanţei să nu depindă de curentul care o străbate; c) să posede un factor de calitate ridicat.

Pentru a satisface condiţiilor impuse, bobina de reactanţă trebuie să răspundă din punct de vedere constructiv la o serie de cerinţe, care rezultă în mod logic din considerarea expresiei inductanţei unei bobine cu miez feromagnetic cu întrefier:

(46) $$L = \mu_0 \frac{N^2}{l/\mu_r S + \delta/S_\delta},$$

unde: N — numărul de spire, l — lungimea liniei de forță medii în miezul feromagnetic δ — lungimea întrefierului, S, $S\delta$ — secțiunea miezului feromagnetic, respectiv a întrefierului, μ_0, μ_r — permeabilitatea vidului, respectiv permeabilitatea relativă a materialului feromagnetic.

Inductanța mare în volum redus necesită un număr important de spire dispuse pe un miez din material feromagnetic, de mare permeabilitate. Menținerea constantă a inductanței la variația curentului impune adoptarea unui întrefier a cărui reactanță să fie cu mult mai mare decît cea a miezului feromagnetic [4]. Ridicarea valorii factorului de calitate al bobinei necesită reducerea la valori minime a rezistenței active, ceea ce se poate realiza atît pe calea micșorării rezistenței înfășurării cît și prin alegerea unui material feromagnetic cu pierderi reduse.

Ținînd seama de condițiile impuse, la realizarea schemei defazorului s-a utilizat o bobină cu miez feromagnetic cu întrefier, miezul fiind realizat din mumetal, material de permeabilitate mare și avînd pierderi reduse [5].

Parametrii bobinei, măsurați printr-o metodă de rezonanță [6] sînt:

$$L = 2{,}81\ \text{H}, \quad X_L = 880\ \Omega, \quad r = 20\ \Omega, \quad Q = 44.$$

Inductanța se păstrează constantă cînd curentul variază între limitele 1 ... 150 mA.

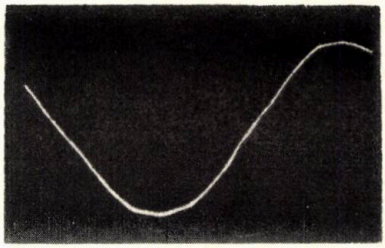
Din condiția (1) rezultă valoarea reactanței capacitive necesare $X_C = 440\ \Omega$, ce se realizează cu ajutorul unui condensator de capacitate $C = 7{,}24\ \mu\text{F}$. Drept rezistență variabilă s-a folosit o cutie de 11 111 Ω.

b) *Calculul erorilor*

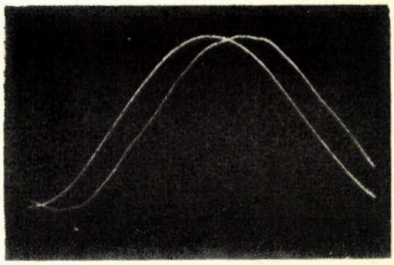
Parametrii fiind stabiliți, se pot calcula teoretic erorile care afectează tensiunea la ieșire a defazorului. Erorile relative, atît în modul cît și în argument, sînt calculate cu ajutorul relațiilor (26), respectiv (40), pentru unghiuri de defazaj cuprinse între 0... 180°, la interval unghiular de 30°. Rezultatele calculului sînt cuprinse în tabelul 1.

Tabelul 1

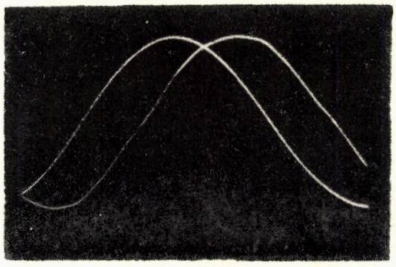
α	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
$R[\Omega]$	∞	1640	762	440	254	117,5	0
m	1	0,99	0,982	0,977	0,982	0,989	1
$\varepsilon_m = 1 - m$	0	0,01	0,018	0,023	0,018	0,011	0
$\varepsilon_m[\%]$	0	1	1,8	2,3	1,8	1,1	0
φ'	0	14°48′	29°24′	43°43′	58°5′	72°40′	87°24′
φ	0	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$a = 1 + \frac{\varphi'}{\varphi}$	2	1,99	1,98	1,97	1,97	1,97	1,97
$\varepsilon_a = 1 - \frac{a}{2}$	0	0,005	0,01	0,015	0,015	0,015	0,015
$\varepsilon_a[\%]$	0	0,5	1	1,5	1,5	1,5	1,5



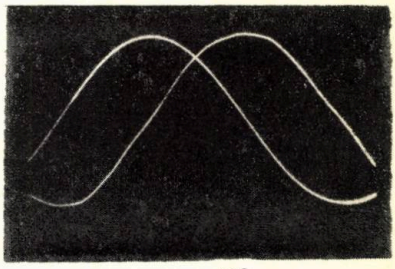
$\alpha = 0°$



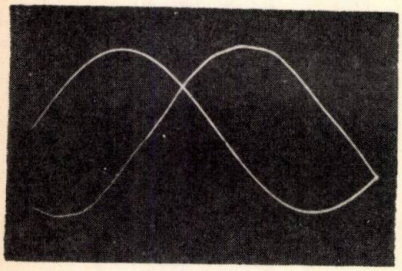
$\alpha = 30°$



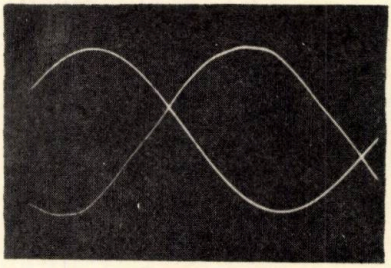
$\alpha = 60°$



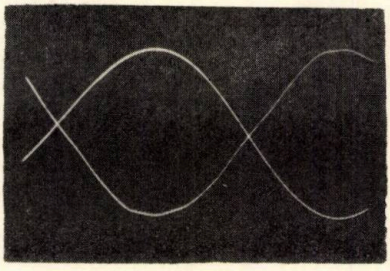
$\alpha = 90°$



$\alpha = 120°$



$\alpha = 150°$



$\alpha = 180°$

Din analiza datelor conținute în tabelul 1 se observă că acestea sînt conforme concluziilor trase cu ocazia studiului erorilor. Eroarea relativă în modul trece prin valoarea maximă, respectiv eroarea relativă în argument atinge valoarea maximă, pentru unghiul de defazaj de 90°, cînd rezistența este egală cu reactanța capacitivă a circuitului, ceea ce corespunde momentului cînd tensiunile la intrare și la ieșire sînt în cuadratură ($\alpha = 90°$).

În cazul bobinei utilizate ($Q = 44$) calculul arată că eroarea relativă maximă în modul este de 2,3%, iar eroarea relativă maximă în argument este de 1,5% (teoretic). De menționat că aceleași valori se obțin utilizînd fiecare din relațiile (38), (37) sau (32) pentru determinarea erorii relative maxime în modul ; pentru determinarea erorii relative maxime în argument se utilizează relația (45).

c) *Rezultate experimentale*

Schema de lucru, reprezentată în fig. 5, cuprinde defazorul de tensiune funcționînd în gol și aparatura de măsură necesară verificării.

Voltmetrul electronic (*V. E.*) poate măsura (prin intermediul comutatorului *v*) modulul tensiunii la intrare *U* (comutatorul în poziția *B*) și modulul tensiunii la ieșire $U_{ieș}$ (comutatorul în poziția *b*).

Dafazajul dintre tensiunea la ieșire și cea la intrare este pus în evidență de către osciloscopul catodic cu două canale (*O.C.*).

S-au calculat în prealabil valorile rezistențelor necesare a fi introduse în circuitul defazorului pentru a realiza modificarea fazei tensiunii la ieșire din 30° în 30°, în intervalul unghiurilor 0°...180°. Pentru fiecare rezistență introdusă în circuit s-a măsurat modulul tensiunii la intrare și al celei la ieșire și s-a urmărit modificarea fazei tensiunii la ieșire.

Rezultatele măsurătorilor privind modulul tensiunilor sînt cuprinse în tabelul 2 iar defazajele corespunzătoare se pot observa pe oscilogramele din fig. 6.

Din tabel se constată că rezultatele experimentale sînt în acord cu cele teoretice : la variația rezistenței *R* în intervalul ∞...0 modulul tensiunii la ieșire se păstrează constant și egal

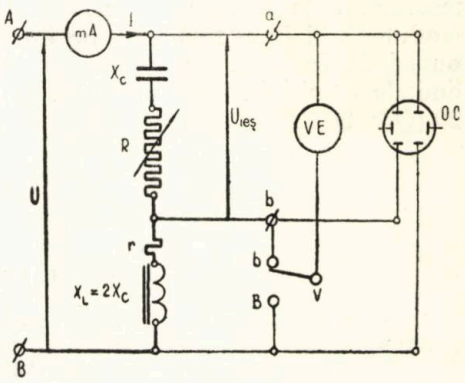


Fig. 5

Tabelul 2

α	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
R [Ω]		1 640	762	440	254	117,5	0
U [V]	25	25	25	25	25	25	25
$U_{ieș}$ [V]	24,8	24,5	24,2	24,1	24,1	24,3	24,5
ε_m [%]	0,8	2	3,2	3,6	3,6	2,8	2

cu modulul tensiunii la intrare — în limita erorilor admisibile — în timp ce argumentul tensiunii la ieșire se modifică, corespunzător rezistenței, de la 0°...180°. Oscilogramele din fig. 6, corespunzătoare datelor din tabelul 2, ilustrează afirmațiile de mai sus. Se constată că erorile relative asupra modulului tensiunii la ieșire, calculate după tensiunile măsurate, sînt mai mari decît cele teoretice cuprinse în tabelul 1. Majorarea erorilor se explică prin aceea că erorile calculate în tabelul 2 sînt totale, însumînd și alte erori, cum ar fi, de exemplu, erorile de măsurare a reactanțelor, a rezistenței ș. a.

5. Concluzii

1. Circuitul serie inductiv cu reactanţe semicompensate poate fi utilizat ca defazor de tensiune pe un interval unghiular teoretic de 180°.

2. Tensiunea la ieşire a defazorului rămîne egală în modul cu tensiunea la intrare pe întregul interval unghiular, precizia ei depinzînd de factorul de calitate al bobinei de reactanţă.

3. Faza tensiunii la ieşire poate fi variată prin modificarea unui singur parametru şi anume, a rezistenţei din circuitul defazorului, precizia defazajului realizat depinzînd de asemenea de factorul de calitate al bobinei de reactanţă.

4. În condiţiile unei bobine cu factor de calitate dat, erorile care afectează tensiunea la ieşire — atît în modul cît şi în argument — depind de argumentul acesteia; ele trec prin valori maxime în momentul cuadraturii tensiunilor la intrare şi ieşire. Marginea superioară a erorilor — atît în modul cît şi în argument — pe întregul interval unghiular (180°), depinde numai de factorul de calitate al bobinei de reactanţă: aceasta nu întrece limitele admisibile pentru bobine al căror factor de calitate depăşeşte cifra 20 ($Q \geqslant 20$).

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de electrotehnică

BIBLIOGRAFIE

1. Aseev B. P., *Relaţii de fază în radiotehnică.* EES, Buc. 1955, (trad. din l. rusă).
2. Bărbulescu D., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI (XV)**, *1—2*, p. 215.
3. — Bul. Inst. polit. Iaşi, 1962, **VIII (XII)**, *1—2*, p. 202.
4. Constantinescu S., *Radiotehnică teoretică şi practică.* Vol. **I**, Ed. Tehn. Buc., 1960, p. 152.
5. Zaimovski A. S., Usov V. V., *Metale şi aliaje electrotehnice.* EES, Buc, 1954, pp. 116 şi 129, (trad. din l. rusă).
6. Скитальцев В. С., Электрические станции, 1951, *5*, стр. 57.

DÉPHASEUR DE TENSION QUI UTILISE UN CIRCUIT SÉRIE INDUCTIF À RÉACTANCES SEMICOMPENSÉES

(Résumé)

On étudie un nouveau type de déphaseur de tension, dont le fonctionnement est basé sur le principe de la semicompensation des réactances dans un circuit série inductif.

Le déphaseur réalisé fournit à la sortie une tension constante, dont le module est égal à celui de la tension d'entrée et l'argument peut varier dans l'intervalle 0...180°, en modifiant un seul paramètre du circuit, à savoir la résistance.

On étudie les erreurs qui affectent tant le module que l'argument de la tension de sortie et on établit les conditions afin que cettes erreurs soient maxima. On aboutit à la conclusion que les erreurs restent en limites admissibles si le facteur de qualité du circuit dépasse la valeur 20.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

УДК 621-523

ИССЛЕДОВАНИЯ В СВЯЗИ С УМЕНЬШЕНИЕМ ИНЕРЦИОННЫХ ЭФФЕКТОВ В СИСТЕМАХ ЭЛЕКТРОПРИВОДА ПРИМЕНЕНИЕМ СПЕЦИАЛЬНЫХ ДИАГРАММ СКОРОСТИ

Н. В. БОЦАН, АРСЕНИЕ ОПРЯ, ЕУДЖЕН БАЛАБАН, И. ГЕОРГИУ и Д. БАЛАУРЕСКУ

Сообщение представленное на научной сессии Ясского политехнического института, 5—7 февраля 1965 г.

1. Известно, что привод перемещающих и подымающих устройств, ведет, как при пуске, так и при остановке к инерционным ударным эффектам, влияющих неблагоприятно, с физиологической точки зрения, на человека помещающегося непосредственно в подвижном, или же подымающем устройстве.

Исследования, проводимые долгое время, показали что эти влияния относятся не к изменению скорости при пуске или же остановке, а к изменению ускорения [1], [2].

Принимая во внимание, что при пуске или остановке упомянутых устройств, скорость изменяется линейно, при постоянном ускорении, следует, что неблагоприятное влияние оказывается следствием мгновенного возрастания ускорения от нуля до определенной постоянной a.

Следует, что для устранения неблагоприятного влияния при упомянутых устройствах нужно применять не обыкновенные линейные графики скорости, а ведущие к линейному ускорению, то-есть графики скорости изменяющиеся по какой либо кривой.

Техническая литература [1] указывает, что для этой цели можно применять параболический график скорости, как в начале, так и к концу пуска. Подобный же график можно применять и при остановке.

2. В статье исследуется возможность уменьшения неблагоприятного влияния путем применения параболического графика скорости, а также и графиков скорости другой формы, которые ведут к дальнейшему уменьшению упомянутого влияния.

Исследования ведутся только при пуске устройства, принимая во внимание, что при остановке график скорости симметричен.

На рис. 1 приведено линейное изменение скорости (кривая *1*), которое осуществляется обыкновенным трапезоидальным графиком скорости. Для того чтобы при переходе к изменению скорости по

какой либо кривой не уменьшать продуктивность приведенного устройства, следует принимать одно и то же время разгона установки t_p как при линейном, так и при каком либо другом графике скорости. С этой целью, время пуска t_p разделяется на четыре равные части, учитывая, что параболический график скорости осуществляется только на первой и четвертой части, оставаясь линейным на остальных (кривая 2, рис. 1).

Осуществляются таким образом три зоны изменения скорости, на которых законы изменения скорости даны следующими выражениями:

а) для зоны $0 \leqslant t \leqslant \frac{t_p}{4}$, $v = k_1 t^2$;

б) для зоны $\frac{t_p}{4} \leqslant t \leqslant \frac{3t_p}{4}$, $v = k_2(t - t_0)$;

в) для зоны $\frac{3t_p}{4} \leqslant t \leqslant t_p$, $v = v_m - k_1(t_p - t)^2$.

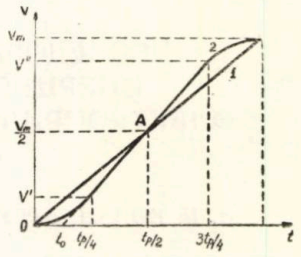


Рис. 1

Выражая условия плавного перехода с параболической кривой на прямую линию, а затем снова на параболическую кривую, естественно, что эти условия выразятся уравнением скоростей и ускорений в точках перехода, как для линейного, так и для параболического изменения скорости.

Таким образом можно написать (рис. 1):

$$v' = k_1\left(\frac{t_p}{4}\right)^2 = k_2\left(\frac{t_p}{4} - t_0\right), \tag{1}$$

$$a = \frac{dv}{dt}\bigg|_{t=t_p/4} = 2k_1\frac{t_p}{4} = k_2. \tag{2}$$

Из выражений (1) и (2) можно вывести значение t_0, то есть абсциссу точки где линейная часть кривой 2 (рис. 1) пересекает ось абсцисс $t_0 = t_p/8$. Также, имея в виду координаты точки A, следует что:

$$\frac{v_m}{2} = k_2\left(\frac{t_p}{2} - t_0\right) = k_2\frac{3t_p}{8},$$

или же

$$k_2 = \frac{4}{3}\cdot\frac{v_m}{t_p}.$$

Принимая во внимание и выражение (2), следует:

$$k_1 = \frac{8}{3}\cdot\frac{v_m}{t_p^2}.$$

Имея значения этих постоянных можно вывести значения скоростей в точках перехода:

$$v' = k_1 t^2 = \frac{v_m}{6},$$

а также:

$$v'' = \frac{5}{6} v_m.$$

Зная график изменения скоростей при пуске, можно легко вывести и график изменения ускорения (рис. 2):

а) для зоны: $0 \leqslant t \leqslant \frac{t_p}{4}$, $a = 2k_1 t = \frac{16}{3} \cdot \frac{v_m}{t_p^2} t$,

б) для зоны: $\frac{t_p}{4} \leqslant t \leqslant \frac{3t_p}{4}$, $a = k_2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{v_m}{t_p}$,

в) для зоны: $\frac{3t_p}{4} \leqslant t \leqslant t_p$, $a = \frac{16}{3} \cdot \frac{v_m}{t_p^2} (t_p - t)$.

Как видно, максимальное значение ускорения a_m в зоне $t_p/4 \ldots 3t_p/4$ будет равно $a_m = 4a_{med}/3$, где a_{med} — среднее значение ускорения трапезоидального графика скоростей. Это объясняется условием поддержания постоянного значения времени разбега t_p приведенного устройства при какой либо форме графика скорости.

Из рис. 2 следует что в периоде пуска ускорение растает от нуля до максимального значения a_m в зоне $0 \ldots t_p/4$, а затем начиная от $3t_p/4$ уменьшается снова до нуля. Таким образом инерционный ударный эффект становится намного меньше. Однако необходимо заметить, что так как за время t_p ускорение не изменяется плавно, инерционный эффект не устраняется полностью.

Для устранения неплавных изменений ускорения, рекомендуется перейти от графика указанного на рис. 2 к синусоидальному графику ускорения:

$$a = A \sin \frac{\pi}{t_p} t.$$

При условии поддержания постоянного значения ускорения, следует что:

$$a_{med} = \frac{1}{t_p} \int_0^{t_p} A \sin \frac{\pi}{t_p} t \, dt = A \frac{2}{\pi},$$

или же $A = \pi a_{med}/2$. Отсюда:

$$a = \frac{\pi}{2} a_{med} \sin \frac{\pi}{t_p} t.$$

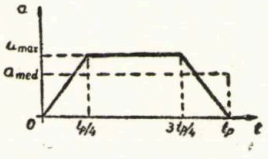


Рис. 2

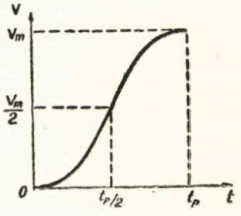


Рис. 3

Соответственно этому изменению ускорения во время пуска, следует что скорость в этом же интервале времени будет изменяться по закону

$$v = \int a\,dt = \frac{\pi}{2} a_{med} \int \sin \frac{\pi}{t_p} t\,dt = -\frac{\pi}{2} a_{med} \frac{t_p}{\pi} \cos \frac{\pi}{t_p} t + C.$$

Принимая во внимание начальное значение времени, то есть при $t = 0$, $v = 0$, постоянная C примет значение $C = a_{med}\, t_p/2$ и таким образом:

$$v = a_{med} \frac{t_p}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi}{t_p} t\right).$$

Изменение скорости во время пуска приведено на рис. 3.

Синусоидальный график скорости может быть получен практически соответственным выбором пусковых сопротивлений, или же соответственным их изменением за время пуска.

Имея в виду уравнение движения

$$M = M_r + \frac{GD^2 i}{19{,}6 D_T} a,$$

где i — передаточное число между двигателем и приведенным устройством, и заменяя полученное значение ускорения, при использовании для электропривода паралельного электродвигателя постоянного тока, следует

$$c_m I = M_r + \frac{GD^2 i}{19{,}6 D_T} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{v_m}{t_p} \sin \frac{\pi}{t_p} t.$$

Из этого выражения легко можно вывести изменение тока и сопротивления при пуске

$$(3) \quad I = \frac{U - c_e \dfrac{30i}{r} v}{\dfrac{M_r}{c_m} + \dfrac{GD^2 i}{19{,}6 D_T c_m} \cdot \dfrac{\pi}{2} \cdot \dfrac{v_m}{t_p} \sin \dfrac{\pi}{t_p} t}, \qquad R = \frac{U - c_e \dfrac{30i}{r} \cdot \dfrac{v_m}{2} \left(1 - \cos \dfrac{\pi}{t_p} t\right)}{\dfrac{M_r}{c_m} + \dfrac{GD^2 i}{19{,}6 D_T c_m} \cdot \dfrac{\pi}{2} \cdot \dfrac{v_m}{t_p} \sin \dfrac{\pi}{t_p} t}.$$

Это изменение сопротивления по времени может быть получено, либо подходящим изменением скорости движения регулирующего органа пускового реостата, либо, при постоянной скорости движения регулирующего органа, применением подходящей внешней формы пускового реостата.

Учитывая, что второй метод практически более удобный, приводится ниже метод нахождения подходящей формы пускового реостата для получения графика ускорения синусоидальной формы.

3. Максимальное значение сопротивления якорной цепи электродвигателя находится начальным положением при пуске двигателя, когда ускорение равно нулю, то есть:

$$R_0 = \frac{U}{M_r/c_m}.$$

Значение сопротивления которым уменьшается полное сопротивление якорной цепи электродвигателя будет зависеть от профиля на который наматывается сопротивление, а также от постоянной скорости движения регулирующего органа пускового реостата.

Выбирая произвольно скорость движения регулирующего органа и имея в виду что пусковое сопротивление должно быть удалено с якорной цепи электродвигателя в t_p сек, следует, что длина профиля для намотки сопротивления будет:

$$l = v_r t_p,$$

где v_r — постоянная скорость регулирующего органа пускового реостата.

Сечение s проволочного сопротивления находится исходя из мощности электродвигателя. Таким образом можно установить полное число витком намотаных на профиль $n_s = l/d$.

Обозначая через b ширину профиля и через y его вышину, зависящую от времени t, следует что сопротивление которым уменьшается полное сопротивление якорной цепи электродвигателя за время $\mathrm{d}t$ будет $(\rho/s)\,2\,(b+y)\,(n_s/l)\,v_r\mathrm{d}t$.

Сопротивление якорной цепи в данный момент времени окажется таким образом следующим:

$$R(t) = R_0 - \int_0^t \frac{\rho}{s}\,2\,(b+y)\,\frac{n_s}{l}\,v_r\,\mathrm{d}t.$$

Это сопротивление должно быть равно значению сопротивления полученным выражением (3), для данного случая. Учитывая это, следует, что вышина профиля должна изменяться по следующему закону:

$$y(t) = -\frac{A\sin\frac{\pi}{t_p}t + B\cos\frac{\pi}{t_p}t + C}{D\left(E + F\sin\frac{\pi}{t_p}t\right)^2} - b,$$

где:

$$A = 15{,}45 M_r \frac{i v_m}{r t_p}, \quad B = \left(U - c_e \frac{15i}{r} v_m\right) \frac{GD_r^2 i}{39{,}2 D_T c_m} \cdot \frac{\pi^2}{t_p} 2 v_m,$$

$$C = 0{,}4 \frac{i^2}{r} \cdot \frac{GD_r^2}{D_T} \cdot \frac{\pi}{t_p^2} v_m^2, \quad D = 2\frac{\rho}{s} \cdot \frac{n_s}{t_p}, \quad E = \frac{M_r}{c_m}, \quad F = \frac{GD_r^2 i}{39{,}2 D_T c_m} \cdot \frac{\pi}{t_p} v_m,$$

где GD_r^2 — приведенный к валу двигателя полный маховой момент.

Как видно эти выражения сравнительно сложны, и потому рекомендуется чтобы, при определенных практических условиях, установление профиля производить приближенными между ними точками.

Ясский политехнический институт,
Лаборатория электропривода,
Кафедра математики II
и
Ясский педагогический институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Гейлер Е. Б., *Электропривод в тяжелом машиностроении.* Машгиз, М., 1958.
2. * * * *Handbuch: Die Technik der elektrischen Antriebe.* VEB Verlag Technik, Berlin, 1963.
3. Boţan N. V., Bejan I., Balaban E., *Curs de acţionări electromecanice şi automatizări.* EDP, Buc., 1962.

CERCETĂRI ÎN LEGĂTURĂ CU REDUCEREA EFECTELOR INERŢIALE (FIZIOLOGICE) ÎN SISTEMELE DE ACŢIONARE ELECTRICĂ PRIN FOLOSIREA UNOR DIAGRAME SPECIALE DE VITEZĂ

(Rezumat)

Pornind de la constatarea experimentală a proporţionalităţii efectelor fiziologice produse de un ascensor de persoane asupra călătorilor, cu salturile de acceleraţie, în lucrare se indică unele posibilităţi de reducere a acestor efecte nedorite prin alegerea unor diagrame convenabile de viteză. Se studiază în special diagramele de viteză pentru care acceleraţia variază continuu în timp după o lege trapezoidală sau sinusoidală.

După determinarea parametrilor cei mai convenabili ai graficelor de viteză se indică şi posibilitatea realizării practice a acestora cu ajutorul unor rezistenţe de pornire corespunzătoare. Se adoptă soluţia unor rezistenţe bobinate pe profil şi se găseşte forma profilului necesar pentru a realiza variaţia dorită a rezistenţei de pornire în timpul regimurilor dinamice.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

D. C. 621-523; 531.781

POWER BEHAVIOUR OF THE ELECTROMECHANICAL DRIVE DEVICES WITH OSCILLATING LINEAR MOTORS

BY

CÁROL SAAL

Paper presented at the scientific sesion of the Polytechnic Institute of Jassy, September the 28—30st, 1967

1. Introduction

In the electrical drives with linear oscillating motors are interesting the calculul of the mechanical powers and the enunciation of the conditions for a maximum mechanicas active power transfer, between the motor and the oscillating receiver. The above problems are discussed in this paper and theorems on the conservation of mechanical active and reactive powers are presented. A theorem of maximum transfer of mechanical active power is deduced.

It is presumed that the resultant electromagnetic force, acting on the movable armature of the motor and the displacement of the armature are both sinusoidal.

2. Mechanical Powers

If f and v represent the instantaneous values of the resultant electromagnetic force, respectively of the velocity in a certain point of a mechanical oscillating system, $\mathbf{f}$ and $\mathbf{v}$ being colinear, then it can be defined as *instantaneous mechanical power* p_m the product:

$$p_m = fv. \tag{1}$$

Let the instantaneous expressions of the force and velocity be:

$$f = \sqrt{2}\, F \sin \Omega t, \qquad v = \sqrt{2}\, V \sin (\Omega t - \alpha), \tag{2}$$

with the supplementary hypothesis that the drive device includes only linear bilateral elements. In this case, the velocity will be also sinusoidal, when the force is sinusoidal.

With Eqs. (2), the instantaneous mechanical power (1) becomes:

$$p_m = FV\cos\alpha\,(1 - \cos 2\Omega t) - FV\sin\alpha\,\sin 2\Omega t. \tag{3}$$

If we introduce the following notations:

$$S_m = FV, \qquad P_m = FV\cos\alpha, \qquad Q_m = FV\sin\alpha, \tag{4}$$

where S_m may be denominated as *apparent mechanical power* (s. [1]), p_m takes the form:

$$p_m = P_m\,(1 - \cos 2\Omega t) - Q_m \sin 2\Omega t. \tag{3'}$$

Calculating the medium value of the instantaneous power p_m, in a period $T_f = 2\pi/\Omega$ of the power, one obtains:

$$\tilde{p}_m = \frac{1}{T_f}\int_0^{T_f} p_m\,\mathrm{d}t = P_m; \tag{5}$$

P_m may be interpreted as the *active mechanical power*, transferred to the mechanical receiver, if the mechanical losses within the oscillomotor are neglected.

With reference to the instantaneous mechanical power p_m, if this will be positive, it may be considered that the mechanical energy is transmitted in the direction of the force f; if p_m will be negative, the mechanical energy is transmitted in the opposite direction of this force. This observation will serve for the positive association of the corresponding directions for $\underline{F}$ and $\underline{V}$, the images in complex of the sinusoidal quantities f and v, so as further.

It is easy to remark that $Q_m = FV\sin\alpha$ has the meaning of a *reactive mechanical power*. The relation between the powers S_m, P_m and Q_m is:

$$S_m = \sqrt{P_m^2 + Q_m^2}. \tag{6}$$

Concerning the units of these three types of mechanical powers, in the International System (SI), we propose: S_m — N. m. apparent/s; P_m — watt; Q_m — N. m. reactive/s.

3. Active Mechanical Power

The active mechanical power, received by a mechanical passive system (receiver) is always positive, having:

$$|\alpha| = |\arg(\underline{F}) - \arg(\underline{V})| \leqslant \frac{1}{2}\pi \text{ rad};$$

the active mechanical power causes irreversible heating; it may serve also for doing a useful mechanical work.

Let us suppose a linear oscillating mechanical receiver with one connection (Fig. 1), with an equivalent mechanical impedance $\underline{Z}_r$ [1], with the sinusoidal force f applied at the input connection point A, the velocity of the same point being v; on the basis of the definition relations for the equivalent mechanical impedance $\underline{Z}_r$ and mobility $\underline{M}_r$ [2], we obtain:

$$\underline{Z}_r = \frac{\underline{F}_r}{\underline{V}} = \frac{1}{\underline{M}_r}. \tag{7}$$

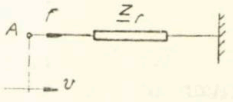


Fig. 1

Eq. (7) may take another form:

$$\underline{Z}_r = Z_r e^{j\psi_r} = \beta_r + jX_r = \beta_r + j\left(\Omega m_r - \frac{k_r}{\Omega}\right), \tag{7'}$$

where:

$$\psi_r = \arg(\underline{Z}_r) = \alpha, \qquad Z_r = \frac{F}{V} = \frac{1}{M_r}, \tag{8}$$

having in view the expressions for f and v (Eqs. (2)); β_r, m_r and k_r from above represent the equivalent parameters of the receiver, the damping constant (mechanical resistance), mass and spring stiffness of the equivalent spring, respectively.

Since:

$$\cos\alpha = \frac{\mathcal{R}e(\underline{Z}_r)}{Z_r} = \frac{\beta_r}{Z_r},$$

the active mechanical power, received by the mechanical passive system, can be written in another form:

$$P_m = FV\cos\alpha = \beta_r V^2 = V^2\,\mathcal{R}e(\underline{Z}_r). \tag{9}$$

If we use the equivalent mechanical mobility $\underline{M}_r$ of the receiver, it follows:

$$M_r = G_r - jB_r = \frac{1}{\beta_r + jX_r} = \frac{\beta_r}{Z_r^2} - j\frac{X_r}{Z_r^2}, \tag{10}$$

where:

$$G_r = \mathcal{R}e(M_r) = \frac{\beta_r}{Z_r^2} = \frac{\beta_r}{\beta_r^2 + X_r^2}, \qquad B_r = \mathcal{I}m(\underline{M}_r) = \frac{X_r}{Z_r^2} = \frac{\Omega m_r - k_r/\Omega}{\beta_r^2 + X_r^2}. \tag{11}$$

On the analogy of the electrotechnics, these quantities can be denominated: G_r — *equivalent mechanical conductance* and B_r — *equivalent mechanical susceptance* of the receiver.

---

[1]) The mechanical oscillating systems with one connection are those which have one connection attached to a rigid unmovable point or inertial reference and another connection is available for external connections [2].

It is easy to verify that the active mechanical power, received by the receiver, can be expressed according to its mechanical conductance:

$$P_m = G_r F^2 = F^2 \mathcal{J}m\,(\underline{M}_r). \tag{12}$$

4. Reactive Mechanical Power

We introduce the convention that the reactive mechanical power Q_m, given in Eq. (4_2), is received by the receiver when it is positive and retroceded to the oscillomotor or to mechanical feed system, in the case $\sin\alpha > 0$, $\sin\alpha < 0$, respectively.

Since

$$\sin\alpha = \frac{\mathcal{J}m\,(\underline{Z}_r)}{Z_r} = \frac{X_r}{(\beta_r^2 + X_r^2)^{1/2}},$$

the reactive mechanical power can be calculated with the equivalent relations:

$$Q_m = FV\sin\alpha = X_r V^2 = F^2 B_r. \tag{13}$$

5. Complex Calculus of the Mechanical Powers

With Eqs. (2) for force and velocity at the input of one connection receiver (Fig. 1), their complex images are:

$$\underline{F} = F, \qquad \underline{V} = V e^{-j\alpha}.$$

If the *apparent mechanical complex power* $\underline{S}_m$ is defined analogically with the apparent electrical complex pover in a single-phase circuit in a sinusoidal steady-state of voltages and currents, respectively:

$$\underline{S}_m = \underline{F}\underline{V}^* = FVe^{j\alpha} = FV\cos\alpha + jFV\sin\alpha, \tag{14}$$

it follows immediately:

$$P_m = \mathcal{R}e\,(\underline{S}_m) = FV\cos\alpha, \qquad Q_m = \mathcal{J}m\,(\underline{S}_m) = FV\sin\alpha. \tag{14'}$$

Therefore, one can define the apparent complex mechanical power $\underline{S}_m$ as the product of the complex image of the force, $\underline{F}$, multiplied by the complex conjugated image $\underline{V}^*$ of the velocity, although it could be defined reciprocally.

In a complex-plane representation, with the equivalent mechanical impedance of the receiver, one can plot analogous diagrams as those known in the complex-plane of the electrical impedances.

6. Association of Positive Directions

In the case of mechanical dipoles, the forces and velocities, sinusoidal time functions, have the part of the voltages and currents, from the electrical single-phase circuits. The analogy is only a formal one, while the electrical voltages and currents are scalar quantities, as result of calculating certain integrals.

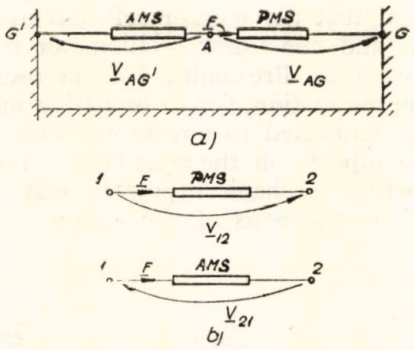


Fig. 2

For the determination of the rules, which permit the correct association of the positive forces and velocity directions, in the oscillating mechanical systems, equivalent to active (generating oscillations) or passive (receivers) mechanical dipoles, one can begin from the active mechanical power P_m. A mechanical dipole will be considered as active (AMS), if the active mechanical power, transferred to a mechanical dipole receiver (PMS), connected to the former, is positive. A mechanical dipole will be considered as a receiver, if the received mechanical power is positive. With the notations introduced in Fig. 2, we get the conditions:

$$P_m = \mathcal{R}e\,(\underline{F}\,\underline{V}^*_{AG'}) = \mathcal{R}e\,(\underline{F}\underline{V}^*_{AG}) > 0, \tag{15}$$

with the obvious remark that $\underline{V}_{AG'} = \underline{V}_{AG}$, because the points G and G' are both rigid.

Consequently, the supplementary convention which permits the association of positive directions, simultaneously for forces and velocities, can be enuntiated in the following way:

a) In the case of the active mechanical dipoles (AMS), the positive directions of the force $\underline{F}$ and of the velocity $\underline{V}_{21} = \underline{V}_2$ (Fig. 2), forms a close loop. This convention may be denominated as the *convention of active mechanical dipoles*, producers of mechanical oscillating energy.

b) In the case of the passive mechanical dipoles (PMS), the positive directions of the force F and of the velocity $V_{12} = V_1 - V_2$ result in parallel (Fig. 2b). This convention may be regarded as the *convention of passive mechanical dipoles* (receivers).

7. Theorems of Conservation of the Mechanical Powers

It will be assumed that the mechanical systems are linear, including only bilateral elements and one linear oscillomotor in a sinusoidal steady-state of forces and velocities. Presuming for the oscillomotor an equivalent schematic Thévenin representation, for its oscilating mechanical part (Fig. 3), the oscillomotor being connected to a receiver which may be replaced with the passive mechanical dipoles on the same figure, theorems of conservation of the active and reactive mechanical powers may be enunciated; these theorems are obtained on the basis of the energy conservation law.

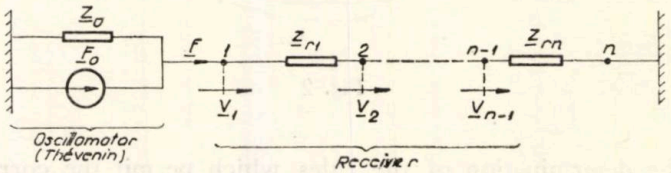


Fig. 3

7.1. Conservation Theorem of the Active Mechanical Powers

The active mechanical power, produced by an oscillomotor, must equalize, at any considered moment in a sinusoidal steady-state of forces and velocities, the sum of all mechanical active powers, received by the receivers, inclusively the mechanical active power, ceded to the internal resistive element of the oscillomotor.

If the total equivalent mechanical impedance of the receiver is $\underline{Z}_r = \beta_r + jX_r$, and the relative velocity between the k and $k+1$ points is $\underline{V}_{k,k+1} = \underline{V}_k - \underline{V}_{k+1}$, the application of the enuntiated theorem to the mechanichal system of fig. 3, permits the obtaining of the equalities:

$$\mathcal{R}e\,(\underline{F}_0\,\underline{V}_1^*) = V_1^2\,\mathcal{R}e\,(\underline{Z}_0) + V_{12}^2\,\mathcal{R}e\,(\underline{Z}_{r1}) + V_{23}^2\,\mathcal{R}e\,(\underline{Z}_{r2}) + \cdots + \tag{16}$$
$$+ V_{n-2,\,n-1}^2\,\mathcal{R}e(\underline{Z}_{r,\,n-1}) + V_{n-}^2\;\mathcal{R}e\,(\underline{Z}_{r,\,n}),$$

or:

$$F_0 \cos\,(\underline{F}_0, \underline{V}_1^*) = F_0 \cos\,(\underline{F}_0^*, \underline{V}_1) = V_1\,\mathcal{R}e\,(\underline{Z}_0 + \underline{Z}_r). \tag{16'}$$

7.2. Conservation Theorem of the Reactive Mechanical Powers

The reactive mechanical power, produced by an oscillomotor, must equalize, at any considered moment, in a sinusoidal steady-state of forces and velocities, the sum of all reactive mechanical powers, received by the mechanical receiver, inclusively the reactive internal mechanical power of the oscillomotor.

In the case of the drive device in Fig. 3, with the notations introduced there, on the basis of the enunciated theorem, we can write:

$$\Im m\,(\underline{F}_0\,\underline{V}_1^*) = -\,\Im m\,(\underline{F}_0^*\,\underline{V}_1) = V_1^2\,\Im m\,(\underline{Z}_0) + V_{12}^2\,\Im m\,(\underline{Z}_{r1}) + \ldots + \tag{17}$$
$$+\,V_{n-1}^2\,\Im m\,(\underline{Z}_{rn}),$$

or

$$F_0 \sin\,(\underline{F}_0, \underline{V}_1^*) = -\,F_0 \sin\,(\underline{F}_0^*, \underline{V}_1) = V_1\,(X_0 + X_r). \tag{17'}$$

Both enuntiated theorems can be easily verified, based on other reasons, for example calculating $\underline{F}$, the force transmitted at the point *1*. and $\underline{V}_1$, the velocity of the same point, knowing $\underline{F}_0$ and $\underline{Z}_0$ of the oscillomotor and the equivalent mechanical impedance $\underline{Z}_r$ of the receiver.

8. Maximum Transfer of Active Mechanical Power to a One-Connection Receiver

Let the receiver be characterized by its equivalent mechanical impedance $\underline{Z}_r$; at its input connection *A* (Fig. 1), let the force and velocity be given by Eqs. (2). An important question is this: how must be the load or mechanical impedance $\underline{Z}_r$, for the purpose of obtaining the maximum active mechanical power from a given oscillomotor? This problem can be denominated as load adaption to the oscillomotor, or, generally load adaptation to the active mechanical system, producer of mechanical energy.

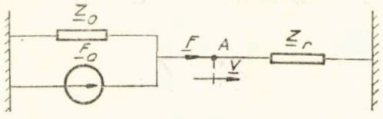


Fig. 4

In literature, this problem was not dealt with, for the electromechanical drives with oscillating linear motors. An adaptation theorem for waves is known [3].

It may be presumed that the oscillating motor has a known equivalent internal schematic representation, for example Thévenin, and that the impedance $\underline{Z}_r$ of the receiver can be varied (Fig. 4).

For the load adaptation to the oscillomotor, if the mechanical parameters of the oscillomotor cannot be modified as those of the receiver, we may use, between receiver and oscillomotor, a passive mechanical system with two connections, which, with minimum active energy losses, would ensure a maximum active power transfer to the receiver, by changing the impedance of the ensemble adaptation element-receiver.

On the basis of certain theorems of the oscillating systems [2], if the force and the velocity at the input connection point A of the receiver are $\underline{F}$ and $\underline{V}$, respectively, then:

$$\underline{E} = \underline{V}\,\underline{Z}_r = \frac{\underline{F}_0\,\underline{Z}_r}{\underline{Z}_0 + \underline{Z}_r}, \qquad \underline{V} = \frac{\underline{F}_0}{\underline{Z}_0 + \underline{Z}_r}. \tag{18}$$

The active mechanical power P_m, transmitted to the load impedance $\underline{Z}_r$, is:

$$P_m = V^2\,\mathcal{R}e\,(\underline{Z}_r) = \beta_r V^2 = \frac{\beta_r}{|\underline{Z}_0 + \underline{Z}_r|^2}. \tag{19}$$

If $\underline{Z}_r = \beta_r + jX_r$ and $\underline{Z}_0 = \beta_0 + jX_0$, then:

$$P_m = \frac{F_0^2\,\beta_r}{(\beta_0 + \beta_r)^2 + (X_0 + X_r)^2}. \tag{19'}$$

If the oscillomotor is given, the constant quantities are F_0, β_0, X_0; the problem consists in studying the maximum of the expression (19'), function of the variables β_r, X_r, concerning the mechanical receiver. Consequently, it must be annuled $\partial P_m/\partial\beta_r$ and $\partial P_m/\partial X_r$. One obtains:

$$(\beta_0 + \beta_r)^2 + (X_0 + X_r)^2 - 2\beta_r(\beta_0 + \beta_r) = 0, \qquad 2\beta_r(X_0 + X_r) = 0;$$

in the hypothesis $\beta_r \neq 0$, these equation system yields:

$$\beta_r - \beta_0 = 0, \qquad X_r + X_0 = 0,$$

i.e.

$$\underline{Z}_0^* = \underline{Z}_r, \tag{20}$$

or:

$$Z_0 = Z_r, \qquad \arg(\underline{Z}_r) = -\arg(\underline{Z}_0^*). \tag{20'}$$

Thus, the *theorem of maximum transfer of the active mechanical power* is: *the active mechanical power, transmitted to an one-connection receiver from an oscillomotor, is maximum, if the equivalent mechanichal impedance of the oscillomotor, taken conjugate, equalize the equivalent mechanical impedance of the one-connection receiver.* This theorem is susceptible of an immediate generalization.

In the conditions (20) or (20′), the maximum active mechanical power, transferred to the receiver, has the expression:

$$P_{m\,\max} = (P_m)_{\underline{Z}_r = \underline{Z}_0^*} = \frac{F_0^2}{4\beta_0}. \tag{21}$$

Consequently, in the conditions of adaptation oscillomotor-receiver, the mechanical efficiency of the active mechanical power transfer is 0.5. For high powers of the oscillomotor, with a view to obtaining a better efficiency, the next condition must be respected:

$$\mathcal{R}e\,(\underline{Z}_0) < \mathcal{R}e\,(\underline{Z}_r), \tag{22}$$

i.e. when the internal mechanical resistance of the oscillomotor is smaller as the equivalent mechanical resistance of the receiver (for instance, by oscillocompressors for refrigerating plants).

Polytechnic Institute of Brashov,
Department of Electrical Engineering

REFERENCES

1. Braier A., Rosman H., *Asupra bilanțului energetic în cazul oscilatorilor liniari perturbați periodic.* Bul. Inst. polit. Iași, 1960, **VI (X)**, *3 — 4*, pp. 69—74.
2. Harris C. M., Crede C. E., *Shock and Vibration Handbook.* Vol. **I** *(Basic Theory and Measurements).* McGraw-Hill Book Co., New York-Toronto-London, 1961.
3. Теумин И. И., *Ультразвуковые колебательные системы.* Машгиз, М., 1959, стр. 197 — 198.

COMPORTAREA ENERGETICĂ A ACȚIONĂRILOR ELECTROMECANICE CU MOTOARE OSCILANTE LINIARE

(Rezumat)

În acționările electromecanice cu motoare oscilante liniare, interesează determinarea puterilor mecanice și enunțarea unor condiții de adaptare, necesare realizării unui transfer maxim de putere mecanică activă între motor și receptorul oscilant. Aceste chestiuni nu sînt tratate în literatură.

În această lucrare se caută răspuns la problemele enunțate, prezentîndu-se și teoreme de conservare ale puterilor mecanice active și reactive, în ipoteza unei forțe electromagnetice sinusoidale și a unei legi de deplasare a armăturii mobile de același tip.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

УДК 621.313.333.025.1:621.319.4

ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИЙ СПОСОБ РАСЧЕТА ОСНОВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК И ВЫЯВЛЕНИЕ РЕГУЛИРОВОЧНЫХ СВОЙСТВ ОДНОФАЗНОГО КОНДЕНСАТОРНОГО ДВИГАТЕЛЯ ПРИ ПЕРЕМЕННОЙ ЧАСТОТЕ

М. З. ХАМУДХАНОВ и Н. М. УСМАНХОДЖАЕВ

1. *Введение*

Целью настоящей работы является рассмотрение регулировочных свойств и практически удобного метода расчета однофазного конденсаторного асинхронного двигателя (ОКАД) при его частотном управлении, который работает по наиболее простой схеме с двумя симметричными (с одинаковой фазной зоной) обмотками на статоре и при постоянной величине емкости фазосдвигающего конденсатора C_φ (рис. 1). Постоянство C_φ, наряду с упрощением схемы двигателя, является важным технико-экономическим и эксплуатационным фактором при практическом применении ОКАД в качестве приводного двигателя специфичных производственных механизмов. Например, сюда относятся привода бурения нефтяных и газовых скважин, скважин для использования подземных грунтовых вод, а также погружных насосов, систем орошения и обводнения, передвижных ремонтных установок.

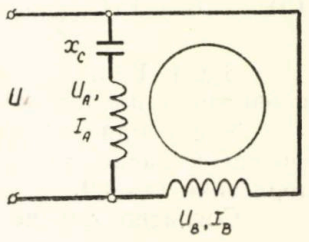


Рис. 1. — Схема включения однофазного конденсаторного асинхронного двигателя (ОКАД).

Расчет основных характеристик ОКАД при переменной частоте аналитическим способом, использующим методы симметричных составляющих, неподвижных координат, двух реакций и др. характеризуются чрезмерно сложными комплексными аналитическими выражениями, чаще всего лишенными практической ценности. Поэтому в данной работе для расчета механических, рабочих и регулировочных харак-

теристик ОКАД с частотным управлением использован графоаналитический способ, разработанный для расчета характеристик такого двигателя, работающего при постоянной частоте [1], [2].

2. *Основные соотношения и графические построения*

На основе уравнения равновесия напряжений для ОКАД (рис. 1) имеем:

$$\dot{U} = \dot{U}_B, \quad \dot{U} = \dot{U}_A + \dot{I}_A X_C = \dot{U}_A + \frac{\dot{I}_A}{Y_C}. \tag{1}$$

Линейный ток двигателя равен сумме фазных токов:

$$\dot{I} = \dot{I}_A + \dot{I}_B. \tag{2}$$

Разлагая токи фаз $\dot{I}_A$ и $\dot{I}_B$ и напряжение $\dot{U}_A$ на симметричные составляющие [2] по формулам

$$\dot{I}_A = \dot{I}_1 + \dot{I}_2, \quad \dot{I}_B = -\mathrm{j}\dot{I}_1 + \mathrm{j}\dot{I}_2, \quad \dot{U}_A = \dot{U}_1 + \dot{U}_2, \tag{3}$$

$$\dot{U}_1 = \frac{\dot{I}_1}{Y_1}, \quad \dot{U}_2 = \frac{\dot{I}_2}{Y_2} \tag{4}$$

и решая полученные равенства относительно токов прямой $\dot{I}_1$ и обратной $\dot{I}_2$ последовательностей, получим:

$$\dot{I}_1 = Y_1 \dot{U} \frac{Y_2 + (1 - \mathrm{j}) Y_C}{2Y_C + Y_1 + Y_2}, \tag{5}$$

$$\dot{I}_2 = Y_2 \dot{U} \frac{Y_1 + (1 + \mathrm{j}) Y_C}{2Y_C + Y_1 + Y_2}. \tag{6}$$

Здесь Y_1 и Y_2 — полные проводимости фазы для токов прямой и обратной последовательностей.

Уравнения (5) и (6) являются исходными для построения графических зависимостей, позволяющих рассчитывать основные характеристики ОКАД.

Согласно определению прямо и обратно вращающихся полей, члены в числителях (5) и (6) $Y_1\dot{U}$ и $Y_2\dot{U}$ представляют векторы токов $\dot{I}_s$ и $\dot{I}_{2-s}$ фазы двухфазного симметрично работающего двигателя соответственно при скольжениях s и $2 - s$. Концы этих векторов при изменении скольжения скользят по отдельным хордам одной и той же окружности (рис. 2). Прибавляя к ним векторы $(1 - \mathrm{j}) Y_C \dot{U}$ (отрезок OF) и $(1 + \mathrm{j}) Y_C \dot{U}$ (отрезок ON) получаем результирующие векторы $\dot{b}$ и $\dot{c}$, равные числителям (5) и (6).

Построение векторов, характеризующих знаменатель уравнений (5) и (6) производится следующим образом. Соединяются концы векторов токов $\dot{I}_s$ и $\dot{I}_{2-s}$. Середина полученного вектора (кстати, эта

средняя точка с изменением скольжения меняется по малой окружности, проходящей через точки $s = 1$, $s = \infty$ и центра диаграммного круга) по отношению к началам координат представляет суммарный вектор, равный $(Y_1 + Y_2)/2$, а прибавление к последнему $Y_C\dot{U}$ (отрезок OD) дает результирующий вектор $\dot{a}$, равный знаменателю (5) и (6) умноженному на $\dot{U}/2$.

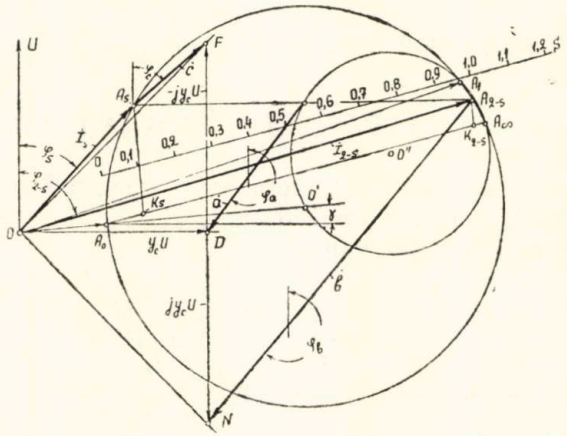


Рис. 2. — Круговая диаграмма ОКАД мощностью 2,8 *квт* и фазным напряжением 156 *в* при постоянной частоте.

Тогда уравнения (5) и (6) примут следующий вид:

$$(7)\qquad \dot{I}_1 = \frac{Y_1}{2}\cdot\frac{\dot{b}}{\dot{a}}U = \dot{I}_s\frac{\dot{b}}{2\dot{a}}, \quad (8)\quad \dot{I}_2 = \frac{Y_2}{2}\cdot\frac{\dot{c}}{\dot{a}}U = \dot{I}_{2-s}\frac{\dot{c}}{2\dot{a}}.$$

Моменты вращения ОКАД для прямой и обратной последовательностей при учете (7) и (8) будут

$$(9)\qquad M_1 = M_s\left(\frac{b}{2a}\right)^2, \quad (10)\qquad M_2 = M_{2-s}\left(\frac{c}{2a}\right)^2,$$

а результирующий момент ОКАД

$$(11)\qquad M = M_1 - M_2.$$

В (9) и (10) M_s и M_{2-s} являются моментами двухфазного двигателя, соответственно при s и $2 - s$, определяемые на диаграмме отрезками A_sK_s и $A_{2-s}K_{2-s}$.

Выражение (9) показывает, что момент ОКАД для прямой последовательности отличается от момента при его симметричной работе

множителем $(b/2a)^2$. В зависимости от режима работы и величины C_φ этот множитель может быть больше или меньше единицы.

Для расчета же рабочих и регулировочных характеристик ОКАД можно воспользоваться следующими выражениями:

а) для линейного тока

$$\dot{I} = \dot{I}_s(1 - \mathrm{j})\frac{\dot{b}}{2a} + \dot{I}_{2-s}(1 + \mathrm{j})\frac{\dot{c}}{2a}; \tag{12}$$

б) для потребляемой мощности

$$P_1 = m_P\left[I_{(s)a}\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + I_{(2-s)}\left(\frac{c}{2a}\right)^2\right], \tag{13}$$

где $m_P = 2Um_i$ — масштаб мощности, m_i — масштаб токов, $I_{(s)a}$ и $I_{(2-s)a}$ — активные составляющие токов I_s и I_{2-s};

в) для полезной мощности

$$P_2 = \left[M_s\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - M_{2-s}\left(\frac{c}{2a}\right)^2\right]\frac{n_f}{975}, \tag{14}$$

где n_f — текущая скорость двигателя;

г) для к. п. д.

$$\eta = \frac{P_2}{P_1}; \tag{15}$$

д) для перегрузочной способности двигателя

$$\lambda = \frac{M_{kf}}{M_{Hf}}, \tag{16}$$

где M_{kf} и M_{Hf} — максимальный и номинальный при данной частоте моменты;

е) для коэффициента мощности

$$\cos\varphi = \frac{P_1}{UI}; \tag{17}$$

ж) для текущего скольжения

$$s_f = \frac{n_{0f} - n_f}{n_{0f}}, \tag{18}$$

где n_{0f} — синхронная скорость двигателя при данной частоте.

3. *Расчеты механических и регулировочных характеристик*

Как известно, в трехфазных симметричных асинхронных двигателях (АД) в целях экономичного регулирования напряжение на его зажимах в зависимости от класса рабочего механизма, на который работает двигатель, определяется по известной формуле М. П. Костенко [3]. Этот закон исходит из наличия кругового вращающегося поля в машине. В случае, когда в машине возникает эллиптическое поле, естественно, он не будет обеспечивать оптимальные показатели при частотном управлении ОКАД. Поэтому в данном случае экономичный закон регулирования должен быть другим. Если закон частотного управления идеализированного трехфазного асинхронного двигателя обеспечивает одновременно оптимальные к. п. д., $\cos\varphi$ и перегрузочную способность λ, то в ОКАД при заданном значении C_φ оптимальные показатели двигателя возможно получить только по одному параметру (например, по к. п. д. или же по λ и т. д.).

Оптимальный режим ОКАД по всем параметрам одновременно можно достичь лишь заставляя его работать в симметричном режиме, что требует непрерывного регулирования емкости фазосдвигающего конденсатора в функции частоты и нагрузки. В этом случае закон М. П. Костенко будет справедлив и для ОКАД. Однако такое изменение C_φ практически трудноосуществимо, так как требует или наличия силовых конденсаторов с переменной емкостью или же иметь батарею конденсаторов с очень большим числом ступеней. Поэтому практически целесообразно осуществлять работу ОКАД с фазосдвигающим конденсатором постоянной емкости, а функцию оптимизатора работы ОКАД по отдельным его параметрам возложить на прилагаемое к двигателю напряжение.

Необходимо отметить, что получаемые при этом аналитические выражения законов оптимального управления $U=\psi(f)$ ОКАД по отдельным параметрам страдают большой громоздкостью, которая затрудняет их практическое использование. Они успешно могут быть использованы лишь в случае применения электронно-вычислительных машин.

Однако все это не означает, что исключается возможность применения закона М. П. Костенко для машин, работающих с эллиптическим полем. Представляет большой практический интерес использования этого закона для частотно-регулируемого ОКАД в целях выявления специфических условий и установления степени его влияния на качественные и количественные показатели двигателя.

Так, ниже рассмотрен, имеющий наибольшее распространение, частный случай закона экономического регулирования:

$$\frac{U}{U_н}=\frac{f}{f_н}. \tag{19}$$

Здесь $f_н$ и f — номинальная и текущая частоты, $U_н$ — номинальное напряжение, приложенное к двигателю.

На рис. 3 приведены точные круговые диаграммы двигателя при различных фиксированных частотах. Они показывают, что напряжение при данном законе относительно мало влияет на основные диаграммы, но зато резко изменяет геометрическое расположение вспомогательных (малых) диаграмм токов. Это главным образом происходит за счет изменения длины хорды основной диаграммы, соответствующей точкам $s = 1$ и $s = \infty$ при изменении частоты.

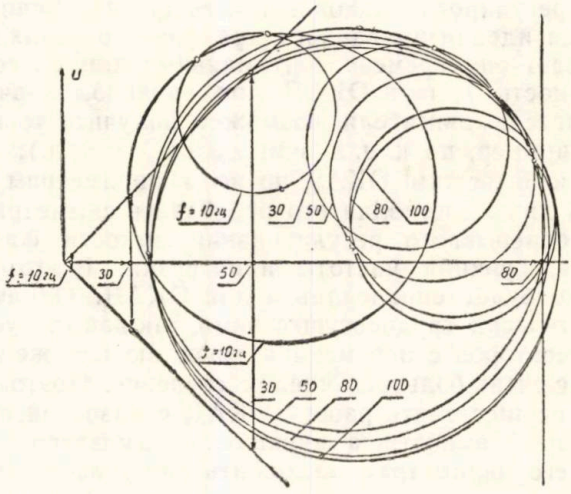


Рис. 3. — Круговые диаграммы ОКАД, мощностью 2,8 *квт* и фазным напряжением 156 *в* при различных частотах.

По диаграммам рис. 3 и по выражениям (1)...(18) легко рассчитать механические характеристики двигателя при различных частотах и заданных величинах емкости фазосдвигающего конденсатора.

Так, для двигателя $P_{2н} = 2{,}8$ *квт*, $M_н = 2{,}88$ *кгм*, $U_н = 156$ *в* при различных постоянных величинах емкости фазосдвигающего конденсатора (100, 200, 300, 400 *мкф*) для случаев восьми фиксированных частот (10, 20, 30, 40, 50, 60, 80, 100 *гц*) на рис. 4 приведено семейство механических характеристик (при расчете не учитывались высшие гармоники м. д. с. двигателя).

Из рис. 4 видно, что при всех $C_ф = \text{const}$. линия точек характеристик, соответствующих максимальным моментам ОКАД, описывает параболу, тогда как при трехфазном симметричном АД эта линия превращается в прямую, параллельную оси скорости. Такое отличие можно объяснить только нелинейным изменением емкостного сопротив-

ления при изменении частоты. Поэтому с уменьшением частоты фазосдвигающий эффект конденсатора начинает проявляться слабее. Это, очевидно, и приведет к увеличению относительного значения моментов от токов обратной последовательности и, следовательно к уменьшению результирующего момента ОКАД при низких частотах.

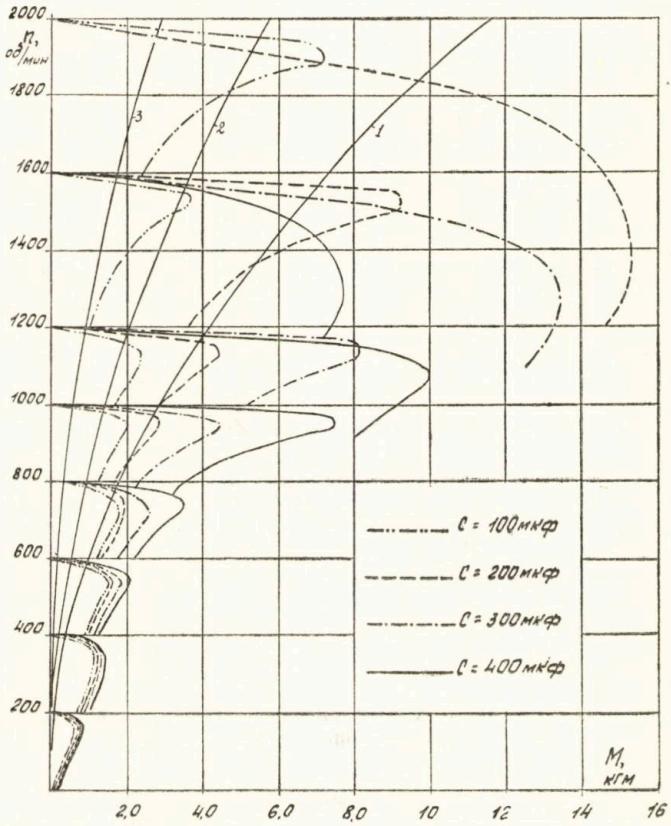


Рис. 4. — Механические характеристики ОКАД, мощностью 2,8 *квт* и фазным напряжением 156 *в* при различных частотах.

Таким образом, если регулирование напряжения по (19) в трехфазном симметричном АД обеспечивает постоянные по величине критические моменты M_{kf} при всех значениях изменения частоты, то этот же закон в ОКАД может обеспечить момент M_{kf}, меняющийся в квадратичной зависимости от частоты (скорости). Такой характер механической характеристики позволяет использовать ОКАД для вентиляторной нагрузки.

На рис. 4 кривой, обозначенной цифрой *1*, показана механическая характеристика статического момента вентиляторной нагрузки (при $f = f_н$ номинальное значение статического момента $M_{сн}$ равно номинальному значению момента двигателя), а на рис. 5 — регулировочные характеристики ОКАД, рассчитанные по выражениям (7)...(18) при $C_\varphi = 300$ *мкф* = const.

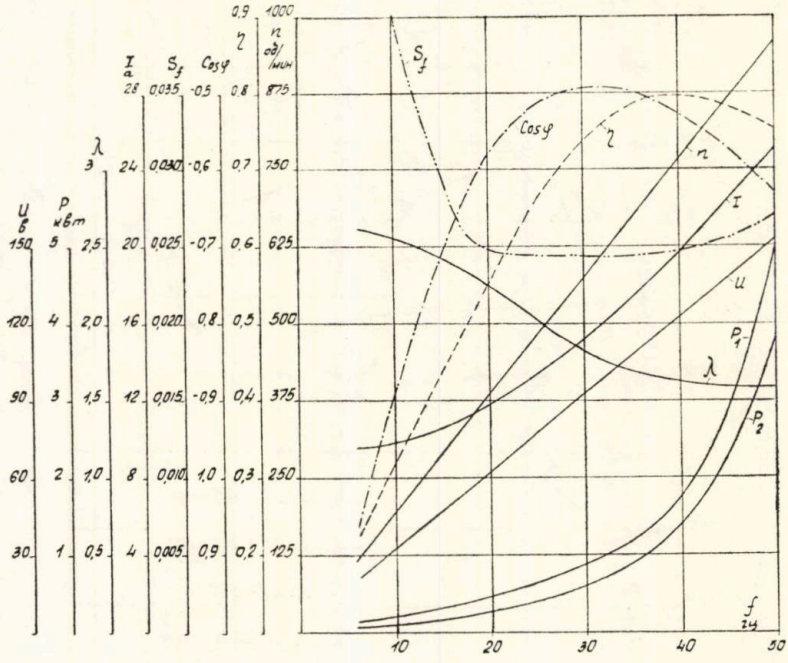


Рис. 5. — Регулировочные характеристики ОКАД, мощностью 2,8 *квт* и фазным напряжением 156 *в*.

Раздельный анализ кривых рис. 5 показывает, что и в ОКАД с понижением частоты растет текущее скольжение. В данном случае этому, помимо заметного влияния активного сопротивления статора при малых *f*, способствует и ослабленное действие фазосдвигающего эффекта конденсатора.

Как и в трехфазных АД коэффициент мощности ОКАД при низких частотах имеет наибольшие значения. С ростом частоты (следовательно и фазосдвигающего эффекта C_φ), cos φ начинает уменьшаться, имея в общем емкостный характер.

Коэффициент статической перегружаемости λ, наоборот, при низких частотах имеет наибольшие значения. Это объясняется повышенным значением как приложенного напряжения, так и скольжения двигателя

(как известно, с увеличением s до критического относительное значение момента от токов обратной последовательности уменьшается).

К. п. д., ток, потребляемая и полезная мощности имеют общеизвестный характер изменения [4]...[6].

При работе ОКАД в диапазоне частот, лежащих выше $f = f_н = 50$ *гц*, наблюдается значительно резкий рост токов (что характерно и для АД, работающих при $f > 50$ *гц* на нагрузку $M_c \equiv n^2$), обусловленным повышенным значением напряжения на отдельных элементах схемы ОКАД и конденсатора. Поэтому верхний предел регулирования частоты при данном значении $C_ф$ должен быть равным значению номинальной частоты.

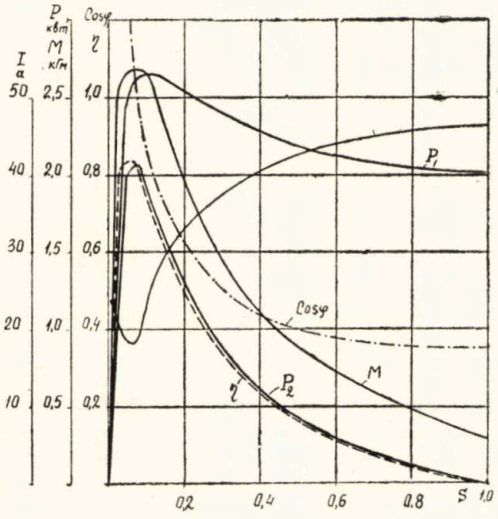


Рис. 6. — Рабочие характеристики ОКАД, мощностью 2,8 *квт* и фазным напряжением 156 *в* при частоте 40 *гц*.

Если же требуется работа двигателя при $f > f_н$, то необходимо уменьшить и нагрузку и величину $C_ф$. На рис. 4 цифрами *2* и *3* нанесены механические характеристики статического момента имеющие при $f = f_н$ соответственно $M_c = M_{дн}/2$ и $M_c = M_{дн}/4$. При этих нагрузках ОКАД может работать соответственно до 80 и 100 *гц* с $C_ф = 200...$ ...100 *мкф*.

Нижняя же граница частот во всех случаях определяется коэффициентом статической перегружаемости двигателя.

Для иллюстрации работы ОКАД при фиксированной частоте и фазосдвигающей емкости на рис. 6 приведены рабочие характеристики

двигателя при $f = 40$ *гц* и $C_{\varphi} = 300$ *мкф* в функции скольжения. Как видно из рисунка, в рабочей зоне энергетические показатели ОКАД имеют достаточно высокие значения.

В целях подтверждения теоретических выводов в лабораторных условиях были проведены экспериментальные исследования по выявлению регулировочных свойств ОКАД при различных законах изменения напряжения в функции частоты.

В качестве ОКАД был использован двигатель, перемотанный по двухфазной симметричной схеме с тремя парами полюсов на базе трехфазного АД промышленной частоты типа А-51-4. Расчетная мощность и напряжение составили $P_{2н} = 2{,}8$ *квт*, $U_{н} = 156$ *в*.

Экспериментальный двигатель работал надежно в диапазоне частот от 10 до 90 *гц* при изменении нагрузки от холостого хода до ее номинального значения.

В частном случае, при регулировании напряжения пропорционально частоте были получены те же характеристики и результаты, которые были выявлены и изложены выше.

Во всех экспериментальных исследованиях в качестве источников переменной частоты и напряжения были использованы однофазный вентильный (тиратронный и тиристорный) преобразователь с емкостной коммутацией и синхронный преобразователь частоты. Наилучший результат достигался при питании ОКАД от вентильного преобразователя частоты. Здесь фазосдвигающие конденсаторы двигателя вели двойную работу: свою непосредственную функцию образования второй фазы двигателя и вспомогательную — осуществление частичной коммутации вентилей. Последняя играла благоприятную роль в уменьшении величины емкости коммутирующих конденсаторов инвертора.

Проведенное качественное сравнение результатов расчета с данными экспериментов дали удовлетворительную для практических расчетов сходимость.

4. *Выводы*

1. Графоаналитический способ расчета рабочих характеристик ОКАД для случая постоянной частоты сравнительно легко позволяет рассчитать механические, регулировочные и рабочие характеристики двигателя и при переменной частоте и различных постоянных величинах емкости фазосдвигающего конденсатора.

2. Закон частотного управления М. П. Костенко в условиях ОКАД дает новые, в качественном отношении, результаты. В частности при изменении напряжения пропорционально частоте на базе ОКАД (с неизменным значением фазосдвигающего конденсатора) можно создать электропривод с плавным регулированием скорости для установок с вентиляторной характеристикой статического момента.

3. Диапазон регулирования ОКАД по частоте целиком определяется величиной емкости фазосдвигающего конденсатора. Чем меньше C_φ и нагрузка двигателя — тем больше диапазон регулирования по частоте.

Поступила 10 VI 1967 г.

Узбекский научно-исследовательский институт энергетики и автоматики, Ташкент, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Рихтер Р., *Электрические машины.* Т. **4**, ОНТИ, М., 1939, (пер. с. нем.).
2. Адаменко А. И., *Однофазные конденсаторные двигатели.* Изд. АН УССР, Киев, 1960.
3. Костенко М. П., *Работа многофазного асинхронного двигателя при переменном числе периодов.* Электричество, 1925, *2*.
4. Булгаков А. А., *Частотное управление асинхронными двигателями.* Изд. АН СССР, М., 1955.
5. Хамудханов М. З., *Частотное управление асинхронным электроприводом.* Изд. АН Уз ССР, Ташкент, 1959.
6. Хамудханов М. З., Усманов С. З., Усманходжаев Н. М., Хусанов М. А., *Частотное регулирование скорости электроприводов переменного тока с автоматическим управлением от вентильных преобразователей.* Ташкент, АН Уз ССР, „ФАН", 1966.

METODĂ GRAFOANALITICĂ DE CALCUL A PRINCIPALELOR CARACTERISTICI DE REGLAJ ALE MOTORULUI ASINCRON MONOFAZAT CU CONDENSATOR LA FRECVENŢĂ VARIABILĂ

(Rezumat)

Se expune o metodă grafoanalitică originală permiţînd calculul caracteristicilor mecanice de funcţionare şi de reglaj ale unui motor asincron monofazat cu condensator (MAMC) la reglajul vitezei sale prin frecvenţă.

Din rezultatele obţinute rezultă că legea de comandă prin frecvenţă stabilită de M. P. Kostenko, conduce, în cazul MAMC, la rezultate calitativ noi. În special la variaţia tensiunii proporţional cu frecvenţa se poate obţine un dispozitiv de acţionare cu reglaj lin a vitezei pentru instalaţiile cu caracteristică de ventilator a momentului static.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Schema de conexiuni a motorului asincron monofazat cu condesator (MAMC).

Fig. 2. — Diagrama circulară a MAMC avînd puterea de 2,8 kW şi tensiunea de fază de 156 V, la frecvenţă constantă.

Fig. 3. — Diagramele circulare ale MAMC avînd puterea de 2,8 kW şi tensiunea de fază de 156 V, la frecvenţă variabilă.

Fig. 4. — Caracteristicile mecanice ale MAMC avînd puterea de 2,8 kW şi tensiunea de fază de 156 V, la diverse frecvenţe.

Fig. 5. — Caracteristicile de reglaj ale MAMC avînd puterea de 2,8 kW şi tensiunea de fază de 156 V.

Fig. 6. — Caracteristicile de funcţionare ale MAMC avînd puterea de 2,8 kW şi tensiunea de fază de 156 V la frecvenţa de 40 Hz.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1–2, 1968

D. K. 621-523; 621.313.323

BETRACHTUNGEN ÜBER DEN ELEKTRISCHEN ANTRIEB MIT EINEN VON EINEN SELBSTERREGTEN DREHSTROMSTROMWENDERGENERATOR GESPEISTEN ASYNCHRONMOTOR

VON

IOSIF BERGMAN

Mitteilung an die wissenschaflliche Tagung der Technischen Hochschule Jassy, 28 — 30. September 1967

1. Vorwort

In [1] ... [3] werden einige Probleme des Leerlaufs und der Arbeit bei verschiedenen Belastungsarten des selbsterregten Drehstromstromwendergenerators, erläutert. Bei diesen Generator kann man die Frequenz der Ausgangsspannung, ohne Drehzahländerung, regeln. So wird die Verwendungsmöglichkeit dieses Generators in frequenzgesteuerten elektrischen Antrieben, durchblickt.

In den vorliegenden Studium die die Zusammenfassung eines Teiles der Dissertation sur Erlangung der Doktorwürde des Verfassers ist, werden einige Betrachtungen über die Arbeit der Gruppe die aus einen selbsterregten Drehstromstromwendergenerator und ein Asynchronmotor gebildet ist, dargestellt.

2. Die Selbsterregungsbedingung des Drehstromstromwendergenerators der eine in parallel zum Primärkreis geschaltete Last $\underline{Z}_d$ speist

In [2] werden die Spannungs- und Stromgleichungen des selbsterregten Drehstromstromwendergenerators, der die parallel und in reihe zum Primärkreis geschalteten Scheinwiderstände $\underline{Z}_d$ und $\underline{Z}_s$ speist, dargestellt.

Aus diesen Gleichungen kann man die Selbsterregungsbedingung des Generators, nach einingen Rechnungen, als ein mit den in [1] unter (10) bezeichneten Ausdruck ähnliche Gleichung, erziehlen:

$$r_1 + r_{1t} + K_t^2 (r_2 + r_{2t}) - (1 - s) x_1 K \sin \alpha + \mathrm{j} [x_{1s} + x_{1t} + K_t^2 (x_{2s} + x_{2t})] +$$

$$+ \mathrm{j} [1 + K \cos \alpha + sK (K + \cos \alpha)] + \frac{1}{\underline{Z}_d} \{r_1 [r_{1t} + K_t^2 (r_2 + r_{2t})] -$$

(1)

$$- s x_1 x_{1s} K^2 - (x_1 + x_{1s}) [x_{1t} + K_t^2 (x_{2s} + x_{2t})]\} + \frac{\mathrm{j}}{\underline{Z}_d} \{r_1 [x_{1t} + K_t^2 (x_{2s} +$$

$$+ x_{2t})] + s r_1 x_6 K^2 + (x_1 + x_{1s}) [r_{1t} + K_t^2 (r_2 + r_{2t})]\} = 0.$$

Man hat mit $\underline{Z}_s = 0$ gerechnet.

Aus den imaginaren Teil der Selbsterregungsbedingung kann man den Ausdruck der Frequenz der Generatorspannung, erziehlen [1], [3].

In [3] wird eine Methode zur Erläuterung des im Ständer des leerlaufenden Generators fliessenden Stromes, und der Klemmenspannung, unter Benützung des reelen Teiles der Selbsterregungsbedingung, dargestellt.

3. Die Frequenz des den Asynchronmotor speisenden Stromes, der in parallel zum Primärkreis des Generators geschaltet ist

Zur Kürzung werden zu Beginn der Leerlaufstrom des Asynchronmotors und der Widerstand dessen Ständerwicklung, vernachlässigt. Also kann der Scheinleitwert der parallel zum Primärkreis des selbsterregten Drehstrostromwendergenerators geschalteten Last, in diesem Fall der Asynchronmotor, durch folgender Gleichung ausgedrückt werden:

$$\frac{1}{\underline{Z}_d} = \frac{r'_b/s_d - \mathrm{j}\, 2\pi f (L_a + L'_b)}{(r'_b/s_d)^2 + 4\pi^2 f^2 (L_a + L'_b)^2}. \tag{2}$$

Durch das Einsetzen des Ausdruckes (2) in (1), wird aus den imaginaren Teil der erhaltenen Gleichung der folgende Polynom in s_d und f, erziehlt:

$$m_1 f^3 s_d^2 + m_2 f^2 s_d^2 + m_3 f s_d^2 + m_4 f s_d + m_5 s_d + m_6 f + m_7 = 0, \tag{3}$$

wo

$$\begin{cases} m_1 = 2\pi (L_a + L'_b) [2\pi (L_a + L'_b) (1 + \tau + 2K \cos \alpha + K^2) + a_1], \\ m_2 = -2\pi (L_a + L'_b) [2\pi (L_a + L'_b) \frac{pn}{60} K (K + \cos \alpha) + a_2], \\ m_3 = -2\pi a_3 (L_a + L'_b), \quad m_4 = b_2 r'_b, \quad m_5 = -b_1 r'_b, \\ m_6 = r'_b (1 + \tau + 2K \cos \alpha + K^2), \quad m_7 = -\frac{pn}{60} r'_b K (K + \cos \alpha) \end{cases} \tag{4}$$

und

$$
(5)\quad \begin{cases} a_1 = 2\pi\left(1+\dfrac{L_{1s}}{L_1}\right)[L_{1t}+K_t^2(L_{2s}+L_{2t})]+2\pi K^2 L_{1s}, \\ a_2 = \dfrac{2\pi pn}{60}K^2 L_{1s}, \quad a_3 = \dfrac{r_1[r_{1t}+K_t^2(r_2+r_{2t})]}{2\pi L_1}, \\ b_1 = \dfrac{r_1[L_{1t}+K_t^2(L_{2s}+L_{2t})]}{L_1}+\left(1+\dfrac{L_{1s}}{L_1}\right)[r_{1t}+K_t^2(r_2+r_{2t})]+K^2 r_1, \\ b_2 = \dfrac{pn}{60}K^2 r_1. \end{cases}
$$

Weil die Analyse der Gleichung (3) kompliziert ist, werden hier nur die wichtigsten Einzelfälle durchstudiert.

a) Beim Leerlauf des Asynchronmotors ($s_d = 0$) wird die Gleichung (3):

$$
(6)\qquad m_6 f + m_7 = 0.
$$

Unter Berücksichtigung der Werte von m_6 und m_7 aus (4) hat die Gleichung (6) die folgende Lösung:

$$
(7)\qquad f_0 = \frac{pn}{60}\cdot\frac{K(K+\cos\alpha)}{1+2K\cos\alpha+K^2+\tau}.
$$

Das ist der in [4] erläuterte Ausdruck der Frequenz der Ströme der vom Netz abgeschalteten selbsterregten Drehstromnebenschlussmaschine, welche tatsächlich den leerlaufenden selbsterregten Drehstromstromwendergenerator, darstellt.

Die hier erläuterte Tatsache das die Frequenz der selbsterregten Ströme nicht durch die Einschaltung des leerlaufenden Asynchronmotors verändert wird, wird damit das bei $s_d = 0$ der Asynchronmotor als nicht von Strom durchflossen sei, betrachtet werden kann, weill diesmal sein Sekundärkreis offen gerechnet ist und sein Leerlaufstrom ist vernachlässigt, erklärt.

Um den Leerlaufstrom des Asynchronmotors zu berücksichtigen, behauptet man das der Generator nur den Scheinwiderstand des Magnetisierungskreises des Asynchronmotors $\underline{Z}_m = r_m + jx_m$ speist. Weil der Scheinwiderstand Z_m, besonders der Blindwiderstand x_m, gross ist, ist dessen Einfluss auf den Frequenzwert fellig unbedeutend [1].

b) Beim Nennschlupf s_{dn} des Asynchronmotors können in der Gleichung (3) die Glieder die s_d mit einer gröserer Potenz als 1 enthalten, vernachlässigt werden. Also:

$$(8) \qquad f = -\frac{m_5 s_{dn} + m_7}{m_4 s_{dn} + m_6} = \frac{(b_2/r_b') s_{dn} + (pn/60) K (K + \cos\alpha)}{(b_1/r_b') s_{dn} + 1 + \tau + 2K\cos\alpha + K^2}.$$

Durch die Vernachlässigung von b_2 (man rechnet $r_1 \approx 0$) und Ersetzung des Wertes von b_1 aus (5), erhält man die Gleichung:

$$(9) \qquad f = \frac{pn}{60} \cdot \frac{K (K + \cos\alpha)}{1 + \tau + 2K\cos\alpha + K^2 + (1 + L_{1s}/L_1) K_t^2 (r_2/r_b') s_{dn}}.$$

Aus dieser Gleichung wird der Schluss, das falls der Asynchronmotor mit der Nennlast arbeitet, die Frequenz der vom Generator erzeugten Spannung sehr wenig sinkt, gezogen.

c) Beim Anlauf des Asynchronmotors ($s_d = 1$) wird die Gleichung (3):

$$(10) \qquad m_1 f^3 + m_2 f^2 + (m_3 + m_4 + m_6) f + m_5 + m_7 = 0.$$

Die Auflösung dieser Gleichung ist eine komplizierte Frage. Mit Hilfe des Lehrsatzes von Rolle wird der Kleinstwert der Frequenz f beim Anschalten des stillstehenden Asynchronmotors ($s_d = 1$) bestimmt.

Die annähernde Lösungen der Ableitung des Polynoms (10) sind:

$$f \cong \frac{f_0}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{f_0}{3}\right)^2 - \frac{r_b' b_1}{118 (L_a + L_b')^2 (1 + \tau + 2K\cos\alpha + K^2)}} - \frac{r_b'^2}{118 (L_a + L_b')}.$$

Falls man auf die unter den Radikal befindenden negativen Glieder, die sehr klein sind, verzichtet, erziehlt man:

$$f \cong \frac{f_0}{3} \pm \frac{f_0}{3}.$$

Laut den Lehrsatz von Rolle, wird eine Lösung der Gleichung (10) ihren Wert zwischen f_0 und $2f_0/3$ haben. Also, sogar beim Anlauf des Asynchronmotors kann die Frequenz unter 0,66 der Leerlauffrequenz des Generators nicht sinken. Die anderen zwei Lösungen des Polynoms (10) haben keine praktische Bedeutung.

Das Sinken der Frequenz beim Anwacksen des Schlupfes des Asynchronmotors trägt zur „Erweichung" seiner mechanischen Kennlinie, was offt von grosser Wichtigkeit sein kann, bei.

Die Tatsache das die Frequenz mit den Anwachsen des Schlupfes des Asynchronmotors ein wenig sinkt und das sie nicht mehr als mit 10... 15%, beim Anlauf, sich verkleinert, wird Erfahrungsmässig bewiesen.

Es ist bekannt das die Verminderung der Frequenz, beim Anlauf des Asynchronmotors, zur Vergrösserung seines Anlaufmomentes, falls die Spannung nicht sinkt, bringen kann. Die Steigerung des Anlaufmomentes ist eine ständige Sorge bei der Benützung von Asynchronmotoren.

4. Die vom Schlupf des Asynchronmotors abhängende Spannungsänderung des Generators

In [3] wurde die Hauptinduktivität des Ständers des leerlaufenden Generators L_1 aus den reelen Teil des Ausdruckes der Selbsterrungsbedingung erläutert. Es wurde, das die Selbsterregung stabiler ist, also der Ständerstrom I_1 und die Klemmenspannung U_1 um so grösser sind, je L_1 kleiner ist, bewiesen.

Um den Einfluss des Asynchronmotors auf die Funktionierung des Generators erforschen zu können, wird vom reelen Teil der Gleichung (1) die Hauptinduktivität des Ständers des Generators, der Scheinleitwert des Asynchronmotors sei durch die Relation (2) ausgedrückt, erläutert:

$$L_1 = \frac{r_1 + r_{1t} + K_t^2 (r_2 + r_{2t}) - c_1 m' + c_2 n'}{(2\pi pn/60) K \sin\alpha + 2\pi f d_1 m' - 2\pi f d_2 n'}, \tag{11}$$

wo

$$\begin{cases} c_1 = x_{1s}[x_{1t} + K_t^2 (x_{2s} + x_{2t}) - r_1 [r_{1t} + K_t^2 (r_2 + r_{2t})], \\ d_1 = x_{1t} + K_t^2 (x_{2s} + x_{2t}) + s x_{1s} K^2, \\ c_2 = r_1 [x_{1t} + K_t^2 (x_{2s} + x_{2t})] + x_{1s} [r_{1t} + K_t^2 (r_2 + r_{2t})], \\ d_2 = r_{1t} + K_t^2 (r_2 + r_{2t}) + s r_1 K^2, \\ m' = \dfrac{r_b'/s_d}{(r_b'/s_d)^2 + (x_a + x_b')^2} \text{ und } n' = \dfrac{x_a + x_b'}{(r_b'/s_d)^2 + (x_a + x_b')^2}. \end{cases} \tag{12}$$

Es ist offenbar, das der Ausdruck der Hauptinduktivität des Ständers des Generators L_1 der einen leerlaufenden Asynchronmotor speist ($s_d = 0$), bei Vernachlässigung seines Leerlaufstromes identisch mit der in [3] für den unbelasteten Generator erläuterten Relation wird, ersichtlich.

In der Wirklichkeit ist der leerlaufende Asynchronmotor bereits nur ein Blindstromverzehrer.

In einer folgenden Arbeit wird man die Tat das bei Blindlast die Hauptinduktivität L_1 anwächst, beweisen. Beim Anwachsen von L_1, werden der Strom I_m und zugleich der Ständerstrom des Generators I_1 und dessen Klemmenspanung U_1 kleiner. Die Klemmenspannugsverminderung des Generators ist, beim Leerlauf des Asynchronmotors, wegen dessen grossen Leerlaufscheinwiderstand, nicht gross.

Um den Einfluss des Schlupfes des Asynchronmotors erläutern zu können, ist, das n' zugleich mit dem Schlupf anwächst und m' sich bis zu einen Höchstwert vergrössert um dann sich zu vermindern, zu beachten. Der Koeffizient c_1 ist durch den relativ grossen Wert des Bürsten-Stromwender Kontaktwiderstandes r_2, klein.

Aus den hier Dargelegten, kann man die Folgerung das L_1 in gewissem Mass kleiner wird, falls m' mit den Schlupf anwächst, ziehen. Nachdem m'

durch seinen Höchstwert vorübergeht, beginnt L_1 grösser zu werden. Also für die kleinen Werte des Schlupfes (um den Nennschlupf), wird L_1 kleiner und die Klemmenspannung U_1 grösser, falls der Schlupf anwächst. Bei grossen Schlupfen, die sich zu $s_d = 1$ nähern, muss man mit einen wichtigeren Spannungsabfall rechnen.

Weil die Koeffizienten c_1, c_2, d_1 und d_2 von den kleinen Wirk- und Streublindwiderstanden des Generators abhengen, ist der Einfluss der Glieder die Funktion der Last sind, auf den Wert von L_1, gering.

Dadurch das der beim Anlauf erscheinende Spannungsabfall mit einer Verminderung der Frequenz verbunden ist, ist nicht mit einer wichtigen Verkleinerung des Anlaufmomentes zu rechnen.

5. Erfahrungsmässige Prüfung

Als selbsterregter Drehstromstromwendergenerator wurde eine Maschine mit einfachem Bürstensatz von 1/1, 5/3,1 kW, 1750/1500/800 U/min bei 50 Hz und $2p = 4$, die mit einen Zwischentransformator mit regelbaren Anzapfungen vorgesehen ist, benützt. Der vom Generator gespeiste Asynchronmotor von 0,6 kW, 380 V, 1,72 A, 1440 U/min, $\cos \varphi = 0{,}8$ bei $f = 50$ Hz, treibt eine Wirbelstrombremse, die als Last dient, an.

Der Generator wird mit der konstanten Geschwindigkeit $n = 1\,500$ U/min angetrieben. Sein Gesamtübersetzungsverhältniss sei $K = 2{,}9$.

Es werden zwei Familien Arbeitskennlinien der Gruppe die aus den selbsterregten Drehstromstromwendergenerator und ein Asynchronmotor zusammen gegliedert ist, und zwar für die Bürstenverdrehwinkel des Generators $\alpha = 161°$ (die mit voller Linie gezeichneten) und $\alpha = 51° 30'$ (die mit unterbrochener Linie gezeichneten), dargestellt.

In Abb. 1 sind die Frequenz- und Klemmenspannungskennlinien des Generators als Funktion der vom Asynchronmotor aufgenommenen Leistung, $f = f(P_d)$ und $U_1 = f(P_d)$, gezeichnet. Mit der Leistungssteigerung ist ein Frequenzabfall von 7% bei $\alpha = 161°$ und von nur 1,4% bei $\alpha = 51° 30'$, weil im ersten Fall der Motorschlupf grösser ist, ersichtlich. Der Spannungsabfall ist beim Leerlauf des Motors grösser.

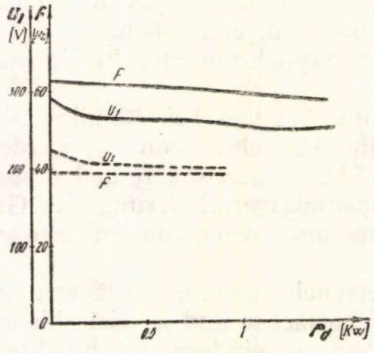


Abb. 1

Die Kennlinien der Geschwindigkeit n und des Relativschlupfes s_{rel} des Asynchronmotors sowie die des vom Motor aufgenommenen Stromes I_d, werden als Funktion des Nutzmomentes M, in Abb. 2 dargestellt. Das Nutzmoment $M = 5{,}45$ Nm wurde, um den Motor nicht termisch zu überbeanspruchen, nicht überschritten. In diesem Fall sind die Regelungsgrenzen der Geschwindigkeit des Motors, im Vergleich zu dessen Synchrondrehzahl n_1, bei 50 Hz, $1{,}22n_1$ bzw. $0{,}77n_1$ beim Leerlauf und n_1 bzw. $0{,}7n_1$ für den Lastmoment $M = 5{,}45$ Nm.

Der Leerlaufstrom des Asynchronmotors ist bei den kleinen Frequenzen grösser als bei den grossen, obwohl im ersten Fall die Spannung geringer ist. Für das selbe Nutzmoment wird der Asynchronmotor einen um so grösseren Ständerstrom I_d desto grösser die Frequenz ist, benötigen.

Die in den Generatorkreisen flüssenden Ströme I_1, I_{1t}, und I_2 sind als Funktion der dem Asynchronmotor zugeführten Leistung P_d, in Abb. 3 dargestellt.

Ebenso wie die Klemmenspannung U_1 sinken die Ströme I_1, I_{1t} und I_2 falls der Generator den leerlaufenden Motor speist, verhältnissmässig viel. Beim Anwachsen der vom Generator entnommenen Wirkleistung P_d, werden dessen Ströme I_1, I_{1t} und I_2 grösser, während die Spannung U_1 fast unverändert bleibt.

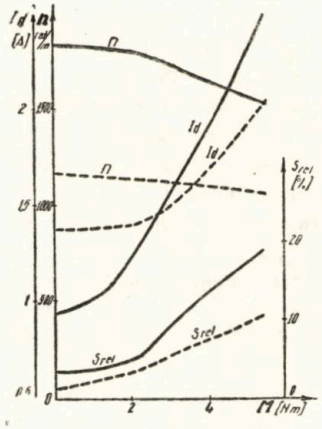


Abb. 2

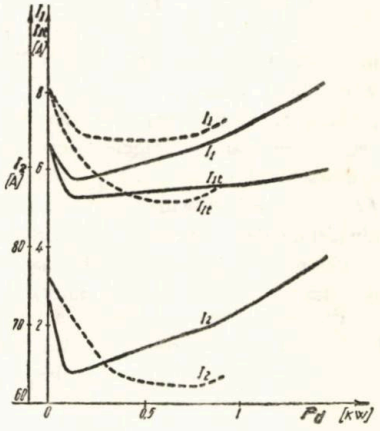


Abb. 3

6. Schlussfolgerungen

1. Der selbsterregte Drehstromstromwendergenerator kann Spannungen veränderlicher Frequenz die zur Speisung eines in einem regelbaren elektrischen Antriebes arbeitenden Asynchronmotors dienen kann, erzeugen.

2. Die Frequenz der vom selbsterregten Drehstromstromwendergenerator erzeugten Spannung sinkt mit den Anwachsen des Schlupfes des vom Generator gespeisten Asynchronmotors. Die Frequenzverminderung ist nicht gross und führt zu einer Erweichung der mechanischen Kennlinie des Motors.

3. Die Klemmenspannung und die Ströme, die in die Kreise des Generators, der einen leerlaufenden Asynchronmotor speist flüssen, sind merklich als bei dessen Leerlauf, kleiner.

4. Bei Vergrösserung der Belastung des Asynchronmotors, werden die inneren Ströme des Generators grösser, während seine Klemmenspannung fast unverändert bleibt.

5. Der beim Anlauf des Asynchronmotors erscheinende Spannungsabfall ist von einer Frequenzsenkung begleitet, was also zu keiner beträchtlichen Verkleinerung des Anlaufmomentes bringen kann.

6. Die theoretischen Betrachtungen sind Erfahrungsmässig geprüft.

Bedeutung der wichtigsten Formelzeichen

f — Frequenz, f_0 — Leerlauffrequenz des Generators, I_m — fiktiver Ständerstrom, I_1, I_2—Ständer- und Läuferstrom des Generators, I_{1t} — Primärstrom des Zwischentransformators, I_d — Ständerstrom des Asynchronmotors, $j = \sqrt{-1}$, K — Gesamtübersetzungsverhältniss des Generators und Transformators, K_t — Übersetzungsverhältniss des Transformators, M—Nutzmoment des Asynchronmotors, n_1 — Synchrondrehzahl des Asynchronmotors bei 50 Hz, n — Drehzahl des Generators, p — dessen Polpaarzahl, P_d — die dem Ständer des Asynchronmotors zugeführte Leistung, r_1, r_2, r_{1t}, r_{2t} — Widerstände je Phase, der Ständer- und Läuferwicklung des Generators bzw. der Primär- und Sekundärwicklung des Transformators, r_b' — der zu dessen Ständer umgerechnete Widerstand einer Läuferphase des Asynchronmotors, s — Generatorschlupf, $s_d = s_{rel}$, s_{dn} — Schlupf des Asynchronmotors bzw. dessen Nennschlupf, $x_1 = 2\pi f L_1$ — Hauptblindwiderstand der Ständerwicklung des Generators, x_{1s}, x_{2s}, x_{1t}, x_{2t} — Streublindwiderstände der Ständer- und Läuferwicklungen des Generators bzw. der Primär- und Sekundärwicklung des Zwischentransformators, $x_a = 2\pi f L_a$, $x_b' = 2\pi f L_b'$ — Streublindwiderstände der Ständerwicklung des Asynchronmotors, bzw. der Läuferwicklung, zum Ständer umgerechnet, U_1 — die den Asynchronmotor aufgedrückte Spannung, Z_d, Z_s — die Lastscheinwiderstände die parallel bzw. in reihe mit den Primärkreis geschaltet sind, α — Bürstensatzverdrehwinkel, $\tau = [x_{1s} + x_{1t} + K_t^2(x_{2s} + x_{2t})]/x_1$.

Technische Hochschule Jassy,
Lehrstuhl der elektrischen Messen
und elektrischen Maschinen

LITERATURVERZEICHNIS

1. Bergman I., Corlăţeanu V., Şerban Gh., Leonte P., Ştirbu V., St. şi cerc. şt., Fizică şi Şt. tehn., Acad. R. P. R., filiala Iaşi, 1961, **XII**, *2*, pp. 375—382.
2. Bergman I., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI (XV)**, *1 — 2*, pp. 261 — 274.
3. — Bul. Inst. polit. Iaşi, 1967, **XIII (XVII)**, *3 — 4*, pp. 391 — 402.
4. Corlăţeanu V., Bergman I., Şerban Gh., Leonte P., Ştirbu V., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1961, **VII (XI)**, *3 — 4*, pp. 207 — 220.

COSIDERAŢII PRIVIND ACŢIONAREA ELECTRICĂ CU UN MOTOR ASINCRON ALIMENTAT DE LA UN GENERATOR TRIFAZAT CU COLECTOR AUTOEXCITAT

(Rezumat)

Generatorul trifazat cu colector autoexcitat constituie o sursă de tensiune de frecvenţă reglabilă, ce poate fi utilizată în acţionarea electrică cu comanda prin frecvenţă.

Se demonstrează teoretic şi se verifică experimental faptul că frecvenţa tensiunii produse de generatorul trifazat cu colector autoexcitat scade cu creşterea alunecării motorului asincron alimentat de generator.

Se arată de asemenea că tensiunea la bornele generatorului scade cînd se cuplează motorul asincron funcţionînd în gol şi rămîne aproximativ constantă cu creşterea sarcinii motorului.

Curenţii din circuitele generatorului scad la cuplarea motorului asincron neîncărcat şi cresc cînd se măreşte sarcina motorului.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

C. D. 621.3.015.34

CONTRIBUTION À LA DÉTERMINATION DE L'INFLUENCE DES PARAMÈTRES INDUCTIFS ET CAPACITIFS DES BOBINES CYLINDRIQUES, SUR LES SOLLICITATIONS DE L'ISOLEMENT TRANSVERSAL DE LA BOBINE SOUMISE À L'ONDE DE CHOC DE TENSION

PAR

M. VOICU

Communication présentée dans la session scientifique de l'Institut Polytechnique de Jassy, 28—30 Septembre 1967

1. Introduction

Les recherches effectuées dans la période 1945—1950, concernant les phénomènes de choc dans les transformateurs, conséquences de l'intérêt suscité par le développement du transport et des utilisations de l'énergie électrique, ont conduit vers la considération d'un schéma équivalent de la bobine cylindrique à une seule couche soumise à l'onde de choc de tension, d'une forme essentiellement nouvelle, à l'aide de laquelle on essayait à tenir compte effectivement du fait que le flux magnétique Φ, qui enchaîne la bobine, est fonction encore de la coordonnée axiale x'. Dans l'hypothèse que la bobine est homogène, la dépendance du flux de la coordonnée axiale est donnée [1] par la relation :

$$\Phi(x', t) = \int_0^{x'} M(x', s)\, i(s, t)\, ds, \qquad x', s \in [0, l],$$

où : $i(s, t)$ est la valeur instantanée du courant dans le point s et au moment t, $M(x', s)$ a les dimensions d'une inductance et physiquement représente l'inductance mutuelle entre les points x' et s, l est la longueur axiale de la bobine.

Dans la littérature [1]...[3] on montre que la fonction $M(x', s)$, obtenue par voie expérimentale, peut être approximée d'une manière satisfaisante par une exponentielle de la forme :

$$M(x', s) = M_0 e^{-\lambda|x'-s|}, \qquad x', s \in [0, l],$$

où : M_0 est une constante qui dépend seulement des paramètres géometriques [1] et qui pour $x' = s$ représente l'inductance propre d'un élément d'enroulement de longueur unité, λ est un nombre réel et positif, qui peut être déterminé par voie expérimentale (constante ayant la dimension inverse d'une longueur).

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

Compte tenu de cettes considerations, Heller, Hlávka et Veverka [1] ont apporté une remarquable correction au schéma équivalent proposé par Wagner (1915) et sur la base de ce schéma corrigé (fig. 1) ils ont obtenu une équation differentielle au dérivées partielles, de quatrième ordre, de la forme :

$$(1)\qquad \frac{\partial^4 u}{\partial x'^4} - 2\lambda \frac{w^2}{l^2} M_0 K \frac{\partial^4 u}{\partial x'^2 \partial t^2} - \lambda^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} + 2\lambda \frac{w^2}{l^2} M_0 C \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

où : M_0, K, C ont les significations indiquées dans la fig. 1, w est le nombre total de spires de la bobine.

Récemment, une équation analogue à (1), obtenue à l'aide d'un schéma équivalent qui tient compte et de la résistence du fil, a été résolue par Lohanin [6], sa solution générale étant

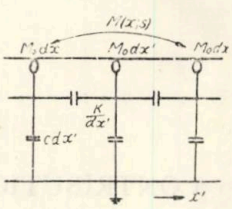


Fig. 1

$$(2)\qquad u(x', t) = U_{cs}(x') + \sum_{1}^{\infty} A_k(x')\, e^{-\delta_k t} \cos \omega_k t,$$

où : $U_{cs}(x')$ représente la loi de répartition quasistationnaire de tension (à $t = \infty$) et $A_k(x')\, e^{-\delta_k t} \cos \omega_k t$ est l'harmonique de tension de k-ième ordre dans le point x'.

Des considérations ultérieures concernant l'équation (2) ont mené finalement à un nombre de simplifications importantes [6], mais avec le sacrifice de l'abandon de la dépendence explicite entre phénomène (sa forme analytique) et l'élément nouveau introduit dans le schéma équivalent, à savoir le couplage magnétique entre les divers points de l'enroulement.

Une variante du schéma de la fig. 1, due à Lovass-Nagy et K. Szendi [3], dans laquelle M_0, K, C sont discrètement répartis, facilite l'application avec succès du calcul matriciel avec l'obtention de résultats interessants à l'égard des oscillations de tension, mais il est assez difficile d'établir, sur cette voie, de quelle façon influencent les paramètres de la bobine les phénomènes transitoires ; de même ce procédé n'offre pas une possibilité d'optimisation des sollicitations de l'isolement de la bobine.

Devant cette situation dans laquelle compte tenu de ce qu'on a mentionné ci-dessus, on ne peut pas tirer une conclusion quant à l'influence exercée par les paramètres inductifs ($\lambda l = 2\psi$) et capacitifs ($\sqrt{C/K}\, l = \varphi$), sur les sollicitations de l'isolement transversal, nous nous proposons de trouver dans ce que suit une modalité de résolution de ce problème.

2. Considérations générales sur le régime transitoire

Remarque 1. Les études théoriques ont montré que le processus transitoire à l'application d'un choc orthogonal (la fonction unité de Heaviside) est de nature oscillatoire [1], [2], [6].

Dans ce processus la répartition initiale $U_i(x') = u(x',0)$ et la répartition quasistationnaire $U_{cs}(x') = u(x',\infty)$ de tension le long de l'enroulement représentent des états d'équilibre ; on passe du premier état au dernier par des oscillations, fonctions du temps et de l'espace.

Remarque 2. En utilisant une terminologie usuelle en automatique et en traduisant les affirmations de [5] pour ce cas, on peut montrer que, puisque l'excitation est la fonction unité de Heaviside, la réponse transitoire est de la forme :

$$(3)\qquad a(t) = u(t)\, b(t),$$

où : $a(t)$ est la réponse à la fonction unité de Heaviside (par exemple le courant d'entrée dans la bobine), $u(t)$ est la fonction unité de Heaviside, $b(t)$ est la fonction poids (la réponse à application du choc unitaire Dirac).

En appliquant à la relation (3) la transformée Laplace, on obtient :

$$A(p) = \frac{1}{p} B(p), \tag{4}$$

où $B(p)$ est la fonction de transfert, respectivement l'admittance de la bobine vue à l'entrée. De la relation (4) on deduit en utilisant une propriété bien connue, que :

$$a(t) = \int_0^t b(t)\,\mathrm{d}t,$$

alors

$$\lim_{t\to\infty} a(t) = a(\infty) = \int_0^\infty b(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{p\to 0} \int_0^\infty b(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \lim_{p\to 0} B(p) = B(0).$$

Par une opération de normation, on peut obtenir $B(0) = 1$ et par conséquant $a(\infty) = 1$. Les systèmes de ce type s'appelent intégraux ou astatiques, c'est-à-dire l'erreur de position s'annule pour $t \to \infty$.

3. Définition des amplitudes maximum et des potentiaux

On peut affirmer, par conséquant, que le système représenté par le schéma équivalent adopté (fig. 1) est un système astatique. Cet aspect se reflète dans les expressions analytiques de quelques grandeurs, par exemple $u(x', t)$ et $i(x', t)$.

En faveur des ces affirmations plaide de plus la relation (2).

Puisque l'erreur s'annule pour $t \to \infty$ (processus continu et monotone) on peut affirmer que les amplitudes maxima des oscillations de tension ont lieu à $t = 0$ et leurs expressions analitiques sont données par :

$$A_m(x') = u(x', \infty) - u(x', 0) = U_{cs}(x') - U_i(x'). \tag{5}$$

De méme l'enveloppe des valeurs maximum des oscillations (les potentiaux) est donnée par :

$$U_m(x') = u(x', \infty) + A_m(x') = 2U_{cs}(x') - U_i(x'). \tag{6}$$

Compte tenu des considérations ci-dessous, $U_i(x')$ et $U_{cs}(x')$ peuvent être exprimées en fonction des parametres φ et ψ à l'aide de relations assez simples.

a) *Répartition initiale*

Dans la littérature [1] on montre que la répartition initiale dépend seulement du réseau de capacités du schéma équivalent (fig. 1). Sa expression pour les conditions limites $U_i(0) = 1$ et $U_i(l) = 0$, s'obtient facilement et elle a la forme :

$$U_i(x') = \frac{\operatorname{sh}\sqrt{C/K}l(1-x'/l)}{\operatorname{sh}\sqrt{C/K}l}, \qquad x' \in [0, l],$$

ou en notant $\varphi = l\sqrt{C/K}$ et $x = x'/l$, nous avons :

$$U_i(x) = \frac{\operatorname{sh}\varphi(1-x)}{\operatorname{sh}\varphi}, \qquad x \in [0, 1]. \tag{7}$$

Dans la fig. 2 on montre la forme de ces courbes, pour diverses valeurs de φ.

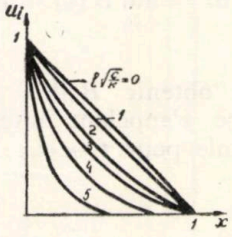


Fig. 2

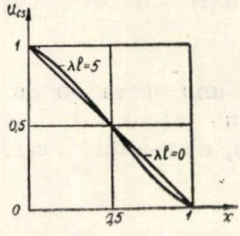


Fig. 3

b) *Répartition quasistationnaire*

Divers auteurs [4], [7] montrent que la loi de répartition quasistationnaire n'est plus fonction des paramètres capacitifs (on considère que à $t = \infty$ les condensateurs sont chargés), mais seulement des inductivités mutuelles entre les spires de la bobine.

Dans [4] on indique le façon d'obtenir l'expression analitique de cette répartion qui, pour les conditions limites $U_{cs}(0) = 1$ et $U_{cs}(l) = 0$ est donnée par

$$U_{cs}(x') = \frac{2(l-x') + [e^{-\lambda x'} - e^{-\lambda(l-x')} + 1]/\lambda}{2(1/\lambda - e^{-\lambda l}/\lambda - 1)}, \qquad x \in [0, l].$$

En aditionant et en soustrayant $l - x'$ dans le deuxième membre de la relation ci-dessus, tous calculs effectués et compte tenu que $2\psi = \lambda l$ et $x = x'/l$, on obtient :

$$U_{cs}(x) = 1 - x + \frac{(1-2x)\operatorname{sh}\psi - \operatorname{sh}\psi(1-2x)}{2(\psi e^{\psi} - \operatorname{sh}\psi)}, \qquad x \in [0, 1],$$

où

$$\varepsilon(x) = \frac{(1-2x)\,\mathrm{sh}\,\psi - \mathrm{sh}\,\psi\,(1-2x)}{2\,(\psi\,\mathrm{e}^{\psi} - \mathrm{sh}\,\psi)},$$

représente la déviation de la droite $1 - x$. Les points de maximum de cette déviation s'obtiennent en résolvant l'équation :

$$\psi\,\mathrm{ch}\,\psi\,(1-2x) = \mathrm{sh}\,\psi$$

qui résulte en annulant la dérivée de la fonction $\varepsilon(x)$, et dont les racines sont :

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{\psi}\ln\left(\frac{\mathrm{sh}\,\psi}{\psi} \pm \sqrt{\frac{\mathrm{sh}^2\,\psi}{\psi^2} - 1}\right)\right].$$

Les valeurs extrêmes sont :

$$\varepsilon_{M,m} = \frac{1}{2\psi\,(\psi\,\mathrm{e}^{\psi} - \mathrm{sh}\,\psi)}\left[\frac{\mathrm{sh}\,\psi}{\psi}\ln\left(\frac{\mathrm{sh}\,\psi}{\psi} \pm \sqrt{\frac{\mathrm{sh}^2\,\psi}{\psi^2} - 1}\right) \pm \sqrt{\frac{\mathrm{sh}^2\,\psi}{\psi^2} - 1}\right].$$

Dans [4], on montre que pour $\psi = 2{,}5$, on obtient les déviations maximum (fig. 3), c'est-à-dire $\varepsilon_{M\,m} = \pm\,0{,}0308$ dans les points $x_1 = 0{,}195$ et $x_2 = 0{,}805$.

4. Amplitudes maximum

Si l'on tient compte des relations (5), (7), (8) on peut écrire :

$$(9) \qquad A_m(x) = 1 - x + \frac{(1-2x)\,\mathrm{sh}\,\psi - \mathrm{sh}\,\psi\,(1-2x)}{2\,(\psi\,\mathrm{e}^{\psi} - \mathrm{sh}\,\psi)} - \frac{\mathrm{sh}\,\varphi\,(1-x)}{\mathrm{sh}\,\varphi}.$$

La relation (9) établit une liaison directe entre la répartition des amplitudes maximum le long de l'enroulement et les paramètres φ et ψ. Cette répartition des amplitudes maximum constitue un indice important de la sollicitation, au point de vue dynamique, de l'isolement transversal.

En annulant la dérivée de l'expression (9) :

$$\frac{\mathrm{d}A_m(x)}{\mathrm{d}x} = -1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{-2\,\mathrm{sh}\,\psi + 2\psi\,\mathrm{ch}\,\psi\,(1-2x)}{\psi\,\mathrm{e}^{\psi} - \mathrm{sh}\,\varphi} + \varphi\,\frac{\mathrm{ch}\,\varphi\,(1-x)}{\mathrm{sh}\,\varphi} = 0,$$

on obtient l'équation :

$$\varphi\,\frac{\mathrm{ch}\,\varphi\,(1-x)}{\mathrm{sh}\,\varphi} - \frac{\mathrm{e}^{\psi} - \mathrm{ch}\,\psi\,(1-2x)}{\mathrm{e}^{\psi} - \mathrm{sh}\,\psi/\psi} = 0.$$

En vue de simplifier l'écriture on introduit les notations suivantes :

$$a = \mathrm{e}^{\psi},\ b = \mathrm{e}^{\varphi},\ \alpha = \frac{\mathrm{sh}\,\psi}{\psi},\ \beta = \frac{\mathrm{sh}\,\varphi}{\varphi},$$

et il en résulte :

$$\operatorname{ch}\psi(1-2x)=\frac{1}{2}\left(a^{1-2x}+\frac{1}{a^{1-2x}}\right) \text{ et } \operatorname{ch}\varphi(1-x)=\frac{1}{2}\left(b^{1-x}+\frac{1}{b^{1+x}}\right);$$

en effectuant la substitution $v=a^{1-2x}$ on obtient :

$$b^{1-x}=b^{\log_a\sqrt{av}}=a^{\varphi/2\psi}v^{\varphi/2\psi};$$

mais $a^{\varphi/2\psi}=\sqrt{b}$ et par conséquent $b^{1-x}=\sqrt{b}\,v^k$ où

$$k=\frac{\varphi}{2\psi}=\frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{\bar{C}}{\bar{K}}}, \tag{11}$$

et par conséquent l'équation (10) devient :

$$\frac{1}{2}(a-\alpha)\left(\sqrt{b}\,v^k+\frac{1}{\sqrt{b}\,v^k}\right)-\beta\left[a-\frac{1}{2}\left(v+\frac{1}{v}\right)\right]=0, \tag{12}$$

où k est un nombre réel et positif, comme il en résulte d'après la relation (11).

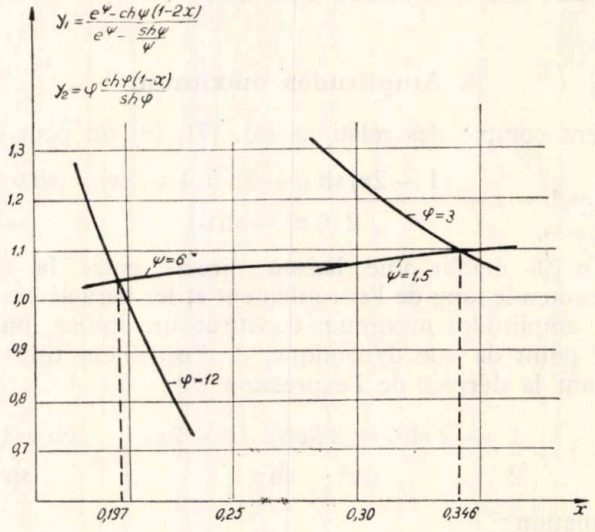


Fig. 4

On ne peut pas résoudre l'équation (12) d'une manière satisfaisante qu'avec l'aide d'un calculateur chiffrique.

On observe toutefois que, pour les constructions habituelles des bobines (les enroulements primaires des transformateurs de haute tension), les paramètres φ et ψ restent entre certaines limites [11] à savoir $\varphi\in[2, 12]$ et $\psi\in[1, 6]$. Si l'on tient compte que ces intervalles sont relativement res-

treints il est possible de tracer par points les courbes de dépendence entre les valeurs maximum de la répartition des amplitudes maximum et les paramètres φ et ψ.

En utilisant un procédé graphique pour résoudre l'équation (10), on trouve que pour φ, ψ précisés ci-dessus, les racines sont définies sur l'intervalle $x_a \in [0{,}2,\ 0{,}35]$. Pour $x = x_a$, les équations (9) et (10) deviennent :

$$A_m(\varphi, \psi, x_a) = 1 - x_a + \frac{(1-2x_a)\operatorname{sh}\psi - \operatorname{sh}\psi\,(1-2x_a)}{2(\psi e^{\psi} - \operatorname{sh}\psi)} - \frac{\operatorname{sh}\varphi\,(1-x_a)}{\operatorname{sh}\varphi}, \tag{13}$$

$$f(\varphi, \psi, x_a) = \varphi \frac{\operatorname{ch}\varphi\,(1-x_a)}{\operatorname{sh}\varphi} - \frac{e^{\psi} - \operatorname{ch}\psi\,(1-2x_a)}{e^{\psi} - \operatorname{sh}\psi/\psi} = 0. \tag{14}$$

La relation (14) délimite le domaine de définition pour φ et ψ, correspondant à chaque valeur x_a et la relation (13) définit les valeurs maximum de la répartition des amplitudes maximum pour la même valeur x_a (sur chaque domaine de définition fixé par x_a).

Tableau 1

ψ	$\varphi = f_1(\psi, x_a)$							
	$x_a = 0{,}21$	$x_a = 0{,}23$	$x_a = 0{,}25$	$x_a = 0{,}27$	$x_a = 0{,}29$	$x_a = 0{,}31$	$x_a = 0{,}33$	$x_a = 0{,}35$
1	11,68	9,82	7,85	7,125	5,97	4,92	3,97	2,5
1,5	11,67	9,8	7,81	7,01	5,89	4,825	3,73	—
2	11,64	9,74	7,75	6,96	5,81	4,73	3,65	—
2,5	11,59	9,725	7,73	6,91	5,78	4,69	3,53	—
3	11,55	9,7	7,71	6,9	5,76	4,68	3,55	—
3,5	11,48	9,62	7,7	6,9	5,75	4,67	3,61	—
4	11,44	9,59	7,69	6,89	5,78	4,72	3,67	—
4,5	11,39	9,575	7,68	6,895	5,79	4,74	3,73	—
5	11,33	9,56	7,67	6,9	5,82	4,775	3,81	—
5,5	11,32	9,54	7,685	6,905	5,85	4,825	3,9	2,42
6	11,31	9,55	7,685	6,91	5,86	4,86	3,93	2,7

À l'aide de procédés graphiques et numériques, la relation (14) peut être mise sous la forme :

$$\varphi = f_1(\psi, x_a) \tag{15}$$

concrétisée dans le tableau 1. En utilisant les données de ce tableau et si l'on recourt à une analyse numérique, la relation (13) peut être ramenée à la forme :

$$A_m[f_1(\psi, x_a), \psi, x_a] = 1 - x_a + \frac{(1-2x_a)\operatorname{sh}\psi - \operatorname{sh}\psi\,(1-2x_a)}{2(\psi e^{\psi} - \operatorname{sh}\psi)} - \frac{\operatorname{sh} f_1(\psi, x_a)\,(1-x_a)}{\operatorname{sh} f_1(\psi, x_a)}, \tag{16}$$

c'est-à-dire une fonction de x_a et ψ, facilement représentable sous forme graphique, par points. Dans la fig. 5 nous avons représenté en coordonnées ψ, A_m et ψ, φ, les relations (16) et (15), où x_a est un paramètre. De cette manière, pour tout couple de valeurs φ, ψ d'une bobine, on peut déterminer le point $x = x_a$ qui correspond a une valeur maximum de l'amplitude et encore la valeur de cette amplitude.

5. Répartition des potentiaux maximum

Selon les relations (6)... (8) on peut écrire:

$$U_m(x) = 2(1-x) + \frac{(1-2x)\operatorname{sh}\psi - \operatorname{sh}\psi(1-2x)}{\psi e^{\psi} - \operatorname{sh}\psi} - \frac{\operatorname{sh}\varphi(1-2x)}{\operatorname{sh}\varphi}. \tag{17}$$

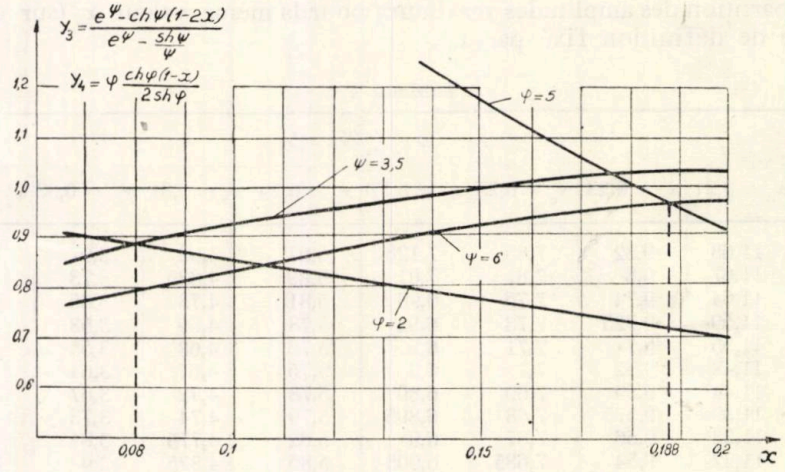


Fig. 6

La relation (17) fournit une liaison directe entre les paramètres φ, ψ et les potentiaux en nous informant quant aux valeurs maximum des tensions auxquelles est soumis l'isolement transversal.

En dérivant la relation (17) on trouve:

$$\frac{dU_m(x)}{dx} = -2 + \frac{-2\operatorname{sh}\psi + 2\psi\operatorname{ch}\psi(1-2x)}{\psi e^{\psi} - \operatorname{sh}\psi} + \varphi\frac{\operatorname{ch}\varphi(1-x)}{\operatorname{sh}\varphi},$$

dont les racines sont données par l'équation:

$$\varphi\frac{\operatorname{ch}\varphi(1-x)}{\operatorname{sh}\varphi} - 2\frac{e^{\psi} - \operatorname{ch}\psi(1-2x)}{e^{\psi} - \operatorname{sh}\psi/\psi} = 0. \tag{18}$$

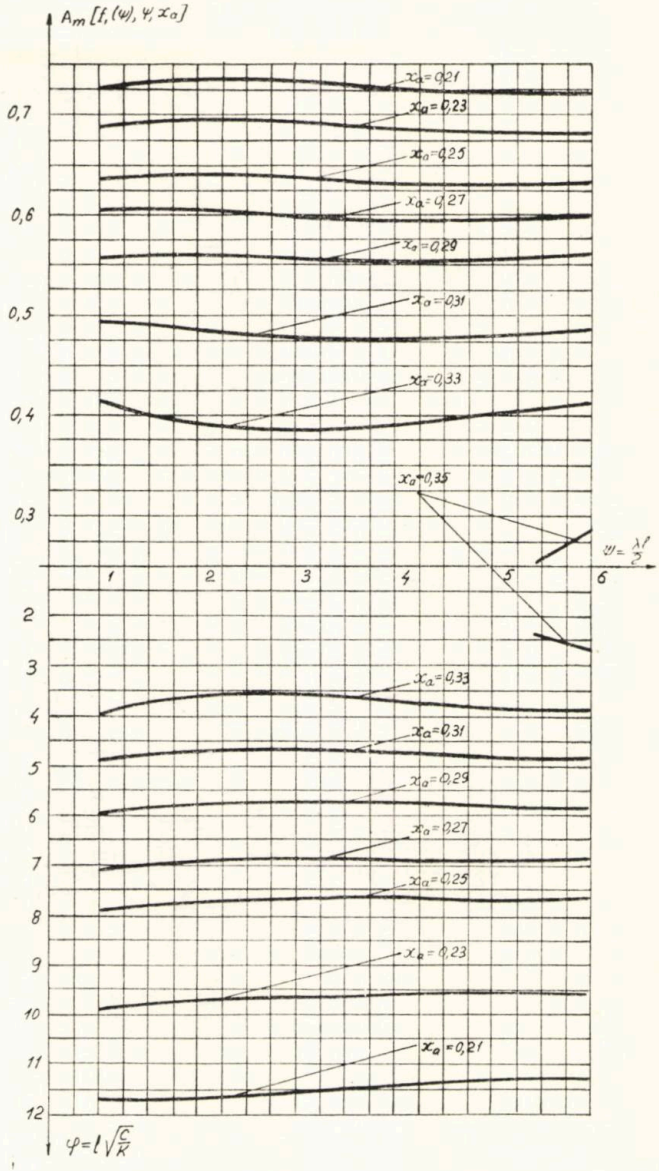

$A_m[f,(\psi),\psi,x_a]$
$x_a=0,21$
$x_a=0,23$
$x_a=0,25$
$x_a=0,27$
$x_a=0,29$
$x_a=0,31$
$x_a=0,33$
$x_a=0,35$
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
1
2
3
4
5
6
$\psi=\frac{\lambda l}{3}$
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
$x_a=0,33$
$x_a=0,31$
$x_a=0,29$
$x_a=0,27$
$x_a=0,25$
$x_a=0,23$
$x_a=0,21$
$\varphi=l\sqrt{\frac{c}{K}}$

Fig. 5

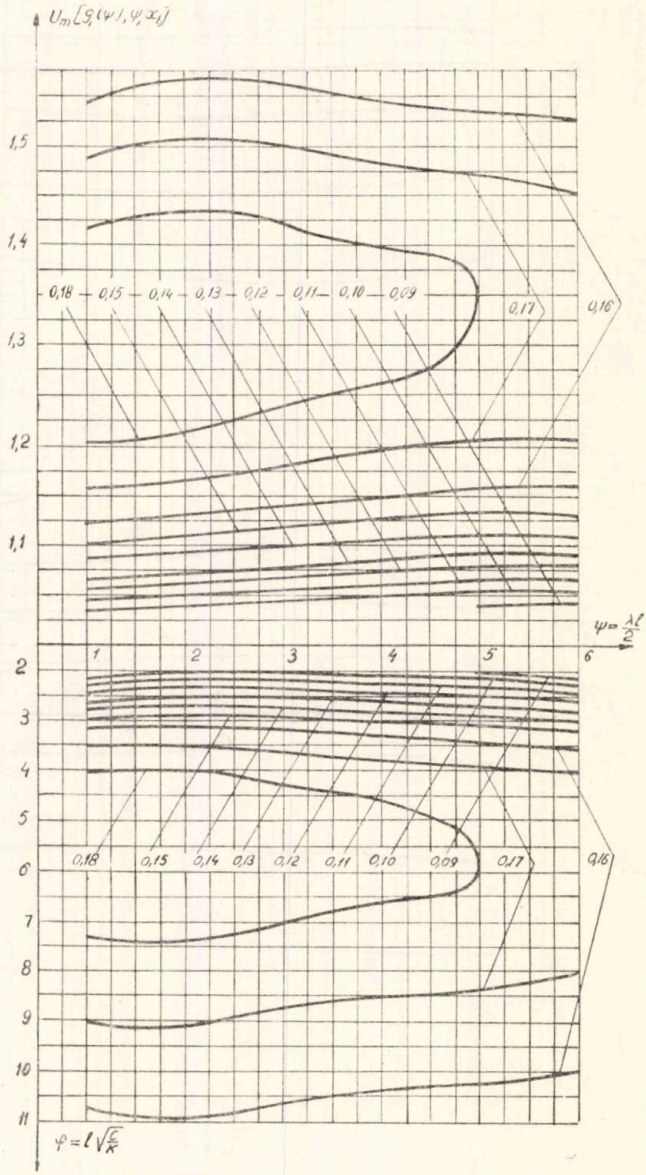

$U_m[\varphi,(\psi),\psi,x_i]$
1,5
1,4
1,3
1,2
1,1
0,18 — 0,15 — 0,14 — 0,13 — 0,12 — 0,11 — 0,10 — 0,09
0,17
0,16
$\psi=\frac{\lambda l}{2}$
1
2
3
4
5
6
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
0,18
0,15
0,14
0,13
0,12
0,11
0,10
0,09
0,17
0,16
$\varphi=l\sqrt{\frac{\varepsilon}{\varkappa}}$

Fig. 7

Compte tenu des notations introduites dans le § 4, l'équation (18) devient :

$$\frac{1}{4}(a-\alpha)\left(\sqrt{b}\,v^k+\frac{1}{\sqrt{b}\,v^k}\right)-\beta\left[a-\frac{1}{2}\left(v+\frac{1}{v}\right)\right]=0. \tag{19}$$

À son tour la solution de cette équation ne peut être obtenue qu'a l'aide d'un calculateur chiffrique.

En procédant tout comme dans le paragraphe précédent, étant donné que $\varphi\in[2, 12]$ et $\psi\in[1, 6]$, et si l'on résoud par voie graphique l'équation (18), on trouve que les racines sont définies dans l'intervalle $x_b\in[0{,}08, 0{,}19]$.

Pour $x = x_b$, les relations (17) et (18) deviennent :

$$U_m(\varphi, \psi, x_b) = 2(1-x_b)+\frac{(1-2x_b)\operatorname{sh}\psi-\operatorname{sh}\psi(1-2x_b)}{\psi e^{\psi}-\operatorname{sh}\psi}-\frac{\operatorname{sh}\varphi(1-x_b)}{\operatorname{sh}\varphi}, \tag{20}$$

$$g(\varphi, \psi, x_b) = \varphi\frac{\operatorname{sh}\varphi(1-x_b)}{\operatorname{sh}\varphi}-2\frac{e^{\psi}-\operatorname{ch}\psi(1-2x_b)}{e^{\psi}-\operatorname{sh}\psi/\psi}=0. \tag{21}$$

La relation (21) délimite le domaine de définition pour φ, ψ correspondant à chaque valeur x_b tandis que la relation (20) définit les valeurs maximum des potentiaux, pour les mêmes x_b (dans chaque domaine de définition fixé par x_b). En explicitant la relation (21) sous la forme (v. le tableau 2) :

$$\varphi = g_1(\psi, x_b) \tag{22}$$

et en substituant la relation (22) dans (20), on obtient :

$$U_m[g_1(\psi, x_b), \psi, x_b] = 2(1-x_b)+\frac{(1-2x_b)\operatorname{sh}\psi-\operatorname{sh}\psi(1-2x_b)}{\psi e^{\psi}-\operatorname{sh}\psi}-\frac{\operatorname{sh}g_1(\psi, x_b)(1-x_b)}{\operatorname{sh}g_1(\psi, x_b)}, \tag{23}$$

qui est fonction de ψ et x_b et qui est susceptible à être représentée sous forme de graphique.

Dans la fig. 7 on a représenté dans les coordonnées ψ, U_m et ψ, φ les relations (23) et (22), où x_b est considéré paramètre.

De cette manière, pour tout couple de valeurs φ, ψ on peut déterminer directement le point $x = x_b$ où le potentiel a une valeur maximum et de même la valeur de ce potentiel.

Tableau 2

ψ	$\varphi = g_1(\psi, x_b)$													
	$x_b = 0{,}08$	$x_b = 0{,}09$	$x_b = 0{,}10$	$x_b = 0{,}11$	$x_b = 0{,}12$	$x_b = 0{,}13$	$x_b = 0{,}14$	$x_b = 0{,}15$	$x_b = 0{,}16$		$x_b = 0{,}17$		$x_b = 0{,}18$	
1	1,94	2,03	2,145	2,28	2,42	2,55	2,74	2,91	3,16	10,74	3,50	9,04	4,04	7,32
1,5	—	—	2,06	2,185	2,34	2,49	2,67	2,77	3,09	10,89	3,47	9,12	3,98	7,42
2	—	—	2,01	2,115	2,31	2,46	2,655	2,87	3,10	10,88	3,47	9,12	4,01	7,37
2,5	—	—	2,015	2,16	2,32	2,48	2,68	2,89	3,11	10,87	3,54	8,97	4,09	7,25
3	—	—	2,035	2,185	2,35	2,52	2,72	2,94	3,19	10,69	3,63	8,84	4,30	7,03
3,5	—	—	2,075	2,225	2,39	2,57	2,76	2,99	3,265	10,50	3,72	8,67	4,40	6,90
4	—	—	2,105	2,26	2,44	2,605	2,81	3,04	3,31	10,40	3,80	8,55	4,63	6,60
4,5	—	—	2,145	2,30	2,465	2,65	2,86	3,07	3,36	10,30	3,85	8,46	4,85	6,45
5	—	2,04	2,19	2,35	2,52	2,71	2,91	3,12	3,42	10,15	3,93	8,32	6,00	6,00
5,5	1,925	2,07	2,22	2,39	2,56	2,73	2,95	3,16	3,47	10,10	3,97	8,25	—	—
6	1,97	2,11	2,265	2,435	2,595	2,78	2,975	3,20	3,53	10,00	4,08	8,00	—	—

6. Conclusions

En examinant les courbes de la fig. 5 et celles de la fig. 7, on observe que les paramètres φ et ψ exercent des influences inégales sur les amplitudes et sur les potentiaux. Le rôle du paramètre ψ est de petite importance par rapport à celui du paramètre φ, mais il n'est pas négligeable, comme il paraît en examinant la relation (7). Cela résulte précisément à la suite d'un examen des courbes des potentiaux (fig. 7). Il faut remarquer que des mesures radicales imposées à celui-ci, ne modifient pas essentiellement l'aspect des phénomènes. En passant à la limite dans la relation (8) pour $\psi \to 0$ et puis pour $\psi \to \infty$ on obtient:

$$\lim_{\psi \to 0} U_{cs}(x) = 1 - x \quad \text{et} \quad \lim_{\psi \to \infty} U_{cs}(x) = 1 - x$$

et pour les deux situations les relations (9) et (17) deviennent:

$$(24) \quad A'_m(x) = 1 - x - \frac{\operatorname{sh}\varphi\,(1-x)}{\operatorname{sh}\varphi}, \quad (25) \quad U'_m(x) = 2\,(1-x) - \frac{\operatorname{sh}\varphi\,(1-x)}{\operatorname{sh}\varphi},$$

ce qui justifie les affirmations ci-dessus.

Le paramètre φ joue un rôle de grande importance pour la fixation des valeurs des amplitudes et des potentiaux. Mesures radicales imposées à celui-ci ($\varphi \to 0$), attirent des modifications essentielles de l'aspect du régime transitoire. En passant à la limite pour $\varphi \to 0$ dans la relation (7) on obtient:

$$\lim_{\varphi \to 0} U_i(x) = 1 - x$$

et donc les relations (9) et (17) deviennent:

$$(26) \qquad A''_m(x) = \varepsilon(x), \qquad (27) \qquad U''_m(x) = 1 - x + 2\varepsilon(x).$$

Compte tenu de l'aspect pratique du problème on observe que pour certaines valeurs φ, ψ ($\varphi = 10{,}9$ et $\psi = 2{,}25$) l'isolement transversal est sollicité (théoriquement) dans le point $x_b = 0{,}16$ à une tension $U_m = 1{,}566$, c'est-à-dire que lors du régime transitoire apparaissent, dans l'enroulement, des tensions qui dépassent avec 56,6 % la valeur de la tension appliquée à l'entrée.

Evidemment, cette situation attire l'attention sur nombre de procédés quant à l'optimisation de l'utilisation de l'isolement transversal. En ordre de leur importance ils en résultent, les suivants: a) diminution du rapport C/K; b) diminution ou augmentation de la constante λ ($\lambda l \neq 5$ ou plus précisement en utilisant les courbes, parce que l'optimum dépend encore du paramètre φ); c) diminution de la longueur axiale de la bobine l, en remarquant que pratiquement on obtient des résultats satisfaisants seulement en actionnant simultanément par les trois moyens mentionnés ci-dessous, parce

que chaque paramètre ne peut pas être influencé qu'entre des limites établies pour d'autres considérations que le comportement de la bobine à l'onde de choc de tension.

Institute Polytechnique de Jassy,
Chaire d'Electroénergétique

BIBLIOGRAPHIE

1. Heller B., Veverka A., *Les phénomènes de choc dans les machines électriques.* Dunod, Paris, 1963, pp. 31—65.
2. Balázs M., Costina D., *Încercarea transformatoarelor.* **I.** *Încercarea izolației.* Ed. Tehn., Buc., 1966, pp. 102—122.
3. Lovass-Nagy V., Szendi K., *Surge Phenomena in Electromagnetic Coils Analysed by Hypermatrix Methods.* Acta Technica, 1958, **XXI**, *3—4*, pp. 427—446.
4. Gavrilaş N., Wohlmuth F., *Kvazistacionárni rozloženi napéti podél vinutí transformátoru při napěťovém rázu.* Elektrot. obzor, 1962, **51**, *7*, pp. 339—341.
5. Avramescu A., *Contribuții la aprecierea sintetică a fenomenelor tranzitorii.* Electrotehnica, 1965, **13**, *4*, pp. 121—128.
6. Лоханин А. К., *Расчет перенапряжений в катушечных обмотках трансформаторов.* Электричество, 1967, *4*, стр. 29—34.
7. Карасев В. А., *Теория электромагнитных процессов в обмотках.* ГЭИ, М.—Л., 1946.
8. Boll M., *Tables numériques universelles.* Dunod, Paris, 1947.

CONTRIBUȚIE LA DETERMINAREA INFLUENȚEI PARAMETRILOR INDUCTIVI ȘI CAPACITIVI AI BOBINELOR CILINDRICE, ASUPRA SOLICITĂRILOR IZOLAȚIEI TRANSVERSALE AI BOBINEI SUPUSE LA UNDA DE IMPULS DE TENSIUNIE

(Rezumat)

După o trecere în revistă a contribuțiilor lui Heller, Hlavka și Veverka în acest domeniu (schema echivalentă a bobinei supuse la unda de impuls de tensiune, în care se ține seama și de inductivitățile mutuale între spirele bobinei), se arată că ecuația (1), obținută de aceștia are soluția de forma (2) [6]. Soluția, sub forma (2), precum și variantele sale [6], nu permit evidențierea unei dependențe directe între parametrii bobinei ($\psi = \lambda l/2$ și $\varphi = l\sqrt{C/K}$) și solicitările izolației transversale.

Pe baza unor observații de ordin general referitoare la regimurile tranzitorii ce au loc la aplicarea funcției unitate (Heaviside), se arată că repartiția amplitudinilor maxime ale oscilațiilor de tensiune și repartiția potențialelor maxime, depind prin relații simple de repartiția inițială și repartiția cvasistaționară, Acestea din urmă au fost determinate de diverși autori și ele depind de φ și ψ prin intermediul unei relații relativ simple. Se obțin asfel relațiile (9) și (17). Aceste relații stau la baza construcției unor curbe (fig. 5 și fig. 7), cu ajutorul cărora se pot determina direct, în funcție de valorile φ, ψ, amplitudinile maxime ale oscilațiilor de tensiune și potențialele maxime, precum și punctele în care acestea au loc.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

Mecanică tehnică

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том XIV (XVIII), вып. 1—2, 1968

Техническая механика

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

Mechanical Engineering

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

D. C. 536.2; 517.947.43

A THEOREM CONCERNED WITH GENERALIZED HEAT TRANSFER PHENOMENA

II. STABILITY OF A NONLINEAR PROBLEM

BY

M. N. OĞUZTÖRELI

1. New generalized mixed problems pertaining to caloric operators and time delayed arguments are to be found in [1]...[6]

In [5] was established a theorem concerned with the uniqueness and the existence of the following mixed nonlinear boundary value problem

$$P[u] = f[x, t, u(x, t), u(x, t - r_1(t))] +$$

$$+ \int_0^t \int_0^a K(x, t, y, \tau) F[y, \tau, u(y, \tau), u(y, \tau - r_2(\tau))] \, dy \, d\tau, \tag{1}$$

$$P[u] \equiv \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2},$$

and

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad u(0, t) \equiv u(a, t) \equiv 0, \tag{2}$$

$$\varphi_0(0) = 0, \quad u(x, t) \equiv 0, \quad t \leqslant 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant a,$$

where $\varphi_0(x), r_i(t), (i = 1, 2), f(x, t, \alpha, \beta), K(x, t, y, \tau), F(y, \tau, \alpha, \gamma)$ are given continuous functions defined in the domain $(x, y), u \in \Pi$.

In what follows we shall give a theorem concerned with the stability of the problem (1), (2).

2. Let $u_1(x, t)$ be the solution of the nonlinear mixed boundary value problem

$$u_1(x,0)=\varphi_0(x),\quad u_1(0,t)\equiv u_1(a,t)\equiv 0,$$
$$\varphi_0(0)=0,\quad u(x,t)\equiv 0,\quad t\leqslant 0,\quad 0\leqslant x\leqslant a \tag{3}$$

and

$$P[u_1]=f_1[x,t,u_1(x,t),\ u_1(x,t-r_1(t))]+$$
$$+\int_0^t\int_0^a K_1(x,t,y,\tau)\,F_1[y,\tau,u_1(y,\tau),u_1(y,\tau-r_2(\tau))]\,dy\,d\tau, \tag{4}$$

where the functions $f_1(x,t,\alpha,\beta)$, $K_1(x,t,y,\tau)$, $F_1(y,\tau,\alpha,\gamma)$ are to be considered as perturbed ones with respect to the given functions entering in (1).

We assert the validity of the following theorem:

Theorem I. *The generalized caloric mixed nonlinear boundary value problem's* (1), (2), *with hereditary operators and time-delayed argument solution stability, is ensured if the conditions*

$$|W(x,t,y,\tau,w_1,w_2,w_3)-W(x,t,y,\tau,v_1,v_2,v_3|\leqslant\sum_{i=1}^{3}\rho_i(x,t,y,\tau)\,|w_i-v_i|$$

and

$$l_2=1-3\max_D\int_0^t\int_0^a\sum_{i=1}^{3}\rho_i(x,t,y,\tau)\,dy\,d\tau>0, \tag{6}$$
$$D=[0\leqslant t\leqslant T]\times[0\leqslant x\leqslant a],$$

are satisfied, where $W\,|x,t,y,\tau,\delta,\varkappa,\chi|$ *pertains to the equivalent with* (1), (2) *integral equation*

$$u(x,t)=n(x,t)+\int_0^t\int_0^a G(x,\xi,t-\alpha)\{f[\xi,\alpha,u(\xi,\alpha),u(\xi,\alpha-r_1(\alpha))]+$$
$$+\int_0^a\int_0^a K(\xi,\alpha,y,\tau)\,F[y,\tau,u(y,\tau),u(y,\tau-r_2(\tau))]\,dy\,d\tau\}\,d\xi\,d\alpha=$$
$$=n(x,t)+\int_0^t\int_0^a W[x,t,y,\tau,u(y,\tau),u(y,\tau-r_1(\tau)),u(y,\tau-r_2(\tau))]\,dy\,d\tau$$

and

$$n(x,t)=\int_0^a\left(\frac{2}{a}\sum_{i=1}^{\infty}\left\{\exp\left[-\left(\frac{\pi i}{a}\right)^2 t\right]\right\}\sin\frac{\pi i x}{a}\sin\frac{\pi i\xi}{a}\,\varphi_0(\xi)\right)d\xi. \tag{8}$$

Indeed, one obtains by following step by step [6] consequently

$$u_1(x,t) = n(x,t) + \int_0^t\int_0^a G(x,\xi,t-\alpha)\{f_1[\xi,\alpha,u_1(\xi,\alpha),u_1(\xi,\alpha-r_1(\alpha))] +$$

$$+\int_0^a\int_0^a K_1(\xi,\alpha,y,\tau)\,F_1[y,\tau,u_1(y,\tau),u_1(y,\tau-r_2(\tau))]\,dy\,d\tau\}\,d\xi\,d\alpha = \tag{9}$$

$$= \int_0^t\int_0^a W_1[x,t,y,\tau,u_1(y,\tau),u_1(y,\tau-r_1(\tau)),u_1(y,\tau-r_2(\tau))]\,dy\,d\tau + n(x,t),$$

$$|u(x,t)-u_1(x,t)| \leqslant 3\sum_{i=1}^{3}\int_0^t\int_0^a \rho_i(x,t,y,\tau)\,|u(y,\tau)-u_1(y,\tau)|\,dy\,d\tau +$$

$$+\left|\int_0^t\int_0^a\{W[x,t,y,\tau,u_1(y,\tau),u_1(y,\tau-r_1(\tau)),u_1(y,\tau-r_2(\tau))] - \right. \tag{10}$$

$$\left. - W_1[x,t,y,\tau,u_1(y,\tau),u_1(y,\tau-r_1(\tau)),u_1(y,\tau-r_2(\tau))]\}\,dy\,d\tau\right|,$$

$$\max_D |u(x,t)-u_1(x,t)| \leqslant$$

$$\leqslant \max_D\left|\int_0^t\int_0^a H[x,t,y,\tau,u_1(y,\tau),u_1(y,\tau-r_1(\tau)),u_1(y,\tau-r_2(\tau))]\,dy\,d\tau\right| : l_2 \tag{11}$$

where

$$H(\cdot) \equiv W - W_1, \tag{12}$$

and finally, if

$$\max_{\Pi}|H(\cdot)| < \varepsilon l_2 : \Delta, \quad \Delta = aT, \quad (13) \qquad |u(x,t)-u_1(x,t)| < \varepsilon, \quad (x,t) \in D. \quad (14)$$

There is to be mentioned what follows.

If (6) don't take place, the inequality (10) does necessarily be replaced by a corresponding one by considering

$$l_3 = 1 - \max_D \int_0^t\int_0^a S_k(x,t,y,\tau)\,dy\,d\tau > 0,$$

where $S_k(x,t,y,\tau)$ is pertaining to $S \equiv \sum_{i=0}^{3} 3\rho_i(x,t,y,\tau)$ times iterated kernel.

Reccived the 20 X 1967

The University of Alberta,
Edmonton, Canada

REFERENCES

1. Oguztöreli M. N., *A Mixed Problem for an Integro-Differential Equation of Parabolic Type with a Delayed Argument.* University of Alberta, Edmonton, Dept. of Math., Series A, May 1967, 3, 27.
2. — *A Class of Nonlinear Integro-Differential Equations of Parabolic Type with a Delayed Argument.* University of Alberta, Edmonton, Dept. of Math., Series A, Sept. 1967, **4**, *10*.
3. — *Time Lag Control Systems.* Academic Press New York-London, 1966, XII, 323 pp.
4. Mangeron D., *Introduzione nello studio dei sistemi polivibranti con rimanenza ed argomenti ritardati.* Rend. Accad. Naz. dei Lincei, 1965, s. 8ª, **39**, *1-2*, pp. 22-28.
5. Mangeron D., Krivosein L. E., *Su alcuni problemi concernenti le equazioni integro-differenziali con operatori calorici ed argomenti ritardati.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **IX** (**XIII**), *3-4*, pp. 11-17.
6. — *Sistemi policalorici a rimanenza ed a argomento ritardato. I. Problemi al contorno per le equazioni integro-diferenziali con operatore calorico ed argomento ritardato.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 1965, pp. 1-24.

O TEOREMĂ REFERITOARE LA FENOMENE GENERALIZATE DE TRANSFER DE CĂLDURĂ

II. Stabilitatea unei probleme neliniare

(Rezumat)

Se studiază stabilitatea soluţiilor problemei (1), (2).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

D. C. 517.947.5

NEW METHODS FOR DETERMINING SOLUTIONS OF MATHEMATICAL MODELS GOVERNING POLYVIBRATING PHENOMENA (I)

BY

D. MANGERON [1) 2)]

The author is pleased to dedicate this paper to the University of Alberta on its Diamond Jubilee Year

1. The up to this day complexity of various mathematical models crystallized f.i. in the R. Bellman's new periodical *Mathematical Biosciences and International Journal* [1], where mathematical study of non repetitive growth — Eqs. (6.7) and (6.8) — appears to be an extremely formidable task, requests unceasingly to devote all one's energies to solve them.

In what follows we expose, using a standard polyvibrating equation [2]...[4], a new method for determining solutions of a class of mathematical models governing polyvibrating phenomena.

Let

$$(1) \qquad \frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y^2} - A(x, y) = f(x, y), \qquad (0 < x < a,\ 0 < y < b),$$

$$(2) \qquad u(0, y) = u(x, 0) = 0, \qquad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right|_{x=a} = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right|_{y=b} = 0,$$

be the considered mathematical model. Solution of such problems can be represented in terms of „influence" (Green's) function. Due to the difficulty in obtaining „influence" functions, either analytically or computationally, these representations are viewed as of theoretical rather than practical interest.

[1)] At present Visiting Professor at the University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada.

[2)] The author wishes to express his thanks to the University of Alberta for the invaluable conditions offered to him to develop his work in the Department of Mathematics of this University.

The aim of this article is to show how to compute „influence" functions, and so make full use of analog or digital computer's ability to integrate large systems of boundary value problems pertaining to polyvibrating mathematical models.

The obtained results are suitable to various generalizations [3].

2. Consider the polyvibrating system (1), (2).

The solution, assumed to exist and to be unique [5], can be represented in the form

$$u(x,y) = \int_0^a \int_0^b G(x,y;\xi,\eta)\, f(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta, \tag{3}$$

where the kernel $G(x,y;\xi,\eta)$ is a solution of the problem [4].

Viewed as function of (x,y), $G(x,y;\xi,\eta)$ is a solution of the problem

$$\frac{\partial^4 G}{\partial x^2\, \partial y^2} - A(x,y) = 0, \qquad x \neq \xi,\ y \neq \eta, \tag{4}$$

$$G(0,y) = 0, \quad G(x,0) = 0, \quad \left.\frac{\partial^2 G}{\partial x\, \partial y}\right|_{x=} = 0, \quad \left.\frac{\partial^2 G}{\partial x\, \partial y}\right|_{y=b} = 0. \tag{5}$$

In addition, the function $G(x,y;\xi,\eta)$ is continuous at $x=\xi$, $y=\eta$, but its first total derivate in the Picone's sense [13] has a jump at $x=\xi$, $y=\eta$, given by our new variation formula

$$\left.\frac{\partial^2 G}{\partial x\, \partial y}\right|_{\substack{x=\xi^+\\ y=\eta^+}} + \left.\frac{\partial^2 G}{\partial x\, \partial y}\right|_{\substack{x=\xi^-\\ y=\eta^-}} - \left.\frac{\partial^2 G}{\partial x\, \partial y}\right|_{\substack{x=\xi^+\\ y=\eta^-}} - \left.\frac{\partial^2 G}{\partial x\, \partial y}\right|_{\substack{x=\xi^-\\ y=\eta^+}} = 1. \tag{6}$$

Regarding computing „influence" functions may be formulated the

Theorem I. *The influence function* $G(x,y;\xi,\eta)$ *corresponding to the polyvibrating model* (1), (2), *is*

$$G(x,y;\xi,\eta) = \begin{cases} \dfrac{h_1(x,y)\, h_2(\xi,\eta)\, h_3(\xi,\eta)\, h_4(\xi,\eta)}{\Delta}, & (0<x<\xi,\ 0<y<\eta), \\ \dfrac{h_1(\xi,\eta)\, h_2(x,y)\, h_3(\xi,\eta)\, h_4(\xi,\eta)}{\Delta}, & (\xi<x<a,\ \eta<y<b), \\ \dfrac{h_1(\xi,\eta)\, h_2(\xi,\eta)\, h_3(x,y)\, h_4(\xi,\eta)}{\Delta}, & (\xi<x<a,\ 0<y<\eta), \\ \dfrac{h_1(\xi,\eta)\, h_2(\xi,\eta)\, h_3(\xi,\eta)\, h_4(x,y)}{\Delta}, & (0<x<\xi,\ \eta<y<b), \end{cases} \tag{7}$$

[3] See our papers to appear in the *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* and in the *Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei*.

[4] Various authors [6]...[12] called the function $G(x,y;\xi,\eta)$ „Mangeron's function" and the polyvibrating equations (1) a. o. „Mangeron's equations".

where the function h_1, h_2, h_3, and h_4, satisfy respectively the partial differential systems

$$\frac{\partial^4 h_1}{\partial x^2\,\partial y^2} - Ah_1 = 0, \qquad (0 < x < \xi, \quad 0 < y < \eta_1),$$

$$h_1(0,y) = 0, \quad h_1(x,0) = 0, \quad \left.\frac{\partial^2 h_1}{\partial x\,\partial y}\right|_{x=0} = 1, \quad \left.\frac{\partial^2 h_0}{\partial x\,\partial y}\right|_{y=0} = 1; \tag{8}$$

$$\frac{\partial^4 h_2}{\partial x^2\,\partial y^2} - Ah_2 = 0, \quad (\xi < x < a, \quad \eta_1 < y < b),$$

$$h_2(a,y) = 1, \quad h_2(x,b) = 1, \quad \left.\frac{\partial^2 h_2}{\partial x\,\partial y}\right|_{x=a} = 0, \quad \left.\frac{\partial^2 h_2}{\partial x\,\partial y}\right|_{y=b} = 0; \tag{9}$$

$$\frac{\partial^4 h_3}{\partial x^2\,\partial y^2} - Ah_3 = 0, \qquad (\xi < x < a, \quad 0 < y < \eta_1),$$

$$h_3(a,y) = 1, \quad h_3(x,0) = 0, \quad \left.\frac{\partial^2 h_3}{\partial x\,\partial y}\right|_{x=a} = 0, \quad \left.\frac{\partial^2 h_3}{\partial x\,\partial y}\right|_{y=0} = 1; \tag{10}$$

$$\frac{\partial^4 h_4}{\partial x^2\,\partial y^2} - Ah_4 = 0, \qquad (0 < x < \xi, \quad \eta_1 < y < b),$$

$$h_4(0,y) = 0, \quad h_4(x,b) = 1, \quad \left.\frac{\partial^2 h_4}{\partial x\,\partial y}\right|_{x=0} = 1, \quad \left.\frac{\partial^2 h_4}{\partial x\,\partial y}\right|_{y=b} = 0; \tag{11}$$

and

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2 h_1}{\partial \xi\,\partial \eta_1} h_2 h_3 h_4 + h_1 \frac{\partial^2 h_2}{\partial \xi\,\partial \eta_1} h_3 h_4 - h_1 h_2 \frac{\partial^2 h_3}{\partial \xi\,\partial \eta_1} h_4 - h_1 h_2 h_3 \frac{\partial^2 h_4}{\partial \xi\,\partial \eta_1}\right)_{\xi,\eta_1} = \text{const.} \tag{12}$$

3. For the one dimensional case expressed in the boundary value problem

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} - g(t)\,u = -q(t), \qquad 0 < t < a,$$

$$u(0) = 0, \qquad \left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right|_{t=a} = 0,$$

studies concerned with the behaviour of the Green's function as a function of the lenght of the interval are to be find in a H. H. Kaginada's and R. E. Kalaba's very recent paper [14]

Received the 21 II 1968

Polytechnic Institute of Jassy,
Mech. Eng. Dept.

REFERENCES

1. Fredrickson A. G. a.o., *Statistics and Dynamics of Procaryotic Cell Populations.* Math. Biosci. intern. J., 1967, **I**, *3*, pp. 327–374.
2. Mangeron D., *Introduzione nelle studio dei sistemi polivibranti con rimanenza ed argomenti ritardati. I.* Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Cl. sci. fis. mat. e nat., s. 8, 1965, **39**, *1–2*, pp. 22–28.
3. — *On the Bellman Equations of Dynamic Programming concerning Polyvibrating Equations.* J. Math. Anal. a. Appl., 1964, **9**, *1*, pp. 141–146.
4. — *Sur une classe de problèmes à la frontière non elliptiques d'ordre supérieur.* C. r. Acad. Sci., Paris, 1962, **225**, *22*, pp. 2894–2896.
5. — *Problemi al contorno per sistemi con caratteristiche reali multiple.* Rend. Acad. Naz. dei Lincei, Cl. sci. fis., mat. e nat., s. 6, 1932, **16**, pp. 305–310.
6. Salvadori M., *Ricerche variazionali per gli integrali doppi in forma non parametrica.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 1936, s. 2, **5**, pp. 51–72.
7. Rosenblatt A., *Sur certaines équations aux dérivées partielles à caractéristiques réelles et multiples.* C. r. Acad. Sci., Paris, 1933, **197**, pp. 1278–1280.
8. Manaresi F., *Applicazione di un procedimento variazionale allo studio di un problema con caratteristiche reali doppie.* Rend. Sem. Mat. Padova, 1954, **23**, pp. 163–213.
9. Srampacchia G., *Un teorema di calcolo delle variazioni ed applicazioni a problemi al contorno iperbolici.* Giorn. Mat., 1948–1949, s. 4, **78**, pp. 81–96.
10. Poli L., Delerue P., *Le Calcul symbolique à deux variables.* Gauthier-Villars, Paris, 1954.
11. Камытов Т., *Определение решений и.-д.-у. методом Манжерона.* I-я МежВУЗ Конф. Кирг. ССР, Фрунзе, 1966, стр. 25–30.
12. Березанский Ю. М., *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.* Изд. „Наукова Думка", Киев, 1965.
13. Picone M., *Cenni biografici e sull'opera scientifica di Mauro Picone. Estratto da una lettera diretta al Prof. Octav Onicescu dell'Accademia della Repubblica Socialista di Romania* (From M. Picone's letter excerpt addressed to Prof. O. Onicescu, Member of the Socialist Republic of Romania Academy), Rome, July 3, 1967, 13 pp.
14. Kagiwada H. H. a. o., *A Practical Method for Determining Green's Functions using Hadamard's Variational Formula.* J.of Optimization Theory a. Appl., 1967, **I**, *1*, pp. 33–39.

NOI METODE DE DETERMINARE A SOLUŢIILOR MODELELOR MATEMATICE REFERITOARE LA SISTEME POLIVIBRANTE (I)

(Rezumat)

Se expune, luîndu-se ca punct de plecare prototipul ecuaţiilor polivibrante (1), numite de diferiţi cercetători „ecuaţiile Mangeron" [6]... [12], o nouă metodă de determinare a soluţiilor, stabilindu-se o formulă fundamentală (6) de variaţie a funcţiilor Green asociate sistemului (1), (2), precum şi forma acestor funcţii (7)... (12), deosebit de utilă în cazul folosirii maşinilor electronice analogice sau digitale de calcul.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1–2, 1968

D. C. 537.228.1 ; 539.37

DFFORMATIONS OF A COMPOSITE THICK DISK OF PIEZOELECTRIC MATERIAL

BY

D. K. SINHA

1. Introduction

Most of the static piezoelectric problems, attempted in recent years, are analogues of well-known elastic problems, vide, T o u p i n [1], P a r i a [2], S i n h a [3]. It is sufficiently well-known that composite structures play an important role in elasticity and as such we may conceive of their analogues in piezoelectricity. The present note aims at establishing the method of determining the deformations of a composite thick disk of piezoelectric material acted upon by an axial electric field. The method presented here shows that the deformations as in Toupin [1], Sinha [3], [4] can be expressed as a function of the elastic moduli, piezoelectric moduli and dielectric permittivity of the material of the disk.

2. Problem, Fundamental Equations, Boundary Conditions

In the problem, as anvisaged above, we have to take into account the interaction of two fields, namely, electrical and mechanical and these two fields, as we know, are described by the electromagnetic equations of Maxwell and the usual equations of elasticity. The solution of the problem amounts to the solution of these equations, subject of the constitutive equations of the material considered. With the origin at the centroid to the lower face of the disk which is made up of two piezoelectric materials and z-axis parallel to the thickness of the disk hawing the $A(z, x)$ or $A(x, y)$ cut for the crystalline materials, we choose the cylindrical co-ordinates (r, θ, z) as the co-ordinates of reference and the electric field parallel to the direction of z-axis. Let $z = l$ be the interface of the two materials and let $z = 0$ and $z = l$ be the free faces of the disk. Let α be the radius of the disk. In keeping with the usual practice in elasticity, we treat the problem as one of plane stress and the equation of elasticity is, then, given by

$$\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} = 0, \tag{1}$$

where $(T_{rr}, T_{\theta\theta})$ are the components of stress. The equations of Maxwell, in the absence of charge, magnetic field, give

$$\text{rot}\,\mathbf{E} = 0, \tag{2}$$

$$\text{div}\,\mathbf{D} = 0, \tag{3}$$

where $\mathbf{E}$ is the electric intensity vector and $\mathbf{D}$ is the electric displacement vector.

The constitutive relations in (x, y, z) for co-ordinates the classes 23 and 26 having the $A(z, x)$ or $A(x, y)$ cut are given in the text of C a d y [5]. Transforming those relations to (r, θ, z) co-ordinates and considering the electric field only in the z-direction, the relations assume the form

$$T_{rr} = c_{11}\frac{\partial u}{\partial r} + c_{12}\frac{u}{r} + c_{13}\frac{\partial w}{\partial z} - e_{31}E_z\,, \tag{4}$$

$$T_{\theta\theta} = c_{12}\frac{\partial u}{\partial r} + c_{11}\frac{u}{r} + c_{13}\frac{\partial w}{\partial z} - e_{31}E_z\,, \tag{5}$$

$$T_{zz} = c_{13}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}\right) + c_{33}\frac{\partial w}{\partial z} - e_{33}E_z\,, \tag{6}$$

$$T_{\theta z} = 0\,, \tag{7}$$

$$T_{rz} = c_{44}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right), \tag{8}$$

$$T_{r\theta} = 0, \tag{9}$$

$$D_r = e_{15}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right), \tag{10}$$

$$D_\theta = -e_{14}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right), \tag{11}$$

$$D_z = e_{31}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}\right) + e_{33}\frac{\partial w}{\partial z} + \varepsilon_{33}E_z\,, \tag{12}$$

where c's, e's, ε's are elastic compliances, piezoelectric constants, dielectric constants and $u(r, z), w(r, z)$ are components of displacement in the radial and axial directions respectively. Let the relations (4)...(12) hold for the material $0 \leqslant z \leqslant l$, while similar relations with different values of the constants denoted by dashes hold for the material $l_1 \leqslant z \leqslant l$. The boundary conditions of the problem are given by

$$E'_z = l_1 \text{ at } z = l, \quad r = 0, \tag{13}$$

$$E'_z = l_2 \text{ at } z = l, \quad r = a, \tag{14}$$

$$E'_z = l_3 \text{ at } z = 0, \quad r = 0, \tag{15}$$

$$D_z = D'_z \text{ at } z = l_1\,, \quad r = 0, \tag{16}$$

$$D_z = D'_z \text{ at } z = l_1\,, \quad r = a, \tag{17}$$

$$w = w' \text{ at } z = l_1\,, \quad r = 0, \tag{18}$$

$$w = w' \text{ at } z = l_1\,, \quad r = a, \tag{19}$$

$$\int_0^{l_1} T_{rr}\,dz + \int_{l_1}^{l} (T_{rr})'\,dz = 0 \text{ at } r = a, \tag{20}$$

where the dashed quantities denote the values of the quantities in $l_1 \leqslant z \leqslant l$.

3. Solution of the Problem

Let us, first of all, derive some relations which hold for both the materials. Since the problem is one of plane stress, we must have $T_{zz} = T_{rz} = 0$ i. e. from (6) and (8) we find

$$c_{13}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}\right) + c_{33}\frac{\partial w}{\partial z} - e_{33}E_z = 0, \tag{21}$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \tag{22}$$

From (21), we can express E_z in terms of $\partial u/\partial r$, u/r and $\partial w/\partial z$ hence we have from (4), (5), (12),

(23) $$T_{rr} = c_1 \frac{\partial u}{\partial r} + c_2 \frac{u}{r} + c_3 \frac{\partial w}{\partial z},$$ (24) $$T_{\theta\theta} = c_2 \frac{\partial u}{\partial r} + c_1 \frac{u}{r} + c_3 \frac{\partial w}{\partial z},$$

(25) $$D_z = e_1 \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) + e_3 \frac{\partial w}{\partial z},$$

where

(26) $$\begin{cases} c_1 = c_{11} - \dfrac{c_{13}\, e_{31}}{e_{33}}, & c_2 = c_{12} - \dfrac{c_{13}\, e_{31}}{e_{33}}, \\ c_3 = c_{13} - \dfrac{c_{33}\, e_{31}}{e_{33}}, & e_1 = e_{31} + \dfrac{c_{13}\, \varepsilon_{33}}{e_{33}}, \\ e_3 = e_{33} + \dfrac{c_{33}\, \varepsilon_{33}}{e_{33}}. \end{cases}$$

The equation (1) becomes, in view of (23), (24),

(27) $$c_1 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) + c_3 \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} = 0.$$

Equation (3) gives, from (25),

(28) $$e_1 \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) + e_3 \frac{\partial w}{\partial z} = f(r),$$

where $f(r)$ is an arbitrary function of r.
From (27) and (28), we also find

(29) $$-\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} = \frac{c_1}{k_1} \cdot \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z},$$ (30) $$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) = \frac{c_3}{k_1} \cdot \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r},$$

where we set

$$k_1 = e_1 c_3 - c_1 e_3$$

Using (22), equation (29) becomes

(31) $$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{c_1}{k_1} \cdot \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}.$$

Integrating this with respect to z we get

(32) $$u = \frac{c_1}{k_1} \cdot \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} \cdot \frac{z^2}{2} + f_1(r)\, z + f_2(r),$$

where f_1 and f_2 are two arbitrary functions of r.
Putting this value of u in (30), we have

$$\frac{c_1}{2k_1} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \left(\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} \right) z^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \left(\frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}r} + \frac{f_1}{r} \right) z + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \left(\frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}r} + \frac{f_2}{r} \right) - \frac{c_3}{k_1} \cdot \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} = 0.$$

If this equation is to hold for all of z^2 and z we must have

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \left(\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} \right) = 0, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \left(\frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}r} + \frac{f_1}{r} \right) = 0, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \left(\frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}r} + \frac{f_2}{r} \right) - \frac{c_1}{k_1} \cdot \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} = 0.$$

These equations, on integration, yield

$$f = Ar^2 + B\log r + C, \qquad (33)$$

$$f_1 = A_1 r + \frac{B_1}{r}, \qquad (34)$$

$$f_2 = \frac{Ac_3}{4k_1} r^3 + \frac{Bc_3}{2k_1} r\log r + \frac{1}{2} A_2 - \frac{Bc_3}{4k_1} r + \frac{B_2}{2}, \qquad (35)$$

where $A, B, C, A_1, B_1, A_2, B_2$ are constants, remembering that we have used the expression for f in determining f_2.

Using (33), (34), (35), we get from (32),

$$u = \frac{1}{2k_1}\left(2Ac_1 r + c_{\cdot}\frac{B}{r}\right) z^2 + \left(A_1 r + \frac{B_1}{r}\right) z + \qquad (36)$$
$$+ \frac{Ac_3}{4k_1} r^3 + \frac{Bc_3}{2k_1} r\log r + \left(A_3 - \frac{Bc_3}{2k_1}\right)\frac{r}{2} + \frac{B_2}{r}.$$

This is the most general expression for u which will, let it be assumed, take up values u and u' in $0 \leqslant z \leqslant l_1$ and $l_1 \leqslant z \leqslant l$ respectively.

Since u is to be finite at $r = 0$ we must have $B = B_1 = B_2 = 0$:

$$u = \frac{Ac_1}{k_1} rz^2 + A_1 rz + \frac{Ac_3}{4k_1} r^3 + A_2 r, \quad (0 \leqslant z \leqslant l_1). \qquad (37)$$

Also,

$$u' = \frac{A' c_1'}{k_1'} rz^2 + A_1' rz + \frac{A' c_3'}{4k_1'} r^3 + A_2' r', \quad (l_1 \leqslant z \leqslant l). \qquad (38)$$

Making use of (21), (28), (37) and (38) we get

$$e_{33} e_3 E_z = c_3 e_{33}\left(\frac{2Ac_1}{k_1} z^2 + 2A_1 z + \frac{Ac^3}{k_1} r^2 + 2A_2\right) + \qquad (39)$$
$$+ c_{33}(Ar^2 + C), \quad (0 \leqslant z \leqslant l_1),$$

$$e_3' e_{33}' E_2' = c_3' e_{33}'\left(\frac{2A\ c_1'}{k_1'} z^2 + 2A_1' z + \frac{A' c_3'}{k_1'} r^2 + 2A_2'\right) + \qquad (40)$$
$$+ c_{33}'(A' r^2 + c'), \quad (l_1 \leqslant z \leqslant l).$$

From (21) we find

$$e_3 \frac{\partial w}{\partial z} = (Ar^2 + C) - e_1\left(\frac{2A}{k_1} c_1 z^2 + 2A_1 z + \frac{Ac_3}{k_1} r^2 + 2A_2\right), \quad (0 \leqslant z \leqslant l_1), \qquad (41)$$

and

$$e_3' \frac{\partial w'}{\partial z} = (A' r^2 + C') - e_1'\left(\frac{2A' c_1'}{k_1'} z^2 + 2A_1' z + \frac{A_1' c_3'}{k_1'} r^2 + 2A_2'\right), \quad (l_1 \leqslant z \leqslant l). \qquad (42)$$

Having known $\partial w/\partial z$, E_z, $\partial u/\partial r + u/r$ we, can determine D_z and D_z' in $0 \leqslant z \leqslant l_1$ and $l_1 \leqslant z \leqslant l$ respectively from (12). Also,

$$T_{rr} = -\frac{k_1 + k_3}{e_3}\left(\frac{AC_1}{k_1} z^2 + A_1 z + A_2\right) - \frac{Ac_3}{4k_1} r^2 + \frac{3k_1 + k_2}{e_3} + \frac{C_3}{e_3}(Ar^2 + C). \qquad (43)$$

Similarly, T'_{rr} can be obtained. Thus we hawe to find out eight constante, viz., $A, A_1, A_2, C, A', A'_1, A'_2, C'$ from the linear equations provided by the boundary conditions (13)...(20), using relations (39), (40), (41), (42), (43), the expresions $D_z, D'_z, T_{rr}, T'_{rr}$.

Received the 4 XII 1966

Jadavpur University, Calcutta
India

REFERENCES

1. Toupin R. A., J. Acoust. Soc. Amer., 1959, **31**, p. 315.
2. Paria G., J. Sc. Engg. Res., 1960, **IV**, p. 381.
3. Sinha D. K., Rev. Appl. Mec., 1962, **VII**, pp. 947—951.
4. — Atti della Acad. Sc. Torino, 1963, **98**, pp. 1—9.
5. Cady W., *Piezoelectricity*. Mc. Graw Hill Book Co., 1946.

DEFORMAŢII ALE UNUI DISC SUBŢIRE ETEROGEN DIN MATERIAL PIEZOELECTRIC

(Rezumat)

Se expune o metodă de determinare a deformaţiilor unui disc subţire eterogen, din material piezoelectric, supus la acţiunea unui cîmp axial electric. Metoda expusă pune în evidenţă faptul că deformaţiile, aşa cum sînt determinate de Toupin [1], Sinha [3], [4], pot fi exprimate în funcţie de modulele de elasticitate şi piezoelectric, precum şi de permitivitatea materialului din care este confecţionat discul considerat.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

C. D. 531.23

REPRÉSENTATION MATHÉMATIQUE DE CERTAINES LIMITES DE GROUPES DE CHARGES ET LEURS APPLICATIONS DANS LA MÉCANIQUE DU CORPS DÉFORMABLE

Note I

MOMENTS CONCENTRÉS DIRIGÉS ET ROTATIONNELS

PAR

WILHELM KECS

1. Introduction

En résolvant divers problèmes concernant la mécanique du corps déformable, on rencontre souvent des limites de groupes de charges qui n'ont pas de sens dans le cadre de l'analyse classique, mais auxquelles on peut donner un sens et une représentation mathématique correspondante en utilisant la théorie des distributions.

Cettes représentations permettent l'inclusion de ces charges dans le rang des distribuées et de traiter les problèmes sous une forme unitaire.

Suivant la structure des charges et des éléments géométriques à l'aide desquels on les définit, on peut les classifier dans les ensembles suivants: a) moments concentrés dirigés, b) moments concentrés rotationnels, c) moments du type dipôle.

2. Moments concentrés dirigés

Définition. On appelle *moment concentré dirigé*, la limite dans le sens des distributions, de l'ensemble de deux forces égales et de sens contraires $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$, ayant respectivement les points d'application A_2, A lorsque le bras de levier $d \to 0$ de sorte que le verseur $\mathbf{u}_0^1$ aussi que le produit $Fd = M^{(1)}$ reste constant (fig. 1), $(F = |\mathbf{F}_1| = |\mathbf{F}_2|)$.

Puisque les forces $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$ sont équivalentes, respectivement avec les charges:

$$(1)\qquad \begin{cases} \mathbf{q}_1 = \mathbf{F}_1\,\delta\,(x_1 - x_1^0,\ x_2 - x_2^0,\ x_3^1 - x_3^0), \\ \mathbf{q} \ = \mathbf{F}_2\,\delta\,(x_1 - x_1^2,\ x_2 - x_2^2,\ x_3 - x_3^2), \end{cases}$$

alors leur ensemble sera équivalent à la charge:

$$\mathbf{q}_d = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2.$$

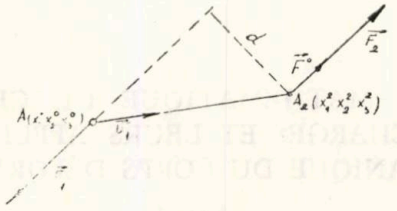


Fig. 1

En passant à la limite $(d \to 0)$ on obtient:

$$(2)\qquad \mathbf{Q}\,(x_1, x_2, x_3) = -\frac{M^{(1)}\,\mathbf{F}^0}{|\,\mathbf{u}_1^0 \times \mathbf{F}^0\,|} \cdot \frac{\partial}{\partial u_1}\,\delta\,(X - X_0),$$

ou: $X\,(x_1, x_2, x_3)$ représente un point de l'espace E_3, $M^{(1)}$ — grandeur du moment concentré, $\mathbf{u}_1^0$ — verseur qui définit la direction selon laquelle on passe à limite, $\partial/\partial u_1$ — dérivée directionnelle d'après $\mathbf{u}_1^0$, $\mathbf{F}^0$ — verseur de la force $\mathbf{F}_2$.

En supposant que dans le point B agit la charge $\mathbf{Q}^{(1)}$ et dans le point $A\,(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ la charge $-\mathbf{Q}^{(1)}$ (fig. 2), ayant l'expression:

$$\mathbf{Q}^{(1)} = -\frac{M^{(1)}\,\mathbf{F}^0}{|\,\mathbf{u}_1^0 \times \mathbf{F}^0\,|} \cdot \frac{\partial}{\partial u_1}\,\delta\,(X - X_0),$$

on définira alors le moment concentré dirigé de l'ordre 2, comme il suit

Définition. On appelle *moment concentré dirigé de l'ordre 2,* correspondant au point $A\,(X_0)$, la limite dans le sens des distributions de la paire de charges $(\mathbf{Q}^{(1)}, -\mathbf{Q}^{(1)})$ lorsque le bras de levier $d_2 \to 0$, en considérant le point B_1 mobile et la grandeur du moment $M^{(2)} = M^{(1)} d_2$, ainsi que les verseurs $\mathbf{u}_2^0$ et $\mathbf{F}_0$ constants (le nombre positif $M^{(2)}$ représente la grandeur du moment concentré de l'ordre 2).

En passant à la limite la paire de charges mentionné ci-dessus on obtiendra pour le moment concentré dirigé de l'ordre 2, noté par le symbole $\mathbf{Q}^{(2)}$, l'expression:

$$(3)\qquad \mathbf{Q}^{(2)}(x_1, x_2, x_3) = \lim_{d_2 \to 0} (\mathbf{Q}^{(1)}, -\mathbf{Q}^{(1)}) = \\ = \frac{M^{(2)}\,\mathbf{F}^0}{|\,\mathbf{u}_1^0 \times \mathbf{F}^0\,|\,.\,|\mathbf{u}_2^0 \times \mathbf{F}^0|} \cdot \frac{\partial^2}{\partial u_1\,\partial u_2}\,\delta(X - X_0),$$

dans laquelle $\partial^2/\partial u_1 \partial u_2$ représente la dérivée directionnelle d'ordre 2, la direction étant définie par les verseurs $\mathbf{u}_1^0$ et $\mathbf{u}_2^0$.

D'une manière analogue, si l'on notera avec $M^{(n)}$ la grandeur du moment concentré dirigé d'ordre n correspondant au point $A(X_0)$ et avec $\mathbf{u}_i^0$, $(i = 1, 2, ..., n)$, les verseurs qui définissent les directions selon lesquelles on passe à la limite, alors le moment concentré d'ordre n sera défini par la relation :

$$\mathbf{Q}^{(n)}(x_1, x_2, x_3) = \lim_{d_n \to 0} (\mathbf{Q}^{(n-1)}, -\mathbf{Q}^{(n-1)}), \tag{4}$$

où $\mathbf{Q}^{(n-1)}$, $-\mathbf{Q}^{(n-1)}$ représentent les moments concentrés d'ordre $n-1$, appliqués respectivement dans le point fixe $A(X_0)$ et le point mobile B_n, et d_n le bras de levier (fig. 3).

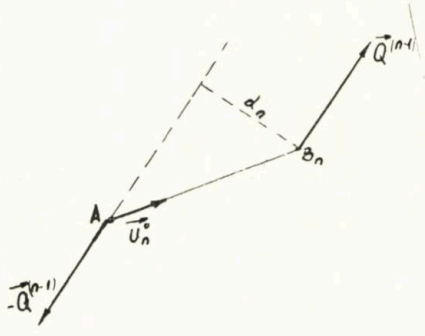


Fig. 2

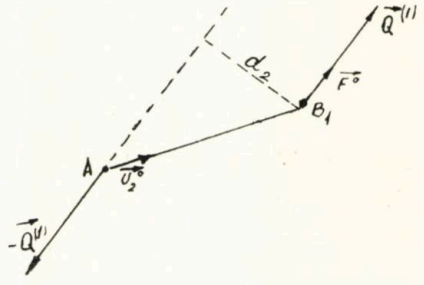


Fig. 3

Par une méthode de récurrence on peut déduire pour le moment concentré d'ordre n l'expression :

$$\mathbf{Q}^{(n)}(X) = \frac{(-1)^{(n)} M^{(n)} \mathbf{F}^0}{\prod_1^n |\mathbf{u}_i^0 \times \mathbf{F}^0|} \cdot \frac{\partial^n}{\partial u_1 \partial u_2 ... \partial u_n} \delta(X - X_0). \tag{5}$$

Moments concentrés dirigés distribués d'une manière continuelle sur une courbe

Soit (C) une courbe définie sous forme paramétrique par les équations :

$$x_i = f_i(s), \quad (i = 1, 2, 3), \tag{6}$$

où les fonctions f_i sont supposées indéfiniment dérivables par rapport au paramètre s, représentant l'arc de courbe, ainsi que

$$\lim_{s \to \pm \infty} (f_1^2 + f_2^2 + f_3^2) = + \infty .$$

On supposera que sur la portion de courbe $\widehat{AB}$ correspondant à l'intervalle $s \in [a, b]$ (fig. 4), sur l'unité de grandeur de l'arc agissent des moments concentrés dirigés de premier ordre $\mathbf{Q}^{(1)}$, ayant l'expression :

$$\mathbf{Q}^{(1)} = -\frac{M\mathbf{F}^0}{|\mathbf{u}^0 \times \mathbf{F}^0|} \cdot \frac{\partial}{\partial s} \delta(X - Y), \tag{7}$$

où M, $\mathbf{F}^0$ et $\mathbf{u}^0$ sont des fonctions connues qui dépendent de l'arc s de la courbe, et $Y = Y(f_1, f_2, f_3)$. Le verseur $\mathbf{u}^0$ représente dans ce cas le verseur de la tangente à la courbe.

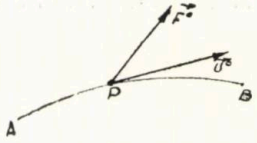


Fig. 4

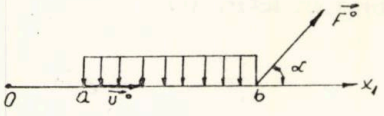


Fig. 5

Puisque dans chaque point P sur l'arc de courbe $\widehat{AB}$ agit la charge concentré $\mathbf{Q}^{(1)}(s)$ de l'arc $\widehat{AB}$, on lui associera la charge $\mathbf{Q}$ définie par l'expression :

$$\mathbf{Q} = \int_a^b \mathbf{Q}^{(1)}(s)\, ds. \tag{8}$$

En notant avec $\theta_1(s)$ la fonction caractéristique de l'arc $\widehat{AB}$:

$$\theta_1(s) = \begin{cases} 1 \text{ pour } s \in [a, b], \\ 0 \text{ en reste}, \end{cases}$$

et avec $\varphi(x_1, x_2, x_3) \in K$ une fonction fondamentale, alors en explicitant l'expression (8) on obtient :

$$\mathbf{Q}(x_1, x_2, x_3) = \frac{M(b)\mathbf{F}^0(b)}{|\mathbf{u}^0 \times \mathbf{F}^0|_{s=b}} \delta(X - X_B) - \frac{M(a)\mathbf{F}^0(a)}{|\mathbf{u}^0 \times \mathbf{F}^0|_{s=a}} \delta(X - X_A) -$$

$$- \frac{\partial^3}{\partial x_1\, \partial x_2\, \partial x_3} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\theta}_1 \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{M\mathbf{F}^0}{|\mathbf{u}^0 \times \mathbf{F}^0|} \right) ds, \tag{9}$$

où $\bar{\theta}_1 = \theta_1(s)\, \theta(X - Y)$, θ etant la fonction de Heaviside.

En particulier si l'on choisit l'arc s comme ligne de coordonnée, alors l'expression du moment concentré dirigé de premier ordre, concentré dans le point s_0 sur l'arc de courbe, aura l'expression :

$$\mathbf{Q}^{(1)}(s) = -\frac{M(s)\,\mathbf{F}^0(s)}{|\mathbf{u}^0(s)\times\mathbf{F}^0(s)|}\cdot\frac{\partial}{\partial s}\,\delta(s-s_0),$$

et par conséquent l'expression (9) de la charge équivalente au moment distribué d'une manière continuelle s'écrira:

$$\mathbf{Q}(s) = \frac{M(b)\,\mathbf{F}^0(b)}{|\mathbf{u}^0(b)\times\mathbf{F}^0(b)|}\,\delta(s-b) - \frac{M(a)\,\mathbf{F}^0(a)}{|\mathbf{u}^0(a)\times\mathbf{F}^0(a)|}\,\delta(s-a) - \tag{10}$$
$$-\,\theta_1(s)\,\frac{\partial}{\partial s}\,\frac{M\mathbf{F}^0}{|\mathbf{u}^0\times\mathbf{F}^0|}.$$

Exemple 1. Sur le segment *ab* (fig. 5) agissent des moments uniformément distribués ayant la grandeur M et $\mathbf{F}^0\,(\cos\alpha, \sin\alpha) = \text{constant}$.

Conformément à la relation (10), l'expression de la charge équivalente au moment uniformément distribué sera:

$$\mathbf{Q}(x_1) = \frac{M\mathbf{F}^0}{\sin\alpha}\,[\delta(x_1-b) - \delta(x_1-a)]. \tag{11}$$

Exemple 2. Sur le segment *ab* agit le moment distribué comme l'on montre dans la fig. 6, ayant $\mathbf{F}^0\,(\cos\alpha, \sin\alpha)$ constant et $M(a) = 0$, $M(b) = m$. Conformément à la relation (10) le moment distribué d'une manière continuelle est équivalent à la charge:

$$\mathbf{Q}(x_1) = \frac{m\mathbf{F}^0}{\sin\alpha}\left[\delta(x_1-b) - \frac{\theta_1}{b-a}\right]. \tag{12}$$

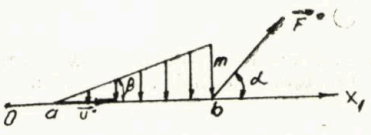


Fig. 6

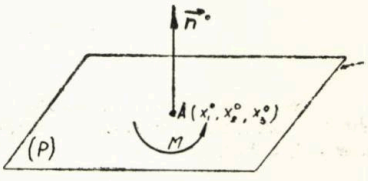


Fig. 7

3. Moment concentré rotationnel

À l'aide de l'ensemble des moments concentrés on peut définir un nouveau type de moment, à savoir le moment rotationnel.

Définition. On appelle *moment concentré rotationnel* la somme des deux ou plusieurs moments concentrés dirigés situés dans un plans donné et concentrés dans un point donné, qui ne dépendent pas des verseurs $\mathbf{u}^0$ et $\mathbf{F}^0$.

On peut prouver que cet ensemble $\{\mathbf{R}\}$ n'est pas vide et que si $\mathbf{n}^0$ (fig. 7) est le verseur normal au plan donné (P), et M la grandeur du

moment concentré rotationnel, alors pour l'expression du moment rotationnel on aura:

$$\mathbf{R} = -\frac{M}{2}\mathbf{n}^0 \times \operatorname{grad} \delta(x_1 - x_1^0,\ x_2 - x_2^0,\ x_3 - x_3^0). \tag{11}$$

Institut de Mines,
Petroşani

BIBLIOGRAPHIE

1. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., *Обобщение фукции и действию над ними.* M., 1958.
2. Kecs W., *Applications de la théorie des fonctions généralisées concernant les problèmes du plan élastique infini.* Rev. Roum. de math. pures et appl., 1964, **9**, *6*.
3. — *Sur les problèmes concernant le demi-espace élastique.* Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. Phys. de la R.P.R., 1962, **6 (54)**, *3–4*.
4. — *Représentation mathématique des moments de type dipôle.* Rev. Roum. de math. pures et appl., 1965, **10**, *9*.
5. — *Aplicaţii ale teoriei distribuţiilor privind încovoierea barelor drepte.* St. şi cerc. matem., 1965, **17**, *7*.
6. Schwartz L., *Théorie des distributions.* Vol. **I** et **II**, Paris, 1951.
7. Teodorescu P. P., *Probleme plane în teoria elasticităţii.* Vol. **I**, Ed. Acad. R. P. R., Buc., 1964.
8. — *Probleme plane în teoria elasticităţii.* Vol. **II**, Ed. Acad., R.S.R., Buc., 1966.

REPREZENTAREA MATEMATICĂ A UNOR LIMITE DE GRUPE DE SARCINĂ ŞI APLICAŢII ÎN MECANICA CORPURILOR DEFORMABILE

Nota I

Momente concentrate dirijate şi rotaţionale

(Rezumat)

Se extind o serie de noţiuni clasice, ca, de ex., cele referitoare la momente concentrate dirijate, momente concentrate rotaţionale şi momente de tip dipol, folosind în mod sistematic teoria distribuţiilor.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

D. K. 531.132.1

ISOCHRONISCHE WÄLZKURVENPENDEL

VON

M. KONSTANTINOFF und P. ZENOFF

1. Einführung

Beim Rollen [1]) einer allgemein schweren Kurve Z' (Abb. 1) auf einer anderen unbeweglichen Kurve Z unter der Einwirkung der Gravitationskraft sind stabile Schwingungen um den Gleichgewichtszustand möglich, falls die Bahnkurve C des Schwerpunkts S ein Minimum für die statische Lage oder für den Gravitationspotential der schweren Kurve Z' besitzt.

In dieser Abhandlung werden bestimmte Polbahnfamilien synthesiert, welche als Wälzkurven stabile und insbesondere isochronische Schwingungen des Pendels (Kurve Z') ermöglichen.

Es können zwei Hauptaufgaben von praktischer Bedeutung gestellt werden:

a) Konstruktion von Z', gemäss aufgegebener Kurven Z und C;

b) Konstruktion von Z, gemäss aufgegebener Kurven Z' und C.

Wenn isochronische Schwingungen zu erwarten sind, ist die Kurve C in beiden Fällen den sie eindeutig definierenden differenziellen Zusammenhängen unterordnet.

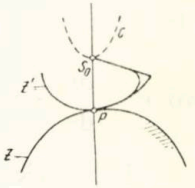


Abb. 1

2. Synthese der beweglichen Polkurve (Gangpolbahn) Z' nach gegebener ruhenden Polkurve (Rastpolbahn) Z und der Bahnkurve C des Schwerpunktes

Wir nehmen an, dass die Kurven Z und C (Abb. 2) durch die Polargleichungen

(1) $q = q(\psi)$ und (2) $r = r(\varphi)$

[1]) Die Kurven Z und Z' bilden ein Polkurvenpaar, weil (Abb. 1) der relative Drehpol P mit dem Berührungspunkt zusammenfällt.

in dem unbeweglichen Koordinatensystem xOy bekannt sind. Wenn die Lage der beweglichen Ebene (Abb. 3) von der Polarachse ξ anfangend im Schwerpunkt S und Winkel α, bestimmt wird, kann die virtuelle Geschwindigkeit von S mit

$$(p\,\mathrm{d}\alpha)^2 = (r\,\mathrm{d}\varphi)^2 + (\mathrm{d}r)^2 \tag{3}$$

aufgezeichnet werden.

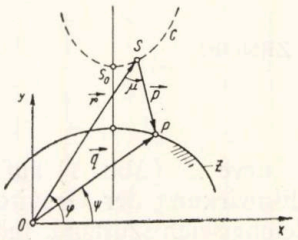


Abb. 2

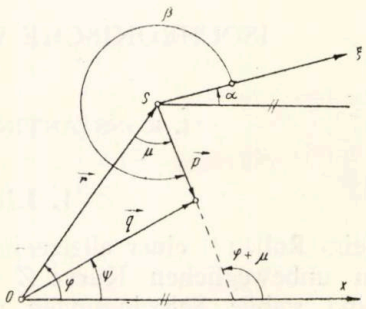


Abb. 3

Bekanntlich ist der Momentpol P ein Punkt der Kurvennormale zur Bahnkurve C (Abb. 2), folglich ist

$$\operatorname{tg}\mu = -\frac{r'}{r}, \tag{4}$$

wo $r' = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}$ ist.

Da (Gleichungen (3) und (4))

$$\sin\mu = -\frac{r}{\sqrt{r^2 + r'^2}} = -\frac{1}{p}\cdot\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\alpha}, \qquad \cos\mu = \frac{r}{\sqrt{r^2 + r'^2}} = \frac{r}{p}\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\alpha}, \tag{5}$$

kann man laut Abb. 3 und der Zusammenhänge (5) für $\operatorname{tg}(\varphi - \psi$ aufzeichnen:

$$\operatorname{tg}(\varphi - \psi) = \frac{p\sin\mu}{r - p\cos\mu} = \frac{\mathrm{d}r}{r\,(\mathrm{d}\varphi - \mathrm{d}\alpha)}, \tag{6}$$

oder nach Integrierung:

$$\varphi - \alpha = \int \frac{r'\,\mathrm{d}\varphi}{r\operatorname{tg}(\varphi - \psi)} + C. \tag{7}$$

Zwischen den Kenngrössen φ und ψ besteht ein zusätzlicher geometrischer Zusammenhang, welcher durch die Bedingung (Abb. 3), das die Gerade SP einen Winkelkoeffizienten $\operatorname{tg}(\varphi + \mu)$ besitzt, oder

$$r \sin \varphi - q \sin \psi = \operatorname{tg}(\varphi + \mu)(r \cos \varphi - q \cos \psi)$$

bestimmt wird.

Diese Bedingung ist aufgrund (2) folgendermassen darzustellen:

$$r \sin \varphi - q \sin \psi = \frac{\operatorname{tg} \varphi - r'/r}{1 + (r'/r) \operatorname{tg} \varphi}(r \cos \varphi - q \cos \psi). \tag{8}$$

Der Polarwinkel β des Vektors p im beweglichen Koordinatensystem S-ξ kann durch (Abb. 3)

$$\beta = \pi + \varphi + \mu - \alpha \tag{9}$$

ausgedrückt werden.

Anderseits ist

$$p = q \frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin \mu}. \tag{10}$$

Durch Ersetzung von (4), (5) und (7) in den Gleichungen (9) und (10) erhält man:

$$\begin{cases} p = -\dfrac{q}{r'} \sin(\varphi - \psi) \sqrt{r^2 + r'^2}, \\ \beta = \pi + \displaystyle\int \frac{r' \, d\varphi}{r \operatorname{tg}(\varphi - \psi)} - \operatorname{arctg} \frac{r'}{r} + C. \end{cases} \tag{11}$$

Die Gleichungen (11) beim zusätzlichen Zusammenhang (8) stellen die polaren parametrischen Gleichungen der Gangpolbahn dar.

Nehmen wir an, dass die Kurve Z' die Einschränkungskontur eines materiellen Objekts darstellt, welches Masse und Trägheitsmoment aufweist und über die unbewegliche Kurve Z zu rollen gezwungen ist.

Die Wälzkurvenpendel sind konservative Systeme und viel bequemer ist es, zwecks Untersuchung ihrer Bewegung, direkt die Energiegleichungen anzuwenden. Die potenzielle Energie (des Gravitationsfeldes) kann ausgedrückt werden durch die Gleichung:

$$\Pi = mg(r \sin \varphi - r_0 \sin \varphi_0), \tag{12}$$

in welcher r_0 den Radiusvektor des Minimums der Kurve C bezeichnet. Die potentielle Anfangsenergie des vom Radiusvektor r_m und Polarwinkel φ_m abgelenkten Polbahnpendels (Wälzkurvenpendels) ist laut (12) gleich:

$$\Pi_m = mg(r_m \sin \varphi_m - r_0 \sin \varphi_0). \tag{12 a}$$

Nach dem König'schen Theorem für die kinetische Energie folgt, dass

$$E = \frac{m}{2}(p^2 + i_s^2)\,\Omega^2 \tag{13}$$

ist, wobei: m—Pendelmasse, i_s—Trägheitsradius zu einer den Schwerpunkt durchschneidenden und zur Bewegungsebene senkrecht stehenden Achse, $\Omega = d\alpha/dt$ — Winkelgeschwindigkeit des Polbahnpendels.

Die Bedingung $\Pi_m = \Pi + E$ und die Gleichungen (12), (12a) und (13) ergeben:

$$2g\,(r_m \sin\varphi_m - r\sin\varphi) = (p^2 + i_s^2)\,\Omega^2. \tag{14}$$

Da

$$y = r\sin\varphi, \tag{15}$$

ist, folgt laut (14) für die Winkelgeschwindigkeit:

$$\Omega^2 = 2g\,\frac{y_m - y}{p^2 + i_s^2}. \tag{16}$$

Es ist klar ersichtlich (Abb. 2), dass die maximale Geschwindigkei Ω_{max} dem y_{min} entspricht, d. h. der niedrigsten Lage S_0 des Schwerpunktes

$$\Omega^2_{max} = 2g\,\frac{y_m - y_{min}}{p^2_{min} + i_s^2}. \tag{17}$$

Anderseits wird die Winkelgeschwindigkeit Ω von der geometrischen Abhängigkeit (7) bestimmt, und zwar:

$$\Omega = \left(1 - \frac{r'}{r\,\mathrm{tg}\,(\varphi - \psi)}\right)\dot{\varphi}. \tag{16 a}$$

Wird Ω aus der Gleichungen (16) und (16a) eliminiert, gelangt man zur folgenden Differentialgleichung:

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2g}{\{1 - r'/[r\,\mathrm{tg}\,(\varphi - \psi)]\}^2}\cdot\frac{y_m - y}{p^2 + i_s^2}. \tag{18}$$

In dieser Gleichung sind die Abhängigkeiten (8), (11) und (15) in Betracht zu ziehen, um zur Gleichung

$$\dot{\varphi} = f(\varphi) \tag{19}$$

zu gelangen, woraus sich für das zweite Integral der Bewegungsdifferentialgleichung

$$t = \int\frac{d\varphi}{f(\varphi)} + t_0 \tag{20}$$

ergibt.

Wenn beim statischen Gleichgewicht (Abb. 1) die Kurven Z' und Z symetrisch zur senkrechten Gerade S_0-P stehen, wird aus der Gleichung (20) unmittelbar die Periode der Schwingungsbewegung des Polbahnpendels bei Anfangsbedingungen φ_m und v_m ermittelt:

$$T = \int_{\varphi_m}^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{f(\varphi)}. \tag{21}$$

2.1. Isochronisches Wälzkurvenpendel bei gegebener Rastpolbahn Z

Bei der Synthese eines Wälzkurvenpendels stellt die Bahnkurve C des Schwerpunktes eine definierte Kurve dar.

Isochronische (tautochronische) Schwingungen des Polbahnpendels sind zu erreichen, wenn die Bedingung [1]

$$\dot{\eta}^2 + w^2 \eta^2 = \text{const.} \tag{22}$$

erfüllt ist, wobei η ein verallgemeinerter Parameter und w eine Konstante ist. Die energetische Gleichung (14) wird folgenderweise aufgeschrieben

$$2g(y_m - y_0) = 2g(y - y_0) + (p^2 + i_s^2)\,\Omega^2. \tag{23}$$

Es wird angenommen, dass

$$w^2 \eta^2 = 2g(y - y_0), \quad \dot{\eta}^2 = (p^2 + i_s^2)\,\Omega^2. \tag{24}$$

Nach Differenzierung [2]) der ersten Gleichung (24) erhält man:

$$\dot{\eta} = \frac{1}{w} \cdot \frac{g y'}{\sqrt{2(y - y_0)}} \dot{\varphi}. \tag{25}$$

Die Tautochronie-Bedingung wird durch Ausschliessung von $\dot{\eta}$ aus der zweiten Gleichung (24) ermittelt, indem (25) benutzt wird,

$$(p^2 + i_s^2)\,\Omega^2 = \frac{1}{w^2} \cdot \frac{g}{2} \cdot \frac{y'^2}{y - y_0} \dot{\varphi}^2, \tag{26}$$

während aufgrund (16a) die Abhängigkeit (26) folgenderweise aufgeschrieben kann:

$$(p^2 + i_s^2)\left[1 - \frac{r'}{r \operatorname{tg}(\varphi - \psi)}\right]^2 = \frac{g}{2w^2} \cdot \frac{y'^2}{y - y_0}. \tag{27}$$

---

[2]) Das index (') in (25) bezeichnet auch später immer noch die Ableitung hinsichtlich φ.

Einzelfall. Die unbewegliche Polbahn Z ist eine Gerade (die Abszissenachse auf Abb. 4). In diesem Falle ist $\dot{\psi} \equiv 0$ d.h. es folgt für das System (11) aus den Gleichungen (7) und (8), das:

$$p^2 = \frac{r^2 + r'^2}{[r - r'/(r \operatorname{tg} \varphi)]^2}, \tag{28}$$

$$\beta = \pi - \operatorname{arctg} \frac{r'}{r} + \int \frac{r'}{r \operatorname{tg} \varphi} \, d\varphi + C.$$

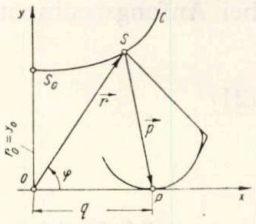


Abb. 4

Wird $\dot{\psi} \equiv 0$ in der ersten Gleichung von (11) eingesetzt und nach der ersten Gleichung von (28) erhält man für die Lage q des Momentanpols P auf die Abszissachse

$$q = -\frac{r'}{1 - r'/(r \operatorname{tg} \varphi)} \cdot \frac{1}{\sin \varphi}. \tag{28 a}$$

Wird $\dot{\psi} \equiv 0$ in der Gleichung (27) der Isochronie eingesetzt, erhält man:

$$(p^2 + i_s^2) \left(1 - \frac{r'}{r \operatorname{tg} \varphi}\right)^2 = \frac{g}{2w^2} \cdot \frac{y'^2}{y - y_0}. \tag{29}$$

Da

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \tag{30}$$

und

$$x' = r' \cos \varphi - r \sin \varphi, \quad y' = r' \sin \varphi + r \cos \varphi, \tag{31}$$

wird nach Ersetzen durch (28), (30) und (31) in der tautochronischen Abhängigkeit (29) folgende Differentialgleichung für die Bahnkurve des Schwerpunktes C ermittelt:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{(y - y_0)(1 + i_s^2/y^2)}{g/2w^2 - (y - y_0)}. \tag{32}$$

Durch die Annahme $\dot{\psi} \equiv 0$ in der Gleichung (18) kommt man zur Abhängigkeit:

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2g}{[1 - r'/(r \operatorname{tg} \varphi)]^2} \cdot \frac{y_m - y}{p^2 + i_s^2}. \tag{33}$$

Nehmen wir an, dass die Bahnkurve C (die Punktbahn von S) in der Cartesichen Gleichung $y = y(x)$ angegeben ist. Laut (30) und (31) kann man für (32) schreiben:

$$t - t_0 = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int \sqrt{\frac{1 + (dy/dx)^2 + (i_s/y)^2}{y_m - y}} \, dx. \tag{34}$$

Für die symmetrische Kurve Z' kann die Periode als Funktion der anfänglichen Bedingungen x_m und y_m aufgesucht werden:

$$T = \frac{4}{\sqrt{2g}} \int_{x_m}^{0} \sqrt{\frac{1 + (dy/dx)^2 + (i_s/y)^2}{y_m - y}} \, dx. \tag{35}$$

Aus (28) ergibt sich für die Lage von P

$$q = x + y \frac{dy}{dx}. \tag{36}$$

Angenommen, dass in der Differentialgleichung der Bahnkurve (32) $i_s = 0$ ist, so folgt:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y - y_0}{l + y_0 - y}}, \quad \text{wo } l = \frac{g}{2w^2}. \tag{37}$$

Nach Integrierung und Aufnahme von $R = g/4w^2$, $y_0 = (\lambda - 1)R$, aus der Gleichung (37) gelangt man zu den parametrischen Abhängigkeiten

$$x = R(t + \sin t), \quad y = R(\lambda - \cos t), \tag{38}$$

welche die in Abb. 5 gezeigte Radlinie darstellen.

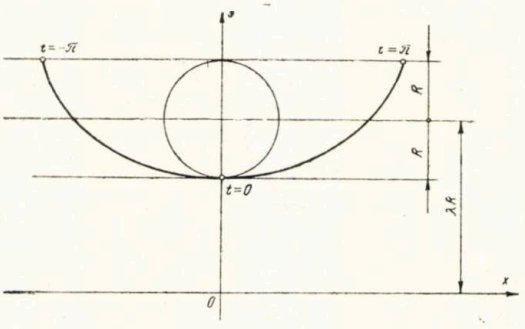


Abb. 5

Laut (11) und (18) sind die Gleichungen der Bewegung des Schwerpunktes auf die Radlinie gewährleisteten Gangpolbahn ausgeführt worden:

a) für $|\lambda| > 1$

$$\beta = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{t + (\lambda+1)\operatorname{tg}(t/2)}{\lambda - 1 - t\operatorname{tg}(t/2)} + \operatorname{arctg}\frac{\lambda - \cos t}{\lambda + \sin t} - t + \tag{39 a}$$
$$+ 2\sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}}\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right);$$

b) für $|\lambda| < 1$

$$\beta = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{t + (\lambda+1)\operatorname{tg}(t/2)}{\lambda - 1 - t\operatorname{tg}(t/2)} + \operatorname{arctg}\frac{\lambda - \cos t}{\lambda - \sin t} - t + \tag{39 b}$$
$$+ \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}}\ln\left|\frac{(1+\lambda)\operatorname{tg}(t/2) - \sqrt{1-\lambda^2}}{(1+\lambda)\operatorname{tg}(t/2) + \sqrt{1-\lambda^2}}\right|,$$

indem für $|\lambda| \gtrless 1$

$$p = R\frac{\lambda - \cos t}{\cos(t/2)}. \tag{40}$$

Abb. 6 zeigt die Konfigurationen der Gangpolbahnen bei verschiedener λ (d. h. bei verschiedener relativen Disposition der Radlinie und der Rastpolbahn):

1. Für $\lambda > 1$ hat die Gangpolbahn zwei Asymptoten (die Kurven *1* und 2).

2. Für $1 > \lambda > -1$ hat die Gangpolbahn zwei Asymptoten und der Schwerpunkt ist ein vierfacher asymptotischer Punkt (Kurve *3*).

3. Für $\lambda = -1$ stellt die Gangpolbahn ein Kreis dar.

4. Für $-1 < \lambda < -3$ hat die Gangpolbahn zwei Asymptoten und zwei Spitzenpunkte [3]) (Kurve *4*).

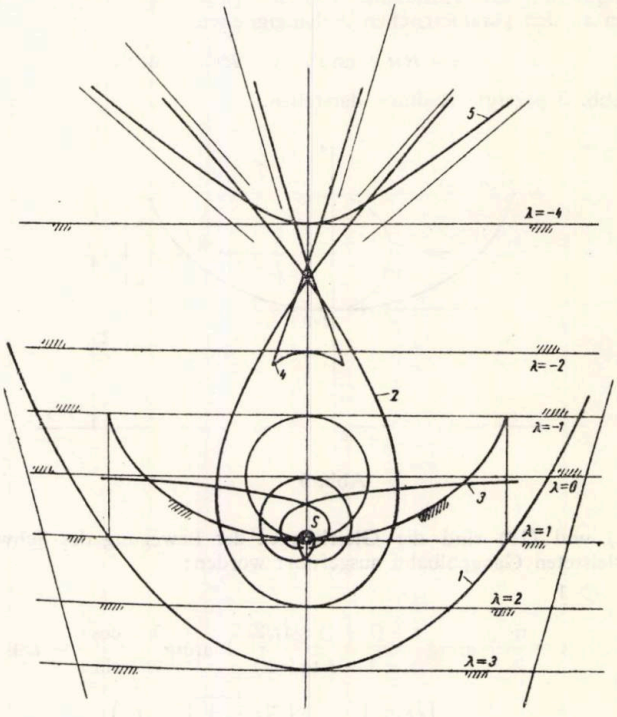


Abb. 6

5. Für < -3 weist die Kurve eine Form auf, welche der Form bei $\lambda > 1$ ähnlich ist

Im allgemeinen Fall zeigt die Analyse der Gleichung (32), dass die Isochroniekurve und die Radlinie (Abb. 7) in ihrer Art analog sind, weil: a) die Kurve für $y_0 < y < y_0 + S$ definiert ist; b) sie ist symmetrisch zu y; c) für $x = 0$, $y' = 0$, für $x = x_{max}$, $y' \to \infty$; d) $y = y'x)$ ist monoton, $(y'(x) > 0)$; c) die Kurve kann nach unten ausgespannt sein; bei gewissen Korrelationen der Parameter kann sie ihre Konkavität zweimal ändern.

Nehmen wir an, dass R_0 den Radius einer Krümmung im tiefstliegenden Punkt bezeichnet, so gilt für die Periode

$$T = \frac{2\pi}{y_0} \sqrt{\frac{(i_s^2 + y_0^2) R_0}{g}}. \tag{41}$$

Abb. 7 zeigt eine Isochroniekurve samt der ihr entsprechenden Polbahn.

[3]) Storchschnabelpunkt.

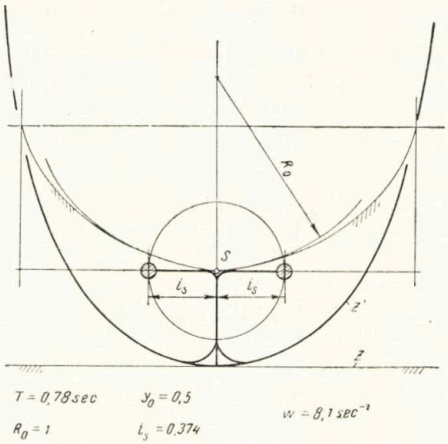


Abb. 7

3. Synthese der Rastpolbahn Z nach angegebener Gangpolbahn Z' und Bahnkurve C des Schwerpunktes

Nehmen wir an, dass die Kurven Z' und C mit den Polargleichungen bekannt sind (Abb. 3):

$$p = p(\beta), \qquad (42)$$

$$r = r(\varphi). \qquad (43)$$

Wird in den Gleichungen (10) und (6) der Parameter μ durch die Abhängigkeiten (5) eliminiert, erhält man:

$$q = -p\frac{r'}{\sqrt{r^2 + r'^2}\sin(\varphi - \psi)}, \qquad (44)$$

$$\psi = \varphi - \operatorname{arctg}\left(\frac{r'}{r} \cdot \frac{p}{p - \sqrt{r^2 + r'^2}}\right). \qquad (45)$$

Nach Differenzierung von (9) und Ausschliessung von μ und α mittels (2) und (4) gelangt man zum differenziellen Zusammenhang

$$\frac{d\beta}{d\varphi} = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2} - \frac{\sqrt{r^2 + r'^2}}{p}. \qquad (46)$$

Durch Eliminierung der Zwischenbeiwerte β und φ kann aus (44), (45) und (46) die gesuchte Abhängigkeit $f(q, \psi) = 0$, welche die Kurve Z beschreibt, ermittelt werden.

Die Periode T (Gleichung (21)) kann berechnet werden, wenn in (18) β und ψ durch (45) und (46) ersetzt werden.

3. 1. Isochronisches Polbahnpendel bei angegebener Gangpolbahn Z'

Auch in diesem Falle ist die Bahnkurve C des Schwerpunktes eine bestimmte Kurve, welche durch den zusätzlichen Differenzialzusammenhang für Tautochronie ermittelt wird. Da $p\Omega = \dot{s}$, die Geschwindigkeit des Schwerpunktes bezeichnet, kann die Gleichung (14) in folgender Art abgeschrieben werden:

$$\frac{\dot{s}^2}{2}\left(1+\frac{i_s^2}{p^2}\right)+gr\sin\varphi = gr_m\sin\varphi_m. \tag{47}$$

Die Gleichung (47) wird formal zur Isochroniebedingung (22) zurückgeführt, falls die Abhängigkeiten

$$w^2\eta^2 = 2g(r\sin\varphi - r_0\sin\varphi_0) \tag{48}$$

$$\dot{\eta}^2 = \dot{s}^2\left(1+\frac{i_s^2}{p^2}\right), \tag{49}$$

gleichzeitig erfüllt worden sind, woher nach Differenzierung von (48) und Ausschliessung von $\dot{\eta}$ in der Gleichung (49) die nötige Differenzialgleichung ermittelt wird

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi}\sqrt{1+\frac{i_s^2}{p^2}} = \frac{r'\sin\varphi + r\cos\varphi}{\sqrt{2(r\sin\varphi - r_0\sin\varphi_0)}}\cdot\frac{\sqrt{g}}{w}. \tag{50}$$

Einzelfall. Die Gangpolbahn Z' wird als Kreis angenommen, wobei (Abb. 8) der Halbmesser mit a und der Abstand vom Mittelpunkt bis zum Schwerpunkt mit e bezeichnet sind, oder

$$p = e\cos\beta + a\sqrt{1-\frac{e^2}{a^2}\sin^2\beta}. \tag{51}$$

Ist $e = 0$, d. h. liegt der Schwerpunkt im Kreismittelpunkt ($p = a = \text{const.}$), so kann mit (50) bewiesen werden, dass die Bahnkurve C des Schwerpunktes auch eine Radlinie ist. Da $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$, $y = r\sin\varphi$ und $x = r\cos\varphi$ ist, wird (50), nach Übergang in cartesischen Achsen, auf

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{\frac{y-y_0}{A-y}}, \tag{52}$$

zurückgeführt, wobei

$$A = \frac{(l+y_0)a^2 + y_0 i_s^2}{a^2 + i_s^2}, \quad \left(l = \frac{g}{2w^2}\right). \tag{53}$$

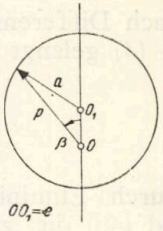
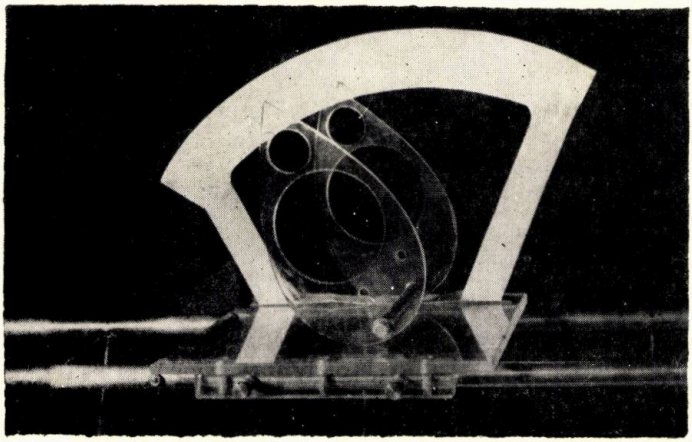


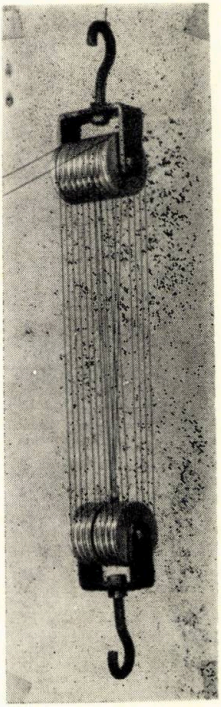
Abb. 8

Angenommen, dass

$$y_0 = R(\lambda - 1), \quad y = R(\lambda - \cos t), \tag{54}$$

so folgt aus (52), dass $v = R(t + \sin t)$ ist, wobei





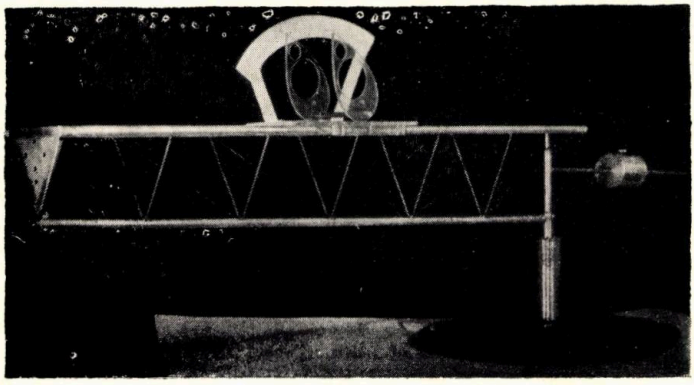


Abb. 10 b.

$$R = \frac{1}{4} \cdot \frac{g}{w^2} \cdot \frac{a^2}{a^2 + i_s^2} \cdot \tag{55}$$

Abb. 9 zeigt Polbahnpaaren-Familien für isochronische Schwingungen bei verschiedenen Halbmessern a der Gangpolbahn Z'.

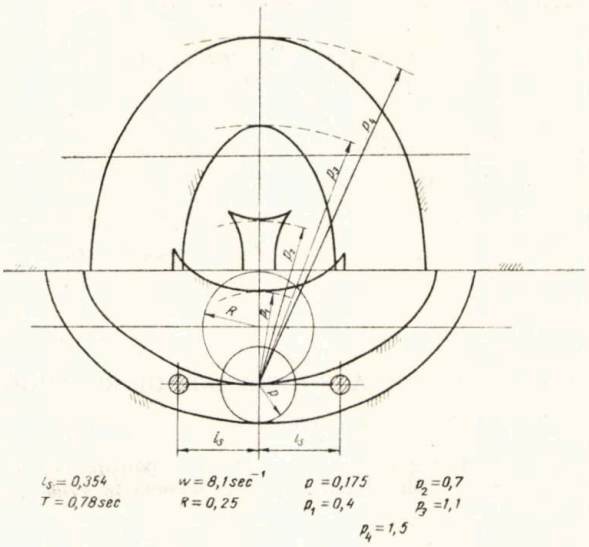


Abb. 9

4. Schlussfolgerungen

Die Realisierbarkeit gewisser Einzelfälle der Polbahnpendelfamilien kann etliche technische Anwendungen erfahren, wie z.B.:

a) Ein Polbahnpendel, das über eine Gerade rollt, kann als Fühler zum Abmessen von Beschleunigungen angewandt werden. Abb. 10 zeigt das Photo einer Prüf- und Eichvorrichtung für Wälzkurven-Beschleuni-

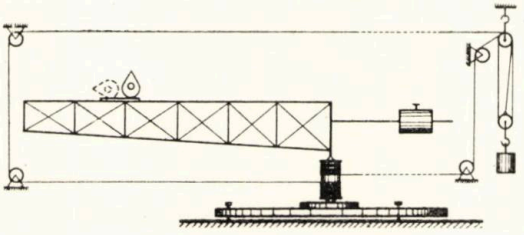


Abb. 10 a

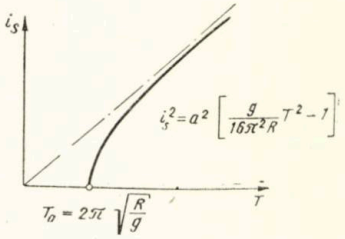


Abb. 11

gungsmesser. Ausserdem können die Wälzkurvenpendel des obenerwähnten Typs eine Anwendung bei den chronometrischen Geräten finden.

b) Die isochronischen Wälzkurvenpendel mit einem Kreisprofil Z' könnten bei den Einrichtungen für genaue und präzise Abmessungen der Trägheitsmomente eine Anwendung finden, weil die Amplitude nicht die Periode beeinflusst. Der Trägheitsradius wird laut Gleichung (56)

$$i_s^2 = a^2\left(\frac{g}{16\pi^2 R}T^2 - 1\right)$$

berechnet.

Abb. 11 stellt einen graphischen Eichungsplan für den Zusammenhang $i = i(T)$ der Messvorrichtung dar.

Eingegangen am 21 III 1967

Zentralausschuss der Bulgarischen wissenschaftlich-technischen Union, Sofia, Bulgarien

PENDULE IZOCRONE ALE CURBELOR DE ROSTOGOLIRE

(Rezumat)

Se studiază oscilaţiile de regim permanent în jurul poziţiilor de echilibru ale curbelor grele ce se rostogolesc pe alte curbe fixe. Se pun în deosebi în evidenţă oscilaţiile izocrone.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

C. D. 531.011

SUR LE PROBLÈME DES LIAISONS HOLONOMES IMPOSÉES AUX SYSTÈMES DE SOLIDES RIGIDES

Note II

LIAISONS CINÉMATIQUES

PAR

N. IRIMICIUC, I. IBĂNESCU et ELISABETA RUSU

Communication présentée dans la session scientifique de l'Institut Polytehnique de Galatzi, 19—21 Mai 1967

1. Introduction

Dans une Note antérieure [4] nous avons présenté quelques conclusions concernant les aspects du problème des liaisons holonomes géometriques réalisées par des appuis, par des articulations et par des fils, pour les systèmes mécaniques ayant des solides rigides comme éléments constitutifs.

Dans ce qui suit on montrera que ces conclusions, concernant la forme générale des équations des liaisons, les conditions restrictives pour les paramètres cinématiques de premier et seconde ordre, (les vitesses de translation et angulaires, respectivement les accélérations de translation et angulaires), les conditions de compatibilité des déplacements virtuels aux liaisons, ainsi que la justification de l'égalité avec zéro du travail virtuel des réactions des liaisons pour des frottements négligeables, restent aussi valables pour les liaisons cinématiques holonomes.

2. Liaisons cinématiques réalisées par des appuis

Les exemples fréquemment rencontrés dans les applications pratiques de liaisons cinématiques réalisées par des appuis sont offerts par le mécanisme différentiel cylindrique et par le mécanisme planétaire conique, ainsi que par les mécanismes particuliers qui en dérivent à savoir: le mécanisme planétaire cylindrique et les engrénages habituels cylindriques et coniques.

Pour le mécanisme différentiel cylindrique (les conclusions restent valables pour tous les mécanismes mentionés ci-dessus), l'équation de liaisons sera représentée par la bien connue formule de Willis:

$$f'(\dot{\theta}_\mu, \dot{\theta}_\nu, \dot{\theta}_p) = r_\mu \dot{\theta}_\mu + r_\nu \dot{\theta}_\nu - (r_\mu + r_\nu)\dot{\theta}_p = 0, \tag{1}$$

qui par intégration conduit à l'équation en termes finis :

$$f(\theta_\mu, \theta_\nu, \theta_p) = r_\mu \theta_\mu + r_\nu \theta_\nu - (r_\mu + r_\nu)\theta_p - C = 0, \tag{2}$$

où r_μ, θ_μ et r_ν, θ_ν désignent les rayons et les angles de rotation de la roue planétaire et de la roue satellite, et θ_p l'angle de rotation du porte-satellite.

On démontre aisément que la relation (1) peut être encore écrite sous la forme :

$$\bar{\beta}_\nu \bar{v}_{Q_\nu} + \bar{M}_{Q_\nu}(\bar{\beta}_\nu)\bar{\omega}_\nu + \bar{M}_{Q_\mu}(\bar{\beta}_\mu)\bar{\omega}_\mu = 0, \tag{3}$$

où $\bar{v}_{Q_\nu}$ est la vitesse du centre de la roue satellite et les vécteurs :

$$\bar{\beta}_\mu = -\bar{\beta}_\nu = \bar{u}_C, \tag{4}$$

considérés appliqués dans les points de contact des roues, représentent les paramètres vectoriels de la liaison, $\bar{u}_C$ étant le vecteur unitaire de la vitesse du point du porte-satellite qui coïncide avec le point de contact des roues.

Si l'on dérive encore une fois, par rapport au temps, l'équation (3), on obtient une condition restrictive pour les accélérations de translation et angulaire, à savoir

$$\bar{\beta}_\nu \bar{a}_{Q_\nu} + \bar{M}_{Q_\nu}(\bar{\beta}_\nu)\bar{\varepsilon}_\nu + \bar{M}_{Q_\mu}(\bar{\beta}_\mu)\bar{\varepsilon}_\mu + \Phi = 0. \tag{5}$$

La relation (3) conduit a la condition ci-dessus de compatibilité des déplacements virtuels $\delta\bar{r}_{Q_\nu}$, $\delta\bar{\theta}_\nu$ et $\delta\bar{\theta}_\mu$ aux liaisons :

$$\bar{\beta}_\nu \delta\bar{r}_{Q_\nu} + \bar{M}_{Q_\nu}(\bar{\beta}_\nu)\delta\bar{\theta}_\nu + \bar{M}_{Q_\mu}(\bar{\beta}_\mu)\delta\bar{\theta}_\mu = 0, \tag{6}$$

où

$$\bar{\beta}_\mu(\delta\bar{r}_{Q_\nu} + \bar{r}'^{(\mu)}_C \times \delta\bar{\theta}_\mu - \bar{r}'^{(\nu)}_C \times \delta\bar{\theta}_\nu) = 0, \tag{7}$$

$\bar{r}'^{(\mu)}_C$ et $\bar{r}'^{(\nu)}_C$ étant les vecteurs de position du point de contact C par rapport aux centres de ces deux roues, choisis comme pôles invariables liés aux solides.

La travail virtuel des réactions des liaisons, réduites, si l'on néglige les frottements, aux réactions résultantes $\bar{N}_{\mu\nu} = -\bar{N}_{\nu\mu} = \bar{N}$ appliquées dans les points de contact des roues, a l'expression :

$$\delta L_{\mu\nu} = -\bar{N}(\delta\bar{r}_{Q_\nu} + \bar{r}'^{(\mu)}_C \times \delta\bar{\theta}_\mu - \bar{r}'^{(\nu)}_C \times \delta\bar{\theta}_\nu), \tag{8}$$

d'où, selon (7), il en résulte :

$$\delta L_{\mu\nu} = 0. \tag{9}$$

3. Liaisons cinématiques réalisées par articulations

L'exemple caractéristique de liaison cinématique réalisée par articulations est donné par l'articulation universelle qui établit la dépendance entre les paramètres cinématiques des arbres moteur et conduit de l'ensemble mobile, exprimée par l'équation connue :

$$f'(\theta_\mu, \dot{\theta}_\mu, \dot{\theta}_\nu) = \frac{\dot{\theta}_\mu \cos\alpha}{1 - \cos^2\theta_\mu \sin^2\alpha} - \dot{\theta}_\nu = 0, \tag{10}$$

où θ_μ désigne l'angle de rotation de l'arbre moteur, θ_ν l'angle de rotation de l'arbre conduit et α l'angle entre les axes des arbres.

L'intégration de l'équation (10) conduit à l'équation en termes finis :

$$f(\theta_\mu, \theta_\nu) = \operatorname{tg}(\theta_\nu + C) - \frac{1}{\cos\alpha}\operatorname{tg}\theta_\nu = 0. \tag{11}$$

On prouve que si l'on désigne par $\bar{\beta}_\mu$ le vecteur unitaire de l'axe des bras de la croix cardanique liés à l'arbre conduit et par $\bar{\beta}_\nu$ le vecteur unitaire de l'axe des bras liés à l'arbre moteur, l'équation (10) peut être écrite sous la forme :

$$\bar{M}_{Q_\mu}(\bar{\beta}_\mu)\,\bar{\omega}_\mu + \bar{M}_{Q_\nu}(\bar{\beta}_\nu)\,\bar{\omega}_\nu = 0, \tag{12}$$

les vecteurs $\bar{\beta}_\mu$ et $\bar{\beta}_\nu$ jouant donc les rôles des paramètres vectoriels des liaisons.

La relation (12) conduit à la condition ci-dessous de compatibilité aux liaisons des déplacements virtuels $\delta\bar{\theta}_\mu$ et $\delta\bar{\theta}_\nu$:

$$\bar{M}_{Q_\mu}(\bar{\beta}_\mu)\,\delta\bar{\theta}_\mu + \bar{M}_{Q_\nu}(\bar{\beta}_\nu)\,\delta\bar{\theta}_\nu = 0. \tag{13}$$

On peut démontrer que le travail virtuel des réactions de la liaison — réduites si l'on néglige les frottements, à deux paires de couples de forces appliquées dans les points d'articulation des arbres avec la croix cardanique — a l'expression :

$$\delta L_{\mu\nu} = \lambda\,[\bar{M}_{Q_\mu}(\bar{\beta}_\mu)\,\delta\bar{\theta}_\mu + \bar{M}_{Q_\nu}(\bar{\beta}_\nu)\,\delta\bar{\theta}_\nu], \tag{14}$$

où λ est donné par la relation :

$$\lambda = \lambda_A + \lambda_B + \lambda_\mu \sin\theta_\nu \sin\alpha + \lambda_\nu \cos\theta_\mu \sin\alpha, \tag{15}$$

λ_A, λ_B, λ_μ et λ_ν désignant des coefficients de colinéarité des composantes des forces des couples avec les vecteurs unitaires des axes des bras de la croix cardanique et des axes des arbres.

La condition (13) conduit de nouveau à la conclusion (9).

4. Liaisons cinématiques réalisées par des fils

a) Un premier exemple de liaison cinématique réalisée par des fils est fourni par la transmission par courroie entre deux roues, S_μ et S_ν ; cette liaison est exprimée par l'équation connue :

$$f'(\dot{\theta}_\mu, \dot{\theta}_\nu) = r_\mu \dot{\theta}_\mu - r_\nu \dot{\theta}_\nu = 0, \tag{16}$$

qui par intégration conduit à l'équation en termes finis :

$$f(\theta_\mu, \theta_\nu) = r_\mu \theta_\mu - r_\nu \theta_\nu - C = 0, \tag{17}$$

r_μ, θ_μ et r_ν, θ_ν étant les rayons et les angles de rotation de ces deux roues.

On vérifie aisément que la relation (16) peut être écrite sous la forme (12), d'où il en résulte de nouveau la condition (13) de compatibilité des déplacements virtuels $\delta\bar{\theta}_\mu$ et $\delta\bar{\theta}_\nu$, aux liaisons, $\bar{\beta}_\mu$ et $\bar{\beta}_\nu$, désignant cette fois les vecteurs unitaires de la direction de l'une des portions rectilignes libres du fil enroulé, (vecteurs considérés appliqués dans les points de tangence de la courroie avec les roues).

On peut prouver que le travail virtuel des réactions de la liaison, réduites aux tensions $\bar{T}'_\mu = -\bar{T}'_\nu = \lambda'_\mu \bar{\beta}'_\mu = -\lambda'_\nu \bar{\beta}'_\nu = \lambda'_\mu \bar{\beta}_\mu$ et $\bar{T}''_\mu = -\bar{T}''_\nu = \lambda''_\mu \bar{\beta}''_\mu = -\lambda''_\nu \bar{\beta}''_\nu$, a l'expression :

$$\delta L_{\mu\nu} = \lambda [\bar{M}_{Q_\mu}(\bar{\beta}_\mu)\, \delta\bar{\theta}_\mu + \bar{M}_{Q_\nu}(\bar{\beta}_\nu)\, \delta\bar{\theta}_\nu], \tag{18}$$

où λ représente la différence :

$$\lambda = \lambda'_\mu - \lambda''_\mu . \tag{19}$$

La condition (12) conduit de nouveau à la conclusion (9).

b) Une autre liaison cinématique réalisée par fils est celle qui correspond au fil ayant les extrémités enroulées autour de deux disques cylindriques qui roulent, dans le même plan vertical, sur les lignes de grande pente de deux plans inclinés d'angle φ_μ et φ_ν par rapport à un plan horizontal. Le fil passe en même temps sur une role de guidage S_ρ, de rayon r_ρ, et ses deux portions libres, $C_\mu B$ et $C_\nu D$, délimitées entre les points C_μ, respectivement C_ν, de tangence du fil avec les disques et entre les points B, respectivement D, de tangence avec la role, sont parallèles aux lignes de grande pente mentionnée ci-dessus.

La liaison entre les deux disques sera exprimée par les équations vectorielles :

$$\bar{\omega}_\rho \times \bar{r}'^{(\rho)}_B - \bar{v}_{Q_\mu} = \bar{\omega}_\mu \times \bar{r}'^{(\mu)}_{C_\mu} \quad \text{et} \quad \bar{\omega}_\rho \times \bar{r}'^{(\rho)}_D - \bar{v}_{Q_\nu} = \bar{\omega}_\nu \times \bar{r}'^{(\nu)}_{C_\nu}, \tag{20, 21}$$

dont les projections sur les directions des portions libres du fil auront les expressions :

$$(22)\qquad f'_{\mu}(\dot{x}_{Q\mu_\sigma},\ \dot{\theta}_{\mu},\ \dot{\theta}_{\rho}) = r_{\rho}\dot{\theta}_{\rho} + x_{Q\mu_1}\sin\varphi_{\mu} - x_{Q\mu_2}\cos\varphi_{\mu} - r_{\mu}\dot{\theta}_{\mu} = 0,$$

$$(23)\qquad f'_{\nu}(\dot{x}_{Q\nu_\sigma},\ \dot{\theta}_{\nu},\ \dot{\theta}_{\rho}) = r_{\rho}\dot{\theta}_{\rho} + x_{Q\nu_1}\sin\varphi_{\nu} - x_{Q\nu_2}\cos\varphi_{\nu} + r_{\nu}\theta_{\nu} = 0.$$

L'intégration des dernières équations conduit aux équation en termes finis:

$$(24)\qquad f_{\mu}(x_{Q\mu_\sigma},\ \theta_{\mu},\ \theta_{\rho}) = -r_{\rho}\theta_{\rho} + x_{Q\mu_1}\sin\varphi_{\mu} - x_{Q\mu_2}\cos\varphi_{\mu} - r_{\mu}\theta_{\mu} - C_{\mu} = 0$$

et

$$(25)\qquad f_{\nu}(x_{Q\nu_\sigma},\ \theta_{\nu},\ \theta_{\rho}) = r_{\rho}\theta_{\rho} + x_{Q\nu_1}\sin\varphi_{\nu} - x_{Q\nu_2}\cos\varphi_{\nu} + r_{\nu}\theta_{\nu} - C_{\nu} = 0.$$

Si l'on désigne par $\bar{\beta}_{\mu}$ et $\bar{\beta}_{\nu}$ les vecteurs unitaires des directions des portions libres $\overline{C_{\mu}B}$ et $\overline{C_{\nu}D}$, du fil, considérés appliqués dans les points C_{μ} et C_{ν}, et par $\bar{\beta}_{\rho}^{(\mu)} = -\bar{\beta}_{\mu}$ et $\bar{\beta}_{\rho}^{(\nu)} = -\bar{\beta}_{\nu}$ les vecteurs unitaires des mêmes directions, mais appliqués dans les points B et D de la role, les équations (22) et (23) peuvent être écrites sous la forme:

$$(26)\qquad \bar{\beta}_{\mu}\bar{v}_{Q\mu} + \bar{M}_{Q\mu}(\bar{\beta}_{\mu})\,\bar{\omega}_{\mu} + \bar{M}_{Q\rho}(\bar{\beta}_{\rho}^{(\mu)})\,\bar{\omega}_{\rho} = 0,$$

$$(27)\qquad \bar{\beta}_{\nu}\bar{v}_{Q\nu} + \bar{M}_{Q\nu}(\bar{\beta}_{\nu})\,\bar{\omega}_{\nu} + \bar{M}_{Q\rho}(\bar{\beta}_{\rho}^{(\nu)})\,\bar{\omega}_{\rho} = 0,$$

les vecteurs $\bar{\beta}_{\mu}$, $\bar{\beta}_{\nu}$, $\bar{\beta}_{\rho}^{(\mu)}$ et $\bar{\beta}_{\rho}^{(\nu)}$ jouant donc le rôle de paramètres vectoriels de la liaison.

Les conditions restrictives pour les vitesses de translation et pour les vitesses angulaires, (26) et (27), conduisent aux conditions suivantes de compatibilité aux liaisons des déplacements virtules $\delta\bar{r}_{Q\mu}$, $\delta\bar{r}_{Q\nu}$, $\delta\bar{\theta}_{\mu}$, $\delta\bar{\theta}_{\nu}$ et $\delta\bar{\theta}_{\rho}$:

$$(28)\qquad \bar{\beta}_{\mu}\,\delta\bar{r}_{Q\mu} + \bar{M}_{Q\mu}(\bar{\beta}_{\mu})\,\delta\bar{\theta}_{\mu} + \bar{M}_{Q\rho}(\bar{\beta}_{\rho}^{(\mu)})\,\delta\bar{\theta}_{\rho} = 0$$

et

$$(29)\qquad \bar{\beta}_{\nu}\,\delta\bar{r}_{Q\nu} + \bar{M}_{Q\nu}(\bar{\beta}_{\nu})\,\delta\bar{\theta}_{\nu} + \bar{M}_{Q\rho}(\bar{\beta}_{\rho}^{(\nu)})\,\delta\bar{\theta}_{\rho} = 0,$$

en vertu desquelles l'expression du travail virtuel des réactions des liaisons, (réduites aux tensions $\bar{T}_{\mu} = \lambda_{\mu}\bar{\beta}_{\mu}$, $\bar{T}_{\nu} = \lambda_{\nu}\bar{\beta}_{\nu}$, $\bar{T}_{\rho}^{(\mu)} = -\lambda_{\mu}\bar{\beta}_{\mu}$ et $\bar{T}_{\rho}^{(\nu)} = -\lambda_{\nu}\bar{\beta}_{\nu}$ appliquées respectivement, dans les points C_{μ}, C_{ν}, B et D), ayant la forme:

$$(30)\qquad \begin{aligned}\delta L_{\mu\nu} = {} & \lambda_{\mu}[\bar{\beta}_{\mu}\,\delta\bar{r}_{Q\mu} + \bar{M}_{Q\mu}(\bar{\beta}_{\mu})\,\delta\bar{\theta}_{\mu} + \bar{M}_{Q\rho}(\bar{\beta}_{\rho}^{(\mu)})\,\delta\bar{\theta}_{\rho}] + \\ & + \lambda_{\nu}[\bar{\beta}_{\nu}\,\delta\bar{r}_{Q\nu} + \bar{M}_{Q\nu}(\bar{\beta}_{\nu})\,\delta\bar{\theta}_{\nu} + \bar{M}_{Q\rho}(\bar{\beta}_{\rho}^{(\nu)})\,\delta\bar{\theta}_{\rho}]\end{aligned}$$

résultera de nouveau égale à zéro.

Les conclusions ci-dessus resteront aussi valables pour les situations particulières: $\dot{\theta}_\nu = 0$; $\varphi_\mu = \varphi_\nu = \pi/2$ et $\varphi_\nu = \pi/2$, $\dot{\theta}_\nu = 0$.

5. Conclusions finales

Après l'étude effectuée dans la note précédente [4] et dans celle présente on peut aboutir aux suivantes conclusions finales concernant le problème des liaisons holonomes imposées aux systèmes de solides rigides:

1°. Le nombre (p) d'équations distinctes des liaisons holonomes (géométriques et cinématiques) qui peuvent être écrites pour un système mécanique constitué par un nombre de n solides rigides est donné par la relation:

$$p = n_r + n_{ac} + 2n_{ap} + 3n_{as} + n_f + n_{fd}, \tag{I}$$

n_r désignant le nombre des appuis sur des surfaces, n_{ac} — le nombre des articulations universelles (considérées comme des articulations uniques, avec les masses des croix cardaniques négligeables), n_{ap} — le nombre d'articulations planes intérieures, n_{as} — le nombre d'articulations sphériques intérieures, n_f — le nombre des fils de longueur constantes (y compris les courroies de transmission) et n_{fd} — le nombre de portions des fils déroulables.

2°. La forme générale des équations holonomes (géométriques et cinématiques) est:

$$f_\alpha(..., x_{Q_{\nu_1}}, x_{Q_{\nu_2}}, x_{Q_{\nu_3}}, \theta_{\nu p}, \theta_{\nu r}, \theta_{\nu n}, ..., t) = 0, \quad (\alpha = 1, 2, ..., p). \tag{II}$$

3°. Si l'on dérive par rapport au temps les équations précédentes on aboutit aux conditions restrictives pour les paramètres cinématiques des solides du système mécanique considéré, de premier et de seconde ordre:

$$\bar{\beta}_i^{(\alpha)} \bar{v}_{Q_i} + \bar{M}_{Q_i}(\bar{\beta}_i^{(\alpha)})\, \omega_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0 \tag{III}$$

et

$$\bar{\beta}_i^{(\alpha)} \bar{a}_{Q_i} + \bar{M}_{Q_i}(\bar{\beta}_i^{(\alpha)})\, \bar{\varepsilon}_i + \Phi_\alpha = 0, \quad (i = 1, 2, ..., n;\ \alpha = 1, 2, ..., p), \tag{IV}$$

qui ont été interprétées dans [4].

4°. Les conditions de compatibilité aux liaisons des déplacements virtuels $\delta\bar{r}_{Q_\nu}$ et $\delta\bar{\theta}_\nu$ des solides du système mécanique ont la forme générale:

$$\bar{\beta}_i^{(\alpha)}\, \delta\bar{r}_{Q_i} + \bar{M}_{Q_i}(\bar{\beta}_i^{(\alpha)})\, \delta\bar{\theta}_i = 0, \quad (i = 1, 2, ..., n;\ \alpha = 1, 2, ..., p). \tag{V}$$

5°. L'expression du travail virtuel des réactions des liaisons a toujours la forme:

$$\delta L_R = \lambda_j [\bar{\beta}_i^{(j)}\, \delta\bar{r}_{Q_i} + \bar{M}_{Q_i}(\bar{\beta}^{(j)})\, \delta\bar{\theta}_i], \quad (i = 1, 2, ..., n;\ j = 1, 2, ..., p), \tag{VI}$$

lorsqu'on néglige les frottements, d'où, selon les conditions (V), il en résulte :

(VII) $$\delta L_R = 0.$$

6°. Pour les systèmes de points matériels, définis comme dans [4], ($\bar{\omega}_i = 0$, $\bar{M}_{Q_i}(\bar{\beta}_i^{(\alpha)}) = 0$), on retrouve la présentation habituelle du problème des liaisons, connue dans la littérature.

Institut Polytechnique de Jassy,
Chaire de Mécanique Théorique

BIBLIOGRAPHIE

1. Vâlcovici V., Bălan Şt., Voinea R., *Mecanica teoretică*. Ed. Tehn., Buc., 1963.
2. Irimiciuc N., *Mecanica*. EDP, Buc., 1965.
3. — *Asupra unei noi forme de prezentare a mecanicii analitice pentru sisteme olonome*. Bul. Inst. polit. Iaşi, 1964, **X (XIV)**, *3–4*, pp. 255–260.
4. Irimiciuc N., Ibănescu I., Rusu E., *Sur le problème des liaisons holonomes imposées aux systèmes de solides rigides (I)*. Bul. Inst. polit. Iaşi, 1967, **XIII (XVII)**, *1–2*, pp. 389–398.
5. Platrier C., *Mécanique rationnelle*. Ed. Dunod, Paris, 1954.
6. Suslov G. K., *Mecanica raţională*. Ed. tehn., Buc. 1950, (trad. du russe).
7. Whittaker E. T., *Analytical Dynamics*. Cambridge, 1937.

ASUPRA PROBLEMEI LEGĂTURILOR OLONOME IMPUSE SISTEMELOR DE SOLIDE RIGIDE

Nota II

Legături cinematice

(Rezumat)

Se examinează legăturile olonome exprimate prin ecuaţii diferenţiale integrabile, realizate prin reazeme (cazul mecanismelor diferenţiale, planetare şi al angrenajelor obişnuite), prin articulaţie (cazul articulaţiei cardanice) şi prin fire (transmisiile prin curele şi legăturile prin fire desfăşurabile).

Numărul ecuaţiilor distincte de legătură pentru un sistem mecanic format din solide rigide este dat de formula (I); ecuaţiile de legătură au forma generală (II); legăturile impun parametrilor cinematici de ordinul întîi şi doi (viteze de translaţie şi viteze unghiulare, respectiv acceleraţii de translaţie şi acceleraţii unghiulare) ai solidelor sistemului restricţii exprimate prin relaţiile (III), respectiv (IV); condiţiile de compatibilitate a deplasărilor virtuale ale sistemului mecanic cu legăturile au forma (V); expresia lucrului mecanic virtual al reacţiunilor legăturilor (presupuse cu frecare neglijabilă) are forma (VI), de unde, în baza condiţiilor (V), se capătă justificarea egalităţii cu zero a acestui lucru mecanic.

Pentru sisteme de puncte materiale definite ca în [4], rezultă modul obişnuit de prezentare a problemei legăturilor, cunoscut din literatura de specialitate.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

УДК 539.214

КРИТИЧЕСКИЕ СОСТОЯНИЯ ГИБКОЙ ПОЛОГОЙ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

Б. Я. КАНТОР

1. Одной из основных целей при изучении нелинейных упругих систем является отыскание критических точек, отделяющих устойчивые и неустойчивые ветви кривой состояний равновесия. А. А. Курдюмов предложил [1] способ непосредственного определения критических состояний, который состоит в том, что к системе n уравнений равновесия присоединяется уравнение, выполняющееся только в критических точках, а параметр нагрузки считается $n+1$-ым неизвестным.

Построение такое системы уравнений для гибких пологих оболочек в данной статье выполняется путем применения процесса Ритца к вариационному уравнению [2] относительно прогиба и функции усилий. Система алгебраических уравнений относительно обобщенных координат и параметра нагрузки решается методом В. А. Матвеева.

В качестве примера на ЭЦВМ Урал-2 во втором приближении вычислены критические состояния жестко закрепленной тонкой конической оболочки, находящейся в температурном поле под действием давления.

2. Вариация полной энергии консервативной упругой нелинейной системы с n степенями свободы, нагруженной m независимыми обобщенными силами q_j в положениях равновесия равна нулю

$$\delta U(x_1, x_2, \ldots, x_n, q_1, q_2, \ldots, q_m) = 0. \tag{2.1}$$

Из равенства (2.1) следует система уравнений равновесия относительно обобщенных координат x_j:

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} \equiv F_i = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.2}$$

Система (2.2) имеет некоторое количество решений $\{x_i^k\}$, $k = 1, 2, \ldots,$

каждому из которых в $n+m$-мерном пространстве соответствует гиперповерхность состояний равновесия

$$x_i^k = x_i^k(q_1, q_2, ..., q_m), \quad (i = 1, 2, ..., n). \tag{2.3}$$

Подставляя выражения (2.3) в уравнения (2.2), возьмем полные дифференциалы полученных тождеств

$$dF_i = \sum_{=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \cdot \frac{dx_j}{dq_l} + \frac{\partial F_i}{\partial q_l} \right) dq_l = 0, \quad (i = 1, 2, ..., n). \tag{2.4}$$

Отсюда, учитывая независимость dq_l, следуют m систем линейных алгебраических уравнений относительно dx_j/dq_l:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{dx_j}{dq_l} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial q_l}, \quad (i = 1, 2, ..., n; \ l = 1, 2, ..., m). \tag{2.5}$$

Все эти системы имеют одну и ту же матрицу A с элементами $\partial^2 U/\partial x_i \partial x_j$. В предельных точках, в которых $dx_j/dq_l = \infty$ и в точках бифуркации, где решение систем (2.5) неоднозначно, вообще — в критических состояниях равновесия упругой системы функциональный определитель

$$\Delta = \frac{\partial(\partial U/\partial x_1, ..., \partial U/\partial x_n)}{\partial(x_1, ..., x_n)} = \left\| \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} \right\|,$$

матрицы A равен нулю. Таким образом, в критических точках выполняется $n+1$ уравнение

$$F_i = 0, \quad (i = 1, 2, ..., n); \quad \Delta(x_1, x_2, ..., x_n, q_1, q_2, ..., q_m) = 0. \tag{2.6}$$

Система уравнений (2.6) при $m > 1$ устанавливает в неявной форме соотношение

$$Q(q_1, q_2, ..., q_m) = 0$$

между параметрами нагрузки в критических точках.

В случае $m = 1$, можно считать параметр $q_1 = q$ неизвестным и, решая систему (2.6), непосредственно находить [1] критические состояния упругой системы, т. е. критические нагрузки q^* и соответствующие им формы $\{x_i^*\}$. Это позволяет избежать, обычно выполняемого, отыскания кривых состояний равновесия, требующего многократного решения нелинейной задачи (2.2) для различных фиксированных значений q.

3. Обращаясь к задаче об устойчивости „в большом" гибких пологих оболочек, для построения системы (2.6) исходим из выражения вариации полной энергии [2] через две функции — w (нормальная к срединной поверхности компонента перемещения) и φ (функция усилий):

$$\delta U = \delta \iint \left\{ \frac{D}{2} [(\Delta w)^2 - (1-\nu) L(w,w)] - w\Delta_k \varphi - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2Eh} [(\Delta\varphi)^2 - (1+\nu) L(\varphi,\varphi)] - \frac{1}{2} wL(w,\varphi) - \alpha T \Delta\varphi - qw \right\} ds. \tag{3.1}$$

В этой формуле U можно рассматривать как функционал смешанного типа относительно двух независимых функций. В работе [2] показано, что варьирование этого функционала приводит к системе дифференциальных уравнений технической теории тонких оболочек. Именно поэтому выражение (3.1) можно непосредственно использовать для получения системы (2.6), не прибегая предварительно к интегрированию уравнения совместности, для того, чтобы выразить φ через w.

Сведение континуальной системы (оболочка) к системе с конечным числом степеней свободы выполняем по методу Ритца, принимая

$$w = \sum_{i=1}^{n_1} x_i w_i, \quad \varphi = \sum_{i=n_1+1}^{n} x_i \varphi_i, \tag{3.2}$$

где x_i — обобщенные координаты, а w_i, φ_i — заданные координатные функции.

В качестве примера рассмотрим поведенне жестко закрепленной пологой конической оболочки постоянной толщины h с радиусом основания a и высотой H, находящейся в температурном поле $T = T_1(1-\rho^2)$ под действием равномерного внешнего давления q.

Считая оболочку достаточно пологой для того, чтобы ее можно было заменить пластиной с начальной погибью $z = -H(1-\rho)$, $\rho = \tau/a$, при осесимметричном напряженном состоянии и переходя в (3.1) к безразмерным величинам, получим

$$\delta U^0 = \delta \int_0^1 \left\{ \frac{c}{2} [(\Delta w^0)^2 - (1-\nu) L(w^0, w^0)] - w^0 L(kz^0, \varphi^0) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} [(\Delta\varphi^0)^2 - (1+\nu) L(\varphi^0, \varphi^0)] - \frac{1}{2} w^0 L(w^0, \varphi^0) - q_2 T^0 \Delta\varphi^0 - q_1 w^0 \right\} \rho d\rho. \tag{3.3}$$

Здесь

$$U^0 = \frac{a^2}{2\pi E h^5} U, \quad w^0 = \frac{w}{h}, \quad \varphi^0 = \frac{\varphi}{Eh^3}, \quad k = \frac{H}{h}, \quad c = \frac{1}{12(1-\nu^2)},$$

$$z^0 = -(1-\rho), \quad T^0 = 1-\rho^2, \quad q_1 = \frac{q}{E}\left(\frac{a}{h}\right)^4, \quad q_2 = \alpha T_1 \left(\frac{a}{h}\right)^2.$$

Операторы

$$\Delta\psi = \frac{d^2\psi}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{d\psi}{d\rho},$$

$$L(\psi,\theta) = \frac{d^2\psi}{d\rho^2}\cdot\frac{1}{\rho}\cdot\frac{d\theta}{d\rho} + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{d\psi}{d\rho}\cdot\frac{d^2\theta}{d\rho^2}.$$

Относительные прогиб и функцию усилий представляем в виде

$$w^0 = x_1(1-\rho^2)^2 + x_2(1-\rho^2)^3, \quad \varphi^0 = x_3\rho^2 + x_4\rho^4. \tag{3.4}$$

Координатные элементы $(1-\rho^2)^2$ и $(1-\rho^2)^3$ удовлетворяют геометрическим условиям при $\rho = 1$, $w^0 = dw^0/d\rho = 0$.

Условия жесткого закрепления в срединной поверхности являются для функционала U^0 естественными, поэтому координатные функции для φ^0 можно им не подчинять.

Подставляя выражения (3.4) в формулу (3.3), найдем

$$\delta U^0 = \delta\left\{\frac{16}{3}cx_1^2 + 8cx_1x_2 + \frac{24}{5}cx_2^2 - k\left[\left(\frac{16}{15}x_3 + \frac{32}{35}x_4\right)x_1 + \right.\right.$$

$$\left. + \left(\frac{32}{35}x_3 + \frac{64}{105}x_4\right)x_2\right] - \left(\frac{7}{5}x_3^2 + \frac{28}{5}x_3x_4 + \frac{164}{15}x_4^2\right) + \left(\frac{2}{3}x_3 + \frac{8}{15}x_4\right)x_1^2 + \tag{3.5}$$

$$\left. + \left(\frac{6}{5}x_3 + \frac{4}{5}x_4\right)x_1x_2 + \left(\frac{3}{5}x_3 + \frac{12}{35}x_4\right)x_2^2 - \left(x_3 + \frac{4}{3}x_4\right)q_2 - \left(\frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{8}x_2\right)q\right\}.$$

Система нелинейных алгебраических уравнений (2.6), которая получается дифференцированием U^0 по x_i (первые 4 уравнения) и по x_ix_j (элементы матрицы A), решалась[1]) на ЭЦВМ Урал-2 методом градиентного спуска В. А. Матвеева [3]. Значения определителя Δ вычислялись методом исключения с выбором главного элемента, а производные от невязок уравнений — по формуле центральных разностей, точной для полиномов второй степени. Расчеты проводились при фиксированных значениях параметра температуры $q_2 = -10, -5, 0, 5, 10$.

Относительная высота оболочки k изменялась от 0 до 10 с шагом 0,25. Начальное приближение к вектору решения

$$X = (x_1, x_2, x_3, x_4, q_1^*)'$$

при $k = k_s$ вычислялось по формуле [4]

$$X_s^0 = 2X_{s-1} - X_{s-2},$$

где X_{s-1} и X_{s-2} — решения системы (2.6) при $k = k_{s-1}$ и $k = k_{s-2}$ соответственно. Процесс итераций прекращался, когда наибольшая по модулю из невязок становилась меньше 10^{-3}.

На получение одного решения — критического вектора X — затрачивалось в среднем 20 сек. Решение системы уравнений равновесия (2.2) при заданном q_1 требует 15 сек. Учитывая, что для получения q_1^* с приемлемой точностью обычно следует построить кривую состояний равновесия по 10...20 точкам, можно установить, что в рассматриваемом примере прямое определение критических состояний путем решения системы (2.6) позволяет ускорить вычисления приблизительно в 10 раз.

[1]) Программу составил инж. Л. А. Старосельский.

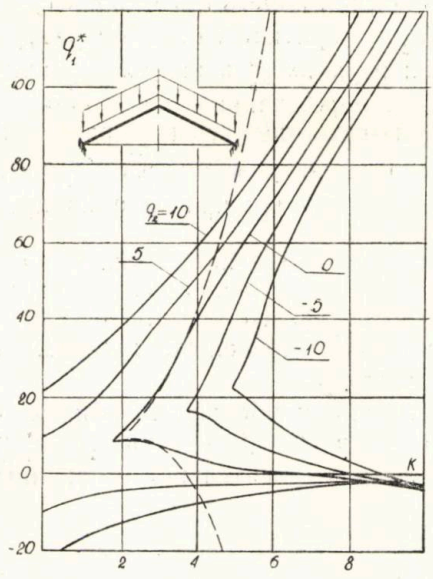


Рис. 1

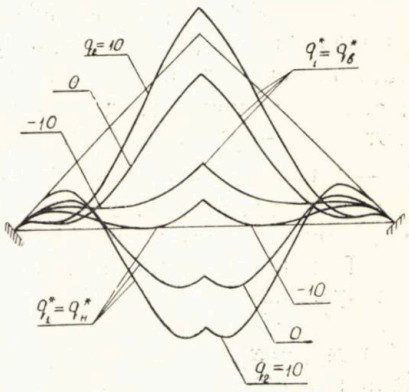


Рис. 3

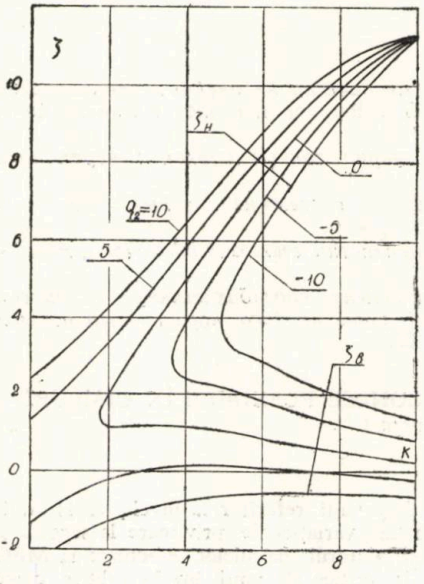


Рис. 2

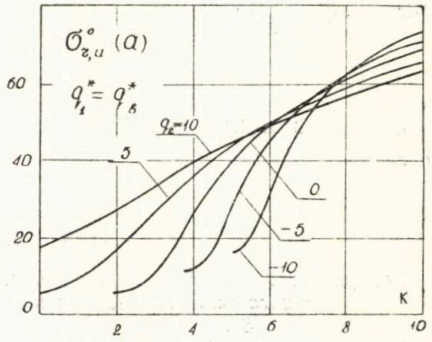


Рис. 4

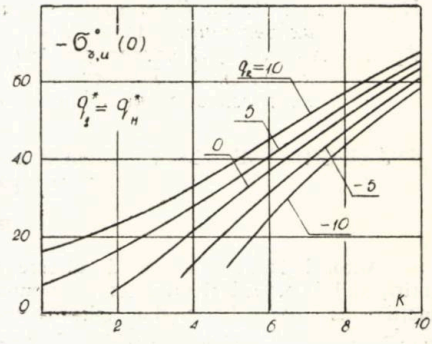


Рис.5

Зависимость $q_1^*(k)$ для различных значений параметра температуры q_2 показана на рис. 1. При $q_2 > q_2^*$ (q_2^* — критическая температура пластины свободной от давления) ветви верхних $q_в^*$ и нижних $q_н^*$ критических давлений разделяются. Точки их пересечения с осью ординат дают $q_в^* = -q_н^*$ пластины. С увеличением температуры $q_в^*$ растет, а $q_н^*$ — уменьшается. Пунктиром на рис. 1 проведены кривые ($q_2 = 0$) по результатам Э. И. Григолюка [5], полученным при задании прогиба одной координатной функцией.

Типичные формы изогнутой поверхности оболочки в точках, соответствующих верхнему и нижнему критическим давлениям даны на рис. 2 ($k = 5$). Графики изменения относительного прогиба в центре $w^0(0) \equiv \zeta = x_1 + x_2$ в критических состояниях приведены на рис. 3. Меньшие значения ζ имеют место при $q_1^* = q_в^*$.

Расчетом установлено, что, как правило, наибольшими напряжениями являются изгибные радиальные $\sigma_{r,u}$ в центре — при $q_1^* = q_в^*$ и на периферии — при $q_1^* = q_н^*$. Зависимость относительной величины этих напряжений

$$\sigma_{r,u}^0 = \frac{\sigma_{r,u}}{E}\left(\frac{a}{h}\right)^2$$

от k показана на рис. 4, 5.

Поступила 12 X 1966 г.

Харьковский филиал института механики АН УССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Курдюмов А. А., *К теории физически и геометрически нелинейных задач изгиба и устойчивости пластин и оболочек*, Тр. Ленингр. корабле стр. ин-та, 1961, вып. *34*.
2. Кантор Б. Я., *К технической нелинейной теории тонких оболочек переменной толщины*. Прикл. мех., 1965, **I**, *12*.
3. Матвеев В. А., *Метод приближенного решения систем нелинейных уравнений*. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, **4**, *6*.
4. Корнишин М. С., *Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их решения*. „Наука“, М., 1964.
5. Григолюк Э. И., *О потере устойчивости при больших прогибах замкнутой слоистой конической оболочки под действием равномерного нормального поверхностного давления*. Инж. сб., 1955, **22**.

STĂRI CRITICE ALE PÎNZELOR SUBŢIRI CONICE FLEXIBILE ÎN CÎMPURI DE TEMPERATURĂ

(Rezumat)

Autorul, luînd ca punct de plecare sistemul de ecuaţii referitor la învelişuri flexibile subţiri, aplică procedeul lui Ritz corespunzător ecuaţiei variaţionale privitoare la săgeată şi funcţiile de efort. Un studiu aplicativ s-a făcut cu ajutorul calculelor efectuate la MEC „Ural-2“, calculîndu-se în a doua aproximaţie stările critice ale unui înveliş subţire conic încastrat şi aflat într-un cîmp de temperatură şi sub presiune.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

УДК 62.05

ВОПРОСЫ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ АВТООПЕРАТОРОВ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ МАШИН И ЛИНИЙ

И. И. КАПУСТИН и Д. Я. ИЛЬИНСКИЙ

Автооператоры (АО), используемые в составе технологических машин и линий, циклически выполняют функции переноса предметов обработки (или компонентов сборки), т. е. деталей, узлов, а также готовых изделий: а) с выходной позиции загрузочного устройства на рабочую позицию; б) с одной рабочей позиции на другую, либо с одного рабочего ротора на другой (в автоматических роторных линиях); в) с выходной рабочей позиции в штабель, тару и т. п.

При этом перенос предметов обработки в ряде случаев должен сопровождаться изменением их ориентации.

Помимо этого АО могут выполнять и собственно рабочие операции такого типа как вкладывание одной детали в другую, образование многослойных и решетчатых конструкций и т. п.

АО могут быть классифицированы с точки зрения типа и количества движений, которые осуществляет штанга (рука) *2*, несущая захватный орган (захват) *1*, относительно вертикальной стойки *3*, а также сам захват *1* относительно штанги *2* (рис. 1).

На обобщенной схеме движений АО неподвижная (основная) система ортогональных координат АВГ связана с вертикальной стойкой *3*, а подвижная („местная“) система координат $\alpha B \gamma$ жестко связана с корпусом захвата *1*.

Считая все движения, совершаемые АО, вспомогательными, обозначим их русской буквой В с верхними индексами, построенными по следующему принципу: а) большая или малая греческая буква обозначают ось, относительно которой рассматривается движение; г) стоящие за буквой цифры соответствуют: 1 — непрерывному вращению, 2 — прерывистому вращению в одну сторону или вращению вперед-назад (т. е. колебательному), 3 — прямолинейному поступательно-возвратному движению.

Помимо указанных на рис. 1 движений АО часто имеют еще одно движение (или — в общем случае — группу движений), связанных с операцией захвата („схватывания“) предмета обработки. При этом, как известно, сами захватные органы выполняются как

приводными (например, захваты клещевого типа), так и неприводными (например, захваты с вакуумными присосками, не имеющие источника вакуума). В том случае, когда АО снабжены приводным захватом, будем считать, что он имеет движение, обозначаемое $В^0$.

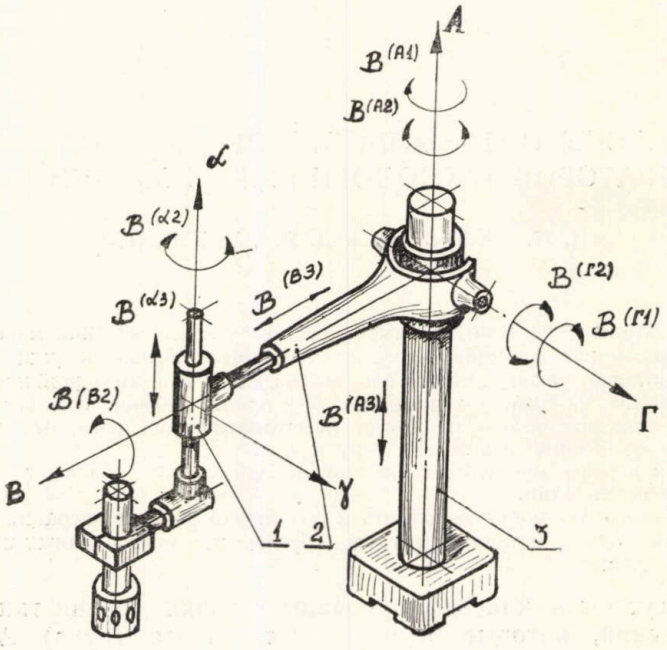


Рис. 1

Порядок простановки знаков для реверсивных типов движений и для движения схватывания указан в таблице 1.

Анализ нескольких десятков АО, используемых в машинах-автоматах и автоматических линиях линейного и роторного типов, изготовленных в СССР, а также за рубежом, показал, что на данном этапе развития производства используются АО, имеющие не более 5 движений.

При этом наибольшее распространение получили АО, имеющие одно, два или три движения. Исследованию этих АО, а также изысканию методов их расчета и проектирования посвящены работы Л. И. Волчкевича и Б. А. Усова, В. С. Матвейчука и А. Н. Рабиновича, Л. В. Петрокаса и Г. Н. Савельева, В. Ф. Прейса и Е. Н. Фроловича, А. В. Григорьева и других ученых.

Анализ всевозможных комбинаций из показанных на рис. 1 девяти движений, а также движения захвата, показывает, что для выполне-

Таблица 1

Тип движения	Знаки	
	Плюс	Минус
B^{A2}, $B^{\alpha 2}$	При взгляде сверху вниз	
	по часовой стрелке	против часовой стрелки
B^{A3}, $B^{\alpha 3}$	вверх	вниз
B^{B2}, $B^{\Gamma 2}$	При взгляде извне на начало координат	
	по часовой стрелке	против часовой стрелки
B^{B3}	от начала координат к периферии	из периферии к началу координат
B^{0}	схватывание (движение „взять“)	отпускание (движение „отпустить“)

ния подавляющего большинства основных и вспомогательных операций обработки и сборки изделий в машиностроении, приборостроении, электротехнической, химической, легкой, деревообрабатывающей и полиграфической промышленности достаточно иметь АО, обладающие не более, чем 5 движениями (включая движение захвата).

Следовательно, в общем случае число M возможных сочетаний движений АО составит

$$M = (k - n) + 2^{(l+m)} \sum_{s=2}^{p} C^{s}_{k-(l+m)},$$

где $k = 10$ — общее количество рассматриваемых движений, $l = 2$ — количество пар „взаимосвязанных“ движений, т. е. движений, из которых обычно используется только одно (в данном случае такими парами будут B^{A3} и $B^{\alpha 3}$, B^{A3} и $B^{\Gamma 2}$); $m = 2$ — количество пар „взаимоисключающих“ движений, т. е. движений, использование одного из которых исключает использование другого (в данном случае такими парами будут B^{A1} и B^{A2}, $B^{\Gamma 1}$ и $B^{\Gamma 2}$); $n = 1$ — количество „несамостоятельных“ движений, т. е. движений, которые отдельно использоваться не могут (в данном случае таким движением будет B^{0}); $p = 5$ — наибольшее количество движений, которые используется в АО; $C^{s}_{k-(l+m)}$ — число сочетаний из $k - (l + m)$ по s.

С учетом указанных числовых значений имеем

$$M = (10 - 1) + 2^4(C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5) = 905.$$

Развитие схемы, показанной на рис. 1, за счет, например, добавления в нее прямолинейного поступательно-возвратного движения вдоль оси Г позволяет включить в рассматриваемую классификацию и те АО, которые используются в гальванических цехах, стеллажных автоматических складах и т. д.

Для описания работы АО целесообразно использовать операторную (символическую) форму записи дискретных технологических процессов, при которой последовательно выполняемые элементарные операции (движения) записываются в виде следующих друг за другом операторов, соединяемых с помощью знака псевдоконъюнкции (.), а параллельно (одновременно) выполняемые элементарные операции — в виде следующих друг за другом операторов, соединяемых с помощью знака псевдодизъюнкции ($\vee$).

Например, операция 1° сжать захват (взять предмет обработки); 2° поднять (вдоль оси А) предмет обработки; 3° повернуть одновременно по часовой стрелке: руку — вокруг оси А, а захват — вокруг оси В; 4° опустить (вдоль оси А) предмет обработки; 5° разжать захват; 6° привести АО в исходное положение запишется так:

$$B^{+0}.B^{+A3}.(B^{+A2} \vee B^{+B2}).B^{-A3}.B^{-0}.B^{+A3}.(B^{-A2} \vee B^{-B2}).B^{-A3}.$$

Задав в системе основных координат АВГ две характерные точки предмета обработки (например, определяющие положение в пространстве его оси) в исходном положении (до переноса) и в преобразованном положении (после переноса), а также задав в случае необходимости траекторию движения центра тяжести предмета обработки, можно формализовать переход от этих данных к операторным формулам.

Каждому из движений АО, указанных на рис. 1, приводятся в соответствие типовые нормализованные узлы и механизмы, характеризующиеся определенными технико-экономическими характеристиками (быстродействие, рабочее усилие, точность, безотказность, ремонтопригодность, долговечность, стоимостные показатели и пр.). Выразив конкретные условия проектирования в форме, например, линейных равенств-неравенств, получаем возможность унифицировать методику проектирования АО на основе использования типовых нормализованных элементов, применить современные методы оптимизации (в частности, методы линейного программирования), а также осуществить машинный синтез проектно-конструкторских решений АО.

Задачи комплексной механизации и автоматизации предполагают расширение использования АО, обладающих четырьмя и пятью движениями.

Поскольку с ростом количества движений, которыми обладает АО, повышаются требования к его мобильности (переналаживаемости), то в последнее время начинают получать распространение АО автономного типа с цифровыми системами автоматического управления.

Рассмотрим вкратце некоторые взаимосвязанные вопросы точности, надежности и экономичности АО, которые в общем случае могут быть отнесены ко всем АО, но, в основном, касаются АО с четырьмя и пятью движениями.

Механические, пневмогидравлические, электрические и прочие узлы и механизмы АО могут находиться в различных (с точки зрения уровня износа, настройки и т. п.) состояниях, определяющих работоспособность всего АО.

В случае непрерывного изменения параметра, характеризующего, например, износ какого-либо из механизмов АО, сказывающийся на работоспособности всего АО, можно записать, что вероятность безотказной работы АО в данных условиях эксплуатации λ составляет

$$P(t, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\delta) f(\delta, t, \lambda) \mathrm{d}\delta,$$

где $\varphi(\delta)$ — функция эффективности АО, т. е. вероятность выполнения АО заданных функций в зависимости от величины отклонения его параметра δ от расчетного (номинального) значения; $f(\delta, t, \lambda)$ — плотность вероятности параметра δ при условиях эксплуатации λ.

Для весьма часто встречающегося нормального закона распределения функции плотности вероятности параметра δ при одностороннем допуске на указанный параметр можно записать (для фиксированного интервала времени и данных условии эксплуатации)

$$P(t) = 0{,}5 + \Phi\left(\frac{a_f - a_\varphi}{\sqrt{\sigma_f^2 + \sigma_\varphi^2}}\right),$$

где $\Phi(...)$ — нормированная функция Лапласа, a и σ — соответственно математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины, индексы φ и f — соответствуют закону распределения функции эффективности и плотности параметра.

Таким образом, последнее выражение дает возможность определить надежность (вероятность безотказной работы) АО в зависимости, в частности, от характеристик износа.

Разумеется, что этот метод может быть достаточно легко распространен и на случаи зависимости надежности от иных параметров.

Надежность всех (в том числе и механических) систем во многом определяется интенсивностью скоростных режимов работы их механизмов.

В условиях комплексной автоматизации стремятся уменьшить величину технологического цикла T_m, составляющую

$$T_m = \frac{A}{v_1} + \frac{B}{v_2}$$

путем увеличения скорости v_1 собственно рабочих механизмов и скорости v_2 вспомогательных механизмов — в первую очередь АО, выполняющих холостые хода, несовмещенные с собственно рабочим временем. Коэффициенты A и B учитывают специфику технологических машин и выполняемых ими операций.

Интенсификация режимов работы собственно рабочих и вспомогательных механизмов (т. е. повышение скоростей соответственно v_1 и v_2) ведет к учащению и удлинению внецикловых случайных простоев из-за отказов механизмов, необходимости более частого профилактического ремонта и подналадки и пр. Коэффициент надежности машины $\eta_н$, учитывающий внецикловые потери времени, связанные с недостаточной надежностью механизмов и характеризующий степень непрерывности (безотказности) нормальной работы оборудования, как показали наши исследования машин легкой промышленности, оснащенных АО, составляет

$$\eta_н = Cv_1^m + Dv_2^n, \quad \eta_н < 1,$$

где эмпирически находимые коэффициенты $0 < C < 1$, $0 < D < 1$, a показатели степени $2 \leqslant m \leqslant 3$ и $2 \leqslant n \leqslant 3$.

Необходимо, чтобы величина $\eta_н$ была $\eta_н \geqslant [\eta_н]$, где $[\eta_н] = 0{,}9$, ибо в противном случае резко возрастают затраты на обслуживание, нарушается ритм работы поточных линий и пр.

Приходим к задаче Лагранжа на условный экстремум, имеющий целью нахождение переменных v_1 и v_2, связанных между собой только дополнительным условием.

Функция Лагранжа в данном случае

$$F = \frac{A}{v_1} + \frac{B}{v_2} + \theta(Cv_1^m + Dv_2^n - [\eta_н]),$$

где θ — неопределенный множитель Лагранжа.

Уравнения $\partial F/\partial v_1 = 0$ и $\partial F/\partial v_2 = 0$ в сочетании с указанным выше равенством-неравенством дают систему уравнений, позволяющую найти те экстремальные значения скоростей работы механизмов, которые минимизируют время технологического цикла при условии, что коэффициент надежности будет не ниже допустимого.

Рассмотрим вопрос об оптимальных показателях точности АО, которые особенно важны для АО, выполняющих собственно рабочие операции. Первоначальная (исходная) стоимость АО C_u, отнесенная к единице продукции, может быть записана в виде

$$C_u = C_u^{(н)} + \eta\sigma^{-2},$$

где $C_u^{(н)}$ — стоимость узлов и механизмов АО, не связанных с обеспечением заданной точности работы АО, $\eta\sigma^{-2}$ — стоимость узлов и механизмов АО, связанных с обеспечением заданной точности работы АО, η — постоянная, характеризующая данный тип АО, σ — средняя квадратическая погрешность работы АО.

Вероятность качественного выполнения операции с помощью АО может быть записана в виде

$$P(\sigma) = 1 - e^{-\frac{m}{\sigma}},$$

где m — постоянная, характеризующая условия работы (условия технологического процесса) данного АО.

Произведем оптимизацию погрешности работы АО по критерию математического ожидания фактических затрат по данной операции на одно изделие

$$C_\phi = \frac{C}{P(\sigma)}.$$

Если обозначить $a = \eta / C_u^{(н)} m^2$ и принять $x = m/\sigma$ то

$$C_\phi = C_u^{(н)} \frac{1 + ax^2}{1 - e^{-x}}.$$

Необходимое условие экстремума $\partial C_\phi / \partial x = 0$ приводит к трансцендентному уравнению

$$x - xe^{-x} - \frac{e^{-x}}{2a} - \frac{x^2 e^{-x}}{2} = 0,$$

которое следует решать численно.

Найдя x, легко переходим к величине среднеквадратической погрешности σ, которая служит исходным параметром для проектирования АО.

Изложенные вопросы проектирования АО составляют часть работы авторов по изысканию оптимальных путей и средств комплексной механизации и автоматизации дискретных технологических процессов.

Поступила 30 V 1967 г.

Всесоюзный заочный институт текстильной и легкой промышленности, Москва, СССР

PROBLEME DE PROIECTARE OPTIMALĂ A AUTOOPERATORILOR MAŞINILOR ŞI LINIILOR TEHNOLOGICE

(Rezumat)

Autorii elaborează bazele unei clasificări a autooperatorilor (AO) cu destinaţie tehnologică ţinînd seama de tipul şi de cantitatea de mişcări executate de organele sale de lucru. Se propune o metodă operaţională (simbolică) de transcriere a funcţiilor AO şi se dau reguli de construcţie a formulelor operaţionale ale AO. Se indică principiile de unificare a metodelor de proiectare şi de optimizare, incluzînd aici şi folosirea maşinilor electronice de calcul.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

C. D. 629.113 : 531.1

SUR LA CINÉMATIQUE DE LA MASSE SUSPENDUE DES AUTOMOBILES

PAR

GH. DELIU

1. Introduction

Cette Note est consacrée à l'étude de la cinématique du mouvement de la masse suspendue d'une automobile au point de vue de la „dynamique transversale". On utilise pour l'étude un modèle mathématique avec six degrés de liberté.

Les déplacements relatifs de la masse suspendue par rapport à la masse non-suspendue excercent une influence remarquable sur le comportement latéral du véhicule. En considérant que le mouvement de roulis est le plus important parmi ces déplacements, le modèle mathématique adopté tiendra compte même des mouvements de roulis des masses non-suspendues (mouvements produits par la différence entre les déformations radiales des pneus du même essieu).

2. Modèle mathématique du véhicule

2. 1. Schéma simplifié du véhicule

Le véhicule est composé de masses roulantes, d'une caisse et d'un chargement. L'ensemblé formé par la caisse et le chargement constitue la masse suspendue M_s. On suppose que le véhicule se déplace sur un sol plan et horizontal, et on admet qu'à l'arrêt, le véhicule possède un plan de symétrie, longitudinal vertical. En conséquence, le centre de gravité de la masse suspendue et le centre de gravité du véhicule se trouvent tous les deux dans ce plan (fig. 1).

Le modèle mathématique comporte les hypothèses simplificatrices suivantes:

a) On fait abstraction du mouvement vertical de la caisse, aussi bien que du mouvement de tangage, en considérant que ces mouvements exercent une influence négligeable sur le comportement latéral du véhicule.

b) On fait aussi abstraction des déplacements latéraux des jantes par rapport à la surface de contact pneu-route.

c) On admet que les centres de gravité des masses non-suspendues se trouvent dans les plans verticaux qui passent par les axes des roues.

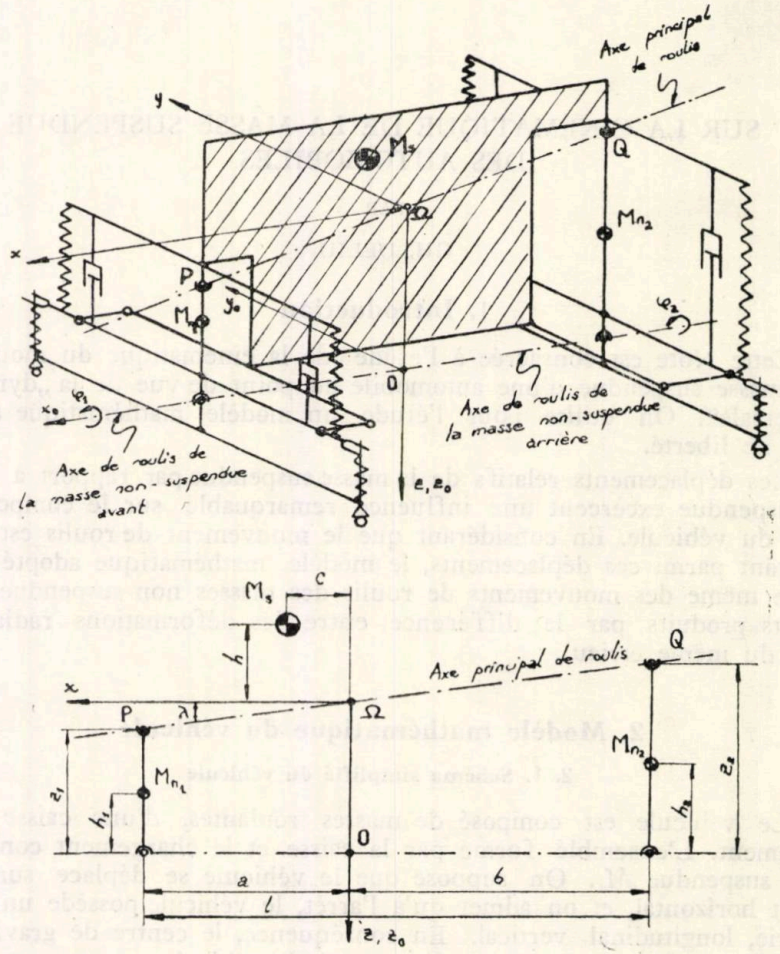


Fig. 1

2. 2. Systèmes de référence

Pour définir la position de la masse suspendue dans l'espace on considère les systèmes suivants :

a) Un repère cartésien absolu (axes liés à la terre) O_1XYZ. Le plan O_1XY coïncide avec le plan de roulement, OZ est vertical, dirigé en bas (fig. 2).

b) Un repère mobile $Ox_0y_0z_0$, entraîné par le véhicule. L'origine se trouve sur l'axe horizontal de roulis des masses non-suspendues, au point d'intersection avec la verticale qui passe par le centre de gravité du vehicule.

c) Un repère mobile $Ox_0y_0z_0$, entraîné par la masse suspendue. $x\Omega z$ est le plan de symétrie de la masse suspendue, Ωx est horizontal et dirigé en avant, Ωz passe par le centre de gravité de l'ensemble et rencontre l'axe de roulis en Ω (fig. 1).

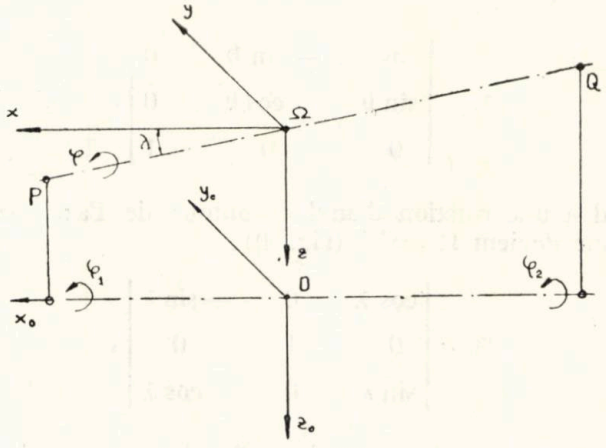


Fig. 2

On observe aisément que le système mobile $Ox_0y_0z_0$ a un mouvement plan-parallèle, sa position étant définie par trois coordonnées indépendantes, X_0, Y_0 et ψ (fig. 4).

Relativement au système „entraîné" $Ox_0y_0z_0$, la position de la masse suspendue est définie par trois autres coordonnées indépendantes φ_1, φ_2 et φ (fig. 2).

3. Déplacements de la masse suspendue par rapport au système $Ox_0y_0z_0$

Les déplacements permis à la masse suspendue relativement au système entraîné $Ox_0y_0z_0$ sont les suivants:

1° Une translation latérale, le long de l'axe Oy_0, sur une distance w, par suite du roulis des masses non-suspendues. À la suite de cette translation le système Ωxyz devient $\Omega x'y'z'$.

2° Une rotation autour de l'axe vertical $\Omega z'$ avec l'angle θ, à la suite de la différence entre les déplacements latéraux des points P et Q.

3° La rotation de roulis autour de l'axe principal de roulis, avec l'angle φ.

Entre ces deplacements il y a les relations suivantes:

$$(1) \qquad w = \varphi_1 z_1 \frac{b}{l} + \varphi_2 z_2 \frac{a}{l} \quad \text{et} \quad (2) \qquad \theta = \varphi_1 \frac{z_1}{l} - \varphi_2 \frac{z_2}{l}.$$

À la suite des déplacements (1) et (2) le système mobile Ωxyz sera tourné par rapport au système $Ox_0y_0z_0$, et la matrice de transformation des coordonnées pourra être trouvée comme produit des matrices suivantes:

$$(3) \qquad \sigma_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

qui correspond à une rotation d'angle θ autour de l'axe vertical $\Omega z'$ (par suite, le système devient $\Omega x''y''z''$ (fig. 4));

$$(4) \qquad \sigma_\lambda = \begin{bmatrix} \cos\lambda & 0 & -\sin\lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\lambda & 0 & \cos\lambda \end{bmatrix},$$

qui correspond à une rotation „parasite" d'angle λ autour de l'axe $\Omega y''$, rotation nécessaire afin que l'axe $\Omega x''$ se superpose sur l'axe principal de roulis (par suite, le système devient $\Omega x'''y'''z'''$);

$$(5) \qquad \sigma_\varphi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix},$$

qui correspond à une rotation de roulis avec l'angle φ (le système devient, par suite, $\Omega x^{IV}y^{IV}z^{IV}$);

$$(6) \qquad \sigma_\lambda = \begin{bmatrix} \cos\lambda & 0 & \sin\lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\lambda & 0 & \cos\lambda \end{bmatrix},$$

qui correspond à une rotation „parasite" d'angle $-\lambda$ autour de l'axe Ωy^{IV}, rotation nécessaire pour annihilier la première rotation „parasite" et pour

rétablir l'angle λ entre l'axe Ωx et l'axe principal de roulis. À la suite de cette dernière rotation on notera le système par Ωxyz. (fig. 3).

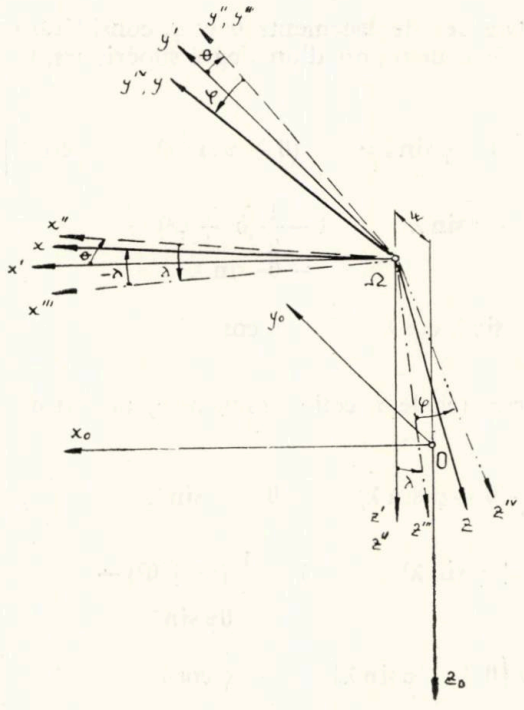


Fig. 3

Par conséquent, la matrice de transformation des coordonées $\Omega x_0 y_0 z_0 \rightarrow \rightarrow \Omega xyz$, sera

(7) $$\sigma = \sigma_\theta \cdot \sigma_\lambda \cdot \sigma_\varphi \cdot \sigma_{-\lambda},$$

soit

(8) $$\sigma = \begin{vmatrix} \cos^2\lambda\cos\theta - & -\sin\theta\cos\varphi - & \sin\lambda\cos\lambda\cos\theta + \\ -\sin\theta\sin\varphi\sin\lambda + & -\sin\varphi\cos\theta\sin\lambda & +\sin\varphi\sin\theta\cos\lambda - \\ +\sin^2\lambda\cos\varphi\cos\theta & & -\cos\theta\cos\varphi\sin\lambda\cos\lambda \\ \sin\theta\cos^2\lambda + & \cos\theta\cos\varphi - & \sin\lambda\cos\lambda\sin\theta - \\ +\cos\theta\sin\varphi\sin\lambda + & -\sin\theta\sin\lambda\sin\varphi & -\sin\varphi\cos\lambda\cos\theta - \\ +\sin^2\lambda\sin\theta\cos\varphi & & -\sin\lambda\cos\lambda\sin\theta\cos\varphi \\ \sin\lambda\cos\lambda - & \sin\varphi\cos\lambda & \sin^2\lambda + \cos^2\lambda\cos\varphi \\ -\sin\lambda\cos\lambda\cos\varphi & & \end{vmatrix}.$$

En mettant

$$\sin\varphi=\varphi,\quad \cos\varphi=1-\frac{1}{2}\varphi^2;\quad \sin\theta=\theta,\quad \cos\theta=1-\frac{1}{2}\theta^2,$$

et en négligeant dans les déplacements θ et φ, considérés suffisament petits, les termes de troisième degré ou d'un degré supérieurs, la matrice de transformation devient:

$$(9)\qquad \sigma=\begin{bmatrix} 1-\frac{1}{2}(\theta+\varphi\sin\lambda)^2 & -(\theta+\varphi\sin\lambda) & \varphi\cos\lambda\left(\theta+\frac{1}{2}\varphi\sin\lambda\right) \\ \theta+\varphi\sin\lambda & 1-\frac{1}{2}(\theta^2+\varphi^2)-\theta\varphi\sin\lambda & -\varphi\cos\lambda \\ \frac{1}{2}\varphi^2\sin\lambda\cos\lambda & \varphi\cos\lambda & 1-\frac{1}{2}\varphi^2\cos^2\lambda \end{bmatrix},$$

et la matrice inverse (égale à celle transposée, la transformation étant orthogonale) sera:

$$(10)\qquad \sigma^{-1}=\begin{bmatrix} 1-\frac{1}{2}(\theta+\varphi\sin\lambda)^2 & \theta+\varphi\sin\lambda & \frac{1}{2}\varphi^2\sin\lambda\cos\lambda \\ -(\theta+\varphi\sin\lambda) & 1-\frac{1}{2}(\varphi^2+\theta^2)-\theta\varphi\sin\lambda & \varphi\cos\lambda \\ \varphi\cos\lambda\left(\theta+\frac{1}{2}\varphi\sin\lambda\right) & -\varphi\cos\lambda & 1-\frac{1}{2}\varphi^2\cos^2\lambda \end{bmatrix}.$$

4. Cinématique de la masse suspendue

4. 1. Vitesse de l'origine du système mobile

La vitesse du point Ω est égale à la somme de sa vitesse relative par rapport au système entraîné $Ox_0y_0z_0$ et la vitesse de transport imprimée par ce système

$$(11)\qquad \mathbf{V}_\Omega=\mathbf{V}_{\Omega,r}+\mathbf{V}_{\Omega,t}.$$

On peut écrire ces vecteurs dans le repère entraîné $Ox_0y_0z_0$ conformément à la fig. 4:

$$(12)\qquad [\mathbf{V}_{\Omega,r}]_0=\begin{bmatrix}0\\ \dot{w}\\ 0\end{bmatrix}\quad\text{et}\quad [\mathbf{V}_{\Omega,t}]_0=\begin{bmatrix}V_{0x}-\dot{\psi}w\\ V_{0y}\\ 0\end{bmatrix},$$

tandis que la vitesse de l'origine Ω sera:

$$[\mathbf{V}_\Omega]_0 = \begin{bmatrix} V_{0x} - \dot{\psi}\, w \\ V_{0y} + \dot{w} \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Pendant les mesures expérimentales, sur l'automobile en marche, des vitesses et des accélérations de celui-ci, les appareils de mesure peuvent être placés seulement dans la caisse du véhicule, donc sur la masse suspendue. C'est pouquoi il faut trouver les composantes des vecteurs vitesse

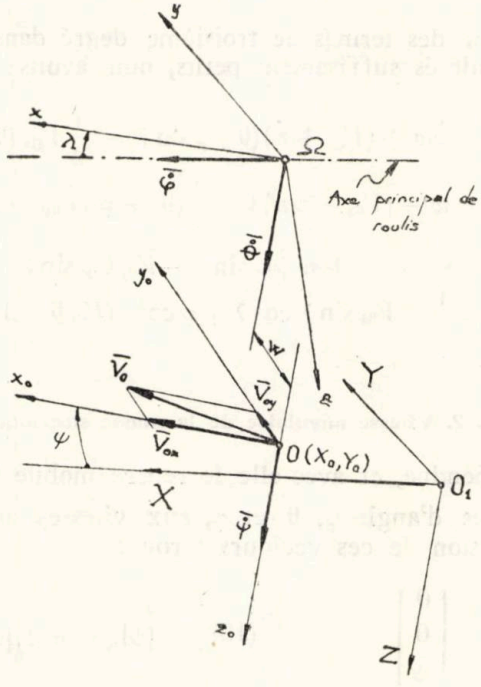


Fig. 4

et acceleration par rapport au système mobile de la masse suspendue (par rapport auquel on oriente les appareils de mesure). Alors, l'expression du vecteur $\mathbf{V}_\Omega$ dans le repère mobile Ωxyz sera:

$$[\mathbf{V}_\Omega]_\Omega = \sigma^{-1} . [\mathbf{V}_\Omega]_0 , \tag{14}$$

conformément à la relation de transformation:

$$[\mathbf{V}_\Omega]_0 = \sigma . [\mathbf{V}_\Omega]_\Omega . \tag{15}$$

Par conséquent, en effectuant le produit de la matrice σ^{-1} par la matrice du vecteur $[\mathbf{V}_\Omega]_0$ on obtient:

$$(16)\quad [\mathbf{V}_\Omega]_\Omega = \begin{bmatrix} 1-\frac{1}{2}(\theta+\varphi\sin\lambda)^2](V_{0x}-\dot{\psi}w)+(\theta+\varphi\sin\lambda)(V_{0y}+\dot{w}) \\ -(\theta+\varphi\sin\lambda)(V_{0x}-\dot{\psi}w)+\left[1-\frac{1}{2}(\varphi^2+\theta^2)-\theta\varphi\sin\lambda\right](V_{0x}+\dot{w}) \\ \varphi\cos\lambda\left(\theta+\frac{1}{2}\varphi\sin\lambda\right)(V_{0x}-\dot{\psi}w)-\varphi\cos\lambda\,(V_{0y}+\dot{w}) \end{bmatrix},$$

soit, après l'omission des termes de troisième degré dans les déplacements $\theta, \varphi, \varphi_1$ et φ_2, considérés suffisament petits, nous avons:

$$(17)\quad [\mathbf{V}_\Omega]_\Omega = \begin{bmatrix} V_{0x}-\dot{\psi}w+(V_{0y}+\dot{w})(\theta+\varphi\sin\lambda)-\frac{1}{2}V_{0x}(\theta+\varphi\sin\lambda)^2 \\ V_{0y}+\dot{w}-(V_{0x}-\dot{\psi}w)\theta-\frac{1}{2}(\theta^2+\varphi^2)V_{0y}-V_{0x}\varphi\sin\lambda+ \\ +w\dot{\psi}\varphi\sin\lambda-V_{0y}\theta\varphi\sin\lambda \\ \frac{1}{2}\varphi^2 V_{0x}\sin\lambda\cos\lambda+\varphi\cos\lambda\,(V_{0x}\theta-V_{0y}-\dot{w}) \end{bmatrix}.$$

4. 2. Vitesse angulaire de la masse suspendue

La masse suspendue, et avec elle le repère mobile Ωxyz, exécute trois rotations simultanées d'angle ψ, θ et φ, aux vitesses angulaires $\dot{\bar{\psi}}$, $\dot{\bar{\theta}}$ et $\dot{\bar{\varphi}}$ (fig. 5). Les expression de ces vecteurs seront:

$$(18)\quad [\dot{\bar{\psi}}]_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad (19)\quad [\dot{\bar{\psi}}]_\Omega = \sigma^{-1}.[\dot{\bar{\psi}}]_0,$$

c'est-à-dire

$$(20)\quad [\dot{\bar{\psi}}]_\Omega = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\varphi^2\dot{\psi}\sin\lambda\cos\lambda \\ \dot{\psi}\varphi\cos\lambda \\ \dot{\psi}-\frac{1}{2}\dot{\psi}\varphi^2\cos^2\lambda \end{bmatrix};$$

$$(21)\quad [\dot{\bar{\theta}}]_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad (22)\quad [\dot{\bar{\theta}}]_\Omega = \sigma^{-1}.[\dot{\bar{\theta}}]_0,$$

c'est-à-dire

$$[\bar{\dot{\theta}}]_{\Omega} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\varphi^2\dot{\theta}\sin\lambda\cos\lambda \\ \dot{\theta}\varphi\cos\lambda \\ \dot{\theta} - \frac{1}{2}\dot{\theta}\varphi^2\cos^2\lambda \end{bmatrix}, \tag{23}$$

soit, en négligeant les termes suffisament petits

$$[\bar{\dot{\theta}}]_{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta}\varphi\cos\lambda \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}; \tag{24}$$

$$[\bar{\dot{\varphi}}]_{\Omega} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}\cos\lambda \\ 0 \\ \dot{\varphi}\sin\lambda \end{bmatrix}. \tag{25}$$

La vitesse angulaire du repère mobile Ωxyz pourra être écrite sous la forme:

$$\bar{\omega} = \bar{\dot{\psi}} + \bar{\dot{\theta}} + \bar{\dot{\varphi}}, \tag{26}$$

c'est-à-dire

$$[\bar{\omega}]_{\Omega} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}\cos\lambda + \frac{1}{2}\varphi^2\dot{\psi}\sin\lambda\cos\lambda \\ (\dot{\theta} + \dot{\psi})\varphi\cos\lambda \\ \dot{\varphi}\sin\lambda + \dot{\theta} + \dot{\psi} - \frac{1}{2}\dot{\psi}\varphi^2\cos^2\lambda \end{bmatrix}. \tag{27}$$

En connaissant la vitesse de l'origine Ω et la vitesse angulaire absolue de la masse suspendue, on peut aisément trouver la vitesse et l'accélération d'un point quelconque de la masse suspendue, notamment du point M_s.

Notations

a, b — distances du centre de gravité du véhicule entier aux essieux avant et arrière;
h_1, h_2 — hauteurs des masses non-suspendues au-dessus de l'axe Ox_0;
l — empattement;
M_s — centre de gravité de la masse suspendue;
M_{n_1}, M_{n_2} — centres de gravité des masses non-suspendues avant et arrière;
P, Q — centres de roulis des masses suspendues, avant et arrière;
$\mathbf{V}$ — vecteur vitesse;
w — ordonnée du point Ω par rapport au repère $Ox_0y_0z_0$;
z_1, z_2 — hauteurs des centres de roulis de la masse suspendue, avant et arrière, au-dessus de l'axe Ox_0;

0 — angle de rotation de la masse suspendue autour d'une axe verticale, du à la différence entre les déplacements latéraux des centres de roulis P et Q;
λ — angle formé par l'axe principal de roulis et l'axe Ωx;
σ — matrice de transformation des coordonnées;
φ — angle de roulis de la masse suspendue autour de l'axe principal de roulis;
φ_1, φ_2 — angles de roulis des masses non-suspendues, avant et arrière;
ψ — angle de cap (de pivotement) formé par l'axe Ox_0 et l'axe absolu O_1X;
$[\ldots]_0$ — matrice de colonne d'un certain vecteur dans le repère $Ox_0y_0z_0$;
$[\ldots]_\Omega$ — idem, dans le repère Ωxyz.

Reçue le 21 IX 1967

Institut Politechnique, Braşov

BIBLIOGRAPHIE

1. Pacejka H. B., *De bestuderung van hef gedrag van een zich over een vlakke horizontale weg bewegende auto; m. b. v. een electronische analogonmaschine.* Technische Hogeschool, Delft, Holland, Laboratorium voor Voertiugtechniek, 1958.
2. Radt S. H., Pacejka H. B., *Analysis of the Steady-state turning Behaviour of an Automobile.* Proceed. of the Symposium on Control of Vehicles During Braking and Cornering, IME, 1963, London.
3. Bourke I. P., *Rear, Front, or Four-wheel Drive?.* Automobile Engineer, 1965, 5.
4. Morelli A., *Stabilità direzionale del veicolo automobile.* ATA, luglio, 1964.
5. Leygue Fr., *Contribution à l'étude de la stabilité des véhicules routiers.* SIA, 1966, 5.

ASUPRA CINEMATICII MASEI SUSPENDATE A AUTOMOBILELOR

(Rezumat)

Se studiază cinematica masei suspendate a automobilelor, din punct de vedere al „dinamicii transversale", pe un model matematic cu şase grade de libertate.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

D. K. 621.43

ÜBER EIN MODELL DER KLOPFENDEN VERBRENNUNG IN OTTOMOTOREN

VON

DAVID PERETZ

I. Heutiger Stand unserer Kentnisse über das Motorklopfen

Bei einer normalen Verbrennung zündet der Funken das Gemisch von Kraftstoff-Luft, und die Flamme, die sich um die Zündkerze bildet, breitet sich regelmässig im Verbrennungsraum aus, bis das ganze Gemisch verbrannt ist.

Die Druck- und Temperaturänderung des Brenngemischrestes vor der Flammenfront verursacht im Falle des Klopfens eine spontane Selbstzündung des Restgases, so dass dieses in sehr kurzer Zeit verbrennt. Der Druck und die Temperatur steigen in dieser Zone plötzlich an [1]. Diese klopfende Verbrennung hat eine Reihe äusserlicher Begleiterscheinungen wie z. B.: einen harten, klingenden und lauten Motorgang, ein Abfallen der indizierten wahren Leistung und des indizierten wahren Wirkungsgrades, eine kleinere Temperatur der Abgase und das Heisslaufen des Motors usw.

Es gibt drei Theorien über die Ursache der Endgasselbstzündung.

1. Die Theorie der Stosswellen [2], [3].

Bei Verbrennung des Gemisches Kraftstoff-Luft in langen Rohren verdichtet die beschleunigte Flammenfront das unverbrannte Gemisch vor sich. Die Druckwellen breiten sich ursprünglich mit grösserer Geschwindigkeit als die Flammenfront aus. Bei gewissen Werten der Flammengeschwindigkeit und folglich bei genug grossen Amplituden der Stosswellen stellt sich die Selbstzündung des Gemisches vor der Flammenfront ein, so dass die entstandene sekundäre Flamme sich zusammen mit der Stosswelle bei Überschallgeschwindigkeit ausbreitet.

Dieselben Überlegungen werden auch für die Verbrennung des Endgases im Brennraum des Kolbenmotors angewandt.

Der wesentliche Unterschied zwischen dem Motorklopfen und dieser Art von klopfenden Verbrennung in Rohren [4] besteht darin, dass in den Rohren die Stosswelle und die Detonation durch die stufenweise Steigerung der Flammengeschwindigkeit bis zum kritischen Wert verursacht werden, während in Motor, wo die Flammenfront nicht solche Wellen erzeugt, die Stosswelle als Wirkung des Klopfens betrachtet werden muss. In den Kolbenmotoren bewiesen die gemachten Versuche [5], dass eine so grosse Beschleunigung der Flammenfront bei klopfender Verbrennung nicht möglich ist.

2. Die Theorie der einfachen Selbstzündung

Entsprechend dieser Theorie setzt man voraus, dass zu einem gewissen Zeitpunkt des Verbrennungsprozesses der Druck und die Temperatur des Endgases die entsprechenden Selbstzündungswerte erreichen. Da aber der Brenngemischrest nicht homogen ist, findet die Selbstzündung nicht gleichzeitig im ganzen Restgasvolumen statt.

Auf diese Theorie verzichtete man [6], [7], weil sie die klopffestigkeitssteigernden Wirkungen der dem Kraftstoff beigemengten Additiven nicht erklären kann.

3. Die Theorie der mehrstufigen Selbstzündung

Gegenwärtig hat man gestützt auf die Erfahrungen zahlreicher Versuche, feststellen können, dass im Endgas das wachsenden Drucken und Temperaturen ausgesetzt ist, Oxydationreaktionen stattfinden, die die Bildung von Peroxyden und Aldehyden ermöglichen. Die Anwesenheit dieser Produkte kann man mit Hilfe zweier verschiedenen Mechanismen erklären und zwar je nachdem der Peroxydradikal (ROO) mit dem Kraftstoff ein Alkylhydroxyd (ROOH) ergibt oder sich zersetzt und ein Azylperoxyd bildet. Es besteht auch die Möglichkeit eines dritten Mechanismus u. z. die Reaktion durch Formaldehyd [7], [8].

Die kritische Konzentration von Peroxyden bestimmt deren explosive Zersetzung und das Erscheinen der kalten Flammen. Die Chemoluminiszenz ist von den erregten Formaldehydmolekülen verursacht. In der nächsten Phase entstehen durch die Zwischenprodukte HCO und CO sowie durch ungesättigte Verbindungen, die blauen Flammen.

Diese Zwischenverbindungen begünstigen eine Selbstbeschleunigung der Reaktionen im Restgas, verkürzen den Zündverzug desselben bis zu dem Zeitpunkt wo heisse Zündkerne auftauchen und eine plötzliche Selbstzündung des unverbrannten Restteiles der Zylinderladung stattfindet.

Folglich ist die Selbstzündung des Brenngemischrestes eine exotherme Kettenreaktion, die mehrstufig verläuft.

Trotzdem der Mechanismus der klopfenden Verbrennung in den Ottomotoren verhältnismässig gut bekannt ist, wird die Festsetzung einer allgemeinen Formel, die die Versuchsergebnisse mit den Betrieb- und Baucharakteristiken des Motors bei klopfender Verbrennung in Einklang bringt, durch die Komplexität dieser Erscheinungen behindert.

Rothrock (1941) nimmt an, dass die Klopferscheinungen als Funktion von zwei Zustandsgrössen des Restgases und zwar der Dichte und der Temperatur desselben ausgedrückt werden kann. Weil aber die Zeit als Veränderliche nicht in Betracht gezogen wird, hat die aufgestellte Gleichung nur eine begrenzte Gültigkeit. Nur wenn der Ansaugdruck und die Ansaugtemperatur des Frischgemisches verändert werden, zeitigt die Gleichung genügend genaue Ergebnisse.

Ein wichtiger Fortschritt für das Ausarbeiten einer allgemeinen Formel wurde von Livengood und Wu [9] erzielt. Von der Voraussetzung ausgehend, dass die zur klopfenden Verbrennung führenden Oxydationsprozesse im Brenngemischrest, denen in den Schnellverdichtungsmaschinen ähnlich sind, in welchen der Zündverzug des Gemisches Kraftstoff–Luft in rigorös genauen Druck- und Temperaturbedingungen gemessen werden kann, gebrauchen diese Forscher die folgende Gleichung für den Zündverzug des Restgases in Ottomotoren:

$$\frac{x}{x_{cr}} = \int_0^{t_e} \frac{1}{\tau}\, dt = 1, \tag{1}$$

in welcher: x — die Konzentration der zur klopfenden Verbrennung führenden Zwischenprodukte zu einem gewissen Zeitpunkt ist, x_{cr} — die kritische Konzentration in Zwischenprodukten, welche die Selbstzündung zum Zeitpunkt t_e verursachen, τ — der Zündverzug des Brenngemischrestes für die sukzessive Druck- und Temperaturwerte desselben.

Die für die Berechnung notwendigen Werte des Zündverzugs (τ) entsprechen den praktischen Versuchen, die mit einer Schnellverdichtungsmaschine ausgeführt wurden. Mit der Gleichung (1) kann man dann die Zeit t_e berechnen, die den Beginn der klopfenden Verbrennung (der Endgasselbstzündung) entspricht.

Die Beweisführung ist einfach und einleuchtend und die berechneten Zeiten entsprechen den Versuchsergebnissen für die von den Autoren angeführten Fällen. Die hauptsächliche Unzulänglichkeit dieser Methode besteht darin, dass in den Zeitabständen für welche der Zündverzug gemessen wird, die Drucke und Temperaturen des Endgases nicht beständig bleiben, sondern sich rasch verändern. Folglich ist die Berechnungsgrundlage in Frage gestellt, weil die Bedingungen (Druck nnd Temperatur) unter welchen die chemische Reaktion verläuft, nicht genau bestimmt werden können.

Mc Pherson u. a. [10] stellen eine mutmassliche chemische Reaktion auf und versuchen eine Beziehung zwischen Druck und Temperatur des Restgases einerseits und den Klopfeintritt andererseits zu finden. Die analytische Annäherung gestattet das Erzielen guter Ergebnisse nur wenn die Arbeitsbedingungen dieselben bleiben.

G. A. Karim [11] nimmt an, dass sich im Endgas eine Kettenreaktion entwickelt, die durch eine Gleichung vom Typ Arrhenius beschrieben werden kann und schlägt eine analytische Annäherung der Klopfbeginnbedingungen vor. Diese vereinfachte Denkweise soll eine Grundlage für das Ordnen und Interpolieren der Versuchsergebnisse bilden, insbesonders für die Versuche an fremdgetriebenen Maschinen.

II. Voraussetzungen für die Wahl eines allgemeinen Reaktionsmechanismus der zur klopfenden Verbrennung führt

Wie wir schon erwähnten, ist die Selbstzündung des Brenngemischrestes ein mehrstufiger Selbstzündungprozess bei niedrigen Temperaturen. Die ersten Zwischenstufen werden relativ langsam durchlaufen und die Reaktionen finden in einer immer grösser werdende Raummenge des Endgases statt. Nachher, wenn die Bedingungen sich denjenigen der Selbstzündung nähern, nimmt die Konzentration der freien Radikale sehr rasch zu und so erklärt sich die durch Versuche bewiesene Tatsache [8], dass die Selbstzündung so wenig dauert. Das suggeriert die Vorstellung, dass die Selbstzündung des Restgases an dem Zeitpunkt stattfindet wo die Konzentration gewisser Zwischenprodukte der Vorflammenoxydationsreaktionen eine gewisse kennzeichnende-kritische Konzentration erreicht.

Um die Beweisführung weiter auszubauen, ist es nicht nötig die Art dieser Zwischenprodukte, die zur klopfenden Verbrennung führen, zu bestimmen oder festzustellen ob sie Stabile — beziehungsweise Übergangsverbindungen sind.

Notieren wir mit: x_i — die dem Zeitpunkt t entsprechende Konzentration der Zwischenprodukte, w_{xi} — die Reaktionsgeschwindigkeit. Die erwähnte Bedingung wird dann in folgender Weise ausgedrückt:

$$\int_0^{x_{cr}} \mathrm{d}x_i = \int_0^{\tau} w_{xi}\,\mathrm{d}t. \tag{2}$$

Da die Kinetik der Kohlenwasserstoffoxydationsreaktionen sehr komplex ist, sind die Einzelheiten dieser Prozesse heute nicht bekannt, so dass es sehr schwierig oder sogar unmöglich ist die Reaktionsgeschwindigkeitswerte zu bestimmen.

Um eine Lösung zu finden, werden wir die auf die Konzentrationsveränderung einer der Ausgangssubstanzen (z. B. des Brennstoffes) im Restgas) gestützte Kinetik in Betracht ziehen. Nehmen wir an, dass diese Reaktion, in welcher sich diese Zwischenprodukte bilden, einstufig verläuft und der kleinsten Reaktionsgeschwindigkeit entspricht. Folglich wird diese Reaktion für den Verlauf der tatsächlichen mehrstufigen Reaktion entscheidend sein. Solche Methoden werden häufig angewendet [12], [13].

Unter diesen Bedingungen wird die Gleichung (2)

$$\int_0^{x_{cr}} \mathrm{d}x_i = C \int_0^{\tau} w_y \, \mathrm{d}t, \tag{3}$$

in welcher

$$w_y = \frac{\mathrm{d}[(N_{0,c} - N_c)/N_{0,c}]}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \tag{4}$$

und $N_{0,c}$ — die Kraftstoffmoleküle im Brenngemisch zum Zeitpunkt $t = 0$, N_c — die noch nicht in Reaktion getretene Kraftstoffmoleküle im Endgas, zum Zeitpunkt t, C — eine von der Natur des Kraftstoffes abhängige Konstante sind.

Die grundliegenden Bedingungen für einen allgemeinen Reaktionsmechanismus sind folglich:

1. Die Selbstzündung des Restgases findet zu dem Zeitpunkt statt, in welchem die Konzentration gewisser Zwischenprodukte den kritischen Wert erreicht.

2. Der mehrstufige Prozess kann als einstufige Kettenreaktion betrachtet werden. Die Reaktionsgeschwindigkeit des wirklichen Prozeses ist von der kleinsten Reaktionsgeschwindigkeit, die der Bildung dieser Zwischenprodukte entspricht, bestimmt.

3. Die Bildungskinetik der Zwischenprodukte kann als Funktion der Konzentration einer der Reaktionspartner ausgedrückt werden.

III. Die Berechnungsmethode

Das Anwenden einer Gleichung von Typ Arrhenius oder einer Gleichung der Art

$$\tau = C \exp(-b/T)\, p^n, \tag{5}$$

in welcher: τ — der Zündverzug, T — die Temperatur des Kraftstoff-Luft-Gemisches, p — der Druck des Gemisches, C, b, n, — empirische

Konstanten sind, ist nicht möglich, da diese Gleichungen entweder die Aktivierungsenergie und die Konstanten bekannt voraussetzen oder nur für kleine Temperaturintervalle und gewisse Druckgebiete gültig sind.

Aus diesem Grund haben wir eine Beweisführung ähnlich den Überlegungen Wiebes [14] für das Brenngesetz in den Motoren gebraucht u. z.:

Die Geschwindigkeit einer Kettenreaktion ist mit der Konzentration der aktiven Zentren proportional, oder die in der Reaktion eingetretene Ausgangsstoffmenge ist mit der Zahl der in der betreffenden Zeitdauer in der Reaktion anwesenden effektiven Zentren proportional.

Während des Zeitintervalls $t...t + \mathrm{d}t$ reagieren

$$-\mathrm{d}N_c = a\,\mathrm{d}N_{ef} \tag{6}$$

und

$$\frac{-\mathrm{d}N_c}{\mathrm{d}t} = a\frac{\mathrm{d}N_{ef}}{\mathrm{d}t}\,. \tag{7}$$

Die relative Bildungsgeschwindigkeit dieser aktiven Zentren ist

$$w_{ef} = \frac{1}{N_c}\cdot\frac{\mathrm{d}N_{ef}}{\mathrm{d}t}\,, \tag{8}$$

so dass die Gleichung (7) folgende Form erhält:

$$-\frac{\mathrm{d}N_c}{\mathrm{d}t} = aN_c w_{ef}\,. \tag{9}$$

Sondern wir die Veränderlichen ab und integrieren

$$N_c = N_{0,c}\exp\left(-a\int_0^t w_{ef}\,\mathrm{d}t\right). \tag{10}$$

Weil

$$\frac{N_c}{N_{0,c}} = 1 - y \tag{11}$$

den nicht in Reaktion getretenen Bruchteil der Ausgangssubstanz darstellt, bekommt die Gleichung (10) folgenden Ausdruck:

$$1 - y = \exp\left(-a\int_0^t w_{ef}\mathrm{d}t\right), \tag{12}$$

und der bis zur Zeit t reagierte Teil ist

$$y = 1 - \exp\left(-a\int_0^t w_{ef}\,\mathrm{d}t\right). \tag{13}$$

Folglich kann die im Brenngemischrest stattfindende Kettenreaktion durch eine Gleichung, die Wiebes Durchbrennfunktion

$$x = 1 - \exp[-\varphi(t)] \tag{14}$$

ähnlich ist, ausgedrückt werden.

Die Funktion $f(t)$ in der Gleichung (13) muss folgende Bedingungen erfüllen:

1. Wir nehmen an, dass die Reaktion zu einem gewissen willkürlich gewählten Zeitpunkt beginnt, für welchen $t = 0$ und $y = 0$ sind, so dass die Exponentialkurve durch den so gewählten Koordinatennullpunkt verläuft ($f(0) = 0$).

Wie in [11] erwähnt wird, sind die Bildungsreaktionen der Zwischen produkte im Endgas sehr langsam auch nach dem Zündzeitpunkt und den Beginn der Flammenausbreitung und werden erst in der Nähe des Selbstzündzeitpunktes des Restgases (etwa 5° KW vor der Selbstzündung) schneller. So eine Entwicklung der Vorreaktionen kann im Falle relativ kleiner Verdichtungsverhältnisse, bei welchen die Reaktionen während des Kompressionhubes vernachlässigt werden können, wahr sein. Bei grösseren Kompressionsverhältnissen und wenig klopffesten Kraftstoffen kann eine wahrnehmbare Vorreaktion während des Verdichtungshubes beginnen. Folglich liegt der Zeitpunk für den Beginn der Vorreaktionen bei klopfender Verbrennung entweder während des Kompressionshubes (für gewisse Kraftstoffe und Arbeitsbedingungen), kann mit dem Zündzeitpunkt gleich sein oder in anderen Fällen später folgen. Näheres darüber wird in einem späteren Abschnitt dieser Arbeit erwähnt.

2. Im Verlauf der Reaktion bis zum Zeitpunkt τ verändert sich die relative Bildungsgeschwindigkeit der effektiven Zentren nicht sprunghaft, so dass die Funktion $f(t)$ kontinuierlich sein muss.

In unserem Falle offenbart sich diese Tatsache auch dadurch, dass die mit sehr grosser Geschwindigkeit verlaufende Reaktion das Zündverzugsende ($t = \tau$) des Endgases bestimmt.

Folglich ist auch y eine stetige Funktion.

3. Weil die Funktion y in der Zeitdauer $0 \ldots \tau$ der Reaktion monoton von 0 bis zu einem kritischen Wert y_{cr} zunimmt, ergibt sich, dass auch die Funktion $f(t)$ eine stetig wachsende Funktion ist und

$$\lim f(t) = f(\tau).$$

4. Bezüglich des Reaktionsendes ist es nötig folgendes hervorzuheben:

Während der ersten Phase der Reaktion ist die von den Vorflammenreaktionen und durch Verbrennung einer kleinen Kraftstoffmenge entwickelte Wärme klein, so dass kein für die Reaktionsbeschleunigung wichtiges Ansteigen der Temperatur zu beobachten ist. Folglich wächst die Reaktionsgeschwindigkeit in dieser Phase, insbesonders durch Kettenverzweigung, um später viel schneller durch die Wärmeentwicklung beschleunigt zu werden.

Die Vorreaktion müssen wir als eine anfängliche Etappe der explosionsartigen Reaktion die zur plötzlichen Selbstzündung des Ladungsrestes führt, betrachten. Die Zeitdauer dieser Etappe ist folglich dem Zündverzug dieses Gemisches gleich. Die kritische Konzentration der Zwischenprodukte wie auch die kritische Reaktionsgeschwindigkeit werden am Ende des Zündverzugs erreicht. In unserem Falle sind die Kettenträger eine Art Zwischenprodukte deren Konzentration stetig grösser wird, so dass die Reaktion schneller wird und die Reaktionsgeschwindigkeit bis zu einem Höchstwert ansteigt, welcher auch das Ende des Zündverzugs bestimmt [17]. Diese Bedingung wird meistens in folgender Weise ausgedrückt:

$$\varphi\tau = \text{const.}, \tag{15}$$

in welcher: φ — die Verlängerungsprobabilität der Ketten durch Verzweigungen ist und τ — der Zündverzug.

Diese Denkweise ist von den Versuchen Downs, Josts u.a. bestätigt.

Nehmen wir z.B. an, dass für gewisse Arbeitsbedingungen bei klopfender Verbrennung, Formaldehyd [RCHO] das gebildete Zwischenprodukt ist. Die chemische Analyse des Endgases zu verschiedenen Zeitpunkten zeigt die Konzentrationsänderung dieses Produktes als Funktion der Zeit oder des KW an. In Abb. 1 wurde die Konzentrationsänderung von [RCHO] in Abhängigkeit vom KW nach [18] für folgende zwei Fälle dargestellt: a) bei klopfender Verbrennung (Kurve *A*) und bei einem Kompressionverhältnis von $\varepsilon = 9{,}9$; b) bei klopffreier Verbrennung (Kurve *B*) und bei einem Kompressionverhältnis von $\varepsilon = 7$.

Der Kraftstoff ist technischer Isooktan (MOZ = 95), das Luftverhältnis $\alpha = 0{,}9$, die Motordrehzal $n = 1\,500$ U/min.

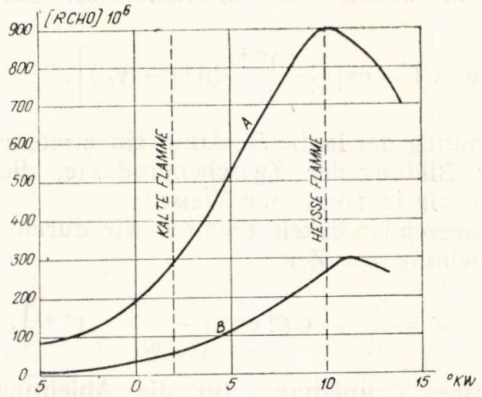


Abb. 1

Es ist offensichtlich, dass bei klopfender Verbrennung (Kurve *A*), die grösste Reaktionsgeschwindigkeit zum Zeitpunkt der warmen Flammenerscheinung, die das Zündverzugsende des Ladungsrestes anzeigt, erreicht

wird. Für die klopffreie Verbrennung ist die Konzentration des Zwischenprodukts viel kleiner, die Reaktion ist viel langsamer und die kritische Reaktionsgeschwindigkeit kann nicht erreicht werden.

Wenn wir zur Berechnung der relativen Geschwindigkeitsbildung der effektiven Zentren die Wiebefunktion benützen u.z.

$$w_{ef} = Dt^m, \tag{16}$$

in welcher: D — ein Proportionalitätsfaktor ist und m — kinetischer Exponent des Zündverzugs (in unserem Falle), und diese Gleichung in (13) einsetzen, erhalten wir

$$y = 1 - \exp\left(-\frac{aD}{m+1}t^{m+1}\right), \tag{17}$$

oder wenn wir

$$C = aD \tag{18}$$

setzen, dann ist

$$y = 1 - \exp\left(-\frac{C}{m+1}t^{m+1}\right). \tag{19}$$

Für das Reaktionsende wird

$$y_{cr} = 1 - \exp\left(-\frac{C}{m+1}\tau^{m+1}\right). \tag{20}$$

Die Glcichungen (19) und (20) können in einer einzigen Gleichung vereinigt werden, in welcher das dimensionslose Zeitverhältnis (relative Zeit) t/τ erscheint

$$y = 1 - \exp\left[\left(\frac{t}{\tau}\right)^{m+1}\ln(1-y_{cr})\right]. \tag{21}$$

Für die Berechnung der in die Reaktion eingetretenen kritischen Kraftstoffmenge y_{cr} zur Bildung der Zwischenprodukte, die den Klopfbeginn einleiten, verfahren wir in folgender Weise:

Die Reaktionsgeschwindigkeit erhalten wir durch Differenzieren der Funktion y in Beziehung zur Zeit

$$y' = \frac{dy}{dt} = Ct^m \exp\left(-\frac{C}{m+1}t^{m+1}\right). \tag{22}$$

Die Reaktionsbeschleunigung, also die Ableitung der Reaktionsgeschwindigkeit mit der Zeit als unhabhängige Veränderliche, wird durch folgende Gleichung ausgedrückt:

$$y'' = \frac{d^2y}{dt^2} = C(m - Ct^{m+1})\exp\left(-\frac{C}{m+1}t^{m+1}\right). \tag{23}$$

Beim Reaktionsende wird die höchste Geschwindigkeit erreicht, so dass die Bedingung für den Zeitpunkt τ des Zündverzugs durch

$$y'' = 0 \tag{24}$$

ausgedrückt wird oder

$$C = \frac{m}{t^{m+1}} . \tag{25}$$

Wenn wir diesen Wert der Konstante C (Gl. (25)) in Gleichung (20) einsetzen und beachten, dass $t = \tau$, so ist

$$y_{cr} = 1 - \exp\left(-\frac{m}{m+1}\right), \tag{26}$$

folglich ist die bis zu dem Zündverzugsende in Reaktion getretene kritische Kraftstoffmenge nur vom kinetischen Exponenten m der Reaktion abhängig.

Die Gleichung (21) wird dann

$$y = 1 - \exp\left[-\frac{m}{m+1}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{m+1}\right]. \tag{27}$$

Die kritische Reaktionsschwindigkeit entspricht folgender Gleichung

$$y'_{cr} = \left(\frac{dy}{dt}\right)_{cr} = \frac{m}{\tau}\exp\left(-\frac{m}{m+1}\right), \tag{28}$$

wenn der Wert der Konstante C (Gl. (25)) in Gleichung (22) eingesetzt wird.

Gestützt auf Gleichung (27) kann man eine Reaktionsgeschwindigkeit in Beziehung zur relativen Zeit

$$w = \frac{dy}{d\,(t/\tau)} = m\left(\frac{t}{\tau}\right)^{m}\exp\left[-\frac{m}{m+1}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{m+1}\right], \tag{29}$$

so wie eine kritische Reaktionsgeschwindigkeit

$$w_{cr} = m\exp\left(-\frac{m}{m+1}\right). \tag{30}$$

berechnen.

IV. Prüfung der für die Vorreaktionen im Ladungsrest vorgeschlagenen Gleichungen durch Forschungsergebnisse

Die Prüfung der mit Gleichung (27) berechneten Resultate haben wir in einer ersten Etappe mit den Forschungsergebnissen aus [9] durchgeführt, wo der Zeitpunkt des Klopfeintritts mit Gleichung (1) berrechnet wurde. Diese Gleichung lautet, in unseren gebräuchlichen Formelzeichen umgeschrieben, wie folgt:

$$\frac{y}{y_{cr}} = \int_0^t \frac{1}{\varphi}\,dt, \tag{31}$$

wo φ — der augenblickliche Zündverzug des Brenngemischrestes für den gegebenen Druck und Temperatur dieses Gemisches im Motorzylinder ist. Die Werte von φ wurden für den gegebenen Kraftstoff bei verschiedenen Druck- und Temperaturwerten in der Schnellverdichtungsmaschine gewonnen.

Für das Reaktionsende erhält die Gleichung (31) die folgende Form:

$$\frac{y_{cr}}{y_{cr}} = 1 = \int_0^\tau \frac{1}{\varphi}\,dt, \tag{32}$$

in welcher τ die Dauer der Vorreaktion ist und folglich den Zeitpunkt des Klopfeintritts kennzeichnet.

Sind die augenblicklichen Werte des Drucks und der Temperatur des Endgases bekannt, so wie die entsprechenden Werte von φ, dann können wir die Werte von y/y_{cr} zu jedem Zeitpunkt berechnen bzw. den Zeitpunkt des Klopfeintritts vorraussagen.

Die gemachten Versuche ermöglichten das Aufzeichnen der Integralkurven in Beziehung zur relativen Zeit, um diese dann mit denjenigen die aus Gleichung (27) berrechnet wurden zu vergleichen. Der kinetische Exponent wurde durch sukzessive Versuche bestimmt.

Die Versuche wurden mit einem Ottomotor vom Typ CFR in den „Sloan Laboratory for Automotive and Aircraft Engines" für n-Heptan bei einem Kraftstoff-Luftverhältnis von 0,0665 durchgeführt.

Der Beginn der Vorreaktion ($t = 0$) bei diesen Untersuchungen wurde willkürlich bei 60° KW vor dem o.T. gewählt und war gleichbleibend für alle untersuchten Fälle.

Tabelle 1

Ordnungszahl	Drehzahl U/min	Kompresionsverhältnis ε	Eintritstemperatur °F	Eintritsdruck psia	Vorzündung °KW	Der vorhergesagte Klopfeintritt: Ende der Vorreaktion τ ms	Endgas Druck psia	Endgas Temperatur °R
1	1 200	6,18	160	11,3	7,5	10,8	147	1 870
2	400	3,56	160	14,5	11,3	29,8	286	1 415
3	600	3,56	160	13,1	10,0	22,9	385	1 380

Aus den veröffentlichten Versuchsergebnissen wurden die ersten drei unter sehr verschiedenen Arbeitsbedingungen durchgeführten herangezogen, wie aus Tabelle 1 ersichtlich ist.

In den Abb. 2, 3 und 4 sind die mit Gleichung (27) berechneten Kurven, sowie die Werte y/y_{cr} von Livengood und Wu bei verschiedenen relativen Zeiten wiedergegeben.

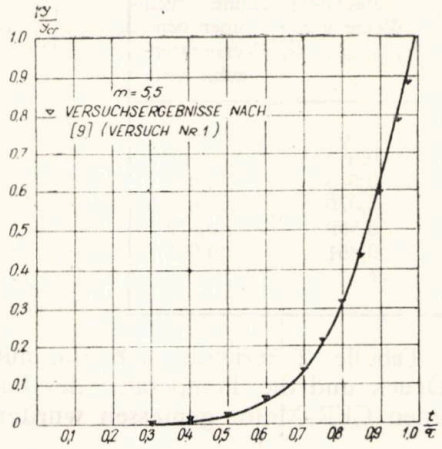


Abb. 2

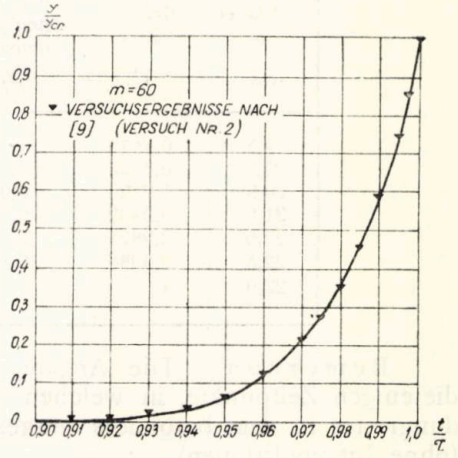


Abb. 3

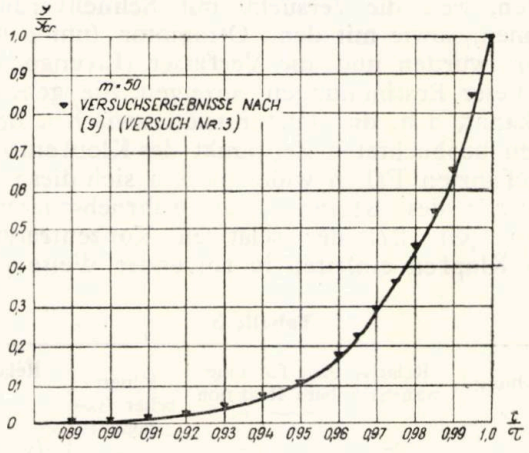


Abb. 4

Man kann eine sehr gute Übereinstimmung zwischen den berechneten und den aus Versuchen gewonnenen Ergebnissen feststellen. Die verschiedenen Arbeitsbedingungen äussern sich durch Beeinflussung der Werte des kinetischen Exponenten m wie auch des Zündverzugs τ.

Die Genauigkeit der Berechnung ist aus Tabelle 2 ersichtlich, in welcher die berechneten Werte y/y_{cr} mit den Versuchsergebnissen für den Fall *3* verglichen werden.

Tabelle 2

Zeitdauer t ms	Relative Zeit t/τ	Aus Versuchen gewonnenen Werte y/y_{cr}	Berechnete Werte y/y_{cr} mit $m = 50$	Die Abweichung gegenüber den Versuchsergebnissen
19,5	0,8515	0	0	—
20,2	0,8820	0,0025	0,0025	—
20,9	0,9126	0,028	0,015	−0,013
21,6	0,9432	0,089	0,076	−0,013
22,5	0,9824	0,497	0,509	+0,012
22,8	0,0956	0,846	0,851	+0,005
22,9	1	1	1	—

Bemerkung. Die Angaben in Tabelle 2 beziehen sich nur auf diejenigen Zeitpunkte, in welchen der Druck und die Temperatur des Ladungrestes in dem besonders ausgestattenen CFR-Motor gemessen wurden (ohne Interpolationen).

Wir heben hervor, dass wir nicht die Möglichkeit haben die Messfehler abzuschätzen, weil die Versuche mit Schnellverdichtungsmaschinen (um φ zu bestimmen) sowie mit dem Ottomotor (um p und T zu bestimmen) durchgeführt wurden und die Verfasser (Livengood und Wu) nicht die Genauigkeit dieser Bestimmungen anzeigen. Sie geben nur die Abweichung $\tau_k - \tau_e$ bekannt, d.h. die Differenzen zwischen den vorhergesagten (Gl. (32)) und den beobachteten Zeitpunkt des Klopfeintritts. Für die drei in Tabelle 1 angeführten Fällen widerspiegeln sich diese Abweichungen in der relativen Zeit t_0/τ des Beginns einer wahrnehmbaren Reaktion bzw. im Verhältnis y_0/y_{cr} (Gl. (27)) der relativen Konzentration der Zwischenprodukte, die das Klopfen einleiten in folgender Weise (s. Tabelle 3):

Tabelle 3

Ordnungszahl	Abweichung $\tau_k - \tau_e$ ms	Relative Zeit für eine wahrnehmbare Reaktion		Kinetischer Exponent	Relative Konzentration (Gl. (27))	
		t_0/τ_k	t_0/τ_e	m	$(y_0/y_{cr})_k$	$(y_0/y_{cr})_e$
1	−0,3	0,463	0,450	5,5	0,00900	0,00823
2	+0,2	0,906	0,912	60	0,00383	0,00550
3	+0,1	0,873	0,877	50	0,00160	0,00200

Aus den in Tabelle 3 ersichtlichen Angaben kann man folgende Schlüsse ziehen:

a) Die grössten Abweichungen kann man bei den Reaktionen von kurzer Dauer (mit kleineren kinetischen Exponenten) beobachten.

b) Alle Abweichungen widerspiegeln sich in den relativen Konzentrationswerten y_0/y_{cr}, die dem Zeitpunkt einer wahrnehmbaren Reaktion entsprechen oder in der entsprechenden relativen Zeit.

c) Die relativen Zeiten t_0/τ_k oder t_0/τ_e können ein bestimmendes Kriterium für das Kennzeichnen der Vorreaktion bilden, dessen Genauigkeit durch die Messfehler (φ, p, T, t, τ) beeinflusst ist.

d) Die relative Konzentration, die einer wahrnehmbaren Vorreaktion entspricht, ändert sich zwischen den Werten 0,0016...0,0090 von der Genauigkeit der Messungen abhängig, aber auf jeden Fall beziehen sich die Abweichungen auf sehr kleine Werte dieser Konzentrationen und beeinflussen in relativ kleinem Masse den Wert des kinetischen Exponenten m wie es aus Tabelle 4 ersichtlich ist.

Tabelle 4

t_0/τ	m	y_0	y_{cr}	y_0/y_{cr}
0,906	60	0,0024	0,6260	0,00383
0,906	59	0,0026	0,6259	0,00413
0,906	58	0,00289	0,6258	0,00462
0,906	54	0,0043	0,6255	0,00688

Wenn wir z.B. annehmen, dass bei einem konstant gehaltenen Verhältnis t_0/τ, die relative Konzentration in Zwischenprodukten y_0/y_{cr} sich bei zwei unter denselben Bedingungen ausgeführten aufeinanderfolgenden Versuchen durch Messfehler verdoppelt, so ändert sich der Exponent mit ungefähr 10%.

Die Berechnung des kinetischen Exponenten nach dem vorher gezeigten Verfahren verlangt die Kentniss einer zahlreichen Reihe von Versuchsdaten für denselben Fall, die Interpolation zwischen den Versuchsergebnissen und eine langdauernde Berechnung. Deswegen werden wir, gestützt auf das bestimmende Kriterium des relativen Zeitbeginns einer wahrnehmbarer Reaktion t_0/τ_k und auf die Forschungsergebnisse [9], [15], [16], einen Mittelwert von 0,005 für das Verhältnis (y_0/y_{cr}) annehmen, der gleichbleibend für alle folgenden Berechnungen des kinetischen Exponenten ist. Dieser Wert wurde von der möglichen Genauigkeit der Messungen, die den Anfang einer wahrnehmbaren Vorreaktion anzeigen, bestimmt.

In Tabelle 5 sind die Werte des kinetischen Exponenten m für verschiedene mit n-Heptan ausgeführten Versuche angegeben und in Tabelle 6 für ein Gemisch von n-Heptan und Isooktan (45 % n-Heptan + 55 % Isooktan) bei einem Kraftstoff — Luft — Verhältnis von 0,0665 nach [9].

Tabelle 5

Ordnungszahl	Drehzahl U/m	Verdichtungsverhältnis	Eintrittstemperatur des Gemisches °F	Eintrittsdruck des Gemisches psia	Vorzündung °KW	Beginn einer wahrnehmbarer Reaktion t_0 ms	Zeitpunkt des Klopfeintritts ms	Relative Zeit t_0/τ	Kinetischer Exponent m
4	900	6,18	160	10,3	10	5	14,2	0,3521	2,2
5	600	6,18	160	12,4	5	15	21	0,7142	16,1
6	400	3,56	160	14,6	10	23	26,2	0,8778	44,8
7	1 200	3,56	160	18,7	15	9	11,4	0,7894	23,3
8	900	3,56	160	19,2	10	13	15,6	0,8333	30,5

Tabelle 6

Ordnungszahl	Drehzahl U/m	Verdichtungsverhältnis	Eintrittstemperatur des Gemisches °F	Eintrittsdruk des Gemisches psia	Vorzündung °KW	Beginn einer wahrnehmbarer Reaktion t_0 ms	Zeitpunkt des Klopfeintritts ms	Relative Zeit t_0/τ	Kinetischer Exponent m
9	500	3,56	160	20,9	15	20,3	23,3	0,8712	40,5
10	600	5,08	160	17,5	6	18	22,5	0,8000	24,7
11	1 200	5,08	160	12,3	20,5	5,5	11,7	0,4700	6,7
12	600	5,08	160	14,5	13	16,5	20,4	0,8088	26,1
13	400	5,08	200	14,2	20	22,0	26,9	0,8178	27,6
14	900	5,08	180	14,4	17,5	9	13,0	0,6923	14,7
15	700	5,08	160	20,2	2	14	18,1	0,7734	21,4
16	1 200	5,08	160	14,2	25	6	10,3	0,5825	9,6

Aus diesen Versuchen ist es ersichtlich, dass der kinetische Exponent und der Zündverzug vollkommen die Entwicklungsweise der Vorreaktion kennzeichnen. Mit der Zeit, wenn wir über mehr Versuchsergebnisse verfügen werden, wird es möglich sein den Einfluss der Betriebsbedin-

gungen, der Kraftstoffart und Antiklopfmitteln usw. auf die Vorreaktion vorherzusagen. Im gegenwärtigen Forschungsstand ist es verfrüht, solche Einflüsse rechnerisch zu verfolgen.

V. Schlussfolgerungen

Das Modell der Klopferscheinung in Ottomotoren, über welches in dieser Arbeit berichtet wurde, fusst auf einem allgemeinen Reaktionsmechanismus während des Zündverzugs des Ladungsrestes und ist hauptsächlich dadurch gekennzeichnet, dass die Vorreaktion durch eine einstufige Kettenreaktion dargestellt ist, in welcher die erzeugten Zwischenprodukte eine kritische Konzentration erreichen, die die Reaktion beenden.

Die zur Berechnung vorgeschlagene Gleichung (27) wird von einer Reihe von Versuchsergebnissen bestätigt. Es gibt auch die Möglichkeit die relative Zeit einer wahrnehmbaren Reaktion als bestimmendes Kriterium, das die Entwiklungsweise der Vorreaktion bestimmt, zu gebrauchen.

Dieses Modell wird neue Schlussfolgerungen ermöglichen, die sich auf die Einflüsse verschiedener Bedingungen und ihre relative Bedeutung für die klopfende Verbrennung beziehen.

Eingegangen am 20 II 1968

Technische Hochschule Jassy,
Lehrstuhl für Wärmetechnik
und Wärmekraftmaschinen

LITERATURVERZEICHNIS

1. Haskell W. W. u. a., SAE Journal, 1966, **74**, *4*, S. 72–73.
2. Семенов Н. Н., Известия АН СССР, ОТН, 1953, *5*.
3. Зельдович Я. Б. u. a., *Теория детонаций*. M., 1955.
4. Соколик А. С., *Основы теорий детонаций в двигателях*. В сб. трудов *Сгорание в транспортных поршневых двигателях*. M., 1951.
5. Curry S., SAE Preprints, 1965, *647* B.
6. Achtenberg A., ATZ, 1956, **58**, *7*, S. 191–196.
7. Войнов А. Н., *Процессы сгорания в быстроходных поршневых двигателях*. M., 1965.
8. Соколик А. С., *Самовоспламенение, пламя и детонация в газах*. M., 1960.
9. Livengood J. C., Wu F. C., Fifth Int. Simp. Comb., 1955, pp. 347–355.
10. Mc Pherson u. a., Soc. Automat. Engrs. Preprint, 1958.
11. Karim G. A., J. Mech. Eng. Sci., 1964, **6**, pp. 353–361.
12. Spalding D. B., Sixth Int. Simp. Comb., 1956, p. 12.
13. Rifkin E. B. u. a., Soc. Automat. Engrs. Quart. Trans., 1957, **65**, p. 552.
14. Вибе И. И., *Новое о рабочем цикле двигателей*. M., 1962.
15. Glückstein M. E. u. a., SAE Trans. USA, 1961, **69**, pp. 529–546 and 546–553.
16. Combe A. u. a., Rev. Inst. franc. pétrole, 1957, **XII**, *3*, pp. 338–353.
17. Erdey-Gruz T. u. a., *Chimia fizică teoretică*. T. **II**, 1958, Ed. Tehn., Buc., p. 357, (Übersetzung aus der ungarischen Sprache).
18. Downs D. u. a., Phil. Trans. Roy. Soc. A., 1951, pp. 463–524.

ASUPRA UNUI MODEL AL DETONAȚIEI ÎN MOTOARELE CU APRINDERE PRIN SCÎNTEIE

(Rezumat)

Modelul fenomenului de detonație în m. a. s. prezentat în această lucrare se bazează pe un mecanism general de reacție pentru perioada de inducție a amestecului final, caracterizat în principal prin faptul că reacția de predetonație este o reacție în lanț într-o singură treaptă în decursul căreia rezultă produși intermediari și că sfîrșitul reacției este determinat de atingerea unei concentrații critice din aceşti produși.

Ecuația de calcul propusă (27) se verifică în mod foarte satisfăcător printr-o serie de date experimentale. Există și posibilitatea utilizării timpului relativ de începere a unei reacții sensibile ca un criteriu determinant pentru modul de desfășurare a reacției de predetonație.

Modelul propus va permite obținerea unor noi concluzii în legătură cu influențele diferiților factori și ponderea lor relativă în fenomenele de detonație.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

C. D. 621.2

DÉTERMINATION DES FORCES RÉSISTANTES, PRODUITES PAR LA VIBRATION TRANSVERSALE D'UN DISQUE QUI TOURNE DANS UN FLUIDE VISQUEUX

PAR

C. CIOBANU et PAUL MATEI

1. Introduction

Nombre d'études théoriques et expérimentales concernant le moment de frottement pour le disque tournant, dans un milieu fluide sans vibration, ont été déjà effectués par Th. v. Kármán, W. Z. Schmidt, G. Kempf, S. Goldstein, Schultz-Grunow, etc. [1]. Tout récemment Kômei-Watabe [2] a élargi le cadre de ces recherches concernant l'influence de la rugosité, en aboutissant à des conclusions importantes au point de vue pratique.

Dans ce qui suit, nous poursuivons nos études antérieures [3], [4] pour déceler par voie expérimentale les paramètres qui jouent un role prépondérant dans les phénomènes qui ont lieu dans les couches limites, en présence des parois solides soumis à des oscillations transversales entretenues.

2. Dispositif expérimental

On considère que le disque tourne dans une chambre close, et non pas dans un milieu fluide infini, parce que les roteurs des tuurbomachines, que l'on considère dans ces études, sont enfermés par leurs carcasses. Pour établir par voie expérimentale les aspects qualitatifs et quantitatifs des modifications du moment de frottement, engendré entre le disque et le milieu fluide, sous l'influence des oscillations transversales forcées, a été utilisée l'installation indiqueé dans la fig. 1. Cette installation permet: a) à modifier la vitesse angulaire ω de 0 à 300 rot/min et, en même temps, $\mathcal{R}e$ de 0 à $3,5.10^5$; b) à varier d'une façon continue la fréquence des oscil-

lations du disque entre 0 et 1 500 Hz et de l'amplitude de 0 à 1,5 mm ; c) à déterminer la variation du moment de frottement M (en %) — pour une certaine fréquence et une certaine vitesse angulaire, par comparaison avec celles du disque non-vibré ; d) à modifier le rapport s/R entre les limites 0,0095 et et 0,1.

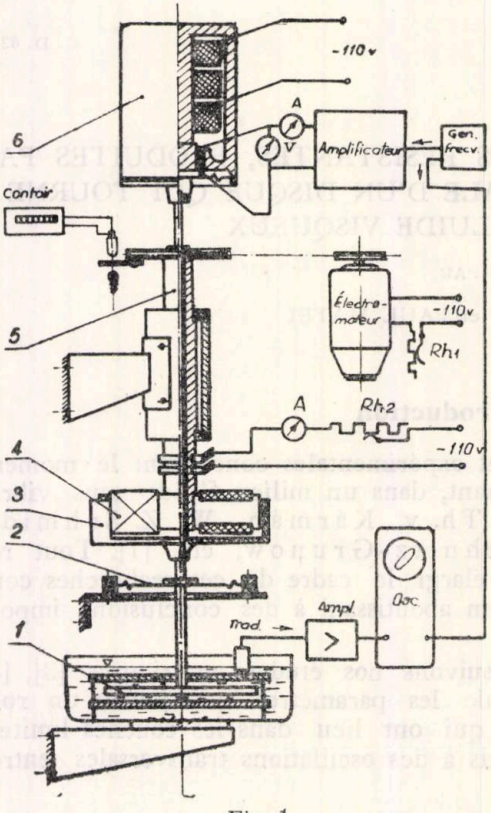


Fig. 1

Le disque tournant *1* (en PVC lisse), d'une épaisseur de 10 mm et ayant un rayon $R =$ $= 105$ mm, est placé entre deux autres disques, du même matériel, et tout l'ensemble est introduit dans une couve à parois de verre, remplie d'eau. L'axe du disque, qui traverse sans contact la douille du système d'entrainement *5*, est entrainée par un électromoteur à courant continu. Le guidage axial et radial du disque est réalisé à l'aide de deux membranes élastiques ; l'une se trouve dans le vibrateur *6* et l'autre est indiquée par *2* dans la fig. 1.

Les roulements, placés entre les membranes et l'axe, permettent à obtenir une oscillation axiale en même temps que le mouvement de rotation. Le couple moteur est transmis par voie électromagnétique. Le système d'entrainement comporte un double avantage. Le premier c'est qu'il permet la séparation des organes en vibration auprès des paliers et de cette façon, l'influence des vibrations sur le moment de frottement est éliminée. Le deuxième, c'est qu'il sert comme appareil pour la mesure de la variation du moment de frottement.

Le couple moteur varie proportionnellement avec le courant d'excitation de l'électroaimant. Si l'on modifie, le couple de frottement, à une excitation constante, il y a une tendance de déplacement de l'armature *3*, de l'electro-aimant. Ce déplacement est visible par un signal lumineux. Le courant d'excitation est modifié à l'aide d'un rhéostat, jusqu'au moment de la disparition du signal ; par conséquant l'électroaimant *4* et son armature s'orientent selon une direction axiale. Donc on peut écrire :

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{\Delta C}{C}, \tag{1}$$

où ΔI et ΔC sont les variations du courant et respectivement du couple.

Les oscillations entretenues sont produites par un vibrateur électromagnetique *6* dont la bobine mobile, alimenté par un amplificateur de 150 W, est à son tour connectée au générateur de fréquence. Le controle des vibrations du disque est réalisé par la méthode Lissajous, en utilisant un traducteur inductif. Le même traducteur sert pour la détermination des noeuds et des ventres de la surface du disque vibré à différentes fréquences.

La mesure de la vitesse angulaire (ω) du disque, a été effectuée avec un compteur électronique à photocellule ; ce système présente l'avantage d'exclure tout couple résistant.

3. Résultats expérimentaux

On a commencé les recherches avec le disque non vibré, pour pouvoir comparer les résultats acquis avec ceux obtenus par Schultz-Grunow [1] ; on a poursuivi, ensuite, les expériences avec le disque vibré.

Les auteurs cités ci-dessus attestent l'existence de la couche limite sur chaque face du disque, qui tourne „en chambre" (fig. 2), sans être vibré et aussi sur les parois de la carcasse, le sens des écoulements étant opposé, compte tenu de la force centrifuge agissante sur les couches limites du disque. Dans le domaine renfermé par le disque et la carcasse, l'écoulement a lieu à une vitesse radiale négligeable mais à une vitesse angulaire proche de $\omega/2$.

Pour $\mathcal{R}e < 3.10^5$ intervient le régime laminaire, mais pour $\mathcal{R}e > 3.10^5$ le régime est turbulent.

Dans le premier cas, on a :

$$2M = 1{,}334\,\mu R^4 \omega \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \tag{1}$$

et

$$C_M = \frac{2M}{(\rho/2)\,\omega^2 R^5} = 2{,}67\,\mathcal{R}e^{-1/2}, \tag{2}$$

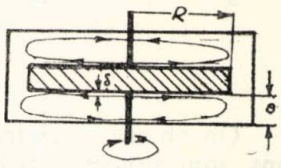


Fig. 2

où C_M est le coefficient du moment de frottement (M) et ν le coefficient de viscosité.

En régime turbulent :

$$C_M = 0{,}0622\,\mathcal{R}e^{-1/5}.$$

L'épaisseur de la couche limite peut être déterminée à l'aide de la relation $\delta \cong \sqrt{\nu/\omega}$ pour le régime laminaire, ou bien $\delta \cong \mathcal{R}e^{3/5}(\nu/\omega)^{1/5}$ pour le régime turbulent.

Compte tenu des résultats expérimentaux, obtenus dans les condition

de notre installation (fig. 1), ont été construites les courbes $C_M = f(\mathcal{R}e)$, pour $s/R = 0{,}0286$ à $s = 3\,\text{mm}$, $s/R = 0{,}02$ à $s = 2\,\text{mm}$ et $s/R = 0{,}0095$ à $s = 1\,\text{mm}$; $\mathcal{R}e_{\max} \simeq 180.10^3$ (régime laminaire, fig. 3).

Les valeurs déterminées pour $2M$ et C_M, à differentes vitesses ω, ont été considérées comme 100 % et représentées dans la fig. 3.

L'existence des deux couches-limites de chaque côté du disque est confirmée par la relation $\delta_{\max} \simeq \sqrt{\nu/\omega_{\min}}$, parce que $\delta_{\max} < 1\,\text{mm}$.

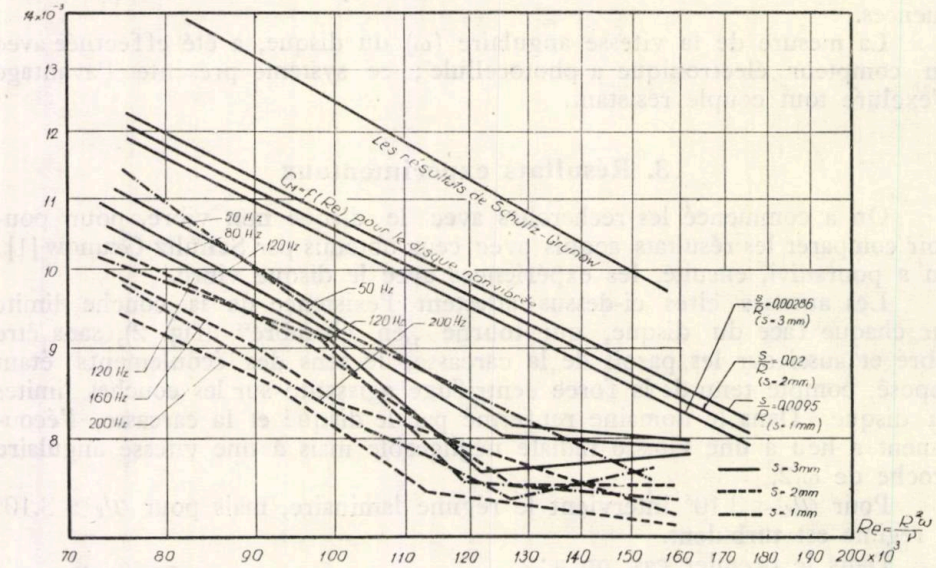


Fig. 3

On observe que les courbes $C_M = f(\mathcal{R}e)$, obtenues dans nos conditions, sont situées plus bas que celles obtenues par Schultz-Grunow.

Dans les cas où le disque a été soumis aux vibrations transversalles, à une fréquence de résonance de 50, 80, 120, 160, 180, 200 Hz, on a poursuivi l'influence de la vibration, pour diverses valeurs de la vitesse ω. Cette influence est évidente pour les valeurs de la fréquence mentionnées cidessus et négligeable pour les autres.

Avec la relation (1) sont déterminées les valeurs de $2M$ et C_M pour chaque fréquence, à l'aide des quelles sont tracées les courbes corespondantes $C'_M = f(\mathcal{R}e)$ (fig. 3).

Les courbes obtenues ne sont plus des droites; cet aspect va être confirmé par des experiments ultérieurs plus perfectionnés.

4. Conclusions

Dans la cas du disque soumis à des vibrations transversales, les valeurs du coefficient de frottement C_M diminuent de 6 à 16%, par rapport à celles du disque non vibré. Cette diminution est importante seulement pour les fréquences de résonance ; elle varie proportionnellement avec l'amplitude et avec la diminution du rapport s/R. Pour la même épaisseur s, c'est la fréquence le facteur prépondérant qui contribue à la diminution de C_M ; à la même fréquence, l'amplitude exerce une influence plus prononcée.

Institut Polytechnique de Jassy,
Chaire de Hydraulique et Machines hydrauliques

BIBLIOGRAPHIE

1. Schlichting H., *Grenzschicht-Theorie.* Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1965.
2. Watabe Kômei, *On the Frictional Resistance of Enclosed Rotating Disc of Various Surfaces.* Memoirs of the Faculty of Engineering, Nagoya University, Japan, 1966, **14**, *1—2*, pp. 81—94.
3. Ciobanu C., Matei P., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI (XV)**, *1—2*, pp. 335—338.
4. — Bul. Inst. polit. Iaşi, 1966, **XII (XVI)**, *3—4*, p. 353.

DETERMINAREA FORŢELOR REZISTENTE PRODUSE DE VIBRAŢIA TRANSVERSALĂ A UNUI DISC CARE SE ROTEŞTE ÎNTR-UN FLUID VÎSCOS

(Rezumat)

În cazul discului supus la vibraţii transversale valorile coeficientului de frecare scad cu 6...16% în raport cu cele ale discului nevibrat. Această scădere este importantă numai pentru frecvenţele de rezonanţă ; ea variază proporţional cu amplitudinea şi cu scăderea raportului s/R. Pentru o aceeaşi grosime s, frecvenţa reprezintă factorul preponderent care contribuie la scăderea lui C_M; la o aceeaşi frecvenţă amplitudinea exercită o influenţă mai pronunţată.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

Construcţii. Hidrotehnică

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том XIV (XVIII), вып. 1—2, 1968

Строительство. Гидротехника

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

Constructions. Hydrotechnics

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

C. Z. 624.04

UTILIZAREA TEORIEI GRAFELOR ÎN FORMULAREA MATRICIALĂ A METODEI MOMENTELOR ACTIVE

DE

ANTON ŞESAN, ADRIAN VULPE şi N. TUTOŞ

1. Folosirea calculatoarelor electronice permite rezolvarea practică a structurilor cu grad ridicat de nedeterminare statică, uşurinţa calculului depinzînd în mare măsură de metodă şi de modul de formulare a condiţiilor de echilibru elastic. Formularea matricială, prin concizia ei, asigură o sistematizare adecvată acestei tehnici şi permite evidenţierea influenţei diferiţilor parametri, în vederea optimizării soluţiei, precum şi a altor aspecte în general mai greu sesizabile.

Utilizarea teoriei grafelor ca instrument în formularea matricială a metodei deformaţiilor prezintă avantaje ce au fost evidenţiate [3] într-o variantă a lui L. Mann. Considerăm mai avantajoasă operarea cu momente de nod şi deplasare („metoda momentelor active" [1], [2]) în care necunoscutele sînt momente active de nod şi de lanţ (deplasare), definite ca momente încovoietoare care acţionînd nodul, respectiv lanţul cinematic, în sistemul de bază ales, produc rotirile reale. Metoda este generală şi nu diferenţiază necunoscutele de nod de cele de deplasare; permite utilizarea comodă a unor sisteme de bază cinematic - elastic nedeterminate [2] şi are drept consecinţă micşorarea corespunzătoare a numărului de necunoscute.

Prezentăm o formulare matricială a acestei metode, precedată în text de expunerea sumară a elementelor utilizate din teoria grafelor.

2. Fie dat un graf continuu oarecare cu n^* noduri şi p arce orientate (fig. 1). Se defineşte ca arbore al unui astfel de graf, subgraful continuu fără reţele care conţine toate cele n^* noduri (în fig. 1 marcat prin arce îngroşate). Numărul arcelor arborelui este dat de relaţia:

$$p_\alpha = n^* - 1 = n.$$

Arcul s_k este incident pozitiv, respectiv negativ în nodul n_i după cum n_i este origine sau terminaţie pentru s_k. Matricea N^*, de tip $[n^*, p]$, ai cărei coeficienţi n_{ik} au valoarea 1, — 1 sau 0 după cum s_k este incident pozitiv, negativ sau nu este incident cu n_i, este ma-

tricea nodală extinsă cu cele n^* linii dependente liniar. Prin eliminarea oricăreia dintre ele se obţine o matrice N de tip $[n, p]$ cu cele n linii independente liniar. Nodul n_0 ce corespunde liniei eliminate este nodul de relaţie (referinţă). În multe situaţii este util să se separe din matricea N o matrice N_+ a incidenţelor pozitive şi o matrice N_- a celor negative, astfel încît $N = N_+ + N_-$.

Matricea T, de tip $[n, p]$, ale cărei elemente t_{ij} au valoarea 1, -1 sau 0 după cum arcul s_j se găseşte pe drumul marcat de arbore şi are sensul de la n_0 la n_i, sens contrar, sau nu se găseşte pe acest drum, este matricea incidentală de arbore.

Cele m reţele ($m = p - n$) obţinute prin completarea arborelui cu cîte un arc al grafului formează un sistem fundamental liniar independent. Sensul lor este determinat de sensul arcelor de închidere. Relaţiile de incidenţă reţea - arc sînt exprimate prin matricea $\mathfrak{M}$ „incidentală de reţea", de tip $[m, p]$, ale cărei elemente m_{ij} au valoarea 1, -1 sau 0 după cum s_j aparţine reţelei m_i şi are sensul acesteia, sens contrar, sau nu-i aparţine. Printr-o numerotare corespunzătoare se pot separa în matricile N, T şi $\mathfrak{M}$, submatrici corespunzătoare arborelui.

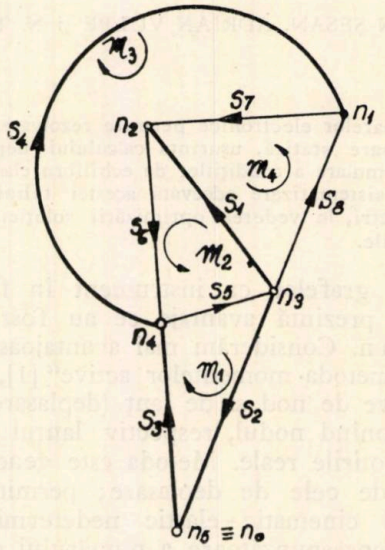


Fig. 1

$$N = \begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6 & s_7 & s_8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array},$$

$$N_+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_- = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$T=\begin{bmatrix}0&0&1&1&0&0&0&0\\1&-1&0&0&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\end{bmatrix},\quad \mathfrak{M}=\begin{bmatrix}0&1&1&0&1&0&0&0\\1&-1&-1&0&0&1&0&0\\-1&1&1&1&0&0&1&0\\0&-1&-1&-1&0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

Matricea nodală N şi de reţea $\mathfrak{M}$ sînt două formulări algebrice diferite ale aceleiaşi topologii. Potrivit teoremei Poincaré — Veblen — Alexander rezultă:

$$N\mathfrak{M}'=0.$$

Oricărei structuri statice i se poate asocia un graf continuu astfel încît nodurile structurii să fie reprezentate prin nodurile grafului, iar barele prin arce. Este convenabil ca nodul de referinţă n_0 să corespundă legăturilor la teren. Aspectul topologic al problemei este rezolvat prin numerotarea nodurilor, orientarea arcelor şi stabilirea arborelui. Exprimarea matricială a relaţiilor dintre diferitele elemente ale grafului (noduri, arce reţele etc.) face posibilă tratarea numerică a problemelor de topologie. Este creat astfel un limbaj prin care se pot comunica maşinii de calcul informaţii de această natură.

3. Aşa cum au fost definite momentele active [1], [2], momentele finale ale capetelor de bară se exprimă funcţie de acestea prin relaţiile:

$$M_{ik}=\mathfrak{M}_{ik}+r_{ik}M_i-\mu_{ik}M_k-\sum_{A,B}\nu'^{A}_{ik}M_A, \tag{1}$$

în care: M_i, M_k, M_A sînt momentele active de nod, respectiv deplasare; μ_{ik} — coeficient numeric egal cu momentul activ produs în nodul i de un moment unitar în nodul k pe sistemul de bază ales; ν'^{A}_{ik} — rigiditatea relativă corectată a barei ik în capătul i în raport cu lanţul A.

Convenim să notăm cu indicele „$0i$" sau „ti" elementele geometrice, statice şi elastice ale barei după cum se referă la originea respectiv terminaţia arcului corespondent s_i.

În această convenţie, cu notaţiile: M_0 şi M_t — vectori coloană ai momentelor M_{ik}; $\mathfrak{M}_0$ şi $\mathfrak{M}_t$ — vectori coloană ai momentelor $\mathfrak{M}_{ik}$; r_0 şi r_t — matrici diagonală ale rigidităţilor relative r_{ik}; μ_0 şi μ_t — matrici diagonală ale coeficienţilor μ_{ik}; ν_0 şi ν_t matrici de tip $[p,r]$ ale rigidităţilor relative ν'_{ik} (p bare, r deplasări elastice independente); M — vector coloană al momentelor active, relaţiile (1) devin:

$$\left[\begin{array}{c}M_0\\\hdashline M_t\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}\mathfrak{M}_0\\\hdashline \mathfrak{M}_t\end{array}\right]+\left[\begin{array}{c|c}r_0N'_+ + \mu_0N'_- & -\nu_0\\\hdashline -r_tN'_- - \mu_tN'_+ & -\nu_t\end{array}\right]M, \tag{2 a}$$

sau cu supravectorii:

$$M_s=\left[\begin{array}{c}M_0\\\hdashline M_t\end{array}\right],\quad \mathfrak{M}_s=\left[\begin{array}{c}\mathfrak{M}_0\\\hdashline \mathfrak{M}_t\end{array}\right]$$

şi supramatricea

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

$$R = \left[\begin{array}{c|c} r_0 N'_+ + \mu_0 N'_- & -\nu_0 \\ \hline -r_t N'_- - \mu_t N'_+ & -\nu_t \end{array}\right]$$

se obţine:

$$M_s = \mathfrak{M}_s + RM. \tag{2}$$

Rotirile de bară ψ_{jk} (ψ_{si}), necesare în calculul rigidităţilor ν'_{ik}, se determină din condiţiile de continuitate a deformaţiilor, exprimate prin:

$$\mathfrak{M} L_x \psi'_r = 0, \quad -\mathfrak{M} L_y \psi'_r = 0, \tag{3}$$

sistem de $2m$ ecuaţii algebrice liniare cu p necunoscute, în care $\psi_r = [\psi_{1r}, \psi_{2r}, \ldots, \psi_{pr}]$ este vectorul linie al rotirilor de bară, corespunzătoare lanţului r; L_x şi L_y — matrici diagonală de tip $[n, p]$ ale căror elemente sînt $pr_x l_{s_i}$ respectiv $pr_y l_{s_i}$, cu l_{s_i} lungimea barei ce corespunde arcului s_i. În fig. 2 este stabilită regula de semne pentru aceste proiecţii.

Introducînd pe rînd în (3), $p - 2m$ vectori unitari independenţi corespunzători necunoscutelor libere, se obţine un sistem fundamental de $p - 2m$ soluţii ψ_r corespunzătoare gradelor de libertate ale structurii.

În cele ce urmează notăm prin Φ matricea:

$$\Phi = \left[\begin{array}{c} \psi_1 \\ \hline \psi_2 \\ \hline \vdots \\ \hline \psi_r \end{array}\right], \quad (r = p - 2m).$$

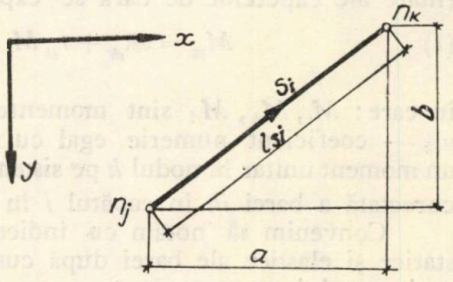


Fig. 2

Momentele încovoitoare M_{ik} satisfac condiţiile de echilibru pe nod, respectiv lanţuri cinematic - elastice, exprimate prin:

$$\sum_l M_{ik} + M_{ei} = 0, \tag{4}$$

unde M_{ei} — momentul acţiune exterioară în nodul respectiv:

$$\sum_r (M_{ik} + M_{ki}) \psi^r_{ik} + L^r_F = 0, \tag{5}$$

L^r_F fiind lucrul mecanic virtual al acţiunilor exterioare pe deplasările din lanţul r.

Cu M_e, vectorul coloană al momentelor M_{ei}, condiţiile (4) se pot exprima sub forma:

$$N_+ M_0 - N_- M_t + M_e = 0. \tag{4 a}$$

Pentru lucrul mecanic virtual L^r_F al acţiunilor exterioare rezultă în mod simplu expresia:

(4 b) $$L_F^r = \psi_r(-L_y T' F_x + L_x T' F_y),$$

în care prin F_x şi F_y s-au notat vectori coloană ai proiecţiilor forţelor F_i din noduri. Dacă barele sînt supuse unor acţiuni între noduri, componentele F_{xi} respectiv F_{yi} trebuie corectate cu proiecţiile reacţiunilor barelor ce concură în nodul n_i.

Cu:

$$L_F = \begin{bmatrix} L_F^1 \\ L_F^2 \\ \vdots \\ L_F \end{bmatrix} = \Phi(-L_y T' F_x + L_x T' F_y)$$

condiţiile (5), scrise pentru toate cele r lanţuri, se exprimă prin:

(5 a) $$\Phi M_0 + \Phi M_t + L_F = 0.$$

Condiţiile (4 a) şi (5 a) se pot grupa sub forma:

(7) $$\begin{bmatrix} N_+ & -N_- \\ -\Phi & -\Phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_e \\ M_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_e \\ -L_F \end{bmatrix} = 0,$$

sau introducînd notaţiile:

$$S = \begin{bmatrix} N_+ & N_- \\ \Phi & \Phi \end{bmatrix} \quad \text{şi} \quad L = \begin{vmatrix} M_e \\ -L_F \end{vmatrix}$$

se obţine

(8) $$SM_s + L = 0,$$

de unde ţinînd seama de (2) rezultă:

(9) $$S(\mathfrak{M}_s + RM) + L = 0,$$

adică exact sistemul de ecuaţii din metoda momentelor active. Soluţiile acesuia conduc, cu ajutorul relaţiei (2), la momentele încovoietoare M_{ik}.

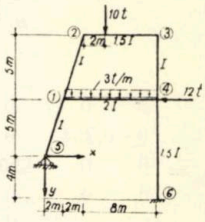


Fig. 3

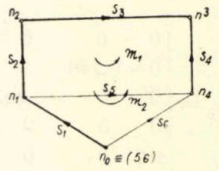


Fig. 4

4. Exemplu de calcul

În cele ce urmează este aplicat procedeul indicat mai sus la rezolvarea structurii statice din fig. 3. Graful asociat este reprezentat în fig. 4.

Prin analiza directă a structurii şi graf ului se stabilesc matricile:

$$N_+ = \begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \quad N_- = \begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{array},$$

$$\mathfrak{M} = \begin{matrix} \\ m_1 \\ m_2 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad T = \begin{matrix} \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} & & & & & \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix},$$

$$L_x = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad L_y = \begin{vmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9 \end{vmatrix},$$

$$F_x = \begin{matrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix}, \quad F_y = \begin{matrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 15 \\ 7{,}5 \\ 2{,}5 \\ 15 \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{M}_0 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -11{,}25 \\ 0 \\ -25 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{M}_t = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}375 \\ 0 \\ 25 \\ 0 \end{vmatrix},$$

$$r_0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}354 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}503 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}353 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}382 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad r_t = \begin{vmatrix} 0{,}264 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}497 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}483 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}517 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}353 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}294 \end{vmatrix},$$

$$\mu_0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}248 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}241 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}258 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}176 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}147 \end{vmatrix}, \quad \mu_t = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}177 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}251 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}176 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}191 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

care conţin totalitatea informaţiilor iniţiale necesare rezolvării complete a problemei.

Determinarea elementelor matricii Φ (rotirile de bară pentru cele $p - 2n = 2$ grade de libertate) se realizează prin rezolvarea sistemului (3), cu $\psi_r = (\psi_{1r}, \ldots, \psi_{6r})$.

Cu necunoscutele libere ψ_{4r} şi ψ_{6r} se introduc, pe rînd, vectorii unitari independenţi.

$$\begin{vmatrix} \psi_{4A} \\ \psi_{6A} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad \text{şi} \quad \begin{vmatrix} \psi_{4B} \\ \psi_{6B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Cele două soluţii, corespunzătoare celor două grade de libertate, sînt elemente ale matricii:

$$\Phi = \begin{bmatrix} -1{,}8 & 0 & -0{,}45 & 0 & -18 & 1 \\ 0 & 1 & -0{,}25 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Peste tot vom lucra cu rigidităţi convenţionale deduse din cele reale ca rezultat al împărţirii prin $4EI_0$.

Cu:

$$\bar{k} = \text{diag.}\,[0{,}138 \quad 0{,}555 \quad 0{,}561 \quad 0{,}6 \quad 0{,}6 \quad 0{,}400],$$

matricea rigidității barelor la deplasare, obținem:

$$k\Phi' = \begin{bmatrix} -0{,}248 & 0 \\ 0 & 0{,}555 \\ -0{,}252 & -0{,}140 \\ 0 & 0{,}6 \\ -0{,}108 & 0 \\ 0{,}400 & 0 \end{bmatrix},$$

cu elemente ale căror sume pe coloană corespund rigidităților lanțurilor A respectiv B. Sînt stabilite astfel matricile:

$$\nu_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0{,}214 \\ -0{,}125 & -0{,}054 \\ 0 & 0{,}231 \\ -0{,}053 & 0 \\ 0{,}198 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{și} \quad \nu_t = \begin{bmatrix} -0{,}236 & 0 \\ 0 & 0{,}214 \\ -0{,}125 & -0{,}054 \\ 0 & 0{,}231 \\ -0{,}053 & 0 \\ 0{,}198 & 0 \end{bmatrix}.$$

Relațiile (2) devin:

$$(2') \qquad \begin{bmatrix} M_{01} \\ M_{02} \\ M_{03} \\ M_{04} \\ M_{05} \\ M_{06} \\ \hdashline M_{t1} \\ M_{t2} \\ M_{t3} \\ M_{t4} \\ M_{t5} \\ M_{t6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathfrak{M}_{01} \\ \mathfrak{M}_{02} \\ \mathfrak{M}_{03} \\ \mathfrak{M}_{04} \\ \mathfrak{M}_{05} \\ \mathfrak{M}_{06} \\ \hdashline \mathfrak{M}_{t1} \\ \mathfrak{M}_{t2} \\ \mathfrak{M}_{t3} \\ \mathfrak{M}_{t4} \\ \mathfrak{M}_{t5} \\ \mathfrak{M}_{t6} \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{cccc:cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}354 & 0{,}248 & 0 & 0 & 0 & -0{,}214 \\ 0 & 0{,}503 & 0{,}241 & 0 & 0{,}125 & 0{,}054 \\ 0 & 0 & 0{,}258 & 0{,}353 & 0 & -0{,}231 \\ 0{,}382 & 0 & 0 & 0{,}176 & 0{,}053 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}147 & -0{,}198 & 0 \\ \hdashline 0{,}264 & 0 & 0 & 0 & 0{,}236 & 0 \\ -0{,}177 & 0{,}497 & 0 & 0 & 0 & -0{,}214 \\ 0 & -0{,}251 & 0{,}483 & 0 & 0{,}125 & 0{,}054 \\ 0 & 0 & 0{,}517 & -0{,}176 & 0 & -0{,}231 \\ -0{,}191 & 0 & 0 & 0{,}353 & 0{,}053 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}294 & -0{,}198 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_A \\ M_B \end{bmatrix}.$$

Lucrul mecanic virtual al acțiunilor exterioare în cele două situații de deplasare este dat de relația (6), care pentru exemplul ales conduce la rezultatul:

$$L_F = \begin{bmatrix} -99 \\ 15 \end{bmatrix}.$$

Cu aceste elemente expresiile (7) devin:

$$(7') \quad \left[\begin{array}{cccccc:cccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 \\ \hdashline 1{,}8 & 0 & 0{,}45 & 0 & 0{,}18 & -1 & 1{,}8 & 0 & 0{,}45 & 0 & 0{,}18 & -1 \\ 0 & -1 & 0{,}25 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0{,}25 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} M_{01} \\ M_{02} \\ M_{03} \\ M_{04} \\ M_{05} \\ M_{06} \\ \hdashline M_{t1} \\ M_{t2} \\ M_{t3} \\ M_{t4} \\ M_{t5} \\ M_{t6} \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ 99 \\ -15 \end{array}\right] = 0,$$

care împreună cu (2') conduce la sistemul de ecuaţii cu necunoscute momente active.

Prin transformări liniare succesive de forma:

$$M = Q_n M + P_n$$

rezolvarea sistemului de ecuaţii se conduce astfel încît să nu mai fie necesară inversarea matricii. Matricile Q_n şi P_n a celei de a n-a transformări se obţin direct din expresiile (2) şi (9) modificate corespunzător prin transformările precedente. Acest mod de soluţionare corespunde tehnicii de calcul la maşini electronice cifrice.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de statică şi rezistenţă

BIBLIOGRAFIE

1. Şesan A., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1958, **IV (VIII)**, *3—4*, pp. 353—358.
2. — Bul. Inst. polit. Iaşi, 1958, **IV (VIII)**, *3—4*, pp. 375—380.
3. Kloppel K., Reuschling D., Der Stahlbau, 1966, *8*.

UTILISATION DE LA THÉORIE DES GRAPHES DANS L'EXPRESSION MATRICÉALE DE LA MÉTHODE DES MOMENTS ACTIFS

(Résumé)

En employant les matrices d'incidence d'un graphe associé à une structure statique, on étudie les aspects topologiques [3] et on exprime les conditions générales d'équilibre d'une manière conforme à la technique de calcul des machines électroniques chiffriques.

On formule les équations d'équilibre de la méthode des moments actifs, dont les avantages sont mis en évidence dans cette Note.

Les conditions d'équilibre des moments finaux à l'extrémité de la barre, sur les noeuds et les „chaînes mécaniques" de la structure, exprimées par (8), permettent, à l'aide de (2), d'obtenir le système d'équations (9).

On obtient la solution du problème en utilisant le produit des transformations linéaires correspondantes.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

C. D. 539,4

CONTRIBUTIONS AU PROBLÈME DE LA COMPRESSION EXCENTRIQUE, ENVISAGEANT L'HYPOTHÈSE QUI CONSIDÈRE LES EFFORTS DE TRACTION ET L'HYPOTHÈSE QUI LES EN NÉGLIGE

PAR

M. DIACONU

I. Introduction

Dans le cas de la compression excentrique, et donc de la flexion composée, et supposant des éléments de construction à haute rigidité, confectionnés de matériaux homogènes qui suivent la loi de Hooke, et se trouvant en même temps soumis aux conditions de valabilité de l'hypothèse de Bernoulli, nous envisageons de présenter, dans ce qui suit, *quelques aspects intéressants au point de vue théorique et utiles dans les calculs de résistance, en faisant nombre de généralisations possibles, moins connues, ou pas encore signalées et qui sont parfois ignorées ou interprétées d'une manière erronée.* Nous n'allons nous rapporter qu'à la compression excentrique dans le domaine élastique, au cas des matériaux qui peuvent supporter, en bonnes conditions, les efforts de traction et de ceux doués d'une résistance réduite à la traction, qui habituellement sont négligés dans les calculs pratiques. L'analyse de cettes deux catégories de matériaux est effectuée dans les divers traités de spécialité, tout séparément, en déduisant des relations de calcul qui sont souvent considérées étant tout à fait différentes.

Nous présentons, ci-dessous, brièvement, quelques unes des expressions de la contrainte normale, en vue des références ulterieures.

II. Le matériel peut supporter des efforts de traction (il a les mêmes propriétés élastiques à la traction qu'à la compression)

a) Si l'on considère *la section de l'élément rapportée aux axes principales d'inertie* ZOY et le point d'application de la force normale N ayant les coordonnées Z_N et Y_N (fig. 1), la contrainte normale peut être déduite de la relation :

(1) $$\sigma = \frac{N}{A}\left(1 + \frac{Z_N Z}{i_y^2} + \frac{Y_N Y}{i_z^2}\right),$$

ou

(2) $$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y Y}{I_z} + \frac{M_y Z}{I_y},$$

où : I_z, I_y, i_z et i_y sont les moments d'inertie respectivement les rayons d'inertie de la section transversale ; M_z et M_y sont les moments fléchissants dus à la force normale N par rapport aux axes principales centrales de la section, considérées comme positives si elles étendent les fibres situées dans le premier cadran.

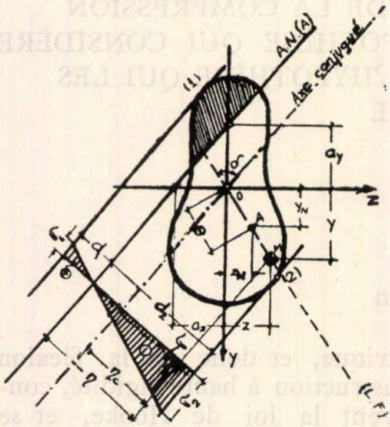


Fig. 1

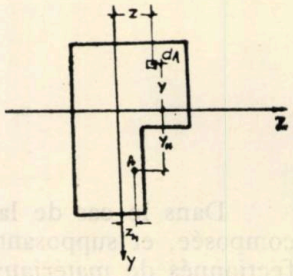


Fig. 2

b) Fonction de la distance η d'un point courant de la section par rapport à l'axe neutre, l'expression de la contrainte normale peut être exprimée à l'aide des expressions suivantes [5], [6] :

$$\sigma = \frac{N}{A}\sqrt{\frac{Z_N^2}{i_y^4} + \frac{Y_N^2}{i_z^4}}\,\eta \quad \text{ou} \quad \sigma = \frac{M}{I'}\eta .$$

Il y a encore d'autres possibilités d'établir la contrainte normale en fonction des limites du noyau central de la section transversale [8], [9], par rapport aux axes conjuguées [4], [1] ou à l'aide de procédés graphiques [1] et qui ne seront pas présentées dans cet ouvrage.

c) Dans le cas où *la section est rapportée à un système quelconque d'axes centrales orthogonales ZOY* (et qui ne sont pas des axes principales d'inertie) (fig. 2), les contraintes normales peuvent être déduites à l'aide des relations :

(3) $$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y I_z - M_z I_{zy}}{I_z I_y - I_{zy}^2} Z + \frac{M_z I_y - M_y I_{zy}}{I_z I_y - I_{zy}^2} Y,$$

ou

(4) $$\sigma = \frac{N}{A} + N\frac{I_z Z_N - I_{zy} Y_N}{I_z I_y - I_{zy}^2} Z + N\frac{I_y Y_N - I_{zy} Z_N}{I_z I_y - I_{zy}^2} Y.$$

III. Le matériel est doué d'une faible résistance à la traction

(on considère qu'il ne peut supporter que des efforts de compression).

Dans le cas des matériaux doués d'une faible résistance à la traction, qui, par conséquent, est négligée dans les calculs pratiques (comme par exemple la maçonnerie en briques, le béton, le terrain de fondation), ou lorsque cette résistance à la traction est inexistante (comme par exemple dans les sections d'appui sans liaison entre deux éléments de construction massifs : poteau appuyé sur fondation, semelle de fondation appuyée sur terrain, etc.), si le point d'application de la force normale est situé au-delà des limites du noyau central, mais à l'intérieur de la section transversale, les calculs de résistance devront être effectués en considérant seulement la *zone active.*

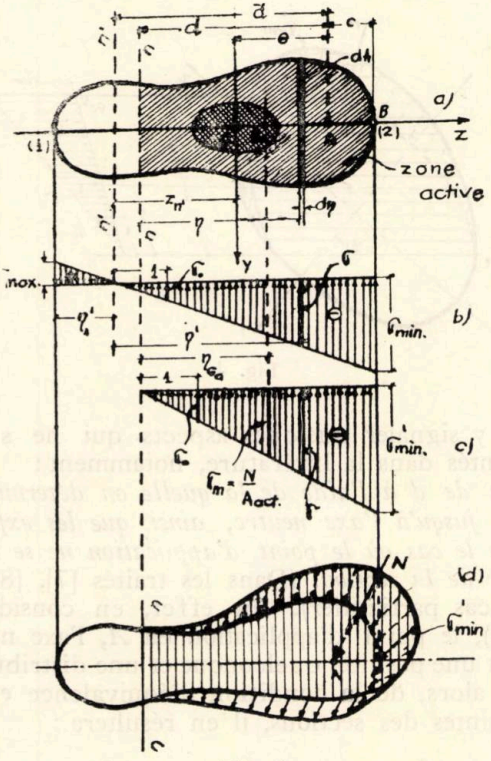


Fig. 3

Ainsi, si l'on considère une section avec une axe de symétrie qui contient le point d'application de la force (fig. 3), en raison des hypothèses admises, on établit que la distance du point d'application de la force par rapport avec l'axe neutre qui borne la zone active, est donnée par la relation :

(5) $$d = \frac{I_{an}}{S_{an}},$$

et les contraintes normales sont données par les expressions :

(6) $$\sigma = \frac{N}{S_{an}}\eta \qquad \text{ou} \quad (6') \qquad \sigma = \frac{Nd}{I_{an}}\eta = \frac{M_n}{I_{an}}\eta,$$

où : I_{an} et S_{an} sont les moments d'inertie et le moment statique de la zone active par rapport à l'axe neutre qui la délimite, η est la distance d'un point quelconque de la section par rapport à l'axe neutre ; M_n est le moment de la force normale N par rapport à l'axe neutre.

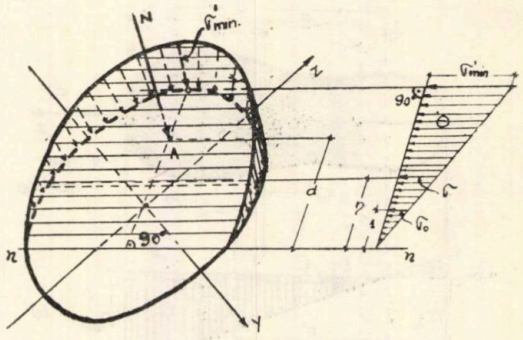


Fig. 4

Mais on doit y signaler quelques aspects qui ne sont pas toujours correctement présentés dans la littérature, notamment :

1. *L'expression de d à l'aide de la quelle on détermine la distance du point d'application jusqu'à l'axe neutre, ainsi que les expressions de* σ *sont valables aussi dans le cas où le point d'application ne se trouve pas sur une des axes de symétrie de la section.* (Dans les traités [7], [8] on ne présente, d'habitude, que le cas particulier). En effet, en considérant une section quelconque (fig. 4), le point d'application en A, l'axe neutre qui délimite la zone active ayant une position quelconque et une distribution linéaire de σ sur la zone active, alors, de la condition d'équivalence entre l'action extérieure et les contraintes des sections, il en résultera :

$$N = \int_{A_a} \sigma \, dA, \qquad M_n = Nd = \int_{A_a} \sigma\eta \, dA.$$

Si l'on considère $\sigma = \sigma_0 \eta$, où σ_0 est la contrainte, se trouvant à une distance égale à l'unité par rapport à l'axe neutre, on obtient les relations (5) et (6).

Mais en ce cas, à l'aide de la seule équation (5) on ne peut pas déterminer complètement la position de l'axe neutre [3], [11].

2. Dans le cas particulier lorsque le point d'application se trouve sur une axe de symétrie de la section, l'axe neutre est toujours perpendiculaire sur cette axe de symétrie — ce qui résulte de la condition d'équivalence entre le volume des contraintes et la force extérieure N — et donc, la distance d détermine, précisément, la position de l'axe neutre.

3. Dans toutes les situations lorsque la position du point d'application de la force est la même, la zone active est plus réduite que la zone comprimée de la section déterminée dans le cas des matériaux qui supportent aussi des efforts de traction. Donc, l'axe neutre qui délimite la zone active pénètre à l'intérieur de la zone comprimée (fig. 3), comme nous allons le démontrer dans le paragraphe qui suit.

4. L'axe neutre qui délimite la zone active, qui correspond à un point d'application, ne se déplace, en général, pas parallèlement à l'axe neutre propre pour la compression excentrique des matériaux qui supportent des tractions, que seulement dans des cas tout particuliers. Par exemple, lorsque la force est appliquée sur une axe de symétrie de la section, ou dans le cas de la section rectangulaire, ou le point d'application se trouve sur une diagonale ou sur le contour du noyau extérieur, les deux axes neutres seront toujours parallèles [3].

5. Nous considérons que le problème de déterminer l'état de tensions dans le cas des matériaux qui ne peuvent pas supporter des tractions — le problème de la section active — est la conséquence naturelle du problème de la compression excentrique pour les matériaux qui peuvent supporter des contraintes de traction ; de cette manière on peut établir des relations de calcul généralisées, ayant une validité pour les deux situations analysées (v. ci-dessous).

IV. Expressions généralisées de la contrainte normale à la compression excentrique dans le cas des matériaux qui résistent et de ceux considérés ne pouvant pas résister à la traction

Supposons, d'abord, *le cas particulier d'une section de forme quelconque mais ayant une axe de symétrie où l'on trouve le point d'application de la force normale* N (fig. 3 a). L'excentricité de la force dépasse les limites du noyau central et par conséquent on constate l'apparition des contraintes normales de traction, sur la section transversale.

Si le matériel supporte des tractions, on obtient le diagramme des contraintes normales présenté dans la fig. 3 b.

Lorsque le matériel ne peut pas supporter des tractions, le diagramme de σ sera celui présenté dans la fig. 3 c qui s'étend seulement sur la zone active de la section et qui est délimité toutefois par une autre axe neutre, déplacée par rapport au cas précédent.

Le sens du déplacement de l'axe neutre peut être déterminé assez facilement *en analysant d'une manière unitaire le problème de la compression excentrique* pour les deux catégories de matériaux.

La position de l'axe neutre, pour les matériaux qui supportent des tractions, est donnée par l'équation :

$$1 + \frac{Z_N Z}{i_y^2} = 0 \quad \text{ou} \quad Z_{n'} = a_z = -\frac{i_y^2}{Z_N}$$

et la distance à partir du point d'application par rapport à l'axe neutre sera:

$$d = e + |Z_{n'}| = e + \frac{i_y^2}{Z_N}.$$

Nous allons prouver dans ce qui suit que *cette distance peut être déterminée à l'aide d'une relation ayant la même forme* (5) *que dans le cas des matériaux qui ne peuvent pas supporter des tractions.*

En effet, considérant la fig. 3 b, il en résulte que :

$$\sigma = \sigma_0 \eta'.$$

De la condition que les efforts se trouvant sur la section entière, (la zone tendue (A_t) et comprimée (A_c)), doivent être équivalents avec l'action extérieure, on obtient :

$$\text{(a)} \qquad N = \int_A \sigma \, dA = \sigma_0 \int_{A_t} \eta' \, dA - \sigma_0 \int_{A_c} \eta' \, dA = \sigma_0 (S_t - S_c),$$

$$\text{(b)} \qquad M_{n'} = N\bar{d} = \int_A \sigma \eta' \, dA = \sigma_0 \int_{A_t} \eta'^2 \, dA + \sigma_0 \int_{A_c} \eta'^2 \, dA = \sigma_0 (I_t + I_c).$$

Nous avons désigné par S_t, I_t, S_c, I_c, le moment d'inertie et respectivement le moment statique de la partie de la section tendue ou comprimée par rapport à l'axe neutre qui sépare la section en ces deux zones.

Puisque l'on a $I_t + I_c = I_{n'}$, $S_t - S_c = S_{n'}$, il en résulte que

$$\text{(c)} \qquad \bar{d} = \frac{M_{n'}}{N} = \frac{I_{n'}}{S_{n'}},$$

où $I_{n'}$ et $S_{n'}$ sont respectivement, le moment d'inertie et le moment statique de la section entière, par rapport à l'axe neutre.

Si l'on considère σ_0 déterminé par (a) ou (b), l'expression de σ devient:

$$(7) \qquad \sigma = \frac{N\eta'}{S_{n'}} \qquad \text{ou} \qquad (7') \qquad \sigma = \frac{N\bar{d}}{I_{n'}} \eta' = \frac{M_{n'}}{I_{n'}} \eta'.$$

Il en résulte que *pour la compression excentrique, la position de l'axe neutre et la contrainte normale, peuvent être déterminées par des relations uniques, tant au cas des matériaux qui supportent des tractions qu'à celui des matériaux qui n'y supportent pas des tractions :*

$$(8) \qquad d = \frac{I_n}{S_n}, \qquad (9) \qquad \sigma = \frac{N\eta}{S_n} = \frac{M_n}{I_n}\eta .$$

Dans ces relations, les caractéristiques géométriques (I_n, S_n) se rapportent à la partie active de la section transversale notamment : lorsque le matériel supporte la traction, on considère I_n et S_n de la section entière, et lorsque le matériel ne supporte que des compressions on considère seulement les valeurs de I_n et S_n de la zone active.

Si nous désignons par η_1' et η_2' les distances des points les plus éloignés de la section transversale par rapport à l'axe neutre, nous pourrons calculer les contraintes normales maximum et minimum, dans le cas des matériaux qui supportent des tractions, utilisant les relations :

$$(11) \qquad \sigma_{max} = \sigma_1 = \frac{M_{n'}\eta_1'}{I_{n'}}, \qquad \sigma_{min} = \sigma_2 = \frac{M_{n'}\eta_2'}{I_{n'}},$$

ou

$$(12) \qquad \sigma_{max} = \sigma_1 = \frac{N\eta_1'}{S_{n'}}, \qquad \sigma_{min} = \sigma_2 = \frac{N\eta_2'}{S_{n'}}.$$

Les signes algébriques des relations y résultent facilement de l'étude physique du phénomène.

Si l'on désigne par $W_{n'_1} = I_{n'}/\eta_1'$, $W_{n'_2} = I_{n'}/\eta_2'$, les modules de résistance ar rapport à la fibre la plus étendue ou la plus comprimée, et par $A_{n'_1} = S_{n'}/\eta_1'$, $A_{n'_2} = S_{n'}/\eta_2'$, la section réduite à la traction et respectivement à la compression, les relations (10) et (11) permettent à obtenir des *formes généralisées* analogues à celles obtenues lors de la sollicitation de flexion simple ou de compression centrique :

$$(12) \qquad \sigma_{max} = \sigma_1 = \frac{M_{n'}}{W_{n'_1}}, \qquad \sigma_{min} = \sigma_2 = \frac{M_{n'}}{W_{n'_2}},$$

ou

$$(13) \qquad \sigma_{max} = \sigma_1 = \frac{N}{A_{n'_1}}, \qquad \sigma_{min} = \sigma_2 = \frac{N}{A_{n'_2}}.$$

Les relations établies gardent leur validité même dans le cas de la compression excentrique du matériel qui ne peut pas supporter des efforts de traction, en observant que seulement les contraintes de compression $\sigma_{min} = \sigma_2$ sont différentes de zero, et seule la zone active de la section y travaille, de sorte que W_{n2} et A_{n2} se réfèrent précisément à cette zone-ci.

Les formules (12) et (13) ne sont pas seulement générales, valables tant pour la compression excentrique de ces deux catégories de matériaux que pour la flexion simple ou oblique) mais elles sont assez simples, car elles sont facile à utiliser dans la pratique du calcul.

En ce qui concerne le déplacement de l'axe neutre, dans les cas où seulement une partie de la section est active, compte tenu que :

$$\frac{I_{n'}}{S_{n'}} = \frac{I_t + I_c}{S_t - S_c} > \frac{I_{an}}{S_{an}},$$

parce que $I_t + I_c \geqslant I_{an}$ et $S_t - S_c < S_{an}$, il en résulte que $d < \bar{d}$.

Donc l'axe neutre qui délimite la zone active est déplacée par rapport à l'axe neutre déterminée pour le cas des matériaux qui supportent des tractions, vers l'intérieur de la zone comprimée ($A_a < A_c$). Dans le seul cas ou l'axe neutre est tangente au contour de la section transversale, nous obtenons $A_{act} = A_c$ et $d = \bar{d}$, car la section transversale entière est comprimée et par conséquent elle est active.

Toutes les relations établies ci-dessus ((8), (9), (12), (13)) maintiennent leur validité même lorsque la *forme de la section transversale est quelconque et le point d'application ne se trouve pas sur une axe de symétrie, ayant une position arbitraire.*

Dans ce cas l'axe neutre qui délimite la section active ne peut pas être déterminée seulement par l'équation (8). À ce sujet nous en reviendrons dans ce qui suit.

Nous montrerons que *les relations établies au cas de la compression excentrique des matériaux qui supportent des contraintes de traction, peuvent être généralisées avec quelques précisions suplémentaires même au cas des matériaux qui ne peuvent pas supporter des contraintes de traction.*

Cette fois-ci nous abordons le problème dans le cas général, lorsque la section transversale a une forme quelconque et la position du point d'application de la force de compression est, elle-aussi, quelconque $A\ (Z_N, Y_N)$.

Rapportant la section totale au système d'axes centrales principales d'inertie et considérant que seulement la zone active de la section transversale (A_a) este celle qui travaille, les conditions d'équivalence entre l'action extérieure et les contraintes se trouvant sur la section transversale, peuvent être exprimées par :

$$(14) \qquad N = \int_{A_a} \sigma \, dA, \quad M_z = NY_n = \int_{A_a} \sigma Y \, dA, \quad M_y = NZ_N = \int_{A_a} \sigma Z \, dA.$$

Compte tenu que les contraintes normales varient d'une façon linéaire sur la section active, elles peuvent être exprimées par la relation :

$$(15) \qquad \sigma = AY + BZ + C.$$

En introduisant (14) dans la relation (15) et compte tenu de la signification des intégrales obtenues, on arrive au système d'équations :

$$(16)\qquad \begin{cases} AS_{za} + BS_{ya} + CA_a = N, \\ AI_{zya} + BI_{ya} + CS_{ya} = NZ_N = M_y, \\ AI_{za} + BI_{zya} + CS_{za} = NY_N = M_z, \end{cases}$$

où : S_{za}, S_{ya}, I_{za}, I_{ya} et I_{zya} sont les moments statiques, les moments d'inertie axiales et centrifugales de la section totale, A, B, C sont des coefficients indéterminés.

Pour déterminer les coefficients A, B, C, qui une fois connus, précisent l'expression de σ, on résoud le système d'équations (16).

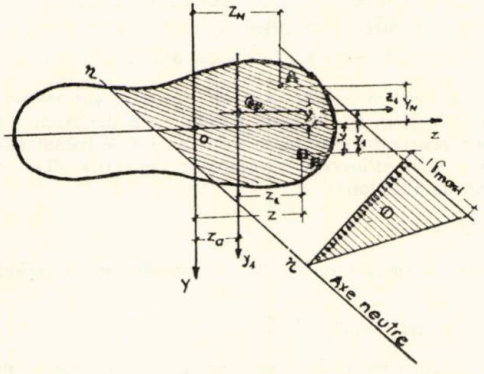


Fig. 5

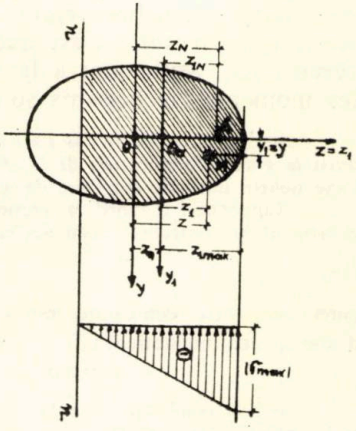


Fig. 6

Si nous rapportons la section active (fig. 5) à un système d'axes $Z_1 G_a Y_1$, parallèles à ZOY, ayant l'origine dans son centre de gravité, et si nous mettons en évidence les égalités suivantes :

$$\frac{S_{za}^2}{A_a} = Y_o S_{za} = Y_a^2 A_a, \quad I_{zya} - \frac{S_{ya} S_{za}}{A_a} = I_{z_1 y_1},$$

$$\frac{S_{ya} S_{za}}{A_a} = Z_1 S_{za} = Z_a Y_a A_a, \quad I_{ya} - \frac{S_{ya}^2}{A_a} = I_{ya} - Z_a^2 A = I_{y_1}, \quad I_{za} - \frac{S_{za}^2}{A_a} = I_{z_1},$$

où Z_a, Y_a sont les coordonnées du centre de gravité de la zone active, I_{y_1}, I_{z_1}, $I_{z_1 y_1}$ sont les moments d'inertie axiaux et centrifugaux de la zone active par rapport à ses axes centrales, on obtient après une série de transformations :

$$A = \frac{M_{y_1} I_{z_1 y_1} - M_{z_1} I_{y_1}}{I_{z_1 y_1}^2 - I_{z_1} I_{y_1}}, \quad B = \frac{1}{I_{z_1 y_1}} \cdot \frac{M_{z_1} I_{z_1 y_1}^2 - M_{y_1} I_{z_1 y_1} I_{z_1}}{I_{z_1 y_1}^2 - I_{z_1} I_{y_1}},$$

$$C = \frac{N}{A_a} - \frac{M_{y_1} I_{z_1 y_1} - M_{z_1} I_{y_1}}{I_{z_1 y_1}^2 - I_{z_1} I_{y_1}} Y_a - \frac{1}{I_{z_1 y_1}} \cdot \frac{M_{z_1} I_{z_1 y_1}^2 - M_{y_1} I_{z_1 y_1} I_{z_1}}{I_{z_1 y_1}^2 - I_{z_1} I_{y_1}}.$$

Si l'on remplace les valeurs de $A, B, C,$ dans la relation (15), en considérant que $Y = Y_a + Y_1$, $Z = Z_a + Z_1$ et en effectuant nombre de simplifications, l'expression de σ prend la forme:

$$(17) \qquad \sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_{y_1} I_{z_1 y_1} - M_{z_1} I_{y_1}}{I^2_{z_1 y_1} - I_{y_1} I_{z_1}} Y_1 + \frac{M_{z_1} I_{z_1 y_1} - M_{y_1} I_{z_1}}{I^2_{z_1 y_1} - I_{y_1} I_{z_1}} Z_1 .$$

On observe que (17) coïncide avec la formule (3) de la contrainte normal au cas de la compression excentrique lorsque la section transversale est rapportée à un système d'axes centrales orthogonales, mais qui n'y sont point en même temps des axes principales d'inertie. La seule différence qui y resulte c'est que toutes les caractéristiques géometriques se réfèrent, ici, seulement à la zone active, à son système d'axes centrales, et les moments fléchissants sont considérés par rapport à ces axes.

Si l'on envisage *le cas particulier lorsque la section a une axe de symétrie qui contient aussi le point d'application de la force normale* N (fig. 6) la zone active sera délimitée par l'axe neutre normale sur l'axe de symétrie et son centre de gravité se trouvera sur la même axe.

Rapportant d'abord la section totale aux axes d'inertie principales centrales ZOY et exprimant la contrainte normale, en ce cas, par la relation:

$$(18) \qquad \sigma = AZ + C,$$

parce que cette contrainte est constante sur la direction Y, et envisageant les relations d'équivalence, on obtient:

$$N = AS_{ya} + CA_a , \quad NZ_N = M_y = AI_{ya} + CS_{ya} .$$

Si l'on considère pour la zone active de la section transversale un système d'axes centrales principales $Z_1 G_a Y_1$, avec l'origine dans son centre de gravité, on aura $Z = Z_a + Z_1$, et en effectuant les mêmes transformations tout comme dans le cas général, finalement on obtient:

$$(19) \qquad \sigma = \frac{N}{A_a} + \frac{M_{y_1}}{I_{y_1}} Z_1 \qquad \text{et} \qquad (19') \qquad |\sigma_{\max}| = \frac{N}{A_a} + \frac{M_{y_1}}{I_{y_1}} Z_{1\max} ,$$

où $M_{y_1} = N(Z_N - Z_a) = NZ_{1N}$.

Les relations (19) peuvent être écrites sous la forme:

$$(20) \qquad \sigma = \frac{N}{A_a}\left(1 + \frac{Z_{1N} Z_1}{i^2_{y_1}}\right) \qquad \text{et} \qquad (20') \qquad |\sigma_{\max}| = \frac{N}{A_a}\left(1 + \frac{Z_{1N} Z_{1\max}}{i^2_{y_1}}\right).$$

Nous avons obtenu, donc, les mêmes formules, déjà connues dans le cas de la compression excentrique des matériaux qui peuvent supporter des contraintes de traction.

En conclusion, *les contraintes unitaires normales peuvent être déterminées dans le cas des matériaux qui ne peuvent pas supporter des contraintes de traction, par les mêmes relations établies lors de la compression excentrique des matériaux qui peuvent supporter des contraintes de traction*, avec les remarques suivantes:

a) Les caractéristiques géometriques se rapportent seulement à la zone active.

b) Dans le cas de la section active rapportée à un système quelconque d'axe centrales orthogonales, on pourra employer la relation (17).

c) Dans le cas de la section active rapportée à un système d'axes centrales, qui sont en même temps des axes principales d'inertie pour la zone active, on pourra utiliser les relations habituelles pour la compression excentrique ((1) et (2) ou (19)).

Leur emploi pour le calcul de résistance est assez commode, lorsqu'on connait la position de l'axe neutre qui délimite la zone active, et la détermination des caractéristiques géometriques par rapport à ses axes centrales est sufisamment simple.

La détermination de l'axe neutre dans le cas des sections transversales avec une axe de symétrie qui contient le point d'application, peut être effectuée par voie analytique, d'une manière assez simple, en utilisant la relation (8) qui conduit tout au plus à la résolution d'une équation de III-ème degré, pour connaître la valeur de d, ou par voie graphique, par la méthode de Mohr [2], [7]. L'axe neutre peut être déterminée aussi à l'aide d'autres relations ($\sigma = 0$), mais l'expression des caractéristiques géometriques de la section active, en fonction des paramètres qui caractérisent la position de l'axe neutre est, souvent, assez difficile.

Lorsque la position du point d'application est arbitraire, la détermination de l'axe neutre est trés difficile.

Par voie analytique, le problème pourrait être résolu, comme il suit:

Soit une axe neutre dont la position approximative est précisée par deux paramètres.

Si l'on considère que la contrainte normale varie d'une manière linéaire, proportionellement par rapport à la distance à l'axe neutre ($\sigma = \sigma_0 \eta$), on peut établir les équations d'équivalence (ou d'équilibre):

$$(21)\qquad \begin{cases} N = \int_{A_a} \sigma_0 \eta \, \mathrm{d}A = \sigma_0 S_{an}\,, \quad NY_N = \int \sigma_0 \, \eta Y \mathrm{d}A = \sigma_0 I_{an.z}\,, \\ NZ_N = \int_{A_a} \sigma_0 \, \eta Z \, \mathrm{d}A = \sigma_0 I_{an.y}\,. \end{cases}$$

Il en résulte les deux équations suivantes:

$$(22)\qquad Y_N = \frac{I_{an.z}}{S_{an}}, \quad Z_N = \frac{I_{an.y}}{S_{an}},$$

qui, une fois résolues, fournissent les valeurs des paramètres qui précisent la position de l'axe neutre, pour une certaine position du point d'aplication. Le plus souvent il est très difficile à expliciter les caractéristiques géométriques appartenant à ces relations et surtout la résolution du système constitué par les deux équations.

On peut employer aussi une *méthode d'approximations succésives* [2] lorsqu'il n'existe point d'autres possibilités.

Dans le cas de la section transversale rectangulaire nous avons établi une série de propriétés qui aident à déterminer la position de l'axe neutre [3], mais que nous ne pouvons pas présenter dans cet article. En nous rapportant aux considérations précedentes il en résulte que le problème de la compression excentrique doit être considéré unitaire, tant au cas des matériaux qui supportent des tractions, qu'au cas des matériaux qui ne les en supportent pas.

Les relations de calcul qui se réfèrent aux contraintes ont la même forme dans les deux situations, et doivent tenir compte seulement de la signification physique, concrète, des termes qui y interviennent, comme l'on a déjà prouvé.

Le choix d'une de ces relations dépendra de la facilité que chacune d'elle pourra nous offrir dans les calculs pratiques.

Institut Polytechnique de Jassy,
Chaire de Statique et de Résistance

BIBLIOGRAPHIE

1. Bochmann F., *Statik im Bauwesen.* Bd. **II**, *Festigkeitslehre.* Fachbuchverlag, Leipzig, 1958.
2. Courbon J., *Cours de résistance des matériaux.* Dunod, Paris, 1964.
3. Diaconu M., *Unele aspecte ale determinării stării de tensiuni la compresiunea excentrică atunci cînd rezistența la întindere a materialului este luată în considerare sau neglijată.* Comunicare în ses. şt. a Inst. polit. din Iaşi, 28—30 sept. 1967.
4. Дрейер Г., *Учение о прочности и упругости.* Изд. Машиностооение, М., 1964.
5. Dreyfuss Edm., *Leçons sur la résistance des matériaux.* T. **II**, Editions Eyrolles, Paris 1956.
6. Гастев В. А., *Краткий курс сопротивления материалов.* Физматгиз, М., 1959.
7. Hidgon A., Ohlsen H. Ed., Stiles B. W., *Mechanics of Materials.* John Wiley & Sons Inc., New York, London, 1960.
8. *** *Manual pentru calculul construcțiilor.* Ed. Tehn., Buc., 1959.
9. Massonnet Ch., *Résistance des matériaux.* Dunod, Paris, 1962.
10. Rüdiger D., Kneschke A., *Technische Mechanik.* Bd. 2, *Festigkeitslehre.* B. G. Teubner Verlaggesellschaft, Leipzig, 1962.
11. Stan D. A., *Rezistența materialelor.* EDP, Buc., 1967.

CONTRIBUȚII LA PROBLEMA COMPRESIUNII EXCENTRICE CÎND EFORTURILE DE ÎNTINDERE SÎNT LUATE ÎN CONSIDERARE SAU SÎNT NEGLIJATE

(Rezumat)

Se arată că problema compresiunii excentrice, în cazul materialelor care pot prelua eforturi de întindere cît şi al acelora ce au o rezistență redusă la întindere—care obişnuit se neglijează în calculele practice—trebuie privită unitar, demonstrîndu-se că atît eforturile unitare normale cît şi poziția axei neutre pot fi determinate, în ambele cazuri, cu aceleaşi expresii analitice, generalizate.

Caracteristicile geometrice ale secțiunii care intervin în relațiile de calcul, vor trebui luate în considerație în mod corespunzător, pentru întreaga secțiune sau numai pentru zona activă, în funcție de material.

S-a analizat atît cazul particular cînd punctul de aplicație al forței axiale N se găseşte pe o axă de simetrie a secțiunii, cît şi cazul general, cînd punctul de aplicație are o poziție oarecare.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2. 1968

D. K. 539.413

BESTIMMUNG DER NORMALSPANNUNGEN BEI SCHIEFER BIEGUNG GEKRÜMTER STÄBE

VON

I. GOIA

Mitteilung an der wissenschaftlichen Tagung der Technischen Hochschule, Galatzi, 19—20. Mai 1967

1. Einleitung

Die ersten Versuche, Spannungen in eben gekrümmten Stäben zu bestimmen, wurden von M. Bresse (1864) und E. Winkler (1858) [2] unternommen.

Von Versuchen an Kettenringen ausgehend, bestimmte Winkler auf Grund der Voraussetzungen von Euler-Bernoulli, den Ausdruck der Spannungen bei eben gekrümmten Stäben.

Später, im Jahre 1881, löste H. Golovin, unter Benützung der Spannungsfunktion von Airy, das Problem der Spannungen bei eben gekrümmten Stäben, im Falle einer reinen Biegung. Dieses war der erste gelungene Versuch das Spannungsproblem gekrümmter Stäbe mit Hilfe der Elastizitätstheorie zu lösen.

In einigen neuen Arbeiten wurde versucht die Formeln der schiefen Biegung zu verallgemeinern [3]...[5].

In diesen Arbeiten ging man von der Voraussetzung aus, dass die Mittellinie eine ebene Kurve sei, in deren Ebene auch die Symmetrieachse des Querschnittes liege. Ebenfalls setzte man in der Symmetrieebene wirkende äusere Kräfte, so wie einen konstanten Stabquerschnitt, voraus.

Nimmt man an, der Stab sei durch ein reines Biegemoment belastet, so gelangt man unter Anwendung der Voraussetzungen von Euler-Bernoulli (Querschnitte bleiben eben und senkrecht zur durchgebogenen Stabachse) zur durchaus nicht unbekannten Formel von Winkler-Bach

$$\sigma = -\frac{M}{RA} + \frac{M}{RKA} \cdot \frac{y}{R-y}, \tag{1}$$

wo: M — Biegemoment, A — Stabquerschnitt, R — Krümmungsradius der Stabachse, y — Abstand des angenommenen Elementes zu der Stabachse, paralell mit der Symmetrieachse gemessen;

$$K = -\frac{1}{A}\int \frac{y}{R-y}\,\mathrm{d}H. \tag{2}$$

2. Schiefe Biegung gekrümmter Stäbe

Nachfolgend wird versucht die Formel von Winkler-Bach für den Fall wenn die y-Achse (Abb. 1) nicht Symmetrieachse ist zu verallgemeinen.

Es wurden folgende Voraussetzungen gemacht:

a) Die Mittellinie des gekrümmten Stabes ist eine ebene Kurve.

b) Der Stab hat einen beliebigen, aber konstanten Querschnitt.

c) Der Stabquerschnitt wird nur durch ein reines Biegemoment belastet, dessen Vektor senkrecht auf die Ebene der Mittellinie fällt, und folglich Verdrehungserscheinungen ausschliesst.

d) Der Querschnitt wird auf ein Achsensystem ZOY bezogen wobei die Y-Achse in der Ebene der Mittellinie enthalten ist, und der Schwerpunkt mit dem Ursprung des Achsensystems übereinstimmt.

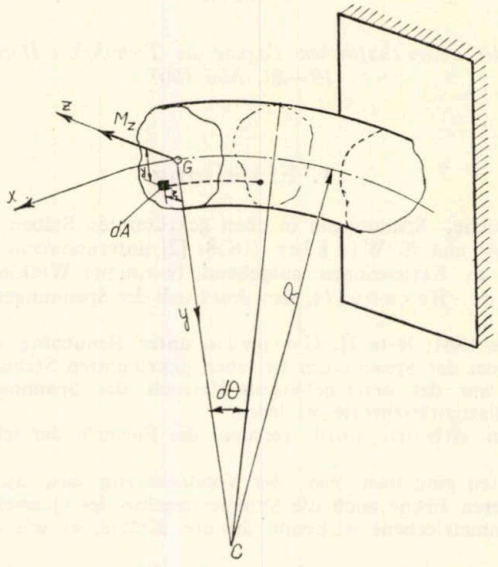


Fig. 1

e) Es wird die Gültigkeit der Voraussetzungen von Euler-Bernoulli angenommen. Die Verlängerung einer beliebigen Schicht wird durch folgenden Ausdruck widergegeben:

$$l = l_0 + By + Cz, \tag{3}$$

wo l_0, B, C differentiale Grössen sind und l_0 die Verlängerung der mittleren Schicht darstellt.

Wird die Dehnung mit ε^* bezeichnet so ist $l_0 = \varepsilon^* R\,\mathrm{d}\theta$.
Die Anfangslänge einer beliebigen Schicht ist:

$$L = (R - y)\,\mathrm{d}\theta, \tag{4}$$

die Dehnung derselben

$$\varepsilon = \frac{l}{L} = \frac{l_0 + By + Cz}{(R - y)\mathrm{d}\theta}. \tag{5}$$

Setzt man die untenstehenden Bezeichnungen ein:

$$B^* = \frac{B}{\mathrm{d}\theta}, \tag{6}$$

$$C^* = \frac{C}{\mathrm{d}\theta} \tag{7}$$

so erhält man

$$\varepsilon = \varepsilon^* \frac{R}{R - y} + B^* \frac{y}{R - y} + C^* \frac{z}{R - y}. \tag{8}$$

Zieht man in Betracht dass:

$$\frac{R}{R - y} = 1 + \frac{y}{R - y},$$

so ist:

$$\varepsilon = \varepsilon^* + \frac{y}{R - y}\varepsilon^* + B^* \frac{y}{R - y} + C^* \frac{z}{R - y}. \tag{9}$$

Die Normalspannung in einem beliebigen Punkt des Querschnittes ist

$$\sigma = E\varepsilon = E\left(\varepsilon^* + \varepsilon^* \frac{y}{R - y} + B^* \frac{y}{R - y} + C^* \frac{z}{R - y}\right). \tag{10}$$

Die Gleichungen des statischen Gleichgewichtes sind:

$$\int \sigma\,\mathrm{d}A = 0, \quad \int \sigma y\,\mathrm{d}A = M_z, \quad \int \sigma z\,\mathrm{d}A = 0. \tag{11}$$

Die Gleichungen (10) und (11) ergeben:

$$\begin{cases} \int\left(\varepsilon^* + \varepsilon^* \dfrac{y}{R - y} + B^* \dfrac{y}{R - y} + C^* \dfrac{z}{R - y}\right)\mathrm{d}A = 0, \\ \int\left(\varepsilon^* y + \varepsilon^* \dfrac{y^2}{R - y} + B^* \dfrac{y^2}{R - y} + C^* \dfrac{zy}{R - y}\right)\mathrm{d}A = \dfrac{M_z}{E}, \\ \int\left(\varepsilon^* z + \varepsilon^* \dfrac{zy}{R - y} + B^* \dfrac{zy}{R - y} + C^* \dfrac{z^2}{R - y}\right)\mathrm{d}A = 0, \end{cases} \tag{12}$$

und deren Ausführung:

$$(13)\qquad \begin{cases} \varepsilon^*(AR^2 + I_z^*) + B^* I_z^* + C^* I_{zy}^* = 0, \\ \varepsilon^* I_z^* + B^* I_z^* + C^* I_{zy}^* = \dfrac{M_z R}{E}, \\ \varepsilon^* I_{zy}^* + B^* I_{zy}^* + C^* I_z^* + 0, \\ \varepsilon^* \left(1 + \dfrac{y}{R-y}\right) + B^* \dfrac{y}{R-y} + C^* \dfrac{z}{R-y} = \dfrac{\sigma}{E}. \end{cases}$$

Hier werden folgende Bezeichnungen eingeführt:

$$(14)\qquad \begin{cases} \int \dfrac{yz\,dA}{1 - y/R} = I_{zy}^*, \quad \int \dfrac{z^2\,dA}{1 - y/R} = I_y^*, \\ \int \dfrac{y^2\,dA}{1 - y/R} = I_z^*, \quad \int y\,dA = \int z\,dA = 0. \end{cases}$$

Die Vereinbarkeitsbedingungen nach Rouché sind:

$$\begin{vmatrix} AR^2 + I_z^* & I_z^* & I_{zy}^* & 0 \\ I_z^* & I_z^* & I_{zy}^* & \dfrac{M_z R}{E} \\ I_{zy}^* & I_{yz}^* & I_y^* & 0 \\ 1 - \dfrac{y}{R-y} & \dfrac{y}{R-y} & \dfrac{y}{R-y} & \dfrac{\sigma}{E} \end{vmatrix} = 0.$$

Da aber

$$\Delta = \begin{vmatrix} AR^2 + I_z^* & I_z^* & I_{zy}^* \\ I_z^* & I_z^* & I_{zy}^* \\ I_{zy}^* & I_{zy}^* & I_y^* \end{vmatrix} \neq 0$$

ergibt sich

$$\Delta = AR^2 (I_z^* I_y^* - I_{zy}^{*2}).$$

Löst man das System so erhält man die Werte für ε^*, C^* und B^* und den allgemeinen Ausdruck der Spannung bei schiefer Biegung gekrümmter Stäbe:

$$\sigma = -\frac{M_z}{AR} + \frac{M_z I_y^*}{I_z^* I_y^* - I_{zy}^{*2}}\left(\frac{y}{1 - y/R}\right) - \frac{M_z I_{zy}^*}{I_z^* I_y^* - I_{zy}^{*2}}\left(\frac{z}{1 - y/R}\right). \tag{15}$$

Die Gleichung der Nullachse ist:

$$-\frac{M_z}{AR} + \frac{M_z I_y^*}{I_z^* I_y^* - I_{zy}^{*2}}\left(\frac{y}{1 - y/R}\right) - \frac{M_z I_{zy}^*}{I_z^* I_y^* - I_{zy}^{*2}}\left(\frac{z}{1 - y/R}\right) = 0. \tag{16}$$

3. Sonderfälle

Aus den obigen Formeln lassen sich leicht folgende Sonderfälle ableiten.

1. Ist $R = \infty$ gibt die Gleichung (15) die Formel der schiefen Biegung gerader Stäbe wieder [1], [4], [5]:

$$\sigma = \frac{I_y y - I_{zy} z}{I_z I_y - I_{zy}^2} M_z, \tag{17}$$

da für $R = \infty$

$$I_z^* = I_z, \quad I_y^* = I_y, \quad I_{zy}^* = I_{zy}.$$

2. Die Z-Achse ist eine Symmetrieachse und folglich $I_{zy} = 0$,

$$\sigma = -\frac{M_z}{RA} + \frac{M_z}{I_z^*}\left(\frac{y}{1 - y/R}\right),$$

wo

$$I_z^* = \int \frac{y^2 \, dA}{1 - y/R} = R^2 \int \frac{y}{R - y} \, dA = R^2 KA;$$

daraus folgt

$$\sigma = -\frac{M_z}{RA} + \frac{M_z}{RKA}\left(\frac{y}{R - y}\right),$$

die bekannte Formel von Winkler-Bach [1].

Es besteht bereits die Absicht die Gültigkeit der Formel (15) durch praktische Versuche zu erproben.

Technische Hochschule, Braşov

LITERATURVERZEICHNIS

1. Seely F. B., Smith I. G., *Advanced Mechanics of Materials*. John Willey & Sons, Inc., New-York, 1952.
2. Todhunter, Pearson K., *A History of Elasticity*. T. **II**, I-e T., Cambridge University Press, 1893.
3. Levy J. C., *Deflection of a Beam Referred to any Set of Rectangular Centroidal Axes*. J. of Appl. Mech., 1956, **23**, 3.

4. Goia I.. *Probleme de maxim şi minim la încovoierea oblică.* Bul. Inst. polit. Braşov, seria A, Mecanică, 1966, **VIII.**
5. Сапожков У. М., *К расчету на прочность бруса при косом поперечном изгибе.* Вестник машиностроения, 1963, *1.*

DETERMINAREA EFORTURILOR UNITARE NORMALE LA ÎNCOVOIEREA OBLICĂ A BARELOR CURBE

(Rezumat)

Se studiază încovoierea oblică a barelor curbe, plecîndu-se de la o secţiune de formă oarecare, dar constantă, în lungul barei şi se consideră cazul încovoierii oblice pure, momentul încovoietor fiind perpendicular pe planul axei barei. Din relaţia generală obţinută (15) se pot deduce două cazuri particulare (1°, 2°) care atestă valabilitatea relaţiei generale.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

C. D. 624

CONTRIBUTIONS À L'ÉTUDE DES EFFORTS ET DES DÉPLACEMENTS DANS LES TERRAINS DES FONDATIONS

PAR

AL. EFTIMIE

Communication présentée dans la session scientifique de l'Institut Polytechnique de Jassy, 28—30 Septembre 1967

1. Introduction

L'un des principaux problèmes de la mécanique des sols qui préoccupe à présent les specialistes est celui de la nonconcordance entre les valeurs calculées et celles observées des tassements.

Le modèle mathématique universel accepté aujourd'hui est celui d'un demi-espace élastique, isotropique et homogène, dont la solution a été donnée par Boussinesq en 1885.

Mais le terrain de fondation n'est pas un milieu vraiment élastique; il est rarement homogène et manifeste, en général, une anisotropie structurelle plus ou moins accentuée, en fonction de nombre de causes que nous allons préciser ci-dessous.

Ainsi, les changements périodiques des conditions de déposition des suspensions de sol ont influencé la formation de la texture stratifiée. L'épaisseur des couches varie à partir des dimensions les plus petites jusqu'à quelques millimètres. Dans beaucoup de cas quelques-unes des couches diffèrent par les changements périodiques des conditions où les dépositions des suspensions ont eu lieu.

Le résultat des processus naturels qui ont mené à la formation de la texture stratifiée des certains terrains c'est l'anisotropie des leurs propriétés mécaniques et élastiques, caractérisées par des valeurs différentes dans la direction parallèle des couches et aussi dans celle perpendiculaire aux couches.

On a aussi constaté que pour beaucoup de dépots naturels des sols argileux, la consolidation prolongée sous de grandes charges a déterminé l'orientation horizontale des particules d'argile, de sorte que des manifestations prononcées anisotropiques ont lieu.

Pour de pareils sols on peut considérer que les propriétés élastiques sont symétriques par rapport à une axe verticale et qu'elles accusent une anisotropie transversale.

Parmi les travaux récents qui se refèrent à l'étude du problème de l'état de tensions et de déformations dans les sols de fondations ayant une anisotropie transversale, nous citons celui de L. Barden [1] où l'auteur essaye d'adapter et de simplifier, pour les nécessités de la mécanique des sols, l'anisotropie hexagonale introduite par Michell (1900) et d'appliquer les résultats au comportement des sols de fondations argileux et sablonneux. Dans ce but il emploie la solution effort-déformation pour de divers types d'anisotropie étudiés par Hearmon (1961). Mais, bien que les résultats obtenus par l'auteur réussisent à suggérer

l'idée que l'anisotropie transversale est l'une des causes de nonconcordance entre les valeurs observées et celles calculées des tassements selon la théorie du demi-espace élastique, homogène et isotropique, les formules établies sont assez laborieuses et pratiquement très difficiles à appliquer, car elles dépendent dans une très large mesure des valeurs des coefficients de Poisson et par conséquent d'une valeur pratiquement douteuse dans la mécanique des sols.

L'objet de cette Note c'est la simplification des résultats obtenus par L. Barden. On y propose d'exprimer les tensions et les déplacements en fonction du degré d'anisotropie et d'une seule valeur pour le coefficient de Poisson. Le modèle mathématique simplifié offre la possibilité d'application aux necessités pratiques de la mécanique des sols avec une approximation acceptable. On essaie aussi à mettre en évidence le fait que l'anisotropie transversale de quelques terrains est l'une des principales causes de la dispersion plus ou moins grande de la charge dans le demi-espace, comparée à la dispersion indiquée par Boussinesq, ce qui contribue d'une façon essentielle à la nonconcordance des tassements observés et des tassements calculés à l'aide de la théorie du demi-espace élastique, homogène et isotropique.

2. Efforts

Un matériel élastique, homogène, qui accuse une anisotropie transversale, dépend de cinq constantes élastiques à savoir: E_v — le module d'élasticité dans la direction verticale; E_H — le module d'élasticité dans la direction horizontale et trois valeurs pour le coefficient de Poisson: ν_1 — l'effet de la déformation horizontale sur la déformation horizontale; ν_2 — l'effet de la déformation horizontale sur la deformation verticale; ν_3 — l'effet de la déformation verticale sur la déformation horizontale.

Les cinq constantes élastiques sont liées par les relations:

$$(1) \qquad \frac{E_H}{E_v} = \frac{\nu_2}{\nu_3} = n,$$

où n est le dégré d'anisotropie et

$$(2) \qquad 1 > \nu_1^2 + 2\nu_2\nu_3 + 2\nu_1\nu_2\nu_3,\ 1 > \nu_1 + 2\nu_2\nu_3,\ 1 > \nu_1 + \nu_2,\ \frac{1}{2} > \nu_3.$$

Dans ce qui suit, $E_v = E$ et $E_H = nE$. L'isotropie en résulte, en particulier, avec $n = 1$ et $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu$.

On considère le demi-espace élastique, homogène et transversal anisotropique, chargé à sa surface d'une force concentrée P. Avec les notations R, r, z et θ définies dans la fig. 1, Michell a montré que sur tout plan horizontal d'une profondeur $-z$, les tensions σ_z et τ_{rz} sont données par:

$$(3) \qquad \sigma_z = \lambda \cos\theta, \qquad (4) \qquad \tau_{rz} = \lambda \sin\theta,$$

où

$$\lambda = \frac{P}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}} \left[\frac{1}{(r + z^2/\alpha)^{3/2}} - \frac{1}{(r^2 + z^2/\beta)^{3/2}} \right] \tag{5}$$

et

$$\alpha\beta = \frac{C}{A}, \tag{6}$$

$$\alpha + \beta = \frac{AC - F^2 - 2FL}{AL}. \tag{7}$$

L. Barden donne les valeurs des paramètres A, B, C, F et L sous la forme:

$$\begin{cases} A = \dfrac{nE}{\varphi}(1 - \nu_2\nu_3), & C = \dfrac{E}{\varphi}(1 - \nu_1^2), \\ F = \dfrac{E}{\varphi}\nu_2(1 + \nu_1), & L = \dfrac{E\nu_2}{\nu_2 + \nu_3 + 2\nu_2\nu_3}, \end{cases} \tag{8}$$

où

$$\varphi = (1 + \nu_1)(1 - \nu_1 - 2\nu_2\nu_3).$$

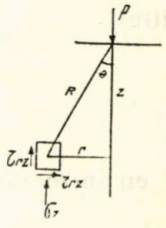


Fig. 1

Si on peut obtenir par voie expérimentale les cinq constantes élastiques, les paramètres A, B, C, F et L sont déterminés et les équations (6) et (7) fournissent α et β comme les racines d'une équation du deuxième degré.

Pour que l'expression (5) ait un sens, il faut α et β soient positives, ce que mène à la condition $AC > (F + 2L)^2$ ou,

$$\sqrt{\frac{\nu_2}{\nu_3}}(1 - \nu_2 - \nu_1\nu_3 - \nu_2\nu_3) > \frac{2\varphi\nu_2}{\nu_2 + \nu_3 + 2\nu_2\nu_3}. \tag{9}$$

Compte tenu que la détermination pratique des valeurs des trois coefficients de Poisson n'est pas encore réalisable, en dehors du fait qu'elles sont laborieuses, les formules établies par Barden ne peuvent pas même être appliquées.

Nous chercherons à établir d'abord une formule simple et acceptable au point de vue pratique, pour le calcul de l'effort unitaire vertical maximum, $\sigma_{z\max}$, qui se produit sur la verticale du point d'application de la force P et qui intéresse surtout dans la pratique.

Dans ce but, en considérant dans (5) la coordonnée $E = 0$, après certains calculs et simplifications, on obtient:

$$\sigma_{z\max} = \frac{P}{2\pi z^2}(\alpha + \beta + \sqrt{\alpha\beta}), \tag{10 a}$$

ou

$$\sigma_{z\max} = \frac{P}{2\pi z^2}\left(\frac{AC - F^2 - 2FL}{AL} + \sqrt{\frac{C}{A}}\right). \tag{10 b}$$

En tenant compte de (8), (10 b) devient :

$$\sigma_{z\max} = \frac{P}{2\pi z^2}\left[\frac{n(1-\nu_2\nu_3)(1-\nu_1^2)}{(1+\nu_1)(1-\nu_1-2\nu_2\nu_3)} - \frac{\nu_2^2(1+\nu_1)^2}{(1+\nu_1)(1-\nu_1-2\nu_2\nu_3)} - \frac{2\nu_2^2(1+\nu_1)}{\nu_2+\nu_3+2\nu_2\nu_3} + \frac{n(1-\nu_2\nu_3)}{\nu_2+\nu_3+2\nu_2\nu_3} + \right.$$

(10 c)

$$\left. + \sqrt{\frac{1-\nu_1^2}{n(1-\nu_1\nu_2)}}\right]$$

et en introduisant en (10 c), d'après (1), $\nu_3 = \nu_2/n$, on obtient :

$$\sigma_{z\max} = \frac{P}{2\pi z^2}\left(\frac{1+n-2\nu_1\nu_2}{n-\nu_2^2} + \sqrt{\frac{1-\nu_1^2}{n-\nu_2^2}}\right). \tag{11}$$

Si l'on admet maintenant que $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, (supposition qui, comme nous allons voir ci-dessous, semble fournir une approximation acceptable), l'expression de $\sigma_{z\max}$ devient :

$$\sigma_{z\max} = \frac{P}{2\pi z^2}\left(\frac{1+n-2\nu^2}{n-\nu^2} + \sqrt{\frac{1-\nu^2}{n-\nu^2}}\right) = \frac{P}{2\pi z^2}K, \tag{12}$$

où

$$K = \frac{1+n-2\nu^2}{n-\nu^2} + \sqrt{\frac{1-\nu^2}{n-\nu^2}}, \tag{13}$$

et

$$\alpha+\beta = \frac{1+n-2\nu^2}{n-\nu^2}, \quad \alpha\beta = \frac{1-\nu^2}{n-\nu^2}. \tag{14}$$

Pour $n = 1$, quelque soit la valeur de ν, nous avons $K = 3$, et $\sigma_{z\max} = 3P/2\pi z^3$, en retrouvant par cette voie la formule de Boussinesq.

Tableau 1

ν / n	0,250	0,260	0,270	0,280	0,290	0,300	0,320	0,340	0,360	0,380	0,400	0,420
0,5	4,600	4,630	4,650	4,670	4,700	4,710	4,740	4,830	4,900	4,960	5,040	5,140
1	3,000	3,000	3,000	3,000	3,000	3,000	3,000	3,000	3,000	3,000	3,000	3,000
1,5	2,458	2,455	2,453	2,451	2,448	2,445	2,440	2,435	2,430	2,422	2,419	2,414
2	2,177	2,175	2,173	2,171	2,169	2,168	2,160	2,155	2,148	2,142	2,132	2,125
2,5	2,070	2,050	2,030	2,010	2,000	1,991	1,986	1,979	1,975	1,967	1,960	1,951
3	1,886	1,883	1,881	1,878	1,875	1,872	1,865	1,860	1,853	1,846	1,838	1,836

En appliquant la formule (14), on a calculé la valeur du coefficient K pour diverses valeurs du degré d'anisotropie et du coefficient de Poisson; les résultats sont donnés dans le tableau 1.

En examinant le tableau 1, il résulte que :

a) pour $n > 1$, le coeficient K diminue et pour $n < 1$ le coefficient augmente ;

b) la variation du coefficient de Poisson exerce une très petite influence sur la variattion du coefficient K; ainsi, pour $n < 1$, lorsque ν augmente, K augmente très lentement et au contraire, pour $n > 1$, lorsque ν augmente, K diminue très lentement.

La deuxième observation semble confirmer le fait que l'approximation $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ n'exerce pas une influence appréciable sur la valeur de l'effort $\sigma_{z\max}$.

Donc, l'effort unitaire $\sigma_{z\max}$ pour $n > 1$ diminue et pour $n < 1$ augmente par rapport à la solution donnée par Boussinesq.

D'ailleurs, L. Barden, prenant des valeurs arbitraires pour les coefficients de Poisson, mais qui satisfont aux conditions (1), (2) et (3), fait l'observation que celles-ci n'exercent qu'une influence insignifiante sur l'effort σ_z par rapport aux valeurs du degré d'anisotropie.

Pour la valeur de contrainte σ_z des autres points du demi-espacé, on calcule α et β à l'aide des relations (14) comme des racines d'une équation du deuxième degré et ces valeurs sont introduites en (3). La condition pour que α et β aient des valeurs réelles et positives, devient:

$$\left(\frac{1+n-2\nu^2}{n-\nu^2}\right)^2 > 4\frac{1-\nu^2}{n-\nu^2}, \tag{15}$$

et les conditions (2) ont la forme :

$$1 > \nu^2 + \frac{2}{n}\nu^2 + \frac{2}{n}\nu^3, \quad 1 > \nu + 2\nu^2, \quad 1 > 2\nu, \quad \frac{1}{2} > \nu. \tag{16}$$

En utilisant diverses valeurs pour le degré d'anisotropie n et en conservant pour le coefficient de Poisson ν une valeur constante 0,3 qui, conformément aux standards en vigueur, correspond à des sables et à des terrains peu cohésives, on a calculé l'effort σ_z sur un plan horizontal à la profondeur $z = 4$ m, sous la force concentrée $P = 200$ t, pour divers points déterminés par la coordonnée r. Les résultats obtenus sont enregistrés dans le tableau 2.

Tableau 2

n / ν	0	1	2	3	4	5
0,5	0,933	0,692	0,374	0,184	0,083	0,042
1,0	0,597	0,516	0,349	0,195	0,106	0,057
1,5	0,489	0,440	0,305	0,187	0,103	0,063
2,0	0,428	0,410	0,302	0,179	0,117	0,066
2,5	0,396	0,364	0,259	0,170	0,110	0,068
3,0	0,382	0,358	0,251	0,173	0,105	0,069

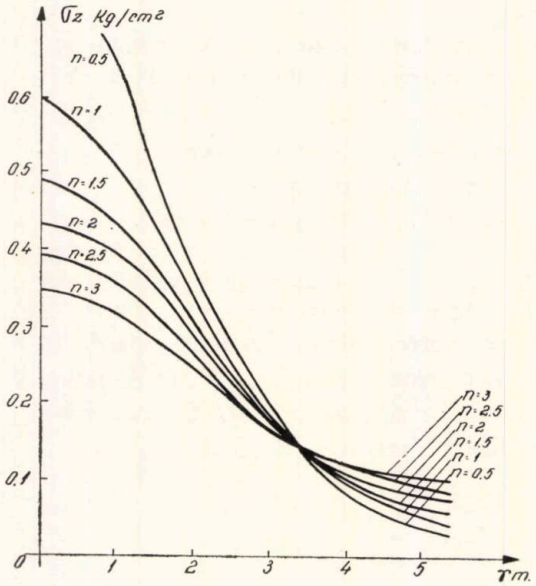


Fig. 2

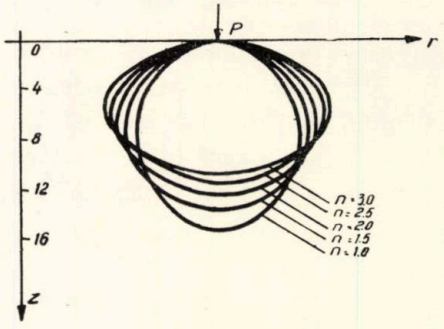


Fig. 3

On a constaté qu'au moins pour les valeurs de n et ν utilisées, les conditions (15) et (16) sont satisfaites.

À l'aide des valeurs de σ_z données dans le tableau 2 on a construit la courbe de variation sur le plan horizontal $z = 4$ m, pour chaque valeur du degré d'anisotropie n, en obtenant le graphique de la fig. 2.

Si l'on examine le tableau et le graphique, on constate que pour $n < 1$ il y a une plus grande dispersion latérale de l'effort σ_z que dans le cas d'isotropie.

Donc, lorsque n augmente, la capacité de dispersion de la charge augmente elle aussi et vice-versa.

Dans la fig. 3 on présente l'isobare de l'effort $\sigma_z = 0{,}4$ kg/cm² pour quelques valeurs du degré d'anisotropie n et pour le coefficient de Poisson

$\nu = 0{,}3$. Sur la verticale du point d'application de la force P, l'isobare passe à la profondeur $z = \sqrt{KP/2\pi\sigma_z}$, dont les valeurs, en fonction du degré d'anisotropie, sont données dans le tableau 3.

Tableau 3

n / ν	0,5	1	1,5	2	2,5	3
0,3	19,30	15,40	13,90	13,10	12,60	12,20

On peut affirmer que la zone active déterminée par la profondeur qui résulte de la condition $\sigma_z = 0{,}2\gamma H$ (profondeur où σ_z atteint une valeur égale à 20 % de la charge géologique qui correspond à la profondeur) est moindre que celle du cas d'isotropie.

La contrainte de cisaillement, importante dans la mécanique des sols, est donnée par $\tau_{rz} = \lambda r$. La valeur λ étant la même que dans le cas de contrainte σ_z, il en résulte que toutes les observations faites quant à la variation de σ_z, en fonction de ν, restent valable aussi pour l'effort de cisaillement τ_{rz}. Pour de différentes valeurs du degré d'anisotropie et en gardant la valeur constante $\nu = 0{,}3$, du coefficient de Poisson, on a calculé l'effort τ_{rz} sur un plan horizontal à la profondeur $z = 4$ m sous la force concentrée $P = 200$ t, pour divers points déterminés par la coordonnée r. Basés sur les valeurs calculées pour τ_{rz}, on a construit (v. la fig. 4) la courbe de variation sur le plan horizontal de cet effort, qui confirme la validité des observations ci-dessus.

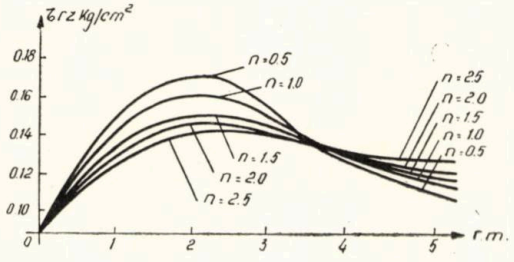


Fig. 4

3. Déplacements

Dans le problème concernant le calcul des déplacements, les déplacements des points de la surface présentent une importance pratique pour la plupart des problèmes de la mécanique des sols. Ainsi, lorsque $z = 0$, l'expression du déplacement vertical d'un point est

$$w = \frac{P}{2\pi r}\sqrt{\frac{A}{L}}\cdot\frac{[(\sqrt{AC}+L)^2-(F+L)^2]^{1/2}}{AC-F^2}, \tag{17}$$

où A, C, F et L sont définis par les formules (8).

En notant par

$$\frac{E}{2\pi}\sqrt{\frac{A}{L}}\cdot\frac{[(\sqrt{AC}+L)^2-(F+L)^2]^{1/2}}{AC-F^2}=\mathcal{J}, \tag{18}$$

un coefficient numérique nondimensionel, la formule (17) devient:

$$w=\frac{P}{r}\cdot\frac{\mathcal{J}}{E}. \tag{19}$$

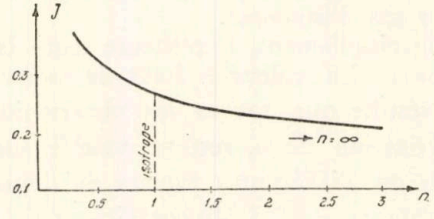


Fig. 5

En remplaçant les paramètres A, C, F et L par les formules (8), où l'on suppose que $\nu_3=\nu_2/n$ et $\nu_1=\nu_2=\nu$, après avoir effectué les calculs, on obtient, pour $\mathcal{J}$, la formule simplifiée

$$\mathcal{J}=\frac{1}{2\pi n}\sqrt{(n-\nu^2)(n+1-2\nu^2+2\sqrt{(n-\nu^2)(1-\nu^2)}}. \tag{20}$$

Pour $n=1$ il résulte que $\mathcal{J}=(1-\nu^2)/\pi$ et $w=P(1-\nu^2)/\pi Er$, qui représente la solution de Boussinesq.

Tableau 4

n / ν	0,5	1	1,5	2	2,5	3
0,3	0,325	0,290	0,270	0,252	0,246	0,241

En appliquant la formule (20) pour différents degrés d'anisotropie n et pour $\nu=0{,}3$, on a trouvé pour $\mathcal{J}$ les valeurs du tableau 4; compte tenu de ces valeurs on a tracé la courbe de variation de $\mathcal{J}$ en fonction de n (fig. 5).

On constate que, tout comme dans le cas des contraintes σ_z et τ_{rz}, lorsque n augmente, la valeur de $\mathcal{J}$ diminue et que le coefficient de Poisson exerce un effet beaucoup plus petit sur $\mathcal{J}$, par rapport au degré d'anisotropie.

4. Conclusions

Les contraintes σ_z et τ_{rz} et le déplacement w ne dépendent pas de la valeur des modules d'élasticité E_v et E_H, mais de leur rapport.

La mesure du degré d'anisotropie, c'est-à-dire du rapport E_H/E_v, constitue aussi la mesure du degré de concentration ou de dispersion des efforts, c'est-à-dire de l'étendue de la zone d'influence des charges.

Comme l'on a constaté par voie expérimentale, pour les sables, ainsi que pour d'autres dépôts naturels des sols argileux, on a $1 \leqslant n \leqslant 3$; par conséquent on peut affirmer que ces sols possèdent une capacité de dispersion de la charge plus grande que celle indiquée par Boussinesq, ce qui pourrait contribuier au fait que les tassements observés soient plus petits que les tassements calculés.

La demi-espace élastique, homogène et transversal anisotropique, peut être considéré un modèle mathématique amélioré pour l'étude de l'état des efforts et des déformations dans certains sols naturels.

Les simplification introduites n'affectent pas l'exactité des résultats par rapport aux celles de Barden. Elles permettent l'application du modèle aux nécessités de la mécanique des sols et donnent la possibilité d'aborder plus facilement les problèmes, justement à cause de la simplicité relative des formules.

L'acceptation de la substitution $\nu_3 = \nu_2/n$, ainsi que celle de la supposition $\nu_1 = \nu_2$, est justifiée par le fait qu'elles maintiennent les phénomènes pris en considération par les formules de Barden.

Institut Polytechnique de Jassy,
Chaire de Statique et de Résistance

BIBLIOGRAPHIE

1. Barden L., *Stresses and Displacements in a Crossanisotropic Soil.* Geotechnique, 1963, **13**, *3*, pp. 198–210.
2. Michell J. H., *The Stress Distribution in an Aelotropic Solid with an Infinite Plane Boundary.*
3. Terzoghi K., *Theoretical Soile Mechanics.* J. Wiley, New York, 1943.
4. Frohlich O. K., *Druckverteilung im Baugrunde.* J. Springer, Wien, 1934.
5. Love A., *Teoria matematică a elasticității*, 1935.
6. Лехницкий С. Т., *Теория упругости анизотропного тела.* М.–Л., 1956.
7. Рогаткина Ж. Е., *Влияние анизотропности глинистых грунтов на их физико-механические свойства.* Основания, фундаменты и механика грунтов, 1967, *1*.

CONTRIBUŢII LA STUDIUL EFORTURILOR ŞI DEPLASĂRILOR ÎN TERENURILE DE FUNDAŢII

(Rezumat)

Se consideră semispaţiul elastic, omogen şi transversal anizotrop, ca model matematic ameliorat pentru studiul tasărilor în depozitele naturale de pământ.

Se modifică soluţia lui Michel-Barden [1], [2] pentru a exprima tensiunile şi deplasările în funcţie numai de gradul de anizotropie şi de o singură valoare pentru coeficientul lui Poisson, prin formule simplificate.

Deoarece expresiile exacte ale tensiunilor şi deplasărilor depind sensibil de valorile coeficientului lui Poisson, deci de o valoare practic îndoielnică, se propun pentru acestea formule aproximative, utile în practică.

Se trage concluzia că anizotropia unor terenuri nederanjate, de fundaţii, contribuie la supraevaluarea tasărilor.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

C. D. 624.07 ; 691.3

CONSIDÉRATIONS SUR LES COUPOLES SPHÉRIQUES APLATIES AVEC L'ANNEAU D'APPUI PRÉCONTRAINT

PAR

C. LEONTE et ANATOLIE MIHUL

Comumnication présentée dans la session scientifique de l'Institut Polytechnique de Jassy, 27—30 Septembre 1967

1. Critères de choisir l'hauteur des coupoles

Les difficultés de choisir la forme et le rapport entre l'hauteur et la portée des coupoles, et de la section de l'anneau d'appui sont dus à la complexité des facteurs qui y interviennent, déterminés par les conditions fonctionnelles, esthétiques, de résistance et de stabilité.

Le plus souvent les conditions fonctionnelles et esthétiques (architecturales) nous imposent à choisir les coupoles aplaties, à petite flèche par rapport à la portée de la coupole. Elles sont avantageuses aussi en ce qui concerne l'utilisation optime du béton, car en stade de membrane, les efforts normaux selon la tangente à la parallèle sont des efforts de compression. Mais dans ces cas, la déformation de l'anneau d'appui étant différente — comme valeur et comme sens — de celle de la plaque à l'appui, le stade de membrane des efforts, qui représente la solution optimum du point de vue de la résistance et de la stabilité, est perturbé. Dans le plan méridien apparaissent des moments fléchissants et des efforts tranchants et les efforts normaux selon la parallèle sont extrèmement perturbés, passant habituellement des efforts de compression aux efforts des tension (indésirables au cas du béton). La diminution de la flèche réduit en même temps la stabilité générale et locale. Pour ces motifs on choisit souvent les coupoles hautes. Dans la littérature relative à l'établissement des projets [7] on recommande à choisir un rapport flèche-portée des coupoles plus grand que 1/5. Aussi, on peut remarquer que ce rapport, dans la plupart des constructions exécutées, ne dépasse pas la valeur 5.

2. Possibilité de réaliser le stade de membrane des efforts aux coupoles aplaties par la précontrainte de l'anneau d'appui

Dans un travail antérieur [1], nous avons signalé que si l'on néglige la perturbation produite par l'empêchement de la déformation de rotation libre de la plaque au bord, due à l'anneau d'appui, on peut réaliser l'état d'efforts de membrane même aux coupoles aplaties, par la précontrainte de l'anneau d'appui, sans modifier nécessairement la courbe méridienne dans la zone marginale. Dans ce cas on choisit la valeur de la précontrainte telle qu'elle puisse assurer l'égalité entre la déformation de l'anneau et la déformation radiale de la plaque qui correspond à l'état des efforts de membrane.

Soit T_0^n l'effort de précontrainte, normé, dans l'anneau d'appui et soit σ_{θ_0} l'effort unitaire de compression dans la plaque selon la tangente à la parallèle, au dessus de l'anneau d'appui; la valeur de la précontrainte nécessaire à assurer le stade de membrane sous l'action de la charge totale à la phase finale ($\bar{N}_0$), sera:

$$\bar{N}_0 = T_0^n + A_{bi}\,\sigma_{\theta_0}. \tag{1}$$

La section de béton de l'anneau d'appui (A_b) est déterminée par la condition de résistance au transfert:

$$A_b = \frac{A_{p1}\,\sigma_l' - (T_{0g} + A_a R_a)}{R_{pr}}. \tag{2}$$

Si l'on effectue le calcul à l'état limite de la capacité portante, pour la section de l'armature précontrainte, il en résulte la valeur:

$$A_{p1} = \frac{T_0 - 0{,}8A_a\,R_a}{0{,}8R_p}. \tag{3}$$

Pour assurer le stade de membrane des efforts dans la phase finale, c'est-à-dire pour réaliser l'effort de la précontrainte $\bar{N}_0$ (1), il est nécessaire de majorer la section de l'armature précontrainte:

$$A_{p2} = \frac{\bar{N}_0}{\bar{\sigma}_0} = \frac{T_0^n + A_{bi}\,\sigma_{\theta_0}}{\bar{\sigma}_0}. \tag{4}$$

Dans les relations (1)...(4) on a noté par: A_{bi} — la section idéale de béton de l'anneau d'appui, σ_0 — l'effort unitaire de calcul dans l'armature précontrainte, dans la phase initielle $\bar{\sigma}_0$ — l'effort unitaire de calcul dans l'armature précontrainte, dans la phase finale, A_a — la section de l'armature non précontrainte, R_a — la résistance de fluage de calcul (minimum probable) de l'armature non précontrainte, R_{pr} — la résistance prismatique de rupture, du béton, de calcul (minimum probable), T_0 — l'effort d'extension de calcul (maximum probable) dans l'anneau d'appui, produit par le chargement total, T_{0g} — l'effort d'extension de calcul (maximum probable) dans l'anneau d'appui, produit par le poids propre de la plaque, R_p — la résistance limite, de calcul, de l'armature précontrainte, σ_l' — l'effort unitaire d'extension dans l'armature précontrainte à la perte de la capacité de résistance par la compression de l'anneau d'appui.

Par la précontrainte de l'anneau de base on peut réaliser au point de vue théorique le stade d'effort de membrane dans la plaque de la coupole pour des flèches même à des valeurs très réduites, mais la réduction du rapport entre la flèche et la portée, à partir d'une certaine valeur, conduit à des solutions irrationnelles à cause de l'augmentation importante de l'effort dans l'anneau de base et de l'ampleur des déformations qui ont lieu au bord de la membrane, due a l'effet des efforts de compression.

Dans ces conditions, pour satisfaire la compatibilité des déformations du stade de membrane dans la plaque de la coupole et de ceux de l'anneau d'appui, il est nécessaire d'introduire des efforts importants de précontrainte, à la réalisation desquels on doit augmenter le nécessaire d'acier et de béton.

La connaissance des états de tensions et de déformations produits par les charges et par la force de précontrainte de l'anneau d'appui, qui correspond à la variation de la forme générale des éléments géometriques des plaques courbes, minces, de rotation, nous permettrait de choisir — dans l'élaboration de conception — des structures ayant des caractéristiques optimum du point de vue technique-économique.

Dans ce sens, nous nous sommes proposés, dans ce qui suit, à établir la corrélation entre les éléments géometriques des coupoles sphériques, la portée, la flèche, l'épaisseur de la plaque et l'état de tension résulté de l'action des charges extérieures, tout en prenant en considération la stabilité et l'effet de la force de précontrainte de l'anneau d'appui.

3. Corrélation entre l'épaisseur, la flèche et les charges de la plaque selon les conditions de stabilité

L'épaisseur réduite de la plaque et la possibilité de perturber l'état de membrane des efforts peut conduire à la perte de stabilité de la plaque pour des charges ayant des valeurs bien moindres que celles qui correspondent à la capacité de résistance. Pour ce motif, quoique à l'aide des calculs de résistence il en résulte parfois des efforts insignifiants, on choisit, selon les recommandations [7], une plaque ayant une épaisseur plus grande que 1/600 du rayon de courbure du méridien, au sommet de la coupole. Cette recommandation peut être souvent insuffisante, car elle ne tient pas compte de la valeur de la charge. Mais, si l'on considère l'effet de fluage du béton, on peut établir la charge critique de fluage, à l'aide de la relation

$$q = \frac{E_b}{20}\left(\frac{\delta}{r}\right)^2, \tag{5}$$

d'où il en résulte l'épaisseur minimum de la plaque

$$\delta = \frac{r}{k}, \tag{6}$$

où

$$k = \sqrt{\frac{E_b}{20q}}. \tag{7}$$

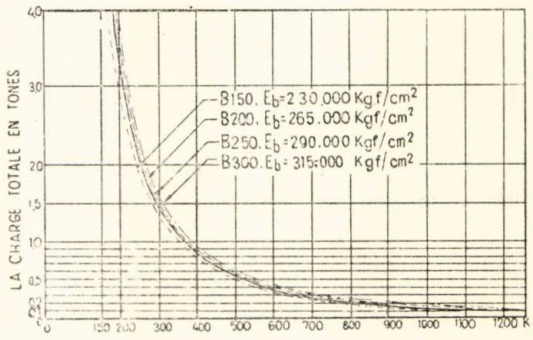


Fig. 1

Dans la fig. 1 on a représenté les courbes de la variation du coefficient k par rapport à la valeur de la charge, pour quelques sortes de bétons, employés dans les constructions de béton armé monolithe. En analysant la variation du coefficient k, on peut estimer le rapport entre l'épaisseur minimum de la plaque et la rayon de courbure du méridien à son sommet. Il en résulte que le rapport 1/600, recommandé par les instructions [7], s'applique à des charges plus petites que 300 kgf/m² (y compris le poids propre). Pour des charges qui atteignent 4 000 kgf/m², la valeur du rapport diminue jusqu'à environ 1/170. Mais, puisque dans l'expression de q est inclus aussi le poids propre, qui varie, pour une portée connue, par rapport à la flèche et qui pour les toits en béton intervient avec un poids important, on ne peut pas déterminer directement la valeur du coefficient k par la relation (7).

En partant de la relation (5) l'épaisseur de la plaque par rapport à sa portée, à la flèche, à la charge utile et à la qualité du béton, résulte:

$$q = g_p + p = \delta\gamma + p,$$

$$\delta = \frac{10r^2\gamma}{E_b}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{pE_b}{5r^2\gamma^2}}\right). \tag{8}$$

Pour les coupoles sphériques (fig. 1) le rayon de courbure par rapport à la portée et à la flèche est déterminé par la relation:

$$r = \frac{r_0^2}{2f} + \frac{f}{2} = r_0\left(\frac{r_0}{2f} + \frac{f}{2r_0}\right).$$

Avec $f/2r_0 = \lambda$ il en résulte

$$r = \frac{1}{4\lambda} + \lambda. \tag{9}$$

En remplaçant r en fonction de r_0 et λ, la relation (8) devient:

$$\delta = \frac{10\gamma}{E_b}\left(\frac{1}{4\lambda} + \lambda\right)^2\left[1 + \sqrt{1 + \frac{16pE_b\lambda^2}{5\gamma^2 r_0^2(1 + 4\lambda^2)^2}}\right]. \tag{10}$$

Pour des portées et des charges données et pour une épaisseur spécifiée de la plaque, on peut déterminer le rapport λ (flèche-portée) nécessaire pour déterminer la stabilité:

$$\lambda = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{\delta^2 E_b}{20r_0^2(\delta\gamma + p)}} - \sqrt{\frac{\delta^2 E_b}{20r_0^2(\delta\gamma + p)} - 1}\right]. \tag{11}$$

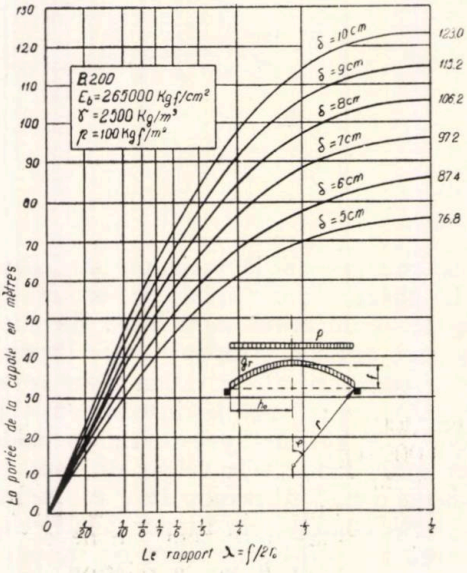


Fig. 2

Dans la fig. 2 on a tracé les courbes qui représentent la liaison entre la portée de la plaque et le rapport λ pour diverses épaisseurs de la plaque ($\delta = 5...10$ cm), en considérant un béton ayant la marque B 200 et une charge utile $p = 100$ kgf/m².

À l'aide de ces diagrammes on peut déterminer, pour une certaine portée et pour un rapport λ, l'épaisseur minimum nécessaire pour assurer les conditions de stabilité. On observe que pour les portées usuelles,

ayant jusqu'à 30 m, au cas du chargement à charge utile de 100 kgf/m², on peut employer — même pour des plaques ayant une épaisseur de 5 cm — des coupoles dont le rapport entre la flèche et la portée ne dépasse 1/10 (la condition de stabilité étant accomplie).

4. Variation des efforts d'après le méridien et la parallèle et de l'effort de précontrainte dans l'anneau d'appui, par rapport à la flèche des coupoles

a) Les contraintes normales sur des sections méridiennes dans la zone de la plaque voisine à l'anneau d'appui $\sigma^{p}_{\theta_0}$, produites par la charge uniformément répartie sur le plan horizontal, dépendent du rapport flèche-portée de la coupole $\lambda = f/2r_0$, et sont exprimés par la relation:

$$\sigma^{p}_{\theta_0} = -\frac{pk}{2} \cdot \frac{1 - 24\lambda^2 + 16\lambda^4}{(1 + 4\lambda^2)^2} \cdot \tag{12}$$

En considérant la valeur du coefficient k constante, il en résulte que pour une variation du rapport λ entre 1/2 et zéro, les efforts σ_{θ_0} varient entre $pk/2$ et $-pk/2$ (fig. 3). Mais, en réalité, la valeur du coefficient k décroit au fur et à mesure que la flèche diminue et donc les efforts $\sigma^{p}_{\theta_0}$ sont plus petits pour les coupoles aplaties que pour les coupoles hautes.

Pour le chargement du poids propre, en considérant toutefois sa variation en fonction de λ, les contraintes $\sigma^{gp}_{\theta_0}$ sont exprimées par la relation:

$$\sigma^{gp}_{\theta_0} = -\frac{\gamma r_0}{4} \cdot \frac{1}{\lambda}\left[1 - 4\lambda^2 - \frac{1}{2}(1 + 4\lambda^2)^2\right]. \tag{13}$$

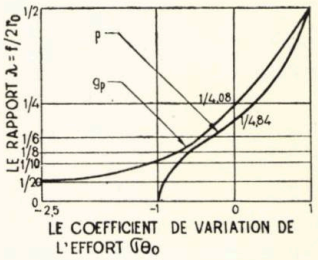


Fig. 3

Dans la fig. 3 on présente le diagramme de la variation des efforts $\sigma^{gp}_{\theta_0}$ avec le rapport λ. On observe que pour des rapports λ qui ne dépassent pas 1/10...1/12 les efforts $\sigma^{gp}_{\theta_0}$ gardent les mêmes valeurs que celles qui en résultent pour les coupoles hautes. Pour des valeurs plus petites du rapport λ on met en évidence des augmentations importantes qui peuvent péricliter tant la résistance que la stabilité de la coupole.

b) Les contraintes normales tangentes à la courbe méridienne, produites par les chargements répartis d'une manière uniforme sur l'horizontale, lorsque l'épaisseur de la plaque satisfait à la condition de stabilité (6) (k étant considéré constant), sont constants pour n'importe quelle valeur du rapport λ:

(14) $$\sigma^{p}_{\varphi_0} = -\frac{pk}{2}.$$

Dans ce cas, la réduction de la valeur du coefficient k avec la diminution de la flèche (due à l'augmentation du poids propre de la plaque — fig. 1) a comme effet la réduction des contraintes $\sigma^{p}_{\varphi_0}$ (fig. 4).

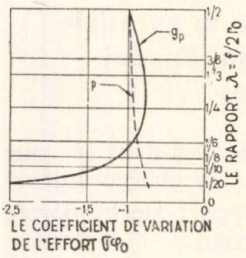


Fig. 4

Quant aux contraintes produites par le chargement résulté du poids propre:

(15) $$\sigma^{gp}_{\varphi_0} = -\frac{\gamma r_0}{8\lambda}(1 + 4\lambda^2)^2,$$

on peut faire les remarques ci-dessous.

Du diagramme présenté dans la fig. 4 il en résulte que si pour les rapports λ dépassant 1/7, les efforts $\sigma^{gp}_{\varphi_0}$ sont rapprochés comme valeur et plus petits que ceux qui correspondent au rapport $\lambda = 1/2$, pour des rapports qui dépassent 1/7, elles augmentent assez rapidement. Pour $\lambda = 1/10$, les contraintes $\sigma^{gp}_{\varphi_0}$ augmentent en proportion de 35,5%, et pour le rapport $\lambda = 1/20$, de 155%.

c) Si l'on étudie la valeur des contraintes σ_{φ_0} et σ_{θ_0} (fig. 3 et 4), chez les coupoles ayant l'épaisseur de la plaque établie par la condition de stabilité (6), on peut aboutir aux conclusions suivantes:

1° la réduction de la flèche ne produit pas une augmentation des contraintes σ_{φ_0} et σ_{θ_0} des chargements extérieurs au dessus des valeurs qui résultent chez les coupoles hautes;

2° les contraintes σ_{φ_0} et σ_{θ_0}, produites par le poids propre, se maintiennent entre les limites des valeurs des coupoles hautes, jusqu'à des rapports entre la flèche et la portée égaux à 1/7...1/10, et l'augmentation des efforts se produit seulement pour des valeurs plus petites de la flèche.

d) L'effort d'extension dans l'anneau d'appui, produit par des chargements uniformément distribués sur la surface (g):

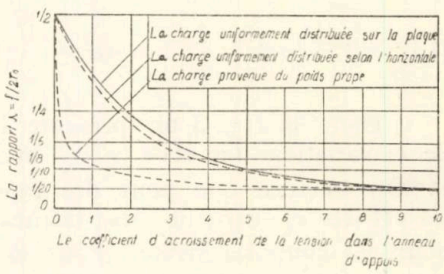


Fig. 5

(16) $$T_{0g} = \frac{gr_0^2}{4}\left(\frac{1}{2\lambda} - 8\lambda^3\right)$$

et l'effort d'extension produit par un chargement uniformément réparti selon l'horizontale (p)

(17) $$T_{0p} = \frac{pr_0^2}{4}\left(\frac{1}{2\lambda} - 2\lambda\right)$$

varient d'une manière identique, par rapport à la flèche (les différences y étant insignifiantes) (fig. 5).

Séparément, on présente la courbe de l'effort d'extension dans l'anneau d'appui (T_{0gp}), produit par le poids propre (fig. 2)

$$T_{0gp} = \frac{5}{32} \cdot \frac{\gamma^2 r_0^4}{E_b} \cdot \frac{(1 + 4\lambda^2)^3}{\lambda^3} (1 - 4\lambda^2). \tag{18}$$

Pour touts les essais, l'effort d'extension dans l'anneau d'appui augmente lorsque la flèche diminue. L'augmentation est très importante lorsque le rapport entre la flèche et la portée diminue sous la valeur 1/10...1/12.

Selon la variation des contraintes σ_{φ_0} et σ_{0_0} dans la plaque et selon l'effort d'extension dans l'anneau d'appui, il en résulte qu'on peut employer d'une manière raisonnable au point de vue de la stabilité et de la résistance, des coupoles dont le rapport entre la flèche et la portée diminue jusqu'à 1/10...1/12 lorsque les conditions fonctionnelles ou architecturales les imposeraient.

5. Effet de la force de précontrainte de l'anneau d'appui sur les contraintes dans les coupoles partiellement chargées

En réduisant l'hauteur de la coupole, il en résulte une importante augmentation de l'effort d'extension dans l'anneau d'appui, et dans une certaine mesure, des contraintes de compression en plaque selon la tangente à la parallèle, ce qui signifie que la force de précontrainte, nécessaire à la réalisation du stade de membrane (1), augmente d'une manière sensible lorsque la flèche diminue. Dans le cas où la plaque n'est que partiellement chargée, par exemple seulement par le poids propre, la fraction de la force de précontrainte qui est non-équilibrée, produit un deplacement radial de l'anneau d'appui de la coupole vers l'axe de rotation, et donc aussi des moments fléchissants dans le plan méridien. Pour les coupoles aplaties, où le rapport flèche-portée ne diminue pas sous la valeur 1/12, ayant une erreur qui ne dépasse 1 % [5], lorsqu'on néglige l'effet de la rotation de la plaque d'appui, la valeur des moments fléchissants par la force de précontrainte peut être déterminée par la relation [7]:

$$M_\varphi = 0{,}76 \sqrt{\delta r}\, R \sin\varphi \eta_{12}, \tag{18}$$

où $\eta_{12} = e^{-\lambda'} \sin\lambda'$ a une valeur maximum et égale à 0,3223 pour $\lambda' = s/0{,}76\sqrt{\delta r} = 0{,}8$ (s signifie la longueur de l'arc de méridien mesuré de l'appui jusqu'à la section où le moment fléchissant est maximum). Lorsque r et δ varient pour la même portée de la coupole, il résulte que le moment est maximum dans des sections différentes,

$$s = 0{,}304 \sqrt{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2\lambda} + 2\lambda\right)} r_0 .$$

Vu qu'avec la variation du rapport entre la flèche et la portée de la coupole (λ), la valeur de la longueur de l'arc reste très petite, on peut admettre dans la relation (18) que $\varphi = \varphi_0$.

En considérant la situation la plus défavorable, lorsque la force de précontrainte est supportée entièrement par la plaque de la coupole, il résulte, pour la pression R, les valeurs $R = T_{0g}/r_0$, respectivement $R = T_{0p}/r_0$.

En remplaçant les résultats obtenus dans la relation (18), on obtient pour le calcul de la valeur du moment flèchissant maximum, produit par

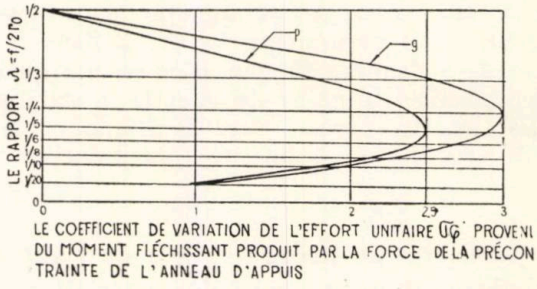


Fig. 6

la force de précontrainte qui est non-équilibrée par le chargement uniformément reparti sur la plaque, la relation:

$$M_{\varphi g,\,\max} = 0{,}2455 \sqrt{\frac{1}{k}} \cdot \frac{g r_0^2}{4} \left(\frac{1}{2\lambda} - 8\lambda^3 \right) \tag{19}$$

et pour le moment fléchissant maximum, du au chargement uniformément reparti, selon l'horizontale, la relation:

$$M_{\varphi p,\,\max} = 0{,}2455 \sqrt{\frac{1}{k}} \cdot \frac{p r_0^2}{4} \left(\frac{1}{2\lambda} - 2\lambda \right). \tag{20}$$

Les contraintes maximum, produites par les moments fléchissants, si l'on admet que la plaque se comporte dans le domaine élastique, selon la relation de N a v i e r, où l'on considère l'épaisseur de la plaque déterminée par la condition de stabilité, résultent:

a) pour le chargement uniformément distribué sur la plaque:

$$\sigma_{\varphi g,\,\max} = 0{,}2455 g \sqrt{k^3} \frac{1/2\lambda - 8\lambda^3}{(1/2\lambda + 2\lambda)^2}; \tag{21}$$

b) pour le chargement uniformément distribué selon l'horizontale:

$$\sigma_{\varphi p,\,\max} = 0{,}2455 p \sqrt{k^3} \frac{1/2\lambda - 2\lambda}{(1/2\lambda + 2\lambda)^2}. \tag{22}$$

Si l'on analyse les diagrammes de variation des contraintes maximum, représentées dans la fig. 6, il en résulte que l'effort de la force de précontrainte qui n'est pas équilibrée, diminue avec la réduction du rapport entre la flèche et la portée de la coupole.

En représentant ces courbes on a considéré le coefficient k constant. Et puisque sa valeur diminue avec la réduction de la flèche, il en résulte que les contraintes σ_φ diminuent encore. Mais nous mentionnons qu'on n'a pas tenu compte du fait qu'une partie de la force de précontrainte, non équilibrée, était supportée par l'anneau d'appui.

6. Conclusions

On peut obtenir la réalisation du stade de membrane aux coupoles aplaties en ce qui concerne la compatibilité du stade de membrane avec l'élément d'appui, par la précontrainte de l'anneau de base.

Les contraintes normales selon le méridien (σ_φ) et selon la parallèle (σ_θ), produites par des chargements uniformément répartis sur la plaque et par des chargements uniformément répartis selon l'horizontale, aux plaques sphériques, aplaties, restent dans les limites des valeurs correspondantes aux coupoles hautes, pour le cas où la flèche ne baisse pas sous 1/8...1/10 de la portée.

D'après les études effectués, on peut établir en quelle mesure la quantité de béton et d'armature augmente avec l'aplatissement de la coupole, en vue d'établir les solutions optimum.

Pour les portées habituelles (jusqu'à 30...40 m) les coupoles hautes, ayant un rapport entre la flèche et la portée plus petit que 1/5, et dont l'épaisseur de la plaque est déterminée par les conditions d'exécution, de 5...7 cm, sont surdimensionnées, l'acier et le béton n'étant que partiellement utilisés. Dans le cas des chargements symétriques, sans être nécessaire une augmentation de l'épaisseur de la plaque et une augmentation de la quantité d'acier consommé dans la plaque, on recommande à utiliser des coupoles en béton armé ayant le rapport flèche-portée égal à 1/8...1/12, la compatibilité de la déformation de la plaque et de l'appui, pour le stade de membrane, étant obtenue par la précontrainte de l'anneau de base.

La consommation d'armature prétensionnée dans l'anneau d'appui, pour les coupoles sphériques dont les flèches baissent jusqu'à 1/10...1/12 de la portée, augmente jusqu'aux limites acceptables et y est justifiée par une meilleure conduite sous les chargements de la plaque qui travaille seulement à la compression, par la possibilité de satisfaire les conditions fonctionnelles et architecturales et par la diminution du volume de béton et d'acier dans la plaque, comme suite de la réduction de l'hauteur de la coupole.

Institut Polytehnique de Jassy,
Chaire de Béton armé

BIBLIOGRAPHIE

1. Mihul A., Capatu C., *Realizarea stării de membrană la unele cupole de revoluţie prin pretensionarea inelului de bază.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1957, **III (VI)**, *1—2*, p. 217.
2. Гореншτейн Б. В., *К расчету оболочек вращения с предварительно напряженным опорным кольцом.* Строит. механика и расчет сооружений, 1960, *4*, стр. 43.
3. d'Elia P., *La precompressione delle cupole sferiche.* Giornale del Genio Civile, 1955, *9*, p. 557.
4. Гвоздев А. А., *Устойчивость тонких оболочек.* Бетон и железобетон, 1961, *10*, стр. 441.
5. Soare M., *Aplicarea ecuaţiilor cu diferenţe finite la calculul plăcilor curbe subţiri.* Ed. Acad. R. P. R., Buc., 1959.
6. Fornerod M. F., *Prestressed concrete Shell Roff Construction.* International Association for Bridge and Structural Engineering, Memories, Zürich, 1947, **VII.**
7. * * * *Инструкция по проектированию железобетонных тонкостенных пространственных покрытий и перекрытий.* Госстройиздат, М. 1961.

CONSIDERAŢIUNI ASUPRA CUPOLELOR SFERICE PLEOŞTITE CU INELUL DE REZEMARE PRECOMPRIMAT

(Rezumat)

Se studiază efectul variaţiei raportului dintre săgeată şi deschidere şi al precomprimării inelului de rezemare asupra stărilor de tensiuni în placa cupolelor sferice, încărcate parţial şi total, cu grosimea plăcii rezultată din condiţii de stabilitate.

Pe baza rezultatelor obţinute, se fac aprecieri asupra alegerii raportului dintre săgeată şi deschidere, în vederea obţinerii unor cupole cu caracteristici tehnico-economice.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

C. D. 691.327; 669.046.584.2

OBSERVATIONS CONCERNANT LES BÉTONS LEGERS À LAITIER EXPANSÉ ET LEUR UTILISATION À LA FABRICATION DES GRANDS PANNEAUX POUR PAROIS

PAR

AL. NEGOIŢĂ, GR. MUNTEANU et ECATERINA VARNA

Comunication présentée dans la session scientifique de l'Institut Polytechniqne de Jassy, 28—30 Septembre 1967

La valorification des laitiers de haut fourneau est un problème d'actualité à la suite de la mise en service de nouvelles capacités de production au combinats sidérurgiques de Hunedoara (C.S.H.) et de Galaţi. La station d'expandation du laitier fluide récemment installée à Hunedoara a une production anuelle de 100 000 m^3.

Dans le tableau 1 on présente les principaux composants chimiques (la silice, l'alumine, la chaux, le soufre et l'indice de basicité) de quelques laitiers expansés produits dans certains pays et chez nous, à Hunedoara. Il en résulte qu'au point de vue chimique, les laitiers du C.S.H. se rapprochent des laitiers hongrois et français, qui sont basiques, et se différencient de ceux autrichiens, qui sont acides.

La variation des principaux composants chimiques, la chaux et la silice, des lots de laitier expansé livré par C.S.H. durant la période 1965, 1966 et 1967, exprimés par l'indice de basicité ($CaO : SiO_2$), est indiqué dans les fig. 1, 2 et 3.

À coté de la présentation des résultats d'aprés Rüsch [1], qui permet à vérifier la normalité de la distribution dans le réseau de la probabilité, on a effectué un calcul d'interprétation statistique [2] d'où résultent les valeurs pour la moyenne arithmétique et le coefficient de variation.

Dans la fig. 4 on présente la variation de la résistance à l'écrasement établie d'après la méthode du cylindre (Ø 170 mm) pour le laitier expansé de la classe granulaire 7...15 mm livré par le C.S.H. durant la période Janvier-Septembre 1967. Cette caractéristique est très importante pour la

résistance à la compression des bétons. Les résultats de l'interprétation statistique sont mis en évidence par les valeurs du coefficient de variation (C_v) et de la moyenne arithmétique (m_{arithm}).

Tableau 1

Tableau comparatif concernant les composants essentiels des laitiers expansés de divers pays

Composants principaux	Laitiers américains d'après *T.* Wetaker	Laitiers autrichiens d'après Lincs (1966)	Laitiers hongrois d'aprés Rudnai Gyulá			Laitiers français NF.P 18-311	Laitiers roumains de C.S.H. 1967
			Dunaujváros	Diosgyör	Ozd		
Silice (SiO_2)	33...42	35...44	35,0...43,0	37,0...40,0	32,0...38,5	25...40	33...38
Chaux (CaO)	36...45	32...35	37,0...47,0	41,0...45,0	38,0...47,0	38...50	41...47
Alumine (Al_2O_3)	10...16	14...16	4,4...12,7	5,0... 6,5	6,4... 9,0	10...20	6...10
Soufre S	1... 3	—	0,8... 3,0	1,5... 2,5	—	—	1... 2
$I_b = \frac{CaO}{SiO_2}$	1,07...1,09	0,79...0,92	1,06...1,10	1,10...1,13	1,19...1,22	1,25...1,52	1,12...1,36

Note. Les normes „ÖNORM B 3314-55" (Hüttenbims) précisent que les laitiers qui contiennent CaO en proportion de 50% se décomposent, et les laitiers avec un contenu de CaO de 43% sont stables.

Compte tenu des recommandations des normes autrichiennes [3]...[5] et des préscriptions des normes françaises [6], concernant le contenu maximum en CaO des laitiers expansés, on présente dans le tableau 2 les valeurs maximum obtenues durant la période 1965...1967 sur les laitiers livrés par C.S.H.

En ce qui concerne la variation de la densité apparente des classes granulaires de laitier expansé à l'état sec et sans tassement, on donne dans le tableau 3 les limites de variation, autant pour la forme livrée par C.S.H., que pour les fractions théoriques établies dans la laboratoire.

Tableau 2

Contenu maximum en CaO

Période	Contenu maximum en CaO %
1965	47,25
1966	48,60
1967	47,32

Tableau 3

Densité aparente des classes glanulaires de laitier expansé

Classe granulaire	Densité apparente kg/m²	
	livrée par C.S.H.	sortée en laboratoire
0...7	900...1 100	—
7...15	750... 970	—
0...1	—	900...1 110
1...3	—	850...1 000
3...7	—	770... 925
7...15	—	680... 800

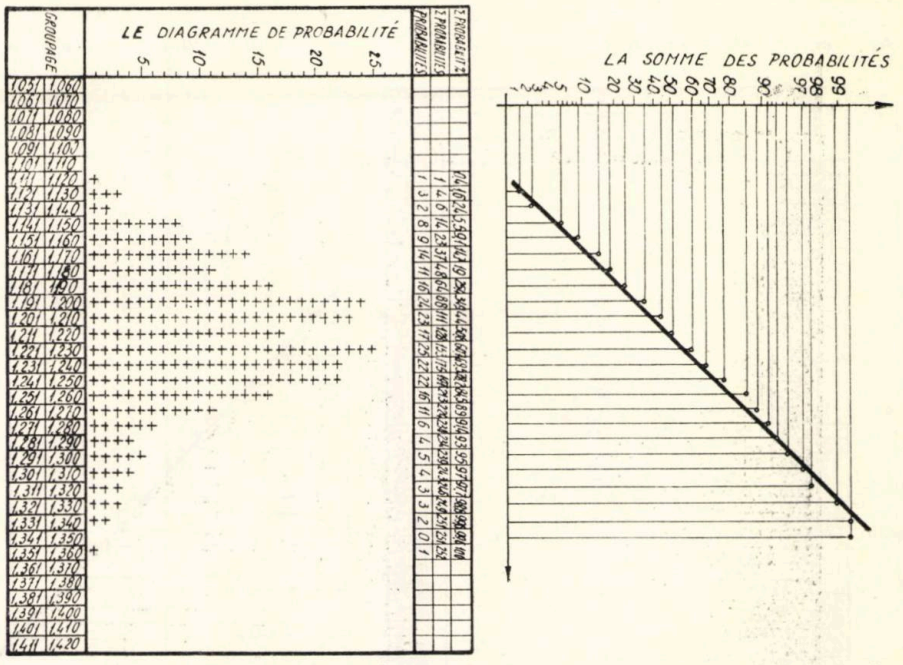


Fig. 1. — Interprétation de la variation de l'indice de basicité de laitier expansé au C.S.H. durant l'année 1965.

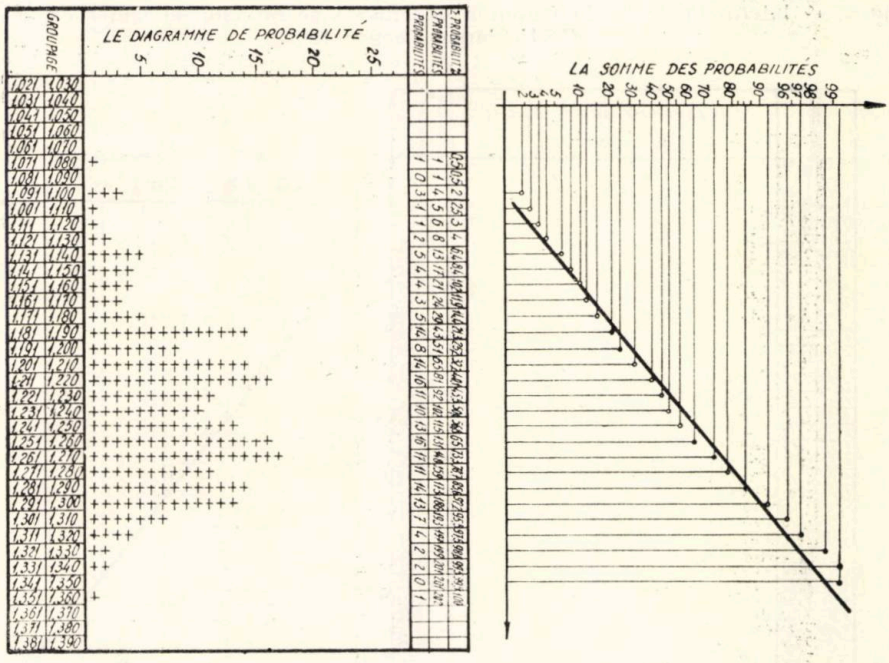


Fig. 2. — Interprétation de la variation de l'indice de basicité de laitier expansé au C.S.H. durant l'année 1966.

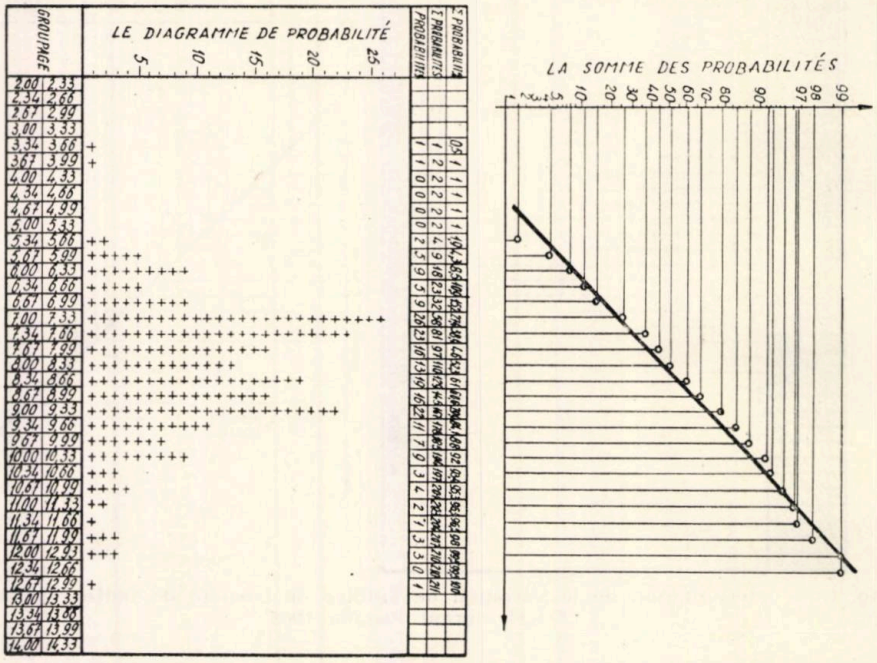


Fig. 3. — Interprétation de la variation de l'indice de basicité de laitier expansé au C.S.H. durant l'année 1967.

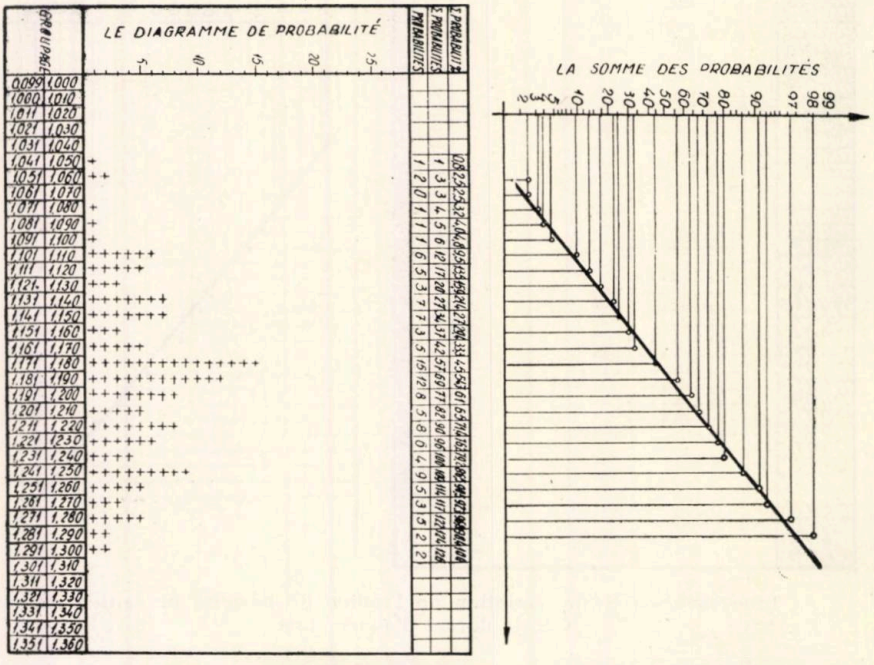


Fig. 4. — Interprétation de la variation de la résistance à la compression (écrasement) de la granularité 7...15 mm de laitier expansé au C.S.H. durant l'année 1967.

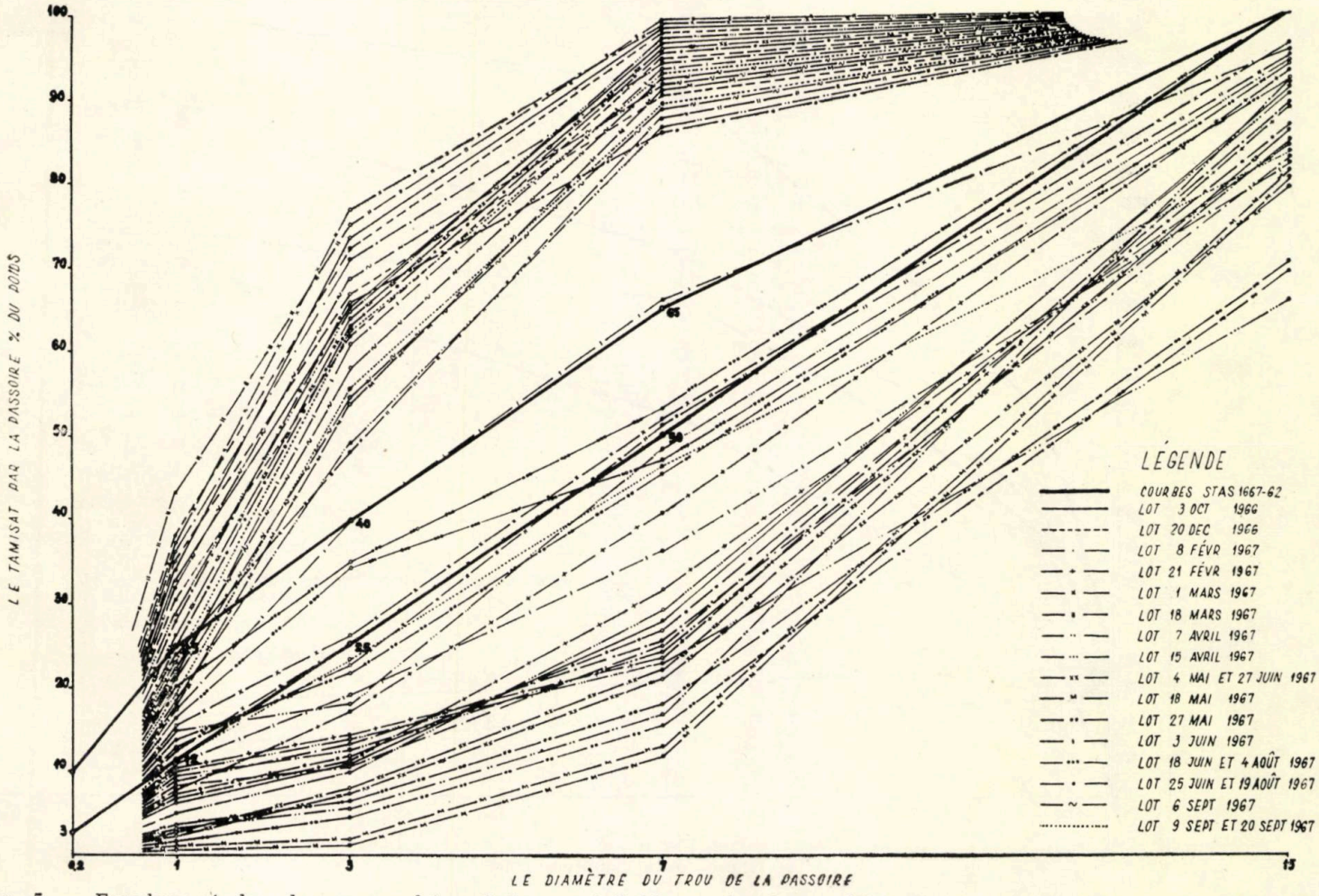


Fig. 5. — Encadrement des classes granulaires 0...7 mm et 7...15 mm des lots en laitier expansé de Hunedoara, production 1967, par rapport aux courbes granulométriques STAS 1667-62.

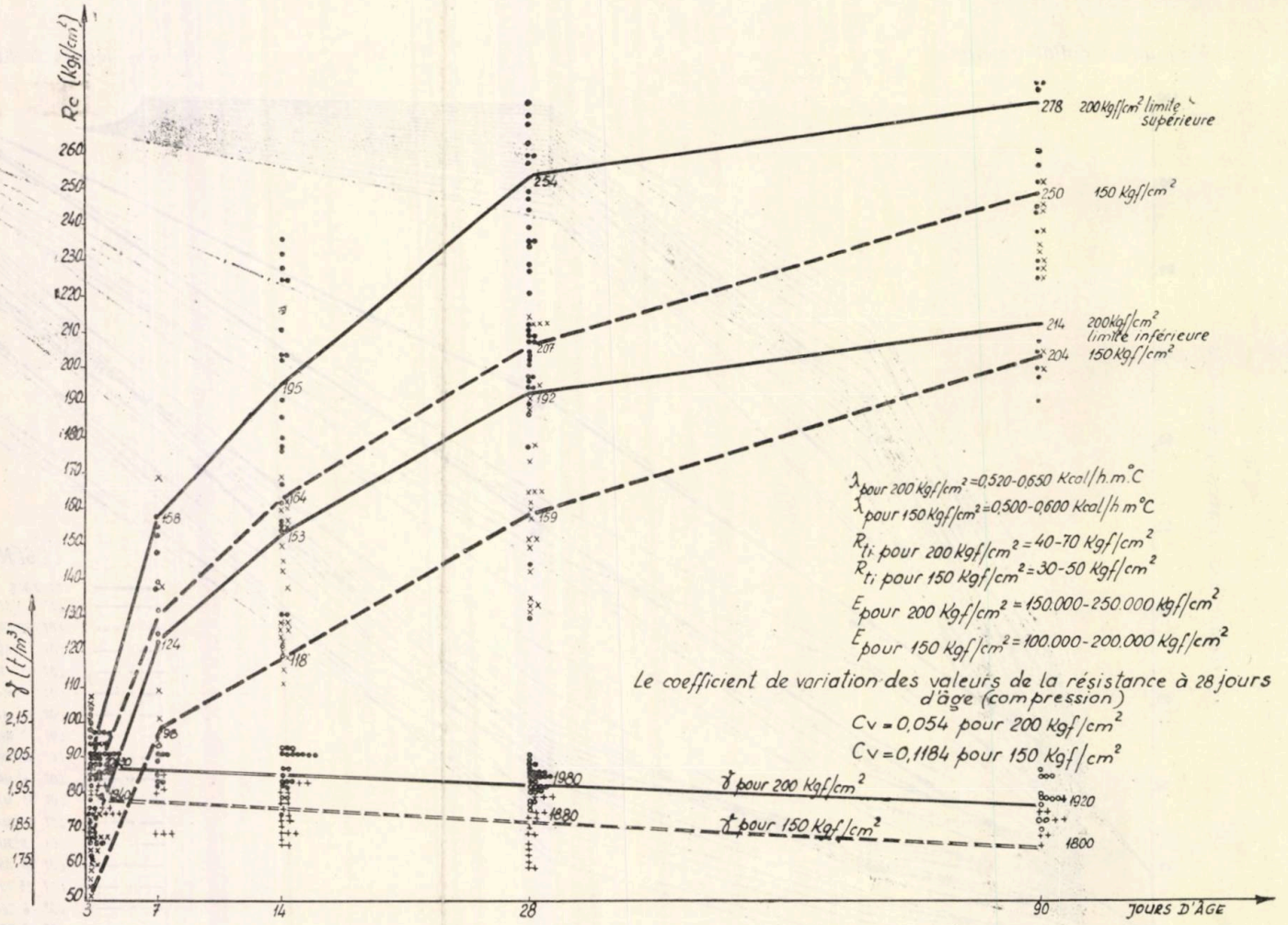


Fig. 6. — Variation des principales caractéristiques physico-mécaniques et thermiques des bétons à laitier expansé de Hunedoara ayant la résistance à la compression de 150 et de 200 kgf/cm².

La variation de la composition granulométrique des deux classes granulaires de laitier expansé, livré par C.S.H. en 1967, est présentée dans la fig. 5.

En consultant les domaines de leur variation granulométrique, on met en évidence la possibilité de créer, avec ces deux classes granulaires sous la formé livrée par C.S.H. une composition qui pourait conduire à la réalisation des bétons légers ayant la résistance à la compression de 150 et 200 kgf/cm², sans plus faire passer par le passoire sur le chantier, la classe granulaire 0...7 mm.

À la préparation de ces bétons, la partie fine (0...3 mm) a été assurée autant par le contenu naturel des deux classes granulaires de laitier expansé sous la forme livrée couramment par C.S.H., que par l'addition directe du sable de cariére.

Les recherches effectuées durant la période 1965 et 1966 ont démontré que l'utilisation de la classe granulaire 15...30 mm de laitier expansé, ayant da ns sa structure une multitude de pores ouverts et grands de même que des résistances à l'écrasement inférieures par rapport à la classe granulaire supérieure 7...15 mm, n'est pas indiquée pour obtenir des bétons ayant la résistance à la compression supérieure à 150 kgf/cm².

Le dosage en ciment a été de 350 kg/m³, étant donnée la protection anticorrosive des armatures éventuelles placées dans le beton.

Les bétons dont on a étudié la résistances à la compression ne diffèrent pas quant à la composition, mais seulement en ce qui concerne leur degré de compactité. Pour obtenir une résistance élevée à la compression on a cherché à maintenir une densité apparente constante d'environ 1 940 kg/m³ en état frais, la structure qui en a résulté étant semicompacte, tandis que pour réaliser une résistance à la compression de 200 kgf/cm² on a cherché une meilleure compactité, ce qui a conduit à l'obtention d'une structure compacte d'une densité apparente en état frais d'environ 2 030 kg/m³, le raport a/c étant maintenu à la valeur 0,6. La fig. 6 indique les principales caractéristiques physico-mécaniques et thermiques des betons.

L'étude statistique de la qualité des bétons essayés a mis en évidence les résistances caractéristiques R_k, calculées selon les indications prévues par STAS 1 275, correspondant à une certitude pratique de 99,73 ; celles-ci remplissent la condition :

$$R_k > 0{,}7\, R_b\,;$$

pour $R_b = 150$ kgf/cm² résulte $R_k = 110$ kgf/cm² ;
pour $R_b = 200$ kgf/cm² résulte $R_k = 169$ kgf/cm².

Étant donné que les bétons légers étudiés ont été déstinés à la réalisation de grands panneaux pour parois, on a insisté d'une manière particulaire sur les déformations au retrait de ces bétons. La fig. 7 indique les variations de ces déformations, commençant par le septième jour après sa préparation, suivant la méthode optique [7], rapide [8], Ross et la méthode indiquée par STAS 2 833-51.

La section I.N.C.E.R.C. (Institut de Recherches en Bâtiments), Cluj, a effectué, toutefois, une verification du retrait final à longue durée suivant la méthode rapide, en obtenant pour le retrait de 360 jours d'âge la valeur moyenne de 0,368 mm/m.

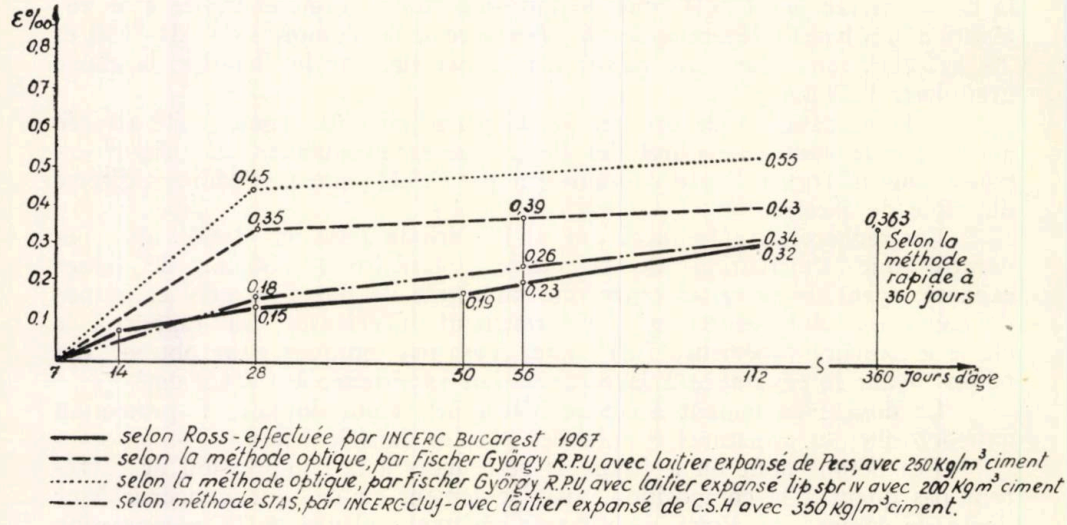


Fig. 7. — Diagrammes de déformation à la contraction pour béton à laitier expansé.

Conclusions

1. Au point de vue chimique, les laitiers expansés à C.S.H. en 1965, 1966 et 1967 sont basiques, la moyenne arithmétique de la variation de l'indice de basicité étant comprise entre 1,187 et 1,235.

Au point de vue de leur contenu en CaO, les laitiers expansés à C.S.H. peuvent être considéres stables par rapport au temps. La valeur maximum en chaux obtenue, est plus petite que celle tolérée par les normes étrangères [3], [5], [6], qui, compte tenu des conditions de stabilité par rapport au temps, admettent le pourcentage maximum de 50 %.

2. La moyenne arithmétique de 8,55 kgf/cm² pour la résistance à l'écrasement obtenue avec la classe granulaire 7...15 mm, à une compressibilité de 20 mm, assure la réalisation des bétons ayant la résistance à la compression de 150...200 kgf/cm².

3. Avec les classes granulaires 0...7 mm et 7...15 mm de laitier expansé, livrés couramment par C.S.H. et avec les autres composants (sable de carrière, ciment et eau), on peut assurer la réalisation des bétons légers avec la résistance à la compression de 150 kgf/cm² et une valeur moyenne de la densité apparente à 28 jours d'âge de 1 880 kg/m³ et à 90 jours d'âge de 1 800 kg/m³.

On peut obtenir aussi des bétons légers ayant la résistance à la compression de 200 kgf/cm², une valeur moyenne de la densité apparente à 28 jours d'âge de 1 980 kgf/cm² et à 90 jours d'âge de 1 920 kgf/m³.

4. À l'établissement du projet et à l'assemblage des éléments en béton léger à laitier expansé il est nécessaire de tenir compte des valeurs du coefficient de retrait de ces bétons, du moment de la mise en oeuvre et jusqu'à la valeur maximum.

Tenant compte également des propriétés thermiques favorables (poids réduit) par rapport aux bétons lourds et même des considérents économiques (1 m³ laitier expansé coûte 14...18 lei à la station d'expandantion C.S.H.), l'utilisation des bétons à laitier expansé, pour les bâtiments, est indiquée.

Institut Polytechnique, Cluj

BIBLIOGRAPHIE

1. * * * *Recommandations pratiques unifiées pour le calcul et l'exécution des ouvrages en béton armé.* Anexe 4, T. I, ed. II, Comité Européen du Béton, Paris, Madrid, 1964.
2. Rancu N., Tövissi L., *Statistica matematică cu aplicaţii în producţie.* Ed. Acad. R.S.R., Buc., 1963, p. 1.
3. * * * Önorm B 3313. *Hochofenschlacke. Allgemeines.* Ausgabetag 31. Mai 1955, Fachnormenausschuss „Hüttenbaustoffe", S. 1.
4. * * * Önorm B 3314, Hüttenbims, Ausgabetag, 16. April. 1955, Fachnormenausschuss „Hüttenbaustoffe", S. 1.
5. * * * *Zuschlagstoffe aus Hochofenschlacke für die Bereitung von Beton.* Ausgabetag, 17. Dezember 1956, Fachnormenausschuss Hüttenbaustoffe", S. 1.
6. * * * *Béton et béton armé à laitier expansé.* NF P 18-311, Homologations succesives le 31 Juillet 1957 et le 28 Février 1961, pp. 1-2.
7. Fischer G. *BK 35—BK 500-as minöségü, teherhordó höszigetelö kohóhabsalafbeton összetétele és tulajdonságai.* Könnyübeton Konferencia, épitöipari Tudomáinyos Egyesület, Magyar Tudományos Akadémia, Épitéstudományi Bizottsága, Budapest, 1967, pp. 119-127.
8. Kruml F., *A Method Accelerated Determination of the Final Shrinkage in Dense Concretes Based on Lightweight and Heavy Aggregate.* Rapports du Colloque, *Méthodes d'essai et d'étude des bétons aux agrégats légers,* RILEM, 1967, Budapest, Proceedings of the Symposium, pp. 621-625.

OBSERVAŢII PRIVIND BETOANELE UŞOARE DE ZGURĂ EXPANDATĂ ŞI UTILIZAREA LOR LA FABRICAREA PANOURILOR MARI DE PEREŢI

(Rezumat)

După o scurtă trecere în revistă a caracteristicilor zgurelor expandate produse în diferite ţări se prezintă grafic şi analitic variaţia indicelui de bazicitate ($CaO : SiO_2$), conţinutul maxim de CaO şi rezistenţa la strivire pe probe cilindrice pentru zgurele expandante produse de C.S.H. în perioada 1965...1967. Se prezintă de asemenea rezultatele determinărilor granulometrice pentru sorturile 0...7 şi 7...15 mm în vederea utilizării lor la confecţionarea betoanelor cu marca 150...200 kgf/cm², pentru panouri mari.

Se dau indicaţii privind compoziţia, tehnologia de execuţie, variaţia principalelor caracteristici fizico-mecanice şi termice şi contracţia betoanelor de zgură expandată.

Explicația figurilor

Fig. 1. — Interpretarea variației indicelui de bazicitate a zgurei expandate la C. S. H. în anul 1955.

Fig. 2. — Interpretarea variației indicelui de bazicitate a zgurei expandate la C. S. H. în anul 1966.

Fig. 3. — Interpretarea variației indicelui de bazicitate a zgurei expandate la C. S. H. în anul 1967.

Fig. 4. — Interpretarea variației rezistenței la compresiune pentru zgura expandată cu granulozitatea 7...15 mm produsă la C. S. H. în anul 1967.

Fig. 5. — Încadrarea loturilor de zgură expandată la Hunedoara în 1967, în clasele granulare 0...7 mm și 7...15 mm, conform STAS 1 667-62.

Fig. 6. — Variația principalelor caracteristici fizico-mecanice și termice ale betoanelor de zgură expandată de Hunedoara, având rezistența la compresiune de 150 și de 200 kgf/cm^2.

Fig. 7. — Diagramele de deformație la contracție pentru betonul de zgură expandantă.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

D. K. 71

ZUM AÜSSEREN LÄRMPEGEL UND DESSEN VERMINDERUNGSMASSNAHMEN

VON

VIRGIL FOCŞA, ADRIAN RADU, MICA POPPEL, N. BOŢI, I. GAVRILAŞ
und LEOPOLD BIBOROSCH

Mitteilung an die wissenschaftliche Tagung der Technischen Hochschule, Jassy, 28 – 30. September 1967

1. Die Erfüllung der modernen akustischen Forderungen, wird heute als wesentliche Baubedingung angesehen.

Die auf der ganzen Welt veröffentlichen Arbeiten, ergaben als Ursachen des aüssern Lärms in den Städten: 66% Strassenverkehr, 9,8% Industrien, 9,8% Züge und Flugzeuge, 7,2% Lautsprecher, 7,2% Kinderlärme u. a.

Der von Wägen erzeugte Lärmpegel hängt von mehreren Faktoren ab, wie Verkehrsgeschwindigkeit, Verkehrsintensität, Wagenwartung, Pflasterart als auch von der Messzeit, die am meisten in Anspruch kommen.

Man bekämpft den Städtelärm indem man eine Verminderung bzw. Einschränkung der Geräuschquellen, ihrer Zahl und Pegel versucht, die Geräusch- und Schwingungserzeugenden Industrien in den nicht bewohnten Vierteln aufbaut und durch Bau- und Städteplänungsmassnahmen.

2. În der vorliegenden Arbeit, wollen wir auf Grund eigener Forschungsergebnisse, über den städtischen Geräuschpegel, die zum Teil statistisch interpretiert wurden, der Entwurfbearbeitung eine Reihe von wesentlichen zweckmässigen Grundlagen zur Verfügung stellen, sowohl um den vorhandenen Schallpegel zu kennen als auch sie für den Entwurf von neuen Wohnvierteln bekannt zu machen.

3. Die Schallpegelmessungen in den Wohnvierteln mit charakteristischen Strassen in Jassy, wurden auf Tonband, mittels einem omnidirektionellen Mikrophon aufgenommen. Der Schallpegel wurde am Ort mit einem deutschen L. S. M-2 Schallpegelmesser gemessen. Der Schallpegelmesser wurde mit Bewertungsfiltern nach DIN (dB_I) versehen, daher erfolgte die Betrachtung der Ergebnisse nach dem DIN 5065 Normen.

Das Mikrophon wurde in 1,25 m Höhe von der Erde und bei einem Abstand von 7,50 m von der Verkehrstrasse aufgestellt.

Im allgemeinen wurden die Schallpegelmessungen in den Stunden des Höchstverkehrs (10...11 Uhr morgens) bei Fristen von höchstens 27 Minuten ausgeführt. Die Werten welche man im Socola-Nicolina Wohnviertel erhielt, wurden durch Analysen in Frequenzbändern und statistisch bearbeitet, für eine Zahl von 5 Punkten, deren Ergebnisse graphisch dargestellt sind.

Zuletzt berechnete man für jeden der Messpunkten das Mittelwert des Schallpegels (m), die quadratische mittlere Abweichung (σ), den Variationskoeffizient (c_v) und den Asymmetriekoeffizient (β).

Die Versuchsergebnisse der Messungen, die man im Punkt *1* der Socolastrasse neben einem P + 4 Grossplattenblock machte (Abb. 1), wurden in der Kurve des von der Zeit abhängenden Schallpegels dargestellt (Abb. 2).

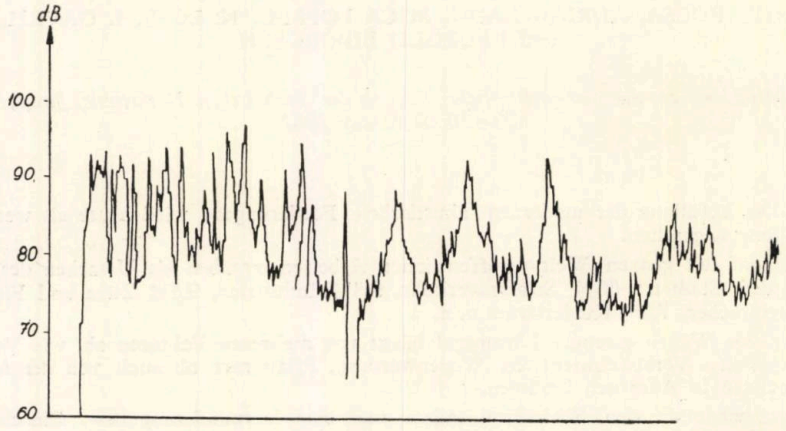


Abb. 2. — Zeitabhängigkeit des Schallpegels.

Das Histogramm (Abb. 3) ergibt dass der dem 80 dB Lärm entsprechenden Schallpegel eine maximale Zeitdauer nämlich 50,5 % aus der Gesamtzeit hatte indem der Lärm von 90 dB und 95 dB von kurzerer Dauer d. h. 13,3 % bzw. 3,2 % war.

Der arithmetische Durchschnitt des Schallpegels ist von 82,5 dB.

Da der Asymmetriekoeffizient (β) von 1,8 ist d. h. sehr weit von Null, ist kann man behaupten dass die Schallpegelverteilung nicht die Gauss'sche Kurve folgt, was auch aus der graphischen Darstellung der kummulierten Frequenz des Schallpegels im Wahrscheinlichkeitsnetz hervorkommt (Abb. 4) aus der sich keine Gerade ergibt.

Die graphische Darstellung von der Strassenlärmfrequenzen (Abb. 5) zeigt dass der Schallpegel maximale Spektralanteile hat, nämlich 92 dB, in Bereich der unteren Frequenzen bzw. bis 125 Hz, was sich dadurch er-

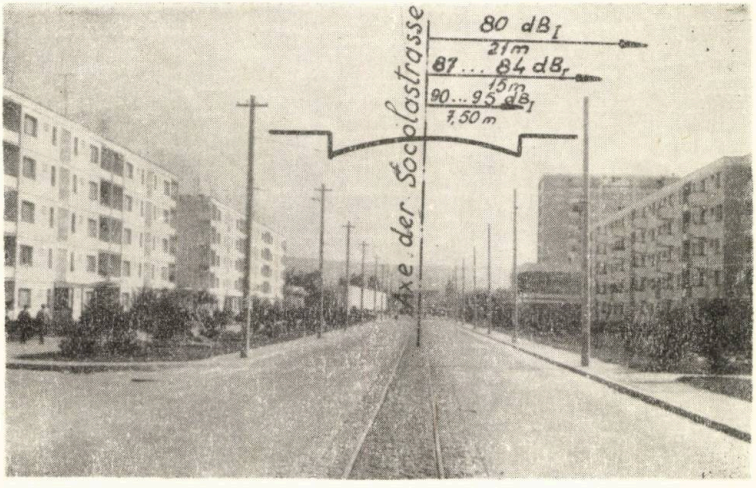


Abb. 1. — Socolastrasse — Punkt *1*, neues Viertel.

klären lässt, da die Messungen an einem Punkt ausgeführt wurden, der auf einer Strasse mit intensiven gemischten Verkehr liegt, dazu mit ungenügend bebauten Grünnflächen.

Der Lärmpegel ist gleich der von den Verkehrsadern in den Grossstädten (80...90 dB) obwohl in diesem Falle der ausgesprochene Verkehr

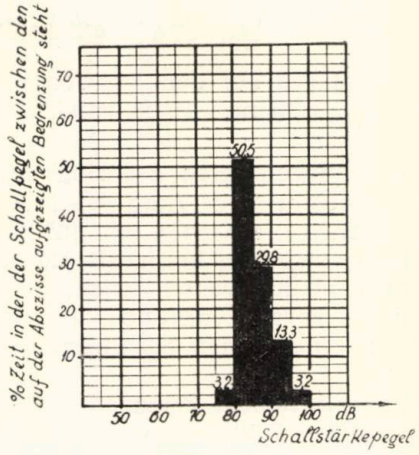


Abb. 3. — Das Histogramm des Schallpegels — Punkt *1*.

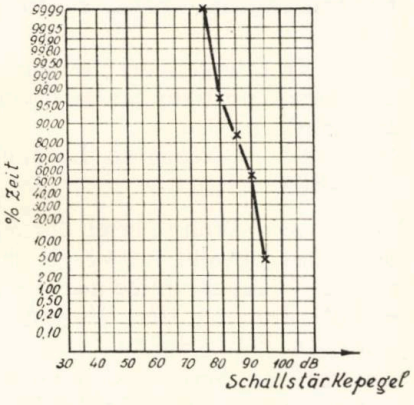


Abb. 4. — Die kummulierte Relativfrequenz des Schallpegels im Wahrscheinlichkeitsnetz—Punkt *1*.

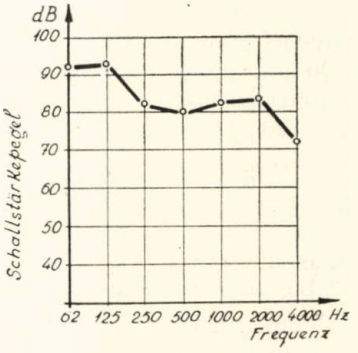


Abb. 5. — Die Frequenzkurve des Schallpegels.

ungefähr klein ist d. h. von 25 Wagen pro 5 Minuten in beiden Richtungen. Man hat die Schalldämmfähigkeit der Wohnungen durch Messungen studiert, die man im Innern einer Wohnung durchführte, bei offenen Fenstern mit denselben äussern Schallbedingungen wie am Punkt *1* Socola. Die

statistisch interpretierten Ergebnisse zeigten, dass der Schallpegel in diesem Falle zwischen 55 und 70 dB schwankt. Die in derselben Wohnung ausgeführten Messungen, bei geschlossenen Fenstern, ergaben dass der Shallpegel gegen den von STAS 6156-60 empfohlenen Werten zwischen 50...60 dB schwankt.

Insgesamt machte man akustische Messungen in 40 Punkten, die längs der Strecken mit hohen Verkehr, die in verschiedene Wohnvierteln verteilt waren.

Die akustische Messungen auf den Strassen wurden mit dem Schallpegelmesser L. S. M.-2, an 7,50 m; 15 m und 21 m Abstand von der Verkehrstrecke durchgeführt.

Die erhaltenen Ergebnisse zeigten, dass längs den Strassen mit gemischtem Verkehr von Strassenbahn und Auto wird sich der Schallpegel bei 7,50 m von der Verkehrsaxe zwischen 85...92 dB_I, bei 15 m zwischen 80 und 85 dB_I und bei 21 m zwischen 75...80 dB_I befinden. Wir wollen darauf hinweisen dass das Strassenbahngeräusch wichtige Werte erlangt etwa 92 dB_I falls die Strassenbahn bergauf geht und 80 dB_I bei bergab. Ebenfalls erhaltet man bei Kurven einen hohen Schallpegell (Abb. 6) wie z. B. an der 23 Auguststrasse.

Auf den Strassen mit hohem Personen- und Lastkraftwagenverkehr schwankt der Schallpegel bei 7,50 m von der Strassenachse zwischen 87 und 92 dB_I.

Auf den Strassen mit kleinerem Verkehr zeigten die Ergebnissen, dass der Schallpegel bei 7,50 m von der Strassenachse zwischen 75 und 80 dB_I schwankt.

Im Falle von Strassen mit gelegentlichen Kraftwagenverkehr war der Schallpegel von 78 dB_I bei 7,50 m. Bei den korridorartigen Strassen wurde eine Erhöhung des Schallpegels bis 92 dB_I erhalten.

Beim Registrieren der von dem Elektrizitätswerk erzeugten Lärm etwa 100 m weit, wurden Werte von 77 und 88 dB_I erhalten.

4. Von den obengenannten Ergebnisse die in 7 Wohnviertel der Stadt Jassy festgestellt wurden ist zu schliessen, dass obwohl im Vergleich zu anderen Städten nicht mit einem intensiven Verkehr gerechnet werden kann, ist dieser, sowohl äusserlich als auch im Inneren der Wohnungen, weit über den zulässigen Werten der akustischen Forderungen.

Wenn man die Uhrsachen des Lärms in der Stadt Jassy analysiert, erkennt man dass die Hauptquellen die Geräusche in den studierten Wohnvierteln: die Strassenbahn, die Lastkraftwagen, sowie die Busse sind. Die Lärmquelle mit industriellen Charakter ist das Elektrizitätswerk und die Eisenbahn in Socola-Nicolina Viertel.

Die ausgeführten Messungen, als auch die in den Fachschrifften dargestelten Fälle, gaben an dass zur Verminderung des Städtelärms folgende Massnahmen zu nehmen wären: a) Verkleinerung des Lärms an der Quelle; b) ein richtiges Entwerfen der Stadt; c) zweckmässige akustische Baulösungen

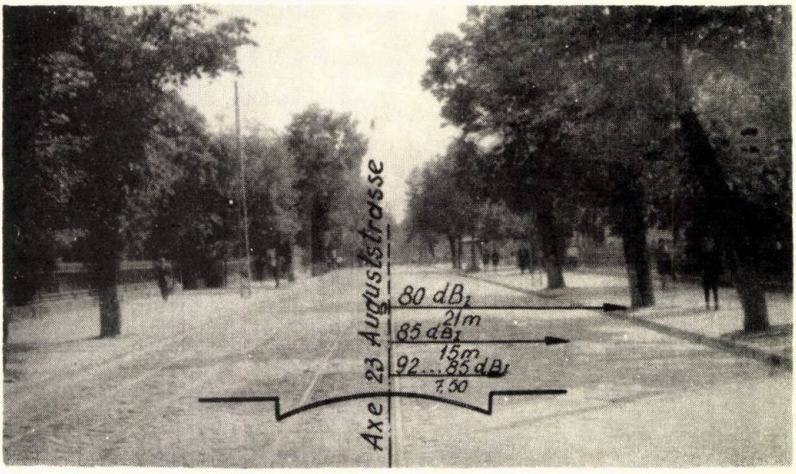


Abb. 6. — 23 Auguststrasse.

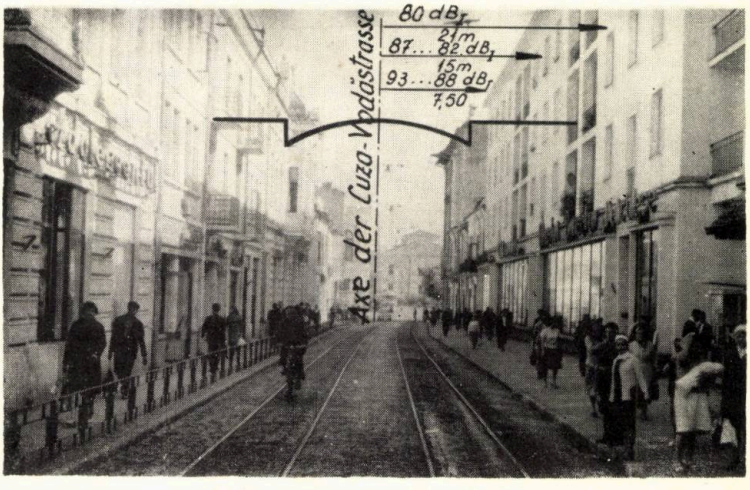


Abb. 7. — Cuza-Vodăstrasse.

bei Wohn- und Gesellschaftsbauten; d) Verminderung des Verkehrs und Industrieschallpegels.

Die grösste Zweckmässigkeit dieser Massnahmen erreicht man indem sie schon beim Entwerfen angewendet werden.

Im Falle der vorhandenen Wohnvierteln die man im Rahmen dieses Studiums analysiert, wird folgendes empfohlen: zur Verminderung des Lärms an der Quelle (Strassenbahn) müssen Verbesserung im Bau der Strassenbahnen, elastische Fundamente, Verbesserung der Federung, elastische Räder, Verbesserung der Zahnrädergetriebe als auch Verbesserungen im Bau des Strassenunterbaus und in der Art der Schienenhalterung eingeführt werden.

Der aus Lastwagen und Bussverkehr herkommende Lärm kann vermindert werden in den man Fahrzeuge die ein kleineren Lärm erzeugten anwendet als auch durch eine vernünftigen Begrenzung der Geschwindigkeit der Fahrzeuge in den Städten.

Als städtebauliche Massnahmen werden für die Wohnviertel Socola, Nicolina, P. Unirii, Păcurari, Tătăraşi, eine Vergrösserung der Grünnflächen vorgeschlagen, da Bäume und Gebüsche schallschluckend sind.

Ebenfalls werden auch Springbrunnen empfohlen, da die erhöhte Luftfeuchtigkeit den Strassenlärm vermindert.

Auf den korridorartigen Strassen wären die einzigen angebrachten Massnahmen die direkte Behandlung der Schallquelle (Strassenbahn) als auch die Anwendung der oben erwähnten Baumassnahmen bei dem Wiederaufbau der Strassenbahnstrecke (Abb. 7).

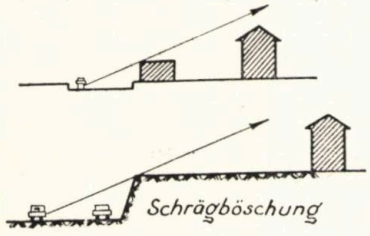


Abb. 8. — Lärmdämmendes Gesellschaftsgebäude.

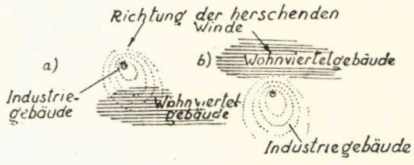


Abb. 9. — Richtung der herrschenden Winde.

Für die Strassen auf welchen grosser Autoverkehr herrscht wäre die Pflasterung der Strassen ratsam, da glattes Pflaster zur Verminderung des Lärms beiträgt sowie auch eine dichtere Bepflanzung an beiden Seiten der Strasse.

Für die Industrielärmquelle, die das alte Elektrizitätswerk bildet, wird ein Zaum von Schutzpflanzen ringsum des Baues, eine Einrichtung von Gründungen auf schalldämmenden Schichten, und der Abdichten der Türen und Fenstern mittels schallschluckenden Stoffen vorgeschlagen.

Zur Beseitigung der Eisenbahngeräusche von hohem Frequenzen werden auf der ganzen länge der Eisenbahnstrecke, die durch die Stadt geht, Pflanzungen von hohen Bäumen empfohlen, die eine gute Schirmung bilden, ebenfalls werden vor den Wohnhaüser höhe Gesellschaftsbauten

vorgesehen (Abb. 8). Will man einen annehmbaren Schallpegel erhalten, sollte man die Strassenbahn, dort wo es technisch möglich ist, durch stillere Verkehrsmittel ersetzen und den Kraftverkehr in die Rockadenstrasse aussenhalb der Wohnviertel versetzen.

Noch bei Entwerfung und Anordnung der Konstruktionen sind folgende städtebauliche Massnahmen zu beobachten:

a) Die Windrichtung soll von den Wohnvierteln zu den Industrieschallquellen orientiert sein und nicht umgekehrt (Abb. 10).

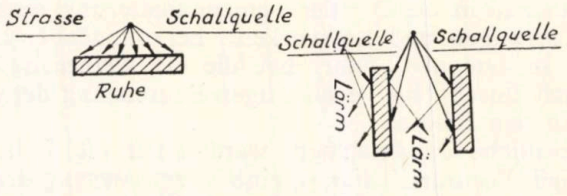


Abb. 10. — Verschiedene Lagen der Wohngebäude gegen die Schallquelle.

b) Die Errichtung der Industriebauten, Garagen, muss auf gesunden Grund stattfinden mit tief herabgesetzten Untergrundwasserquellen und mit tiefeingewurtzelten Baumpflanzungen.

c) Die Bauten werden mit der Längsseite gleichlaufend zur Strasse gewendet sein, mit einem Teil der Wohnungen gegen die ruhige Strasse wo die Schlaf- und Wohnzimmer angeordnet werden können (Abb. 10).

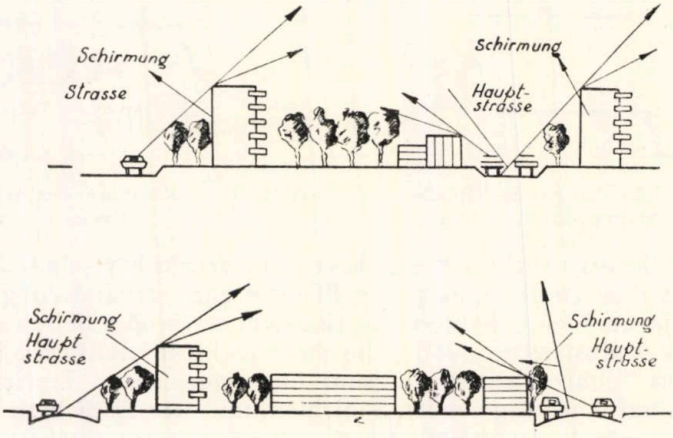


Abb. 11. — Die Schirmungsbautenverteilung im Wohnkomplex.

d) Es wird ein zweckmässiger Abstand von der Schallquelle zum betreffenden Gegenstand eingehalten. In diesem Falle, vermindert sich die Schallstärke um etwa 6 dB je verdoppelten Abstand; die Blockhaüser die

in Zukunft gebaut werden, sollen so weit wie möglich vom Fussteig errichtet werden. In Westdeutschland werden die Konstruktionen in kleinerem Abstand als 100 m nicht erlaubt. Selten sind aber Fälle, wo es trotzdem geschieht.

e) Die Anwendung von Schallschirmungen ist ein anderes Schutzmittel das durch Anordnung von Gesellschaftsbauten und Grünnflächen zwischen den Schallquellen und den Gebäuden die man schützen will (Abb. 11) verwirklicht wird.

Es werden weitere Forschungen beabsichtigt um eine Lärmkarte der Stadt auszuarbeiten und eine systematische Beobachtung des Schallpegels und seiner Verminderung, als Folge der oben genannten Massnahmen zu erhalten.

Technische Hochschule, Jassy,
Lehrstuhl für Bauwesen

LITERATURVERZEICHNIS

1. * * * *Combaterea zgomotelor şi vibraţiilor.* Vol. **III**, **IV**. Referate şi comunicări prezentate la a doua consfătuire, Bucureşti, 14—16 noiembrie 1963, Acad. R. S. România.
2. Ablamowicz J. u. a., *Protecţia împotriva zgomotelor în întreprinderile industriale.* Arhitectură, urbanism şi gospodărie orăşenească, 1962, *12.*
3. Bruckmayer F., *Handbuch der Schalltechnik im Hochbau. Shall-Lärm-Erschütterungsschutz, Raumakustik.* Franz Deuticke, Wien, 1962.
4. * * * *Recueil des éléments utils à l'établissement et à l'exécution des projets et marches des bâtiments en France.* Vol. **II**, *Sciences du bâtiment.* Section D_1. Acoustique, Centre Scientifique et Technique du Bâtiment, Paris, R. E. E. F — 584.
5. Focşa V., Radu A., *Clădiri civile şi construcţii industriale.* EDP, Buc., 1967, pp. 13—63.
6. Grumăzescu M., *Măsurători acustice în construcţii.* Ed. Acad. R. P. R., Buc., 1960.
7. Kinighin S. D. u. a., *Cercetări cu privire la zgomotul produs de transportul urban de pasageri.* Arhitectură, urbanism şi gospodărie orăşenească, 1962, *3.*
8. Lamure C. u. a., *Les niveaux des bruits au voisinage des autoroutes dégagées.* Cahiers du centre scientifique et technique du bâtiment 599, 1964, *71.*
9. Meister F., *Lärmdammung in Strasseverkehrs.* V.D.I. Zeitschrift, 1966, *23.*
10. Slavin I. I., *Zgomotul industrial şi combaterea lui.* Ed. tehn., Buc., 1967, (aus russisch übersetzt).
11. Willmat H., *Probleme des Gebiets-Stadt und Dorfplanung.* Berlin V. E. B., Verlag für Bauwesen, 1962.

NIVELUL ZGOMOTULUI EXTERIOR ŞI MIJLOACELE DE REDUCERE A ACESTUIA

(Rezumat)

Se prezintă, pe baza unei interpretări statistice, rezultatele măsurătorilor privind nivelul zgomotului exterior în principalele cartiere ale oraşului Iaşi.

Se indică principalele măsuri urbanistice şi constructive privind reducerea nivelului zgomotului exterior.

Explicația figurilor

Fig. 1. — Punctul *1* din str. Socola, raionul nou.
Fig. 2. — Variația în timp a nivelului de intensitate acustică ; punctul *1*.
Fig. 3. — Histograma nivelului de intensitate acustică; punctul *1*.
Fig. 4. — Frecvența relativă cumulată a nivelului de intensitate acustică în rețeaua de coordonate probabile; punctul *1*.
Fig. 5. — Variația nivelului de intensitate acustică maximă cu frecvența ; punctul *1*.
Fig. 6. — Strada 23 August.
Fig. 7. — Strada Cuza-Vodă.
Fig. 8. — Clădire social-culturală cu funcție de ecranare.
Fig. 9. — Direcția vînturilor predominante.
Fig. 10. — Diferite poziții ale clădirilor față de sursa de zgomot.
Fig. 11. — Clădiri de ecranare într-un complex de locuințe.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

C. Z. 625.8

ASUPRA CORELAŢIEI DINTRE TRAFIC ŞI DEFORMAŢII ÎN CAZUL A DOUĂ SISTEME RUTIERE FLEXIBILE REALIZATE CU MATERIALE LOCALE

DE

D. ATANASIU, VICTOR CIUBOTARU, D. GANJULA, HORIA ZAROJANU, BENONIA COSOSCHI, N. VLAD şi C. PLĂCINTĂ

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 28—30 septembrie 1967

1. Introducere

1.1. Creşterea traficului pe reţeaua rutieră a ţării noastre, atît ca număr de vehicule cît şi mai ales ca sarcină pe osie, necesită studierea şi adoptarea unor sisteme rutiere superioare, cu straturi de bază alcătuite din materiale tratate cu lianţi.

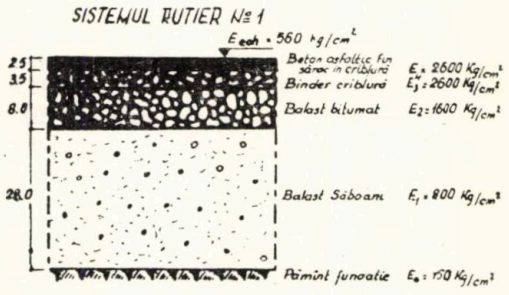


Fig. 1. — Sistemul rutier nr. 1.

1.2. În acest scop au fost executate şi încercate, pe pista inelară a staţiei de cercetări rutiere din Iaşi, două sisteme rutiere, cu modul de deformaţie echivalent de 560 kgf/cm² şi anume :

a) sistemul rutier *1* (fig. 1), ce are în alcătuirea lui un strat de bază din balast stabilizat cu bitum, alcătuit pe principiul modern al sporirii grosimii totale a straturilor asfaltice ;

b) sistemul rutier *2* (fig. 2), cunoscut în mare măsură atît din utilizarea în cale curentă cît şi din cercetarea pe pistă inelară [1]; a fost ales în scopul corelării datelor experimentale rezultate din încercarea ambelor sisteme pe pistă în comparaţie cu comportarea sub trafic real.

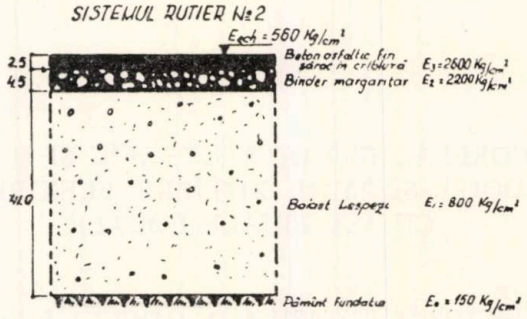


Fig. 2. — Sistemul rutier nr. 2.

2. Partea experimentală

2.1. Studiul comportării sub trafic simulat s-a efectuat în perioada 1966...1967, pentru un total de un milion de treceri ale roţilor cu pneuri, în profilul transversal al benzii circulate care are o lăţime de 69 cm [2].

2.2. Infrastructura [3] a fost alcătuită din argilă prăfoasă, cu indicele de plasticitate $I_p = 20\,\%$, umiditatea optimă de compactare Proctor normal fiind de 16,4 %, iar $\gamma_w = 1\,750$ kgf/m^3.

Compactarea cu maiuri manuale a asigurat un grad de compactare de 1,03 Proctor normal.

2.3. Straturile de fundaţie pentru ambele sisteme rutiere precum şi stratul de bază pentru sistemul rutier *2* au fost alcătuite din balast compactat cu plăci vibratoare. În fig. 3 se indică curbele granulometrice ale celor două tipuri de balast utilizate, domeniul granulometric reprezentat fiind cel indicat de instrucţiunile sovietice pentru amestecuri optimale de pietriş.

2.4. Stratul de bază al sistemului rutier *1* a fost realizat din balast de Săbăoani, cu dimensiunea maximă a granulelor de 30 mm, stabilizat cu 4 % bitum tip *D*. Rezistenţele pe cuburi au rezultat de 16,3 kgf/cm^2 la 22°C şi 3,5 kgf/cm^2 la 40°C.

În urma cilindrării cu compresor tandem a rezultat o suprafaţă deschisă, rugoasă.

2.5. Aprecierea comportării sub circulaţie a sistemelor rutiere s-a efectuat prin urmărirea deformaţiilor verticale remanente (inclusiv uzura) şi elastice la diverse etape de trafic.

Deformaţiile verticale remanente, în fiecare profil, s-au măsurat faţă de un plan de referinţă reprezentat de o grindă de aluminiu a cărei poziţie,

riguros constantă, a fost asigurată prin suporți metalici montați în pereții cuvei de beton a pistei inelare [1]. În cîte trei profile transversale pentru fiecare sistem rutier, s-au efectuat măsurători în 18 puncte pe suprafața îmbrăcămintii, în 5 puncte la nivelul stratului de bază (prin intermediul reperilor din fig. 4) și în 2 puncte la nivelul patului (reperii folosiți sînt reprezentați în fig. 5), precizia măsurătorilor fiind de 1/10 mm.

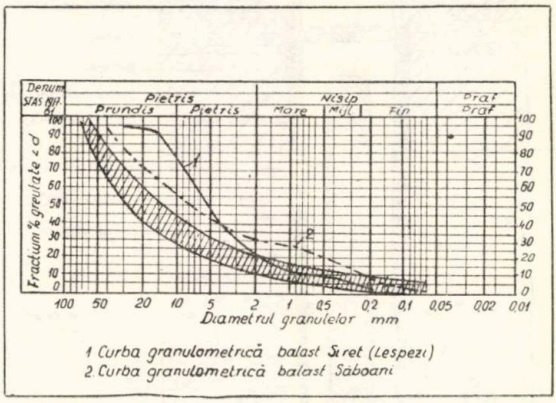


Fig. 3. — Curbele granulometrice ale balastului utilizat.

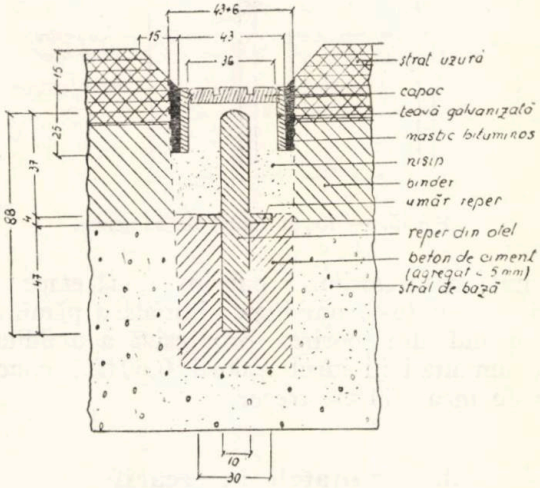


Fig. 4. — Reper mobil de suprafață.

Deflexiunile elastice s-au măsurat cu deflectometrul S.P.I. [1] sub sarcină statică de 2,3 tf, transmisă prin roți jumelate. Liniile de influență ale deflexiunilor elastice s-au determinat atît longitudinal, prin retragerea

succesivă a roţilor jumelate, poziţia deflectometrului rămînînd fixă, cît şi transversal, pentru abscise în afara suprafeţelor de contact, prin citiri efectuate în puncte materializate pe o grindă (fig. 6), precizia măsurătorilor fiind de 1/10 mm.

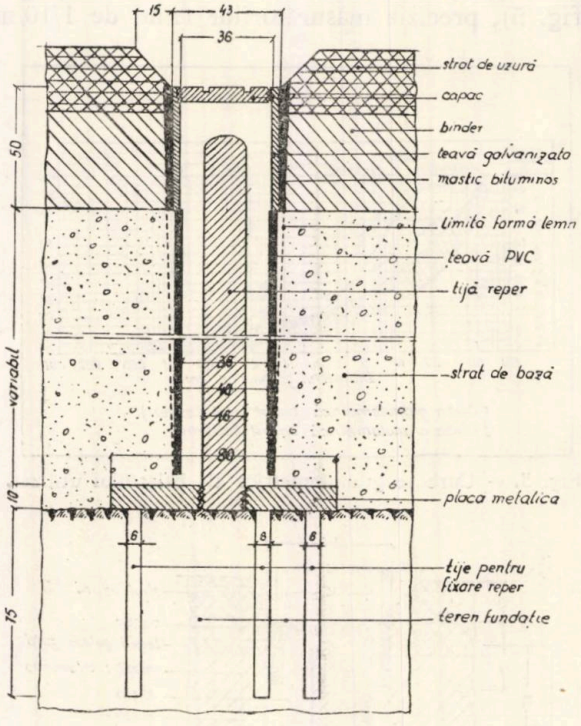


Fig. 5. — Reper mobil de adîncime.

2.6. Programul măsurătorilor a cuprins două etape: prima (A) pînă la 550 000 treceri, păstrîndu-se umiditatea iniţială a pămîntului de fundaţie, iar a doua (B) constînd din sporirea progresivă a umidităţii acestuia pînă la obţinerea unei umidităţi în jurul valorii $0{,}60\,W_c$, concomitent cu realizarea unui trafic de încă 450 000 treceri.

3. Rezultatele încercărilor

a) *Deformaţii remanente*

3.1. Pentru etapa (A) de încercare, deformaţiile remanente verticale înregistrate pentru ambele sisteme sînt acumulate numai de straturile de îmbrăcăminte şi de bază. Umflările prezentate de reperii de adîncime (fig. 7

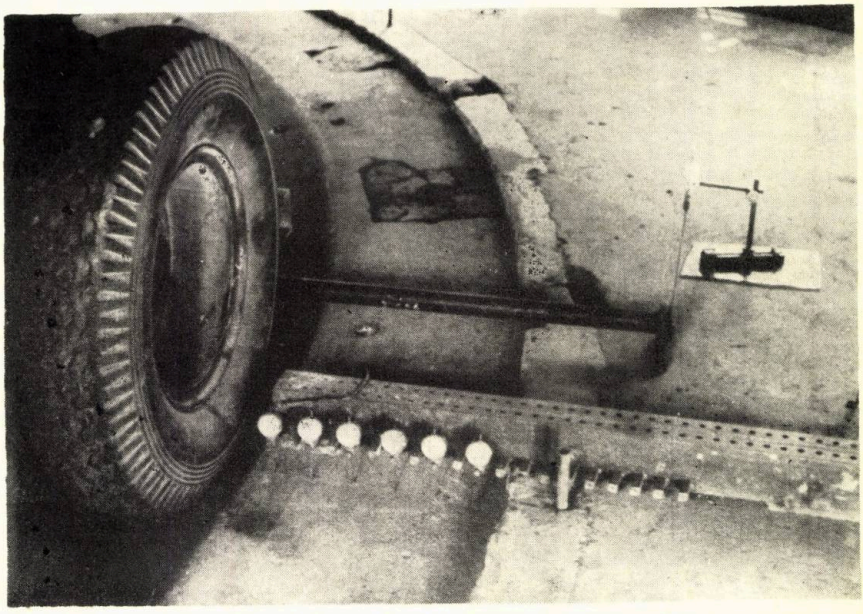


Fig. 6. — Sistem utilizat pentru măsurarea deflexiunilor transversale.

Tabelul 1

Etapa de trafic: 0...550 000 treceri în profil transversal

Nr. crt.	Sistemul rutier	Punctul pe suprafața îmbrăcămintii	Parametrii traficului suportat		Deformații remanente verticale măsurate 0,1 mm		Formula aplicată									
							$y = aN^b$					$y = a + b \log N$				
							Coeficientul a	Coeficientul b	$y_{calc}/y_{măs}$			Coeficientul a	Coeficientul b	$y_{calc}/y_{măs}$		
			$\eta_i = \frac{n_1}{n_2}$	Frecv. med. pond. f trec/min	la 5 000 trec.	la 550 000 trec.			Diferența maximă %	Diferența la etapa de trafic %				Diferență maximă %	Diferența la la etapa de trafic %	
										inițială	finală				inițială	finală
1	2	Media a 6 puncte	$\frac{6}{32} = 0{,}1875$	9,10	10,25	45,40	2,464945	0,248799	−14,9	−11,5	−4,0	−25,26100	13,122120	−55,3	−55,3	−10,6
2		$G - H_{10}$	$\frac{8}{32} = 0{,}2500$	9,60	12,00	53,00	2,951600	0,240228	+10,4	−7,3	−4,3	−29,71385	14,95860	−48,5	−48,5	−11,0
3		Media a 5 puncte	$\frac{12}{32} = 0{,}3750$	10,00	19,85	77,60	4,292100	0,233451	−12,1	−12,1	−3,8	47,80525	22,23470	−51,7	−51,7	−9,5
4		$F - F_9$	$\frac{12{,}5}{32} = 0{,}3906$	10,10	28,50	79,50	9,121400	0,173409	+11,0	−9,7	−3,5	(−30,29482)	(19,68577)	−27,3	−27,3	−6,0
5		$G - H_9$	$\frac{13}{32} = 0{,}4070$	9,90	36,50	82,00	15,723210	0,125967	−9,5	−8,2	−9,5	(−11,70634)	(15,86594)	−18,2	−18,2	−10,5
6		$G - H_7$	$\frac{13}{32} = 0{,}4070$	11,80	15,00	87,00	(3,014600)	(0,270959)	−6,1	+2,2	−2,5	−61,15726	25,89363	−57,3	−57,3	−11,0
7	1	$A - B_{11}$	$\frac{3}{32} = 0{,}0938$	7,25	3,00	30,00	0,334485	0,425026	+52,0	+52,0	+12,2	(−29,18219)	(12,15347)	+15,7	+9,5	−6,3
8		$D - E_5$	$\frac{5}{32} = 0{,}1563$	8,85	5,00	37,50	1,100675	0,313672	−16,8	+7,3	+3,5	−24,46061	11,83395	−70,2	−70,2	−9,5
9		$D - E_{10}$	$\frac{7}{32} = 0{,}2187$	9,40	14,50	66,50	(3,894550)	0,245423	−14,0	+0,7	−3,4	−36,86181	19,64862	−37,1	−37,1	−5,5
10		$A - B_{10}$	$\frac{10}{32} = 0{,}3125$	9,85	16,50	68,50	1,912409	0,292075	−12,0	−0,6	−5,5	(−63,59321)	(23,68990)	−26,8	−26,8	−11,8
11		$D - E_6$	$\frac{11{,}5}{32} = 0{,}3594$	10,00	14,50	72,50	2,986667	0,257249	+10,8	−6,5	−5,1	−47,02334	20,88350	−56,3	−56,3	−12,2
12		$A - B_7$	$\frac{13}{32} = 0{,}4070$	10,20	23,25	79,00	3,135214	0,262674	−15,3	−6,0	+0,3	−66,07389	26,12704	−23,4	−23,4	−6,9
13		$D - E_7$	$\frac{13}{32} = 0{,}4070$	13,40	27,00	102,50	7,358667	0,210967	−9,7	−3,3	−4,0	(−52,60542)	(27,23820)	−31,6	−31,6	−9,5

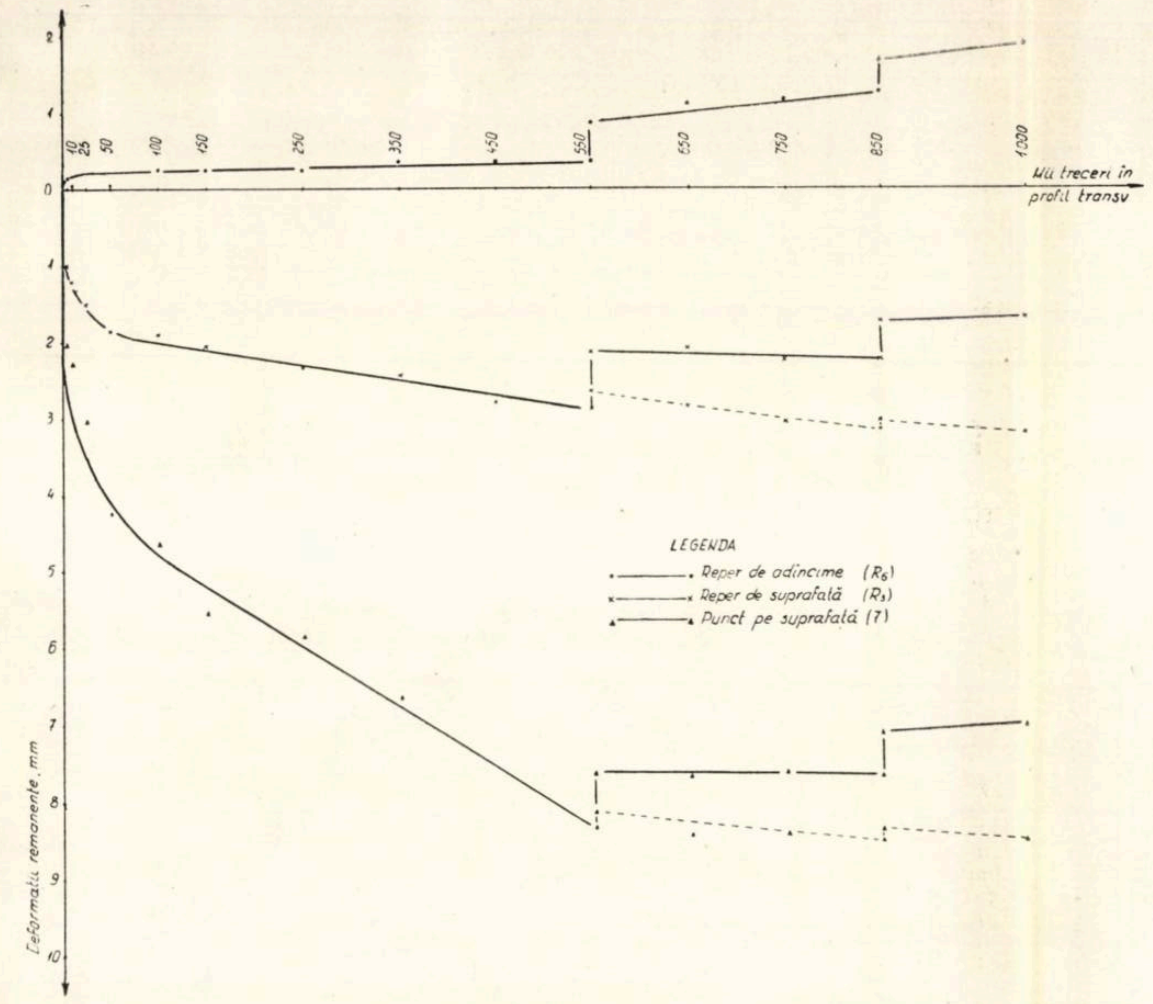


Fig. 7. — Variaţia deformaţiilor remanente funcţie de trafic pe sectorul *1*.

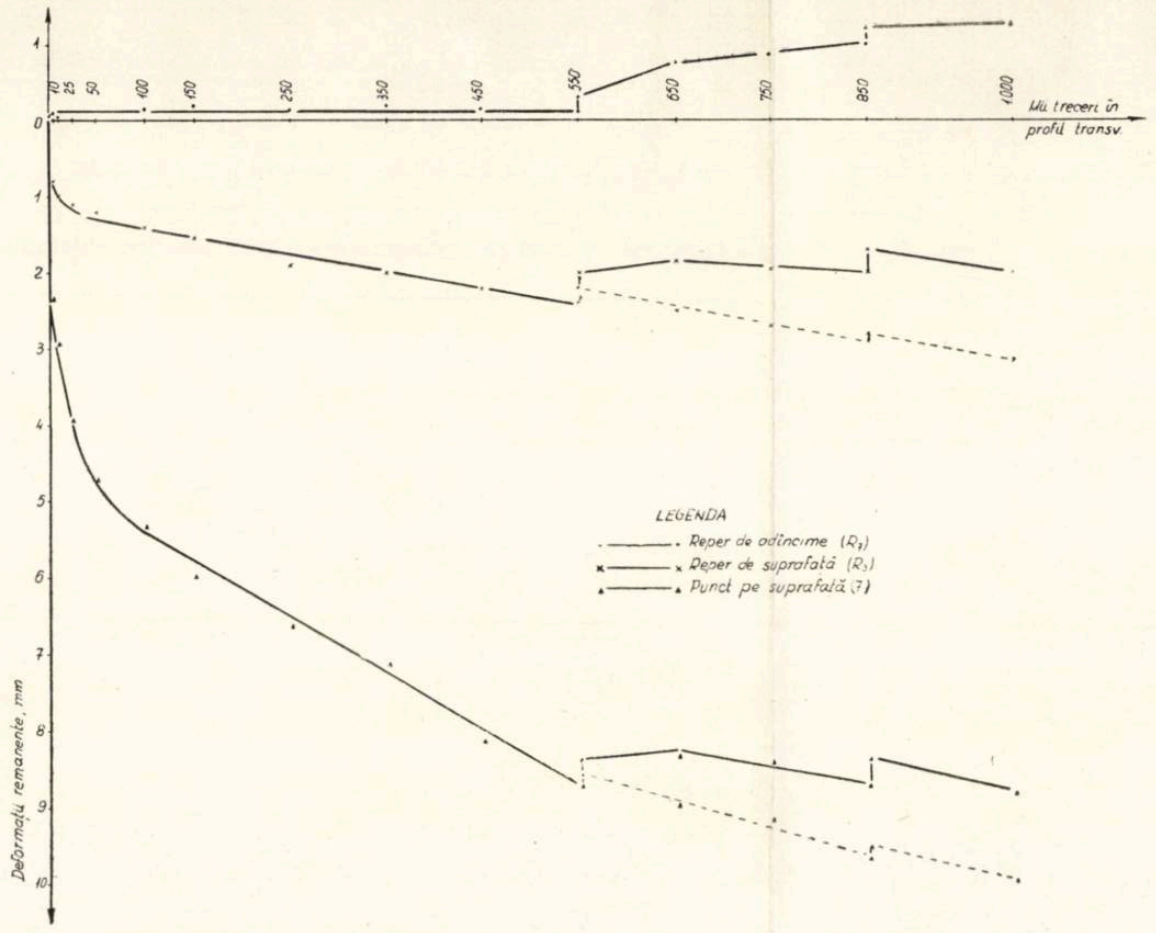


Fig. 8. — Variaţia deformaţiilor remanente funcţie de trafic pe sectorul 2.

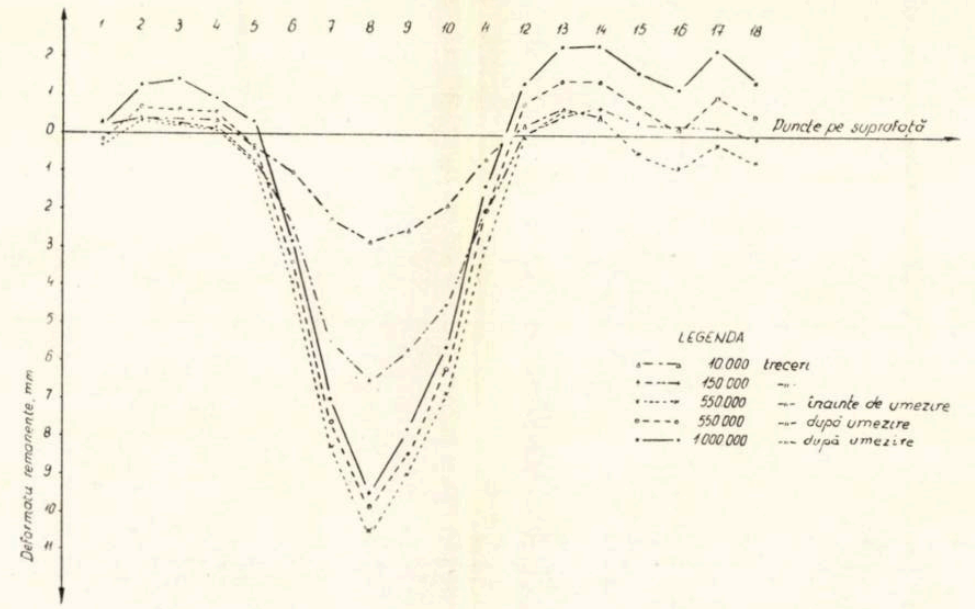


Fig. 9. — Variaţia deformaţiilor remanente în profil transversal pe sectorul *1*.

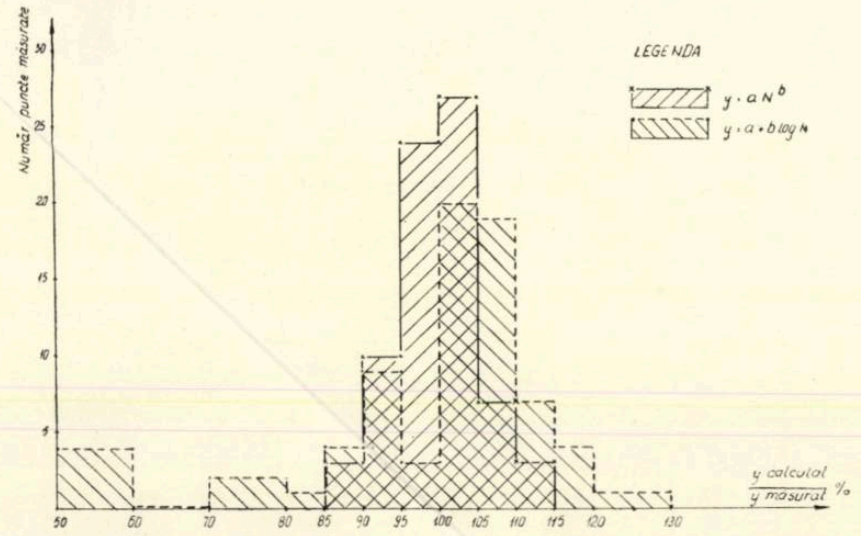


Fig. 10. — Comparaţia rezultatelor obţinute prin aplicarea celor 2 formule pentru calculul deformaţiilor remanente verticale (0...500 mii treceri în profil transversal) pe sectorul 2.

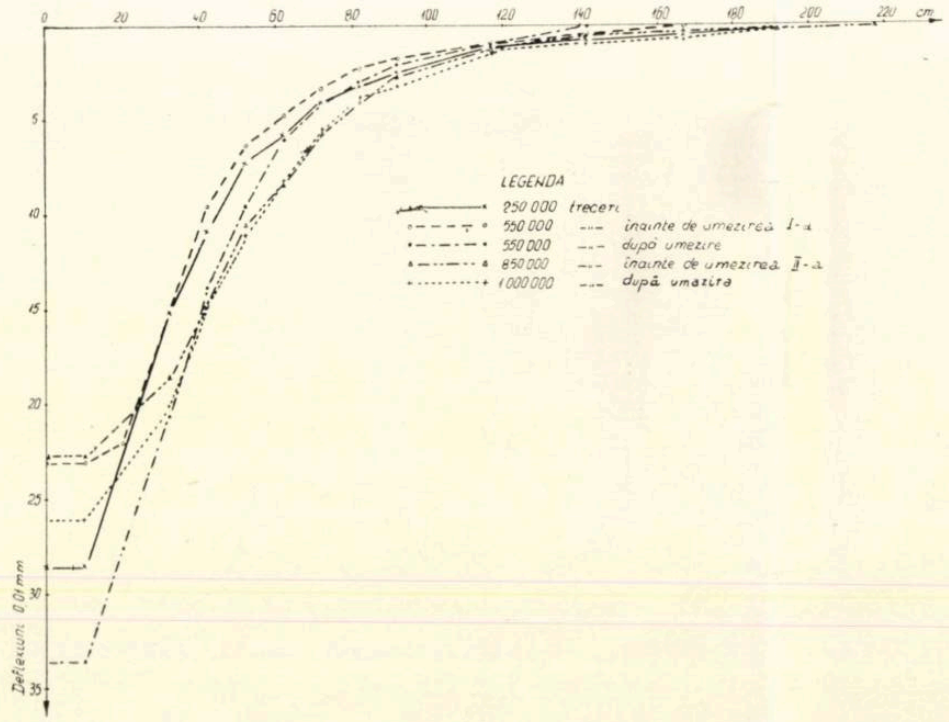


Fig. 11. — Variaţia curbelor deflectometrice longitudinale funcţie de trafic pe sectorul *1*.

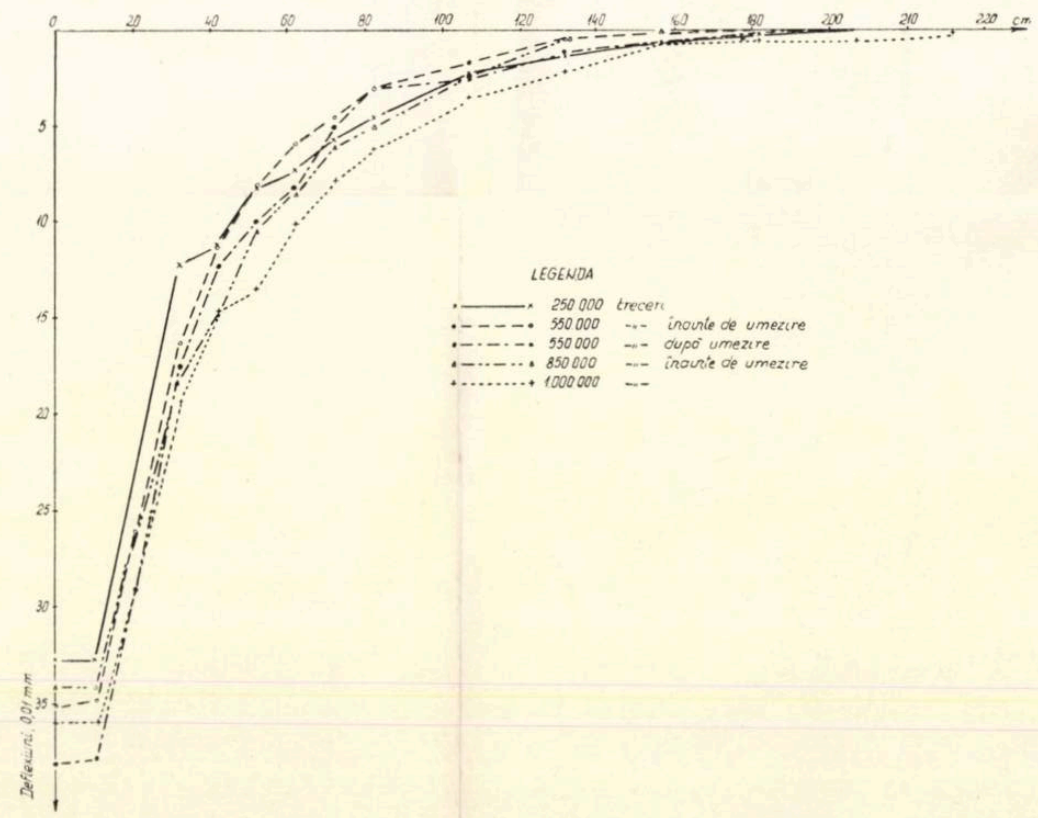


Fig. 12. — Variaţia curbelor deflectometrice longitudinale funcţie de trafic pe sectorul 2.

și fig. 8) fiind de ordinul de precizie al măsurătorilor, se poate presupune că în condițiile de compactare a pământului de fundație arătate mai sus, acesta nu a acumulat deformații.

După consumarea perioadei de compactare suplimentară prin circulație corespunzătoare la circa 50 000 treceri, se remarcă o reducere substanțială a vitezelor de acumulare a deformațiilor remanente.

Umezirile succesive în cadrul etapei a doua de încercare au produs umflări la toate cele trei nivele la care s-au efectuat măsurătorile, umflări care de regulă s-au păstrat, în cazul sistemului rutier *1*, chiar după suportarea traficului din etapa (B).

Curbele indicate prin linii punctate, reprezentînd, informativ, acumulările de deformații remanente totale inclusiv uzura, din care s-au scăzut deformațiile de umflare, indică o viteză superioară de acumulare a deformațiilor în cazul sistemului rutier *2*, practic egală cu cea din etapa (A) după consolidarea suplimentară prin circulație. Acest aspect confirmă rezultatele obținute în experimentările anterioare și anume că acumularea deformațiilor remanente are loc, la acest sistem rutier, în toate etapele de încercare [1].

Variația deformațiilor remanente funcție de trafic și umiditate indică o comportare corespunzătoare a sistemului rutier *1* chiar cînd umiditatea pământului de fundație atinge valoarea 0,6 W_c, sarcina pe osie fiind de mărime mijlocie (2,3 tf) dar de frecvență de aplicare ridicată (19,6 treceri pe minut).

Deformațiile remanente totale, inclusiv uzura, au fost, pentru punctele situate în axul benzii circulate, de 10,5...10,8 mm, în cazul primului sistem rutier și de 9,5...11,5 mm, pentru sistemul al doilea. Fig. 7 și fig. 8 reprezintă, pentru cîte un profil transversal ale celor două sisteme rutiere, deformațiile remanente ale unor puncte de pe suprafața îmbrăcăminții situate la 10 cm, respectiv 5 cm de axul benzii circulate.

3.2. Influența acțiunii sarcinilor repetate este scoasă în evidență de diagrama din fig. 9 în care variația deformațiilor remanente verticale în același profil transversal prezintă o alură similară cu cea a diagramei frecvențelor medii ponderate de aplicare a sarcinii (de 2,3 tf) pe roată [2].

3.3. Cunoașterea parametrilor traficului simulat (numărul total de treceri ale roții și frecvența medie ponderată de aplicare a sarcinii [2]) pentru diferite puncte de pe suprafața îmbrăcăminții a permis studierea variației deformațiilor remanente totale (deformații propriu-zise plus uzura prin circulație) funcție de traficul efectuat.

3.3.1. În tabelul 1 se prezintă comparativ pentru etapa (A) abaterile valorilor măsurate față de cele calculate prin formulele:

$$y = a + b \log N, \tag{1}$$

folosită de unii cercetători [4] și

$$y = aN^b, \tag{2}$$

în care: y — deformaţia remanentă, N — numărul de aplicări repetate a sarcinii pe aceeaşi urmă, a, b — coeficienţi determinaţi experimental şi care sînt proprii diferitelor sisteme rutiere.

Se poate observa că:

a) Formula (2) prezintă abateri mai reduse faţă de valorile măsurate pentru etapele de trafic iniţială (1000 treceri) şi finală (550000 treceri).

b) Abaterea maximă prezentată faţă de valorile lui y măsurate la diverse etape de trafic este înregistrată de asemenea de formula (1), de regulă fiind însăşi abaterea constatată la valoarea deformaţiei pentru prima etapă de trafic.

c) Funcţie de parametrii traficului şi anume $\eta = n_1/n_2$, în care n_1 este numărul de treceri pe aceeaşi urmă a pneurilor iar n_2 este numărul total de treceri printr-o secţiune oarecare a pistei, la o translaţie completă, şi frecvenţa medie ponderată (f) valorile lui a şi b înregistrează variaţii în sens constant, pe măsură ce parametrii amintiţi cresc. În paranteză s-au trecut valorile lui a şi b care se abat de la această regulă, cazuri în care se observă pentru y abateri evidente de la valorile normale.

Pentru formula (1) coeficientul a este de regulă negativ; ordinul de mărime al coeficienţilor a şi b este determinat de faptul că deformaţiile măsurate au fost exprimate în 1/10 mm.

După cum rezultă din fig. 10 şi pentru ansamblul etapelor de trafic din cadrul etapei (A) formula (2) redă mai bine evoluţia deformaţiilor remanente verticale.

3.3.2. Pornind de la constatarea că formula (1) nu poate reda faza iniţială a deformaţiilor remanente s-a efectuat o comparaţie a rezultatelor obţinute, prin aplicarea ambelor formule, pentru deformaţiile înregistrate după realizarea compactării suplimentare prin circulaţie.

Deşi superioritatea formulei (2) nu a mai rezultat tot atît de evidentă abaterile mai importante pentru valorile calculate cu formula (2) sînt prin exces şi deci aplicarea acestei formule conduce la valori acoperitoare pentru deformaţiile remanente.

b) *Deflexiuni elastice sub sarcini statice*

3.4. Deflexiunile elastice maxime măsurate în cîte un profil al sistemelor rutiere *1* şi *2* (tabelul 2), la diferite etape de trafic, arată că după primele 50000 de treceri deflexiunile au înregistrat variaţii nesemnificative în perioada consolidării suplimentare prin circulaţie, în rest existînd o corelare între starea de umiditate a infrastructurii cu traficul suportat pe de o parte şi cu deflexiunea maximă înregistrată pe de altă parte.

Din tabelul 2 rezultă totodată că sistemul rutier *1* are un modul de elasticitate superior sistemului rutier *2*, deşi dimensionarea s-a efectuat pentru module de deformaţie echivalente egale.

Folosirea reperilor menţionaţi anterior şi pentru măsurarea deflexiunilor elastice la nivelul stratului de bază şi a patului a condus la rezultatele din tabelul 3. Se observă că după 50000 treceri se înregistrează tot-

Tabelul 2

Valorile deflexiunilor maxime, ale razei de curbură longitudinale și ale modulului de elasticitate

Nr. crt.	Număr treceri roată în profil transversal	Sistemul rutier *1*			Sistemul rutier *2*		
		Deflexiunea (0,01 mm)	Raza de curbură ρ_{L-32} m	E kg/cm²	Deflexiunea (0,01 mm)	Raza de curbură ρ_{L-32} m	E kg/cm²
1	0	15,0	—	—	30	—	—
2	50 000	18,0	—	—	23	—	—
3	350 000	27,3	464	4 650	31	238	4 100
4	550 000 î. u.	23,0	662	5 520	35	272	3 630
5	550 000 d. u.	33,5	394	3 790	38	250	3 340
6	850 000 î. u.	22,7	1 230	5 600	34	327	3 730
7	1 000 000	28,1	854	4 520	36	349	3 520

Tabelul 3

Deflexiuni maxime la nivelul suprafeței îmbrăcămintii, stratului de bază și a patului

Nr. crt.	Sistemul rutier	Număr treceri roată în profil transversal	Deflexiunea (0,01 mm)			Lungimea liniei de influență m		
			la nivel supraf.	la nivel strat bază	la nivel pat	la nivel supraf.	la nivel strat bază	la nivel pat
1	*1*	0	15.0	27.3	0.0	1.50	1.50	0
2		50 000	18.0	14.8	0.0	1.75	1.75	0
3		350 000	27.3	23.8	11.2	1.90	1.70	0
4		550 000 î. u.	23.0	23.3	9.7	1.90	1.90	1.90
5		550 000 d. u.	33.5	31.5	9.8	1.70	1.90	2.20
6		850 000 î. u.	22.7	18.5	13.5	1.90	1.90	2.40
7		1 000 000	28.1	30.0	10.3	2.10	2.10	2.20
8	*2*	0	30.0	20.2	5.5	0.75	1.50	1.50
9		50 000	23.0	23.3	5.2	1.50	1.75	2.00
10		350 000	31.0	30.7	15.0	2.10	2.10	1.80
11		550 000 î. u.	35.0	29.5	11.8	1.60	1.80	1.60
12		550 000 d. u.	38.0	37.5	16.0	1.80	2.10	2.10
13		850 000 î. u.	34.0	33.7	14.3	1.60	2.30	2.30
14		1 000 000	36.0	32.8	11.7	2.10	2.10	2.10

deauna valori inferioare ale deflexiunii și valori egale sau mai mari ale lungimii liniei de influență, pentru straturile situate mai în adîncime.

Studiul comparativ între cele două sisteme rutiere arată că efectul modulului de elasticitate global (echivalent) al sistemului rutier *1* se traduce prin comportare superioară la toate cele trei nivele în sensul unor deflexiuni elastice inferioare sub aceleași solicitări date de traficul suportat pe pista inelară.

În fig. 11 și 12 sînt reprezentate liniile de influență longitudinale ale deflexiunilor elastice pentru cîte un profil al celor două sisteme rutiere.

3.5. Necesitatea transformării în vehicule etalon a traficului real din cale curentă, face obligatorie cunoaşterea relaţiei dintre deflexiunile măsurate *in situ* sub sarcini statice diferite, pentru diverse alcătuiri ale sistemelor multistrat.

În acest scop s-au efectuat, în diferite etape de trafic, măsurători deflectometrice sub sarcini statice de 2,3 tf şi 3,3 tf, transmise prin roţi jumelate Pentru a se ţine seama de faptul că deflexiunile trebuie măsurate în perioadele defavorabile ale anului, măsurătorile s-au efectuat în etapele de încercare cu umiditate sporită a patului (0,6 W_c). Rezultatele înregistrate au o dispersie redusă (tabelul 4) deoarece de regulă eroarea medie pătratică (σ), considerată ca ecart tip calculat [5], are valori sub 10% din valoarea medie a deflexiunii pentru un sistem rutier ($\bar{s}$), şi majoritatea erorilor medii aparente ale valorilor individuale (v_i) sînt cuprinse între 0 şi $\bar{s}/10$.

Tabelul 4

Deflexiunile elastice sub sarcini statice de 2,3 t şi 3,3 t

Nr. crt.	Sistemul rutier	Numărul de treceri ale sarcinii în profil transversal	Sarcina pe roată t	Numărul măsurat. efectuate	Numărul măsurat. reţinute pentru calcul (n)	$\bar{s}$	Eroare medie pătratică σ	$\frac{\sigma}{\bar{s}}$ %	Erorile medii aparente ale valorilor individuale v: $0 \dots \frac{\bar{s}}{10}$	$\frac{\bar{s}}{10} \dots \frac{\bar{s}}{5}$	$\frac{\bar{s}}{5} \dots \frac{\bar{s}}{3}$
1	1	850 000	2,3	24	23	23,85	2,59	10,8	13	9	1
2			3,3	18	18	33,28	3,98	12,0	9	9	—
3		1 000 000	2,3	17	17	29,50	2,68	9,1	10	7	—
4			3,3	28	28	41,04	3,38	8,2	20	8	—
5	2	850 000	2,3	30	30	33,68	3,24	9,6	22	8	—
6			3,3	22	22	44,30	4,40	10,0	17	5	—
7		1 000 000	2,3	18	18	36,25	1,98	5,5	18	—	—
8			3,3	41	41	48,77	3,09	6,3	37	4	—

Notaţiile folosite : $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma (s_i - \bar{s})^2}{n-1}}$, $s = \frac{\Sigma s_i}{n}$, $v_i = s_i - \bar{s}$.

Rezultatele obţinute sub sarcini statice diferite au fost comparate cu cele date de formula OSJD [6]:

$$s_2 = \frac{p_2 D_2}{p_1 D_1} s_1, \tag{3}$$

în care s_1, s_2 sînt deflexiunile elastice sub două sarcini diferite iar p_1, p_2 şi D_1, D_2 sînt presiunile, respectiv diametrele suprafeţelor de contact, precum şi cu cele rezultate din formula:

$$s_2 = \frac{P_2}{P_1} s_1, \tag{4}$$

în care P_1, P_2 sînt sarcinile totale pe roată.

După cum rezultă din tabelul 5, transformarea deflexiunilor măsurate corespunzătoare unor sarcini mai reduse, în deflexiuni corespunzătoare vehiculului de calcul conduce în cazul formulei (3) la valori inferioare, iar în cazul formulei (4) la valori superioare și deci la valori acoperitoare.

Tabelul 5

Compararea deflexiunilor elastice măsurate cu cele obținute prin calcul

Nr. crt.	Sistemul rutier	Numărul de treceri ale roții în profil transversal	Sarcina statică sub care s-au efectuat măsurătorile t	Deflexiunea elastică înregistrată (0,01 mm)	Raportul deflexiunilor elastice $\frac{\bar{s}_{3,3}}{\bar{s}_{2,3}}$	Raportul dintre $\bar{s}_{3,3} / \bar{s}_{2,3}$ și valorile obținute prin aplicarea formulelor: (a)	(b)
1	*1*	850 000	2,3	23,85	1,395	0,975	1,162
2			3,3	33,28			
3		1 000 000	2,3	29,50	1,390	0,972	1,160
4			3,3	41,04			
5	*2*	850 000	2,3	33,68	1,315	0,917	1,095
6			3,3	44,30			
7		1 000 000	2,3	36,25	1,345	0,938	1,120
8			3,3	48,77			

Formulele cu care se face comparația:

(a) $\frac{p_2}{p_1} = \frac{3,3}{2,3} = 1,434$; (b) $\frac{p_2 D_2}{p_1 D_1} = \frac{5,5 \cdot 27,7}{5,5 \cdot 23,0} = 1,200.$

În cazul măsurătorilor efectuate pe pista inelară, abaterile obținute folosind formula (4) față de valorile rezultate din măsurători sînt mai reduse.

3.6. Evoluția efectului de dală funcție de trafic și etapele de umezire s-a studiat și prin analiza valorilor razelor de curbură longitudinale și transversale.

Razele de curbură calculate convențional au prezentat valori constant superioare la sistemul rutier *1*, ceea ce evidențiază un efect de dală superior față de sistemul rutier *2* (tabelul 6).

Raza de curbură în direcția longitudinală a fost calculată pentru o coardă de 64 cm evitînd în acest mod punctul de inflexiune al deformației îmbrăcăminții, iar în direcția transversală pentru o coardă de 20 cm, la care săgeata s-a măsurat la abscisa de 42 c n față de axul încărcării. Abscisele de 64/2 cm pentru calculul razei de curbură longitudinală (ρ_{L-32}) și

Tabelul 6

Evoluţia valorilor razelor de curbură funcţie de traficul total şi umiditatea infrastructurii

.Nr. crt.	Sistemul rutier	Raza de curbură ρ m	Treceri ale roţii în profil transversal, mii					
			350	550 înainte umez.	550 după umez.	650	850 înainte umez.	1 000
1	*1*	ρ_{T-42}	455	582	357	807	625	625
2		ρ_{L-32}	464	662	394	878	1 230	854
3	*2*	ρ_{T-42}	278	294	227	500	263	227
4		ρ_{L-32}	238	272	250	287	327	349

42 cm pentru cel al razei de curbură transversală (ρ_{T-42}) au fost fixate ţinînd seama că la măsurarea liniei de influenţă a deflexiunii transversale, prima citire este posibilă la distanţa de 32 cm de axul suprafeţele încărcate.

4. Concluzii

1. Deşi ambele sisteme rutiere experimentate pe pista inelară au fost dimensionate pentru un acelaşi modul de deformaţie echivalent (560 kgf/cm²), sistemul rutier *1*, avînd în structura sa un strat de bază din agregate de balastieră stabilizate cu bitum, posedă un modul de elasticitate mai mare, un efect de dală superior şi deci o capacitate superioară de suportare a traficului.

Rezultatele înregistrate confirmă utilitatea folosirii straturilor de bază stabilizate cu bitum, soluţie care apare economică datorită folosirii agregatului local de balastieră.

2. Comportarea sub trafic a sistemului rutier *2*, încercat pe pista inelară la 1 milion de treceri, reprezentînd un trafic global echivalent de 4 675 000 t cu o frecvenţă medie ponderată superioară, confirmă rezultatele cercetărilor anterioare (efectuate pînă la un trafic de 400 000 de treceri [1]) subliniind că deformaţiile remanente verticale se acumulează în toate etapele de încercare.

Sistemul rutier *2* se prezintă corespunzător circulaţiei chiar după 1 milion de treceri ale roţii de 2,3 t, în condiţiile de sporire a umidităţii, ceea ce îl recomandă pentru utilizarea sa în cazul unui trafic mijlociu.

3. Din măsurătorile efectuate pentru cele două sisteme rutiere flexibile menţionate mai sus, a rezultat că evoluţia deformaţiilor remanente verticale totale, inclusiv uzura, funcţie de traficul suportat, este redată mai bine de formula exponenţială (2) decît de formula logaritmică (1).

Coeficienții a și b reprezintă mărimi caracteristice ale fiecărui sistem rutier și variază cu traficul global pentru diferite frecvențe.

4. Folosirea formulei OSJD pentru transformarea deflexiunilor elastice măsurate sub sarcini statice mai reduse în deflexiuni corespunzătoare sarcinii de calcul, conduce la valori mai mici. Măsurătorile efectuate pentru cele două sisteme rutiere, în condiții de umiditate sporită a pământului din pat ($W = 0{,}6\ W_c$), arată că folosind formula (4) se obțin valori mai mari, acoperitoare, ale deflexiunii elastice.

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de drumuri și poduri
și
Stația de cercetări rutiere

BIBLIOGRAFIE

1. Atanasiu D. și colab., Bul. Inst. polit. Iași, 1965, **XI (XV)**, *1—2.*
2. Atanasiu D. și colab., Bul. Inst. polit. Iași, 1967, **XIII (XVII)**, *1—2.*
3. Preda N. și colab., Bul. Inst. polit. Iași, 1958, **IV (VIII)**, *3—4.*
4. Иванов Н. Н., *Обоснование расчетных параметров для нежестких дорожных покрытий.* Дориздат, М., 1952.
5. Léger Ph., *Les mesures de déflexion et leur interprétation,* A.I.T.B.T.P., 1966, *225.*
6. Nicolau M., Jercan S., Rev. Transporturilor, 1966, *7.*

SUR LA CORRÉLATION DU TRAFIC AUX DÉFORMATIONS DE DEUX SYSTÈMES ROUTIERS SOUPLES

(Résumé)

Pendant les années 1966—1967, dans la station des recherches routières de Jassy ont été expérimentés deux systèmes routiers souples exécutés avec des matériaux locaux, en vue d'établir la corrélation entre le trafic et les déformations rémanentes et élastiques.

La charge mobile de 2,3 t après 1 million passages sur la piste de la station est équivalente a 4,675 millions t sur une voie à deux bandes de circulation. Le système routier exécuté avec une couche de base en tout venant de ballastière enrobé avec du bitume atteste un bon comportement, ce qui résulte des déflexions élastiques réduites et d'un effet de dalle appréciable.

On y analyse l'application de la formule logarithmique connue pour le calcul des déformations remanentes et d'une nouvelle formule exponentielle, proposée par les auteurs, en prouvant la supériorité de cette dernière-ci.

En ce qui concerne les déflexions élastiques on établit, en effectuant des calculs statistiques, la proportionnalité entre la déflexion et la charge totale transmise par la roue.

Explication des figures

Fig. 1. — Système routier *1.*
Fig. 2. — Système routier *2.*
Fig. 3. — Courbes granulométriques des tout venant de rivière.
Fig. 4. — Repère au niveau de la couche de base.
Fig. 5. — Repère de profondeur.

Fig. 6. — Système utilisé pour la mesure des déflexions transversales.
Fig. 7. — Variation des déformations rémanentes en fonction du trafic (système routier *1*).
Fig. 8. — Variation des déformations rémanentes en fonction du trafic (système routier *2*).
Fig. 9. — Variation des déformations rémanentes au niveau de la surface de roulement (système *1*).
Fig. 10. — Comparaison des résultats obstenu par les deux formules utilisées pour le calcul des déformations rémanentes (système routier *2*).
Fig. 11. — Zone d'influence des déflexions à la surface du revêtement (système routièr *1*).
Fig. 12. — Zone d'influence des déflexions à la surface du revêtement (système routier *2*).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

C. D. 626,01

QUELQUES RECHERCHES SUR LA STABILITÉ DES CHEMINÉES D'ÉQUILIBRE

PAR

L. ESCANDE

1. Introduction

Dans cette brève rédaction, nous allons résumer certains résultats que nous avons obtenus dans nos recherches sur la stabilité des cheminées d'équilibre (fig. 1), qu'il s'agisse des chambres d'équilibre ordinaires ou des chambres d'équilibre comportant un étranglement dans l'ouvrage joignant celle-ci à la conduite forcée (fig. 2).

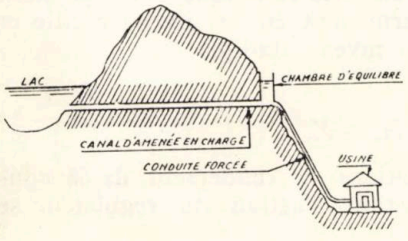


Fig. 1

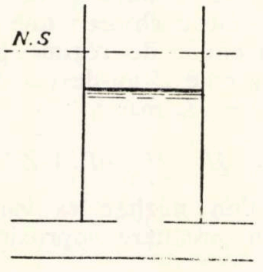


Fig. 2

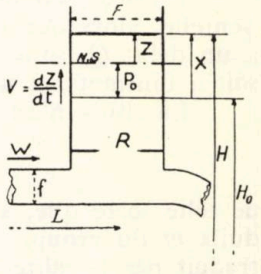


Fig. 3

Rappelons auparavant les notations classiques qui sont indiquées sur la fig. 3 :

L, f — longueur et section du canal d'amenée ;

W, W_0 — vitesses dans ce canal, à l'instant t et pour le débit Q_0 ;

F — section horizontale de la cheminée d'équilibre ;

Z — cote du plan d'eau dans la cheminée à l'instant t au-dessus du niveau statique ;

$V = \dfrac{dZ}{dt}$ — vitesse de ce plan d'eau à l'instant t ;

P, P_0 — pertes de charge dans le canal d'amenée à l'instant t et pour le débit Q_0 ;

R, R_0 — pertes de charge dans l'étranglement à l'instant t et pour le passage du débit Q_0 ;

$X = P_0 + Z$ — cote du plan d'eau dans la cheminée au-dessus du niveau dynamique de régime permanent, lui-même en contrebas de P_0 vis-à-vis du niveau statique ;

H, H_0 — les hauteurs de chute à l'instant t et pour un débit permanent Q_0 ;
$Q=FU$ — le débit des turbines : cette égalité définit U, homogène à une vitesse ;
$Q_0 = FV_0 = FU_0 = fW_0$ — définit V_0 et U_0 ;

$Z_* = W_0\sqrt{\frac{LF}{gF}}$ et $T = 2\pi\sqrt{\frac{LF}{gf}}$ — désignent l'amplitude et la période des oscillations sinusoïdales que provoquerai l'arrêt instantané et complet d'un débit de régime permanent, des turbinest égal à Q_0 si l'on négligeait la perte de charge.

On sait qu'on a l'habitude de faire intervenir ce qu'on appelle les grandeurs relatives définies par les relations :

$$z = \frac{Z}{Z_*}, \quad x = \frac{X}{Z_*}, \quad h = \frac{H}{Z_*}, \quad h_0 = \frac{H_0}{Z_*},$$

$$r = \frac{R}{Z_*}, \quad r_0 = \frac{R_0}{Z_*}, \quad p = \frac{P}{Z_*}, \quad p_0 = \frac{P_0}{Z_*}.$$

$$u = \frac{U}{U_0}, \quad v = \frac{V}{V_0}, \quad w = \frac{W}{W_0}, \quad t' = \frac{t}{T}.$$

2. Rappel de la théorie classique de la stabilité des chambres d'équilibre à section constante

Considérons un groupe hydroélectrique dont la conduite est issue d'une cheminée d'équilibre et qui débite sur un réseau séparé.

En général, les régulateurs interviennent pour que la puissance hydraulique reste constante tant que la puissance électrique du réseau demeure elle-même constante.

Dans ces conditions, supposons que, par suite d'une perturbation accidentelle, alors que le réseau absorbe une puissance électrique correspondant à un débit Q_0 sous la chute de régime permanent H_0 le niveau oscille et soit à l'instant t à une cote Z au-dessus du niveau statique (fig. 3).

La chute n'est plus H_0 mais :

$$H = H_0 + P_0 + Z = H_0 + X,$$

de telle sorte que, si l'on néglige les variations de rendement de la conduite et du groupe, en première approximation, l'action du régulateur se traduit par l'égalité

$$QH = Q_0 H_0 = \text{const.}$$

Donc, si le plan d'eau s'élève, la chute H augmente, le régulateur intervient pour diminuer Q et cette manoeuvre de fermeture tend à accentuer la montée.

Inversement, si le niveau s'abaisse, H diminue et le régulateur, pour augmenter le débit Q, réalise une manoeuvre d'ouverture qui tend à accroître l'abaissement du niveau.

On voit que dans la marche à puissance électrique constante qui, répétons-le est la marche habituelle, le régulateur constitue un élément d'instabilité qui tend à accroître les oscillations.

Par contre, la perte de charge dans le canal d'amenée, par l'amortissement qu'elle crée, contribue au contraire à réduire ces oscillations.

On conçoit donc que, selon les caractéristiques des systèmes chambre d'équilibre—canal d'amenée considérés, les oscillations puissent disparaître ou, au contraire, s'amplifier dangereusement, le premier cas pouvant seul correspondre à un fonctionnement stable.

Dans des cas jusqu'ici assez rares, on accepte de ne pas maintenir la puissance électrique constante et de laisser celle-ci varier légèrement dans le même sens que la hauteur de chute au cours de l'oscillation par l'asservissement de la puissance électrique à la puissance hydraulique réalisé par les organes de régulation. On comprend immédiatement que dans ce cas la perturbation provoquée par le régulateur se trouve réduite d'où possibilité de conditions de stabilité moins sévères.

Pour plus de généralité, nous supposons, *à priori*, que le groupe considéré marche sur réseau séparé et qu'il est muni d'un dispositif de régulation provoquant un asservissement temporaire de la puissance électrique à la puissance hydraulique : ceci peut être réalisé par une action sur la tension ou sur la fréquence, ou sur ces deux éléments à la fois.

Nous appelons :

$$X = Z + P_0$$

la cote du plan d'eau au-dessus du niveau dynamique de régime permanent.

À l'instant considéré, la chute est :

$$H = H_0 + X = H_0 (1 + \lambda),$$

avec $\lambda = X/H_0$; on en déduit :

$$QH = Q_0 H_0 (1 + k\lambda)$$

et nous supposons

$$0 < k < 1.$$

On remarque qu'il suffit de faire $k = 0$ pour obtenir les résultats relatifs à la marche à puissance constante habituellement réalisée.

L'étude théorique du problème suivant la méthode indiquée pour la première fois par Thoma et en s'appuyant sur certaines hypothèses de linéarisation valables pour les oscillations d'amplitude restreinte que l'on rencontre en pratique, conduit aux conclusions suivantes :

a) Si l'on a :

$$p_0 < \frac{1-k}{2h_0}$$

les oscillations amplifiées prennent naissance, le système est instable.

b) Si l'on a :

$$\frac{1-k}{2h_0} < p_0 < 1 - \frac{1-k}{2h_0}$$

les oscillations qui prennent naissance sont amorties et le système est stable.

c) Si l'on a :

$$p_0 > 1 - \frac{1-k}{2h_0}$$

le système est apériodiquement stable, le niveau retrouvant sa position d'équilibre sans oscillations.

Ajoutons qu'en pratique ce dernier cas ne se rencontre guère.

Si on interprète les résultats précédents en mettant en évidence les valeurs caractéristiques correspondantes de la section de la chambre F on aboutit aux conclusions suivantes :

1° Le cas d'instabilité a) correspond à

$$F < F_0 = F_{TH}\,(1-k)$$

avec

$$F_{TH} = \frac{W_0^2}{2g} \cdot \frac{Lf}{H_0\,P_0},$$

F_0 étant souvent appelé la section limite et F_{TH} la section de Thoma.

2° Le cas de la stabilité avec oscillations amorties b) correspond à des valeurs de F supérieures à F_0 et inférieures à une certaine valeur F_1 définie par l'égalité :

$$F_1 = F_0 \frac{2P_0\,(1-k)}{H_0} \cdot \frac{1}{\left[1 - \sqrt{1 - \dfrac{2P_0\,(1-k)}{H_0}}\right]^2}.$$

Rappelons que ces résultats sont valables pour $0 < k < 1$ et, en particulier, pour $k = 0$, c'est-à-dire pour la marche à puissance électrique constante.

3. Quelques recherches des Laboratoires de Toulouse sur la stabilité des chambres d'équilibre

Ayant ainsi rappelé le problème général de la stabilité, nous allons indiquer brièvement, sans donner le détail des calculs, les résultats fondamentaux que nous avons mis en évidence dans nos recherches relatives à divers problèmes de stabilité intéressant au plus haut point la technique des cheminées d'équilibre. Nons considérons uniquement, dans ce qui suit, la marche à puissance électrique constante.

a) *Stabilité des chambres d'équilibre à étranglement*

Nous avons montré que dans une chambre d'équilibre à étranglement, de section F inférieure à la section limite de Thoma, il s'établit dans tous les cas, autour du niveau de régime permanent de débit Q_0, un régime stable d'oscillations entretenues.

En supposant ces oscillations sinusoïdales, ce qui n'est que relativement approché, nous avons montré par un raisonnement basé sur des considérations énergétiques que les variations de la vitesse $v = V/V_0$ pouvaient être exprimées par une relation de la forme

$$v = v_M \sin \omega t'$$

avec

$$v_M = 1{,}18 \frac{1}{r_0} \cdot \frac{1 - 2p_0 h_0}{h_0 - 2p_0} \quad \text{et} \quad r_0 = \frac{R_0}{Z_*},$$

R_0 représentant la perte de charge due à l'étranglement lorsqu'il est traversé par le débit Q_0 de régime permanent.

Nous avons fourni également les expressions de la période T' et de l'amplitude maximum x_M des oscillations entretenues, en grandeurs relatives :

$$T' = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\sqrt{h_0^2 - 1}}{h_0 - 2p_0}, \quad x_M = \frac{1{,}18}{r_0} \cdot \frac{(1 - 2p_0 h_0)\sqrt{h_0^2 - 1}}{(h_0 - 2p_0)^2}.$$

La comparaison des valeurs données par ces expressions approchées avec les résultats obtenus à l'aide de la construction graphique ou par une étude expérimentale a montré une très bonne concordance.

b) *Stabilité des chambres d'équilibre à montage venturi* (fig. 4)

Nous avons mis en évidence une erreur dans l'expression classique de la section limite c.

Avec les notations classiques la formule donnant la section limite de Thoma est la suivante :

$$F_{TH} = \frac{W_0^2}{2g} \cdot \frac{Lf}{(H_0 + 2E_0)(P'_0 + E_0)},$$

P'_0 désignant la perte de charge proprement dite dans le canal d'amenée et E_0 la hauteur due à la vitesse au point de raccordement de la cheminée d'équilibre, c'est-à-dire, dans le cas actuel, au col du venturi.

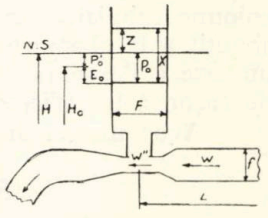


Fig. 4

Cette formule est inexacte et doit être remplacée par la suivante :

$$F_{TH} = \frac{W_0^2}{2g} \cdot \frac{Lf}{H_0(P'_0 + E_0)}.$$

c) *Montage Pitot pour une cheminée d'équilibre placée en amont d'un canal de fuite* (fig. 5)

Dans le cas d'une usine comportant un canal de fuite en charge, précédé d'une chambre d'équilibre, la condition de stabilité réside dans l'adoption d'une section horizontale F de la cheminée supérieure à la valeur limite

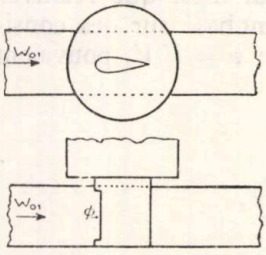


Fig. 5

$$F_{\text{lim}} = \frac{W_0^2}{2g} \cdot \frac{Lf}{H_0(P_0 - E_0)},$$

P_0 représentant la perte de charge à l'aval de la chambre y compris les pertes au débouché aval ; E_0 — la hauteur dynamique due à la vitesse dans le canal de fuite pour le débit maximum Q_0 de l'usine.

Le montage préconisé consiste à établir une communication entre la chambre d'équilibre et le canal de fuite de telle sorte que cette jonction réalise un effet Pitot assurant la récupération intégrale de la hauteur dynamique E_0.

La condition de stabilité devient alors

$$F > F_{\text{lim}} = \frac{W_0^2}{2g} \cdot \frac{Lf}{H_0 P'_0}.$$

Avec un tel montage, nous avons pu réduire de moitié la section de la cheminée d'équilibre intervenant dans une variante du projet du Kouilou, en Afrique, la section initialement prévue étant de 1 500 m².

d) *Montage Venturi-Pitot inversé pour une cheminée d'équilibre placée à l'extrémité aval d'un tunnel d'amenée* (fig. 6)

Le montage utilisé dans ce cas est le suivant : le canal d'amenée, dans la portion rétrécie correspondant au col du venturi, est traversé par une colonne tubulaire profilée. Cette colonne creuse, dont la partie supérieure aboutit à la chambre d'équilibre, communique avec le canal par une fenêtre ouverte à l'extrémité aval du système, du côté opposé à la vitesse d'attaque de façon à bénéficier de la dépression existant dans le sillage.

Avec un tel dispositif la condition de stabilité s'écrit :

$$F > F_{\text{lim}} = \frac{W_0^2}{2g} \cdot \frac{Lf}{[H_0(P'_0 + E_0(1+k)]},$$

k étant un coefficient permettant de tenir compte de la dépression supplémentaire résultant du montage adopté.

Cette expression montre que le nouveau système proposé permet une réduction sensible de la section limite vis à vis de celle que l'on obtiendrait avec un montage venturi ordinaire.

e) *Stabilité d'un système de deux chambres d'équilibre respectivement placées sur les canaux d'amenée et de fuite d'une usine* (fig. 7)

Avec les notations usuelles, affectées de l'indice 1 pour le système d'amenée et de l'indice 2 pour le système de fuite, on calcule les quantités :

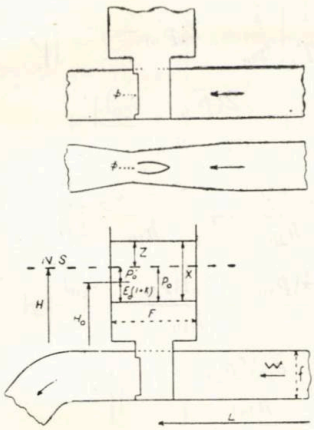


Fig. 6

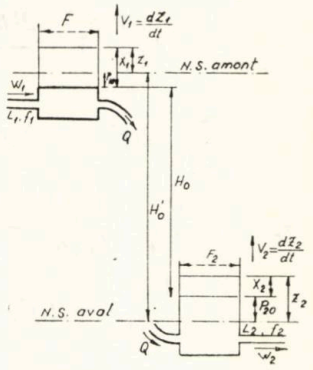


Fig. 7

$$\alpha_1 = -2\pi\left[\frac{1}{T_1}\left(\frac{1}{h_{10}} - 2p_{10}\right) + \frac{1}{T_2}\left(\frac{1}{h_{20}} - 2p_{20}\right)\right],$$

$$\alpha_3 = -\frac{8\pi^3}{T_1 T_2}\left[\frac{1}{T_1}\left(\frac{1}{h_{20}} - 2p_{20} + \frac{4p_{10}p_{20}}{h_{10}}\right) + \frac{1}{T_2}\left(\frac{1}{h_{10}} - 2p_{10} + \frac{4p_{10}p_{20}}{h_{20}}\right)\right],$$

$$\alpha_2 = 4\pi^2\left\{\frac{1}{T_1^2}\left(1 - \frac{2p_{10}}{h_{10}}\right) + \frac{1}{T_2^2}\left(1 - \frac{2p_{20}}{h_{20}}\right) + \frac{2}{T_1 T_2}\left[2p_{10}p_{20} - \left(\frac{p_{10}}{h_{20}} + \frac{p_{20}}{h_{10}}\right)\right]\right\},$$

$$\alpha_4 = \frac{16\pi^4}{T_1^2 T_2^2}\left[1 - 2\left(\frac{p_{10}}{h_{10}} + \frac{p_{20}}{h_{20}}\right)\right],$$

et les conditions de stabilité s'écrivent:

$$\alpha_1 > 0, \quad \alpha_2 > 0, \quad \alpha_3 > 0, \quad \alpha_4 > 0, \quad \Gamma = \alpha_3^2 - \alpha_1(\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1\alpha_4) < 0.$$

f) *Conditions de stabilité d'un système de deux chambres d'équilibre à montage venturi respectivement placées sur les canaux d'amenée et de fuite d'une même usine* (fig. 8)

Avec les notations de la fig. 8 on obtient les conditions de stabilité suivantes :

1erè Approximation:
Conditions de stabilité:

$$\alpha_1 > 0, \quad \alpha_2 > 0, \quad \alpha_3 > 0, \quad \alpha_4 > 0, \quad \Gamma = \alpha_3^2 - \alpha_1(\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1\alpha_4) < 0,$$

avec:

$$\alpha_1 = -2\pi\left\{\frac{1}{T_1}\left[\frac{1}{h_{10}} - 2(p'_{10} + e_{10})\right] + \frac{1}{T_2}\left[\frac{1}{h_{20}} - 2(p'_{20} - e_{20})\right]\right\},$$

$$\alpha_2 = 4\pi^2\left\{\frac{1}{T_1^2}\left[1 - \frac{2(p'_{10} + e_{10})}{h_{10}}\right] + \frac{1}{T_2^2}\left[1 - \frac{2(p'_{20} - e_{20})}{h_{20}}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{T_1 T_2}\left[2(p'_{10} + e_{10})(p'_{20} - e_{20}) - \left(\frac{p'_{10} + e_{10}}{h_{20}} + \frac{p'_{20} - e_{20}}{h_{10}}\right)\right]\right\},$$

$$\alpha_3 = -\frac{8\pi^3}{T_1 T_2}\left\{\frac{1}{T_1}\left[\frac{1}{h_{20}} - 2(p'_{20} - e_{20}) + \frac{4(p'_{10} + e_{10})(p'_{20} - e_{20})}{h_{10}}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{T_2}\left[\frac{1}{h_{10}} - 2(p'_{10} + e_{10}) + \frac{4(p'_{10} + e_{10})(p'_{20} - e_{20})}{h_{20}}\right]\right\},$$

$$\alpha_4 = \frac{16\pi^4}{T_1^2 T_2^2}\left[1 - 2\left(\frac{p'_{10} + e_{10}}{h_{10}} + \frac{p'_{20} - e_{20}}{h_{20}}\right)\right].$$

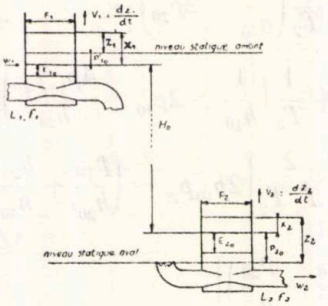


Fig. 8

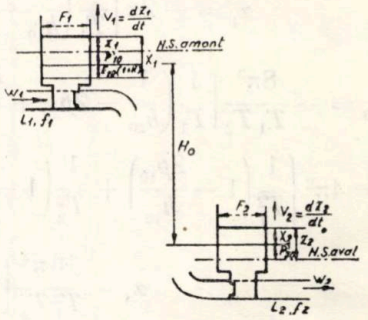


Fig. 9

2e Approximation:
Conditions de stabilité:

$$\alpha_1 > 0, \quad \alpha_2 > 0, \quad \alpha_3 > 0, \quad \alpha_4 > 0, \quad \Gamma = \alpha_3^2 - \alpha_1(\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1\alpha_4) < 0,$$

avec:

$$\alpha_1 = -2\pi\left\{\frac{1}{T_1}\left[\frac{1}{h_{10}} - 2(p'_{10} + e_{10})\right] + \frac{1}{T_2}\left[\frac{1}{h_{20}} - 2(p'_{20} - e_{20})\right]\right\},$$

$$\alpha_2 = 4\pi^2 \left\{ \frac{1}{T_1^2}\left(1 - \frac{2p'_{10}}{h_{10}}\right) + \frac{1}{T_2^2}\left(1 - \frac{2p'_{20}}{h_{20}}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{T_1 T_2}\left[2(p'_{10} + e_{10})(p'_{20} - e_{20}) - \frac{p'_{20} - e_{20}}{h_{10}} - \frac{p'_{10} + e_{10}}{h_{20}} \right] \right\},$$

$$\alpha_3 = -\frac{8\pi^3}{T_1 T_2} \left\{ \frac{1}{T_1}\left[\frac{1}{h_{20}} - 2(p'_{20} - e_{20}) + \frac{4p'_{10}(p'_{20} - e_{20})}{h_{20}} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{T_2}\left[\frac{1}{h_{10}} - 2(p'_{10} + e_{10}) + \frac{4p'_{20}(p'_{10} + e_{10})}{h_{20}} \right] \right\},$$

$$\alpha_4 = \frac{16\pi^4}{T_1^2 T_2^2}\left[1 - 2\left(\frac{p'_{10}}{h_{10}} + \frac{p'_{20}}{h_{20}} \right) \right].$$

g) *Stabilité de deux chambres d'équilibre à montage Pitot placées sur les systèmes d'amenée et de fuite d'une usine* (fig. 9)

Avec les mêmes notations générales adoptées dans nos études précédentes concernant les chambres d'équilibre à montage Pitot les conditions de stabilité sont les suivantes:

$$\alpha_1 > 0,\ \alpha_2 > 0,\ \alpha_3 > 0,\ \alpha_4 > 0, \qquad \Gamma = \alpha_3^2 - \alpha_1(\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1 \alpha_4) < 0,$$

avec:

$$\alpha_1 = -2\pi\left(\frac{1}{T_1}\left\{ \frac{1}{h_{10}} - 2[p'_{10} + e_{10}(1+k)] \right\} + \frac{1}{T_2}\left(\frac{1}{h_{20}} - 2p'_{20} \right) \right),$$

$$\alpha_2 = 4\pi^2\left(\frac{1}{T_1^2}\left\{ 1 - \frac{2[p'_{10} + e_{10}(1+k)]}{h_{10}} \right\} + \frac{1}{T_2^2}\left(1 - \frac{2p'_{20}}{h_{20}} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{T_1 T_2}\left\{ 2[p'_{10} + e_{10}(1+k)]p'_{20} - \left[\frac{p'_{10} + e_{10}(1+k)}{h_{20}} + \frac{p'_{20}}{h_{10}} \right] \right\} \right),$$

$$\alpha_3 = -\frac{8\pi^3}{T_1 T_2}\left(\frac{1}{T_1}\left\{ \frac{1}{h_{20}} - 2p'_{20} + \frac{4[p'_{10} + e_{10}(1+k)]p'_{20}}{h_{10}} \right\} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{T_2}\left\{ \frac{1}{h_{10}} - 2[p'_{10} + e_{10}(1+k)] + \frac{4[p'_{10} + e_{10}(1+k)]p'_{20}}{h_{20}} \right\} \right),$$

$$\alpha_4 = \frac{16\pi^4}{T_1^2 T_2^2}\left\{ 1 - 2\left[\frac{p'_{10} + e_{10}(1+k)}{h_{10}} + \frac{p'_{20}}{h_{20}} \right] \right\}.$$

4. Conclusions

En terminant ce bref rappel de recherches dont certaines sont toutes récentes, nous tenons à signaler que nous avons entrepris des études expérimentales systématiques pour vérifier le bien-fondé des résultats obtenus, les expériences étant faites sur des modèles hydrauliques ou dans certains cas, sur des modèles analogiques.

Reçue le 27 XII 1966

Académie des Sciences, Paris,
et
École Nationale d'Électrotechnique,
d'Électronique et d'Hydraulique,
Toulouse, France

CERCETĂRI ASUPRA STABILITĂŢII CAMERELOR DE ECHILIBRU

(Rezumat)

Se expun un număr de rezultate obţinute în studiul stabilităţii camerelor de echilibru

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

C. D. 628.1

STUDIU TEHNICO-ECONOMIC AL REZERVOARELOR ÎN SISTEMELE CENTRALE DE DISTRIBUŢIE A APEI

DE

CORNEL JURA, M. GIURCONIU, TRAIAN NICOARĂ,
GH. CREŢU şi I. MIREL

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. Introducere

Studiul sistemelor de distribuţie a apei trebuie să ţină seama de interdependenţa funcţională a obiectelor componente şi anume rezervorul de acumulare, staţia de pompare, arterele de distribuţie şi rezervorul de compensare din reţea.

Volumul rezervoarelor de compensare influenţează debitele de calcul ale staţiei de pompare şi ale magistralelor care asigură distribuţia apei. Odată cu creşterea volumului compensator, ceea ce atrage după sine sporiri importante ale costului de execuţie, se micşorează sarcinile obiectelor pentru transportul apei şi ca atare ieftinirea acestora. Problema tehnico-economică care are ca scop stabilirea soluţiei optime a sistemului de distribuţie trebuie pusă în conexiune în primul rînd cu timpul de funcţionare a pompelor de distribuţie pentru acoperirea optimă a curbei zilnice de consum.

Soluţionarea problemei se efectuează în mod curent, incomplet şi arbitrar, unele rezultate fiind obţinute printr-un număr mare de încercări care necesită o cantitate de muncă apreciabilă.

În lucrarea de faţă se prezintă o metodă analitică de calcul pentru stabilirea soluţiei optime din punct de vedere economic a sistemelor de distribuţie în alimentările centrale cu apă.

2. Stabilirea condiţiilor de studiu tehnico-economic al sistemelor de distribuţie

În studiul tehnico-economic al sistemelor de distribuţie se pune problema minimului costului de investiţie şi a minimului costului de exploatare.

Întrucît cele mai importante cheltuieli de exploatare tehnică sînt determinate direct de valoarea investiţiilor, în această etapă de rezolvare a temei,

se va lua în considerare valoarea investiţiilor în toate elementele sistemului şi se va impune condiţia de minimum.

Oscilaţiile orare ale consumului pe vatra alimentată sînt cunoscute la începutul studiului şi depind de mărimea centrului populat şi de raportul dintre elementele consumului. Aceste oscilaţii sînt cu atît mai mici cu cît centrul este mai important şi cît consumul industrial are o pondere mai mare. Coeficientul de neuniformitate orară K_0 caracterizează în cea mai mare măsură caracterul oscilaţiilor şi amploarea volumului fluctuant.

Din integrarea procentelor orare ale consumului, rezultă curbele din fig. 1 pentru trei categorii de centre populate luate în considerare şi anume:

1°. Oraş mic şi fără o componentă importantă a consumului industrial sau comună rurală.

2°. Oraş mijlociu cu o populaţie de peste 10 000 locuitori.

3°. Oraş foarte mare cu industrie dezvoltată.

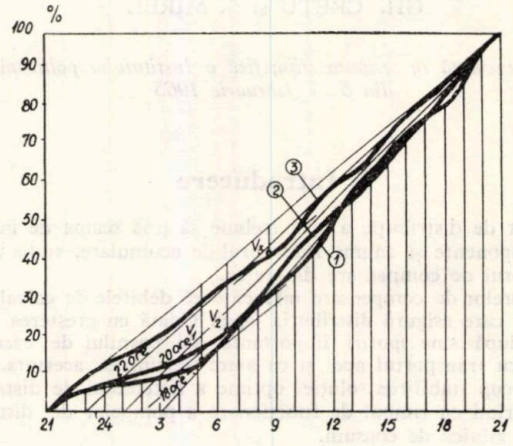


Fig. 1

Pentru cazul de funcţionare a pompelor timp de 24 ore pe zi, cu debit constant fără întrerupere, volumele compensatoare sînt mari. În măsura în care numărul zilnic de ore de funcţionare a pompelor de distribuţie scade, pînă la o limită cu atît mai coborîtă cu cît oraşul este mai mic, respectiv oscilaţiile sînt mai importante, volumul compensator se poate reduce printr-o mai bună acoperire a curbei integrale. Valorile volumelor fluctuante cu fracţiuni ale consumului zilnic Q_0 sînt redate pentru aceste tipuri de oraşe în tabelul 1.

Se constată că volumul fluctuant este determinat de caracterul consumului reprezentat prin coeficientul de neuniformitate orară K_0 şi de tipul de pompare. Din acest motiv numărul zilnic al orelor de pompare t apare ca un parametru important în studiul volumului compensator şi al tuturor

funcţiunilor sale şi ca atare a fost ales ca parametru determinant în studiul tehnico-economic al sistemului de distribuţie.

Pentru calculul volumului fluctuant pe baza relaţiei:

$$V_f = pQ_0, \tag{1}$$

expresia analitică a funcţiei p, avînd ca variabile mărimile K_0 şi t, a fost determinată astfel încît să îndeplinească următoarele două condiţii importante:

a) în primul rînd valorile funcţiei p să acopere cît mai apropiat valorile stabilite prin calcul pe baza curbei reale de consum;

b) în al doilea rînd valorile minime să aibe loc la duratele t de pompare şi cu valorile efective, aşa cum au fost stabilite şi redate în tabelul 1.

Tabelul 1

Valorile volumelor fluctuante ca fracţiuni ale consumului zilnic

Tipul oraşului	K_0	Numărul zilnic al orelor de pompare				
		24	22	20	18	16
1	2,00	0,230	0,163	0,123	0,106	0,110
2	1,50	0,180	0,147	0,120	0,120	
3	1,25	0,080	0,060	0,065		

Expresia analitică a funcţiei este următoarea:

$$p = (24-t)^2 K_0 (0{,}0032 K_0 - 0{,}00475) + (24-t) K_0 (0{,}0156 - 0{,}0178 K_0) - \\ - (0{,}4 K_0^2 - 1{,}5 K_0 + 1{,}17) \tag{2}$$

sau

$$p = at^2 + Bt + C, \tag{2'}$$

unde am notat:

$$A = 0{,}0032 K_0^2 - 0{,}00475 K_0, \quad \text{(2 a)} \qquad B = -0{,}1362 K_0^2 + 0{,}2124 K_0, \quad \text{(2 b)}$$

$$C = 1{,}033 K_0^2 - 0{,}885 K_0 - 1{,}17. \tag{2 c}$$

De asemenea, în funcţie de timpul de pompare t s-au stabilit relaţiile care determină volumul rezervorului de acumulare V_r, volumul fluctuant V_f adăpostit în rezervorul de compensare a reţelei, puterea staţiei de pompare P şi valorile de calcul ale debitelor din sectoarele reţelei după cum urmează:

$$V_r = V_0 + T_1 Q (24 - t), \quad [m^3], \tag{3 a}$$

$$V_f = pQ_0 = At^2 + Bt + C, \quad [m^3], \tag{3 b}$$

(3 c) $$P = r\gamma \frac{24}{t} \cdot \frac{Q}{75\eta}\left[H_0 + k\left(\frac{24}{t}\right)^{\frac{2-m}{2}} \sum \frac{Q_i^2 l_i}{D_i^m}\right], \quad [\mathrm{CP}],$$

(3 d) $$Q_{\text{calcul}} = \frac{24}{t} Q_i, \quad Q = \frac{Q_0}{T}, \quad Q_0 = Q_{\max\ zi}.$$

De remarcat faptul că în expresiile debitelor de calcul ale sectoarelor din reţea precum şi în expresia debitului pompat Q s-a operat cu factorul de amplificare $24/t$.

3. Stabilirea relaţiei analitice pentru calculul soluţiei economice

Se prezintă expresiile analitice ale costului de investiţie pentru fiecare element al sistemului:

a) rezervor de acumulare

(4 a) $$I_r = I_{r0} + I_{r1}\left[V_0 + T_1 Q\,(24 - t)\right];$$

b) rezervor de compensare

(4 b) $$I_f = I_{f0} + pQ_0 I_{f1} H_r^{1,5};$$

c) staţia de pompare

(4 c) $$I_p = I_{p1} r \frac{24}{t} \cdot \frac{\gamma Q}{75\eta}\left[H_0 + k\left(\frac{24}{t}\right)^{\frac{2-m}{2}} \sum \frac{Q_i^2 l_i}{D_i^m}\right];$$

d) sectoarele reţelei de distribuţie

(4 d) $$I_c = \sum\left[I_{c0} + I_{c1}\left(\sqrt{\frac{24}{t}} D_i\right)^{\alpha}\right] l_i.$$

Costul total al lucrărilor se obţine cu relaţia:

(5) $$I = I_r + I_f + I_p + I_c.$$

Valoarea minimă a investiţiilor de determină din condiţia:

(6) $$\frac{\partial I}{\partial t} = 0.$$

Expresiile analitice ale derivatelor funcţiilor (4 a)...(4 d) sînt:

(7 a) $$\frac{\partial I_r}{\partial t} = -I_{r1} T_1 Q, \qquad (7\,b) \quad \frac{\partial I_f}{\partial t} = (2At + B) Q_0 I_{f1} H_r^{1,5},$$

(7 c) $$\frac{\partial I_p}{\partial t} = -I_p r \frac{\gamma Q}{75\eta} \cdot \frac{24}{t^2}\left[H_0 + \frac{4-m}{2} k \left(\frac{24}{t}\right)^{\frac{2-m}{2}} \sum \frac{Q_i^2 l_i}{D_i^m}\right],$$

(7 d) $$\frac{\partial I_c}{\partial t} = -\frac{\alpha}{2} I_{c1} \sqrt{\frac{24^\alpha}{t^{\alpha+2}}} \sum D_i^\alpha,$$

încît (6) devine:

$$-I_{r1} T_1 Q + (2At + B) Q_0 I_{f1} H_r^{1,5} -$$

(7) $$-I_{p1} \frac{\gamma Q}{75\eta} \cdot \frac{24}{t^2}\left[H_0 + \frac{4-m}{2} k \left(\frac{24}{t}\right)^{\frac{2-m}{2}} \sum \frac{Q_i^2 l_i}{D_i^m}\right] - \frac{\alpha}{2} I_{c1} \sqrt{\frac{24^\alpha}{t^{\alpha+2}}} \sum D_i^\alpha = 0,$$

sau

$$-I_{r1} T_1 Q t^{\frac{12-m+\alpha}{2}} + 2AQ_0 I_{f1} H_r^{1,5} t^{\frac{14-m+\alpha}{2}} BQ_0 I_{f1} H_r^{1,5} t^{\frac{12-m+\alpha}{2}} -$$

(8) $$-I_{p1} r \frac{\gamma Q}{75\eta} H_0 24 t^{\frac{8-m+\alpha}{2}} - \frac{4-m}{2} I_{p1} r \frac{\gamma Q}{75\eta} k 24^{\frac{4-m}{2}} t^{\frac{6+\alpha}{2}} \sum \frac{Q_i^2 l_i}{D^m} -$$

$$-\frac{\alpha}{2} I_{c1} \sqrt{24^\alpha} t^{\frac{10-m}{2}} \sum D_i^\alpha = 0.$$

Se introduc notaţiile:

(9 a) $\psi_1 = -I_{r1} T_1 Q + BQ_0 I_{f1} H_r^{1,5}$, (9 b) $\psi_2 = 2AQ_0 I_{f1} H_r^{1,5}$,

(9 c) $\psi_3 = -24 I_{p1} r \frac{\gamma Q}{75\eta} H_0$, (9 d) $\psi_4 = -\frac{4-m}{2} I_{p1} r \frac{\gamma Q}{75\eta} k 24^{\frac{4-m}{2}} \sum \frac{Q_i^2 l_i}{D_i^m}$,

(9 e) $$\psi_5 = -\frac{\alpha}{2} I_{c1} \sqrt{24^\alpha}.$$

Ecuaţia devine:

(10) $$\psi_1 t^{\frac{2+\alpha}{2}} + \psi_2 t^{\frac{4+\alpha}{2}} + \psi_3 t^{\frac{-2+\alpha}{2}} + \psi_4 t^{\frac{-4+m+\alpha}{2}} + \psi_5 = 0.$$

Ecuaţia (10), cu t ca necunoscută, poate fi soluţionată. O soluţionare mai simplă se poate obţine aducînd ecuaţia la forma:

(11 a) $$\psi_1 t^{\frac{12-m+\alpha}{2}} + \psi_2 t^{\frac{14-m+\alpha}{2}} + \psi_3 t^{\frac{8-m+\alpha}{2}} + \psi_4 t^{\frac{6+\alpha}{2}} = -\psi_5 t^{\frac{10-m}{2}}$$

sau

(11 b) $$\Phi(t) = -\frac{\psi_1}{\psi_5} t^{\frac{4+\alpha}{2}} - \frac{\psi_2}{\psi_5} t^{\frac{6+\alpha}{2}} - \frac{\psi_3}{\psi_5} t^{\frac{\alpha}{2}} - \frac{\psi_4}{\psi_5} t^{\frac{-2+m+\alpha}{2}} = t.$$

Explicitarea variabilei t conduce la o soluţionare simplă pe cale grafică, determinîndu-se punctul de intersecţie al curbei $\Phi(t)$ cu bisectoarea primului cadran ($f(t) = t$).

4. Aplicaţie numerică

În cazul unui oraş cu o populaţie de 40 000 locuitori, consum specific 300 l/om zi, datele cunoscute ale problemei sînt:

$V_0 = 7\,000$ m^3, $K_0 = 1{,}45$, $Q_0 = 17\,000$ m^3, $Q = 0{,}22$ m^3/s, $T_1 = 3\,600$ s/h, $r = 1{,}33$, $\eta = 0{,}75$, $\gamma = 1\,000$ kgf/m^3, $H_0 = H_r = 30$ m, $k = 0{,}0014825$, $m = 5{,}33$, $\alpha = 1{,}8$, $\Sigma h_i = 10{,}06$ m.

Indicatorii de cost pentru rezervorul de acumulare:

$$I_{r0} = 65\,000 \text{ lei}, \quad I_{r1} = 200 \text{ lei/m}^3.$$

Indicatorii de cost pentru rezervorul de compensare:

$$I_{f0} = 800\,000 \text{ lei}, \quad I_{f1} = 6 \text{ lei/m}^3 \text{ şi funcţie de cotă.}$$

Indicatorii de cost pentru staţia de pompare:

$$I_{p1} = 3\,500 \text{ lei/CP.}$$

Indicatorii de cost pentru reţea:

$$I_{c0} = 150 \text{ lei/ml}, \quad I_{c1} = 2\,500 \text{ lei/m şi diametru unitar.}$$

Elementele geometrice şi valorile consumului în reţea sînt corespunzătoare datelor înscrise în fig. 2.

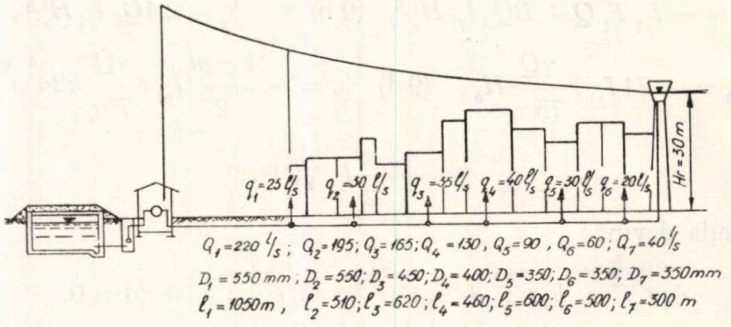


Fig. 2

Calculul coeficienţilor funcţiei p (pentru $K_0 = 1{,}45$):

$$A = 0{,}0032.1{,}45^2 - 0{,}00475.1{,}45 = -0{,}00018,$$

$$B = -0{,}1362.1{,}45^2 + 0{,}2124.1{,}45 = 0{,}02200,$$

$$C = 1{,}033.1{,}45^2 - 0{,}885.1{,}45 - 1{,}17 = -0{,}28500.$$

Calculul coeficienților ψ:

$$\psi_1 = -I_{r1}\, T_1\, Q + BQ_0\, I_{f1}\, H_r^{1,5} = -200.3\,600.\,0{,}220 + 0{,}022.17\,000.6.30^{1,5} = 20{,}95.10^4,$$

$$\psi_2 = 2AQ_0\, I_{f1}\, H_r^{1,5} = -\,2.0{,}00018.17\,000.6.30^{1,5} = -\,6{,}05.10^3,$$

$$\psi_3 = -\,24\, I_{p1}\, r\, \frac{\gamma Q}{75\,\eta}\, H_0 = -\,24.3\,500.1{,}33.\,\frac{1\,000.0{,}22}{75.0{,}75}\,30 = -\,13{,}1.10^6,$$

$$\psi_4 = -\,\frac{4-m}{2}\, I_{p1}\, r\, \frac{\gamma Q}{75\,\eta}\, k\, 24^{\frac{4-m}{2}}\, \Sigma\, \frac{Q_i^2\, l_i}{D_i^m} = -\,\frac{4.5{,}33}{2}.\,3\,500.1{,}33.\,\frac{1\,000.0{,}22}{75.0{,}75} \times$$

$$\times\, 24^{\frac{4-5{,}33}{2}}.\,10{,}06 = 1{,}465.10^4,$$

$$\psi_5 = -\,\frac{\alpha}{2}\, I_{c1}\, \sqrt{24^{\alpha}\, \Sigma\, D_i^{\alpha}} = -\,\frac{1{,}8}{2}\, 2\,500\, \sqrt{24^{1,8}(2.0{,}55^{1,8} + 0{,}45^{1,8} + 0{,}40^{1,8} + 3.935^{1,8})} =$$

$$= -\,6{,}13.14^4.$$

Elementele de calcul ale funcției $\Phi(t)$:

$$\frac{\psi_1}{\psi_5} = -\,3{,}43, \quad \frac{\psi_2}{\psi_5} = 0{,}0987, \quad \frac{\psi_3}{\psi_5} = 214, \quad \frac{\psi_4}{\psi_5} = -\,0{,}239.$$

Soluționarea grafică se poate urmări în tabelul 2.

Tabelul 2

Soluționarea grafică a ecuației care exprimă condițiile de economie

t (ore)	10	16	18	20	22	24
$3{,}43\ t^{2,9}$	670	3 200	14 950	20 600	27 200	34 300
$-0{,}0987\ t^{3,9}$	−24	−964	−7 830	−11 870	−17 120	−23 700
$-214\ t^{0,9}$	−1 700	−1 780	−2 890	−3 170	3 470	−3 720
$0{,}239\ t^{2,506}$	42,6	87,2	338	435	560	680
$\Phi\ (t)$	−1 010,8	−543,2	4 568	5 995	7 170	7 569

Soluția este evidentă, în jurul valorii $t = 17$ ore, care reprezintă timpul optim de lucru al stației de pompare. Pentru această valoare a parametrului determinant, relațiile stabilite permit calculul tuturor caracteristicilor tehnice ale sistemului de distribuție.

5. Concluzii

Prin considerarea volumelor compensatoare ale rezervoarelor ca elemente hotărîtoare pentru regimul sistemului de distribuție se pot stabili valorile optime ale caracteristicilor tehnice în sistem. Parametrul determinant

este timpul de funcţionare al pompelor de distribuţie, în funcţie de care se poate scrie expresia analitică a investiţiilor necesare pentru executarea întregului sistem.

Rezolvarea ecuaţiei care exprimă condiţia minimului de investiţie conduce la valoarea optimă a timpului de pompare. Din această valoare rezultă, evident, valoarea tuturor investiţiilor în soluţia economică.

Institutul politehnic, Timişoara

BIBLIOGRAFIE

1. Abramov N. N., Gheniev N. N., Pavlov D. I., *Alimentări cu apă*. Buc., 1953, (trad. din l. rusă).
2. Jura C., Giurconiu M., Nicoară T., Creţu G., *Studiul hidraulic şi economic al sistemului format din pompe-reţea-rezervoare în alimentări cu apă*. Comunicările Conferinţei de Maşini Hidraulice din Timişoara, partea a doua, 1964.
3. Shragga I., *Calcul économique des réseaux de distribution*. La houille blanche, 1954, 2.

TECHNISCHES UND WIRTSCHAFTLICHES STUDIUM DER BEHALTER IN ZENTRALSISTEMEN DER WASSERVERTEILUNG

(Zusammenfassung)

Die Sammel- und Druckbecken führen in Zentralbewässerungen wichtige Funktionen aus. Die tragen zur rationellen quantitativen Wasserverteilung in den Zentralen Bewässerungsvorrichtungen bei, zur Gleichmässigung des Durflussegims und der Drücke so wie zur Verbesserung der Arbeitskondition der Pumpagregaten.

In die Berechnungen werden die Belastungscharakteristiken des Reservoirs für das Studium der gleichmässigen Wasserverteilung im System als ein Prozess in der Zeit eingeführt so wie auch die Kostenziffern des Reservoirs für die richtige Schätzung der wirtschaftliche angewendeten Dispositiven.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

Industrie uşoară

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том XIV (XVIII), вып. 1—2, 1968

Легкая промышленность

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

Light Industry Engineering

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

D. K. 687

BEITRAG ZUM STUDIUM DER TRANSVERSALEN DIMENSIONEN UND DER TENSIONALEN EIGENSCHAFTEN DER HASENHAARE, WELCHE IN DER HUTFABRIKATION VERWENDET WERDEN

VON

I. VLAD und HARTWIG MAURUS

1. Vorwort

Unter den Haaren, welche ihre Verwendung in der Hutfabrikation finden, ist das wichtigste das Hasenhaar. Das Kaninchen und der Feldhase ist in der ganzen Welt verbreitet. Es besitzt die Besonderheit sich dem Ort und dem Klima anzupassen.

În Zentraleuropa, hat der Feldhase *(Lepus europaeus Pallas)* am ganzen Rücken eine rotbraune Farbe und am Unterleib eine weisse Farbe, während er im Norden Europas, am Rücken, nur einen rotbraunen Streifen besitzt und der Rest der Haare weiss ist.

Der Feldhase, in nördlichsten Gebieten *(Lepus timidus)* hat ganz weisse Haare, welche viel länger und spröder sind.

Der Haushase — das Kaninchen *(Lepus cuniculus)* — ist ein gezähmter Feldhase, welcher für das Fell, Fleisch und seine Haare gezüchtet wird. Nach der Art der Erzeugnisse, unterscheidet man Kaninchenrassen, welche für Felle und Fleisch bestimmt sind, din grosse belgische Kaninchenart, der grosse Weisse, Alaska, Havana, Chinchila, der weisse Wiener, der blaue Wiener, die französische Silberart und die verschiedenen Rassen für Haare — Angorarasse: englisch, deutsch, russisch, rumänisch, französisch u.a.

In unserem Lande sind folgende Rassen am meisten verbreitet: Chinchila, der belgische Riese, der blaue Wiener, der grosse Weisse. Diese Rassen werden für ihr Fleisch, Fell und Haare gezüchtet.

Der äussere Überzug des Hases, besteht aus zwei Kategorien von Haaren: grobe und feine. Die groben Strichelhaare werden mechanisch im technologischen Verarbeitungsprozess der Felle, von den feinen — Flaumenhaaren getrennt. Die feinen (Flaumenhaare) welche man erhält, werden nach Qualitäten sortiert, zumeist nach den Körperteilen (Rücken, Seitenteile, Unterleib, Schweif).

2. Die untersuchten Haararten

Das Studium bezüglich der transversalen Dimensionen und den tensionalen Eigenschaften wurde auf folgenden Haararten (Flaumenhaare) durchgefürt: Kaninchenhaare — Chinchilarasse — Rückenhaare (Probe *1*) und Seitenhaare (Probe *2*); Feldhasenhaare — Rückenhaare (Probe *3*) und Seitenhaare (Probe *4*), Unterleibhaare (Probe *5*) und Schweifhaare (Probe *6*); Wildkaninchenhaare BCBKS (Probe *7*).

3. Ergebnisse der Untersuchung

3.1. Die transversalen Dimensionen

a) *Der Mittelwert der Dicke*

Aus der Tabelle 1, zweite Kolonne, ersieht man, dass der Mittelwert der Dicke der untersuchten Haare in weiten Grenzen schwankt (13,22...18,61 μ). Von der mittleren Dicke aus gesehen, steht am ersten Platz das Haar des Feldhasen — die Rückenhaare (13,22 μ) gefolgt von Kaninchen - Rückenhaare (13,63 μ) und die Wildkaninchenhaare BCBKS (14,63 μ).

Die Feldhasenhaare — die Seithenhaare und Unterleibhaare — haben die gleiche mittlere Dicke (15,25 μ) während die Schweifhaare eine viel grössere mittlere Dicke besitzen (18,61 μ).

Tabelle 1

Probe	Mittlerer Durchmesser d μ	Mittlere quadratische Abweichung σ μ	Variationskoeffizient V %	Mittlere Länge l mm
1	13,63	2,8	20,7	20,75
2	14,61	3,4	23,5	25,51
3	13,22	3,7	23,6	19,12
4	15,25	4,2	27,0	16,75
5	15,25	4,6	32,0	21,25
6	18,61	8,7	46,7	37,51
7	14,36	3,7	26,2	24,75

b) *Die Ungleichmässigkeit der Dicke*

Bezüglich der Ungleichmässigkeit der Dicke (Tabelle 1, Kolonne 4), welche enscheident auf den Verarbeitungsprozess einwirkt, können wir feststellen, dass bei den Kaninchen - Rückenhaare — die kleinsten Ungleichmässigkeiten festgestellt worden sind ($V = 20{,}7\,\%$) während die Seitenhaare, dieselbe Ungleichmässigkeit besitzen wie die Rückenhaare von Feldhasen ($V = 23{,}5\,\%$ und $V = 23{,}6\,\%$). Nachher folgen im steigender Ordnung des Variationskoeffizients, die BCBKS - Haare ($V = 26{,}2\,\%$), die Seitenhaare, Unterleibhaare und Schweifhaare des Feldhasens. Es sei noch zu bemerken, dass obgleich die Seitenhaare die gleiche Dicke wie das Unterleibhaar des Feldhasen haben, ist bei der letzten Bestimmung, bei den Unterleibhaar die Ungleichmässigkeit um 5 % grösser, als bei den gleichen Seitenhaaren, während bei den Schweifhaaren desselben Hasen, die Ungleichmässigkeit sehr gross ist ($V = 46{,}7\,\%$).

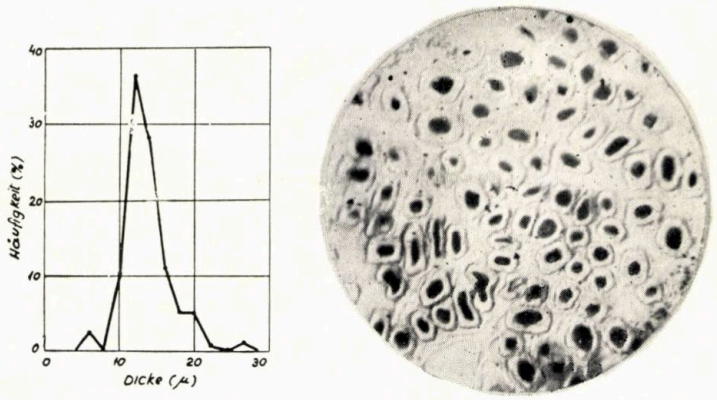


Abb. 1. Häufigkeitspolygon nach Dicke und Querschnitte (×280) der Rückenhaare des Kaninchens.

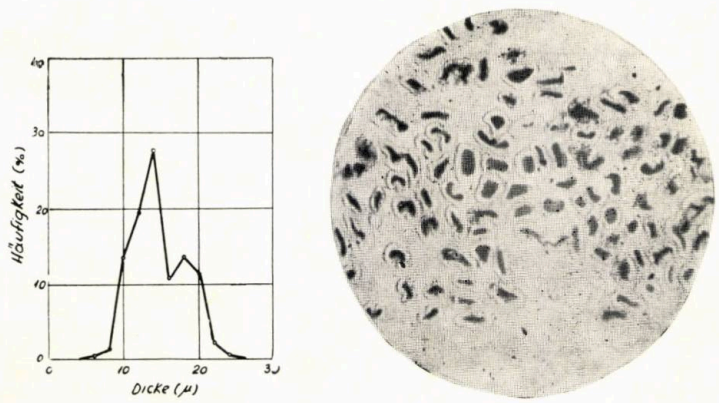


Abb. 2. — Häufigkeitspolygon nach Dicke und Querschnitte (×240) der Seitenhaare des Kaninchens.

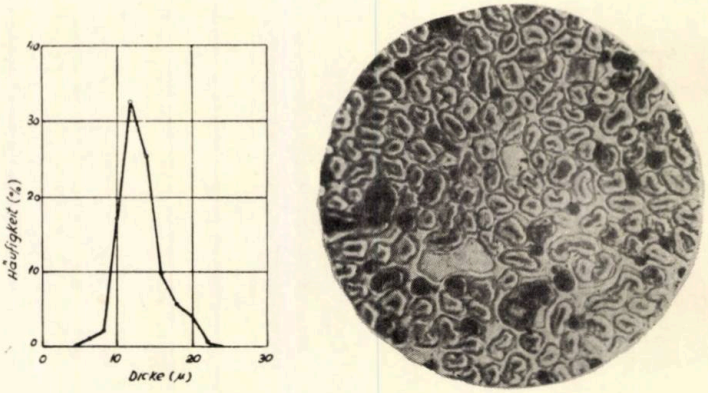


Abb. 3. — Häufigkeitspolygon nach Dicke und Querschnitte (×280) der Seitenhaare des Feldhasens.

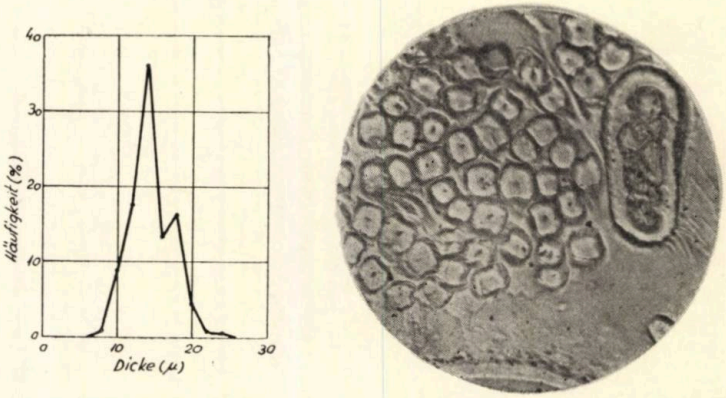


Abb. 4. — Häufigkeitspolygon nach Dicke und Querschnitte (×280) der Seitenhaare des Feldhasens.

c) *Das Häufigkeitspolygon nach Dicke*

Die Rückenhaare der Kaninchen charakterisieren sich dadurch, dass sie eine grosse Häufigkeit entsprechend des Höchstwerts haben (Abb. 1, Häufigkeitspolygon nach Dicke) und durch eine rechts Asymmetrie (die Anzahl der Faser mit einer grösseren Dicke als der Höchstwert ist grösser, als die Anzahl der Faser mit kleinerer Dicke als der Höchstwert). Mann kann zugleich auch bei dieser Faser das Streben nach dem Erscheinen eines zweiten Maximum ungefähr um 18 μ. Die entsprechende Häufigkeit des Höchstwerts bei den Seitenhaaren der Kaninchen ist kleiner um etwa 10%, als bei denselben Rückenhaaren (Abb. 2) das zweite Maximum befindet sich gleichfalls um etwa 18 μ. Auch bei diesem Haar ist die Asymmetrie rechts.

Das Häufigkeitspolygon nach Dicke der Rückenhaare des Feldhasen (Abb. 3) zeigt eine kleinere Häufigkeit bei dem Höchstwert (33%), im Vergleich mit den gleichen Haaren des Kaninchens, während das zweite Maximum, strebt sich bei einer grösseren Entfernung des Höchstwerts (bei etwa 20 μ) zu bilden. Die Asymmetrie dieses Haares ist gleichfalls rechts.

Die Seitenhaare des Feldhasen (Abb. 4) haben einen grösseren Höchstwert (36%), als die Rückenhaare und gleichfalls einen grösseren Höchstwert als die gleichen Kaninchenhaare.

Die Unterleibhaare (Abb. 5) sind den Schweifhaaren überlegen (Abb. 6); bei den letzteren beobachtet man das Vorhandensein eines grösseren Prozentsatzes von Fasern mit einer Dicke von über 30 μ.

Die BCBKS - Haare zeichnen sich durch eine kleinere Häufigkeit des Höchstwerts und durch eine kleinere Variationsbreite der Faserdicke (10...20 μ) aus.

d) *Querschnitte*

Bei dem Studium des Querschnittes, beobachtet man folgendes:

Die Rückenhaare des Kaninchens haben im allgemeinen den Faserkanal ziemlich entwickelt (Abb. 1). Sowohl die dünen, als auch die dicken Haare, deren kortikale Schicht mehr hervortritt, behalten ihre Querschnittsform, charakteristisch den Hasenhaaren, während die Fasern deren kortikale Schichte dün ist, ovale Querschnitte haben.

Bei den Seitenhaaren des Kaninchens (Abb. 2), haben bereits alle Fasern im Querschnitt eine ovale Form, während der Kanal, im Vergleich mit den Rückenhaaren, viel mehr hervortritt. Eine Charakteristik dieser Haare bildet das Vorhandensein eines ausgebildeten Kanals auch bei den dünnen Fasern.

Im Vergleich mit den Kaninchenhaaren, haben die Feldhasenhaaren den Kanal weniger entwickelt, sowohl bei den Rückenhaaren (Abb. 3) als auch bei den Seitenhaaren (Abb. 4). Auch bemerkt man, dass die Seitenhaare des Feldhasens, den engsten Kanal, von allen untersuchten Fasern besitzen. Bezüglich des Kanals und der Form des Querschnittes, weisen diese Haare die grösste technologische Bedeutung auf.

Zwischen den Unterleibhaaren des Feldhasens (Abb. 5) und den Schweifhaaren (Abb. 6) sind keine besonderen Unterschiede. Bezüglich des Querschnittes, haben beide Haararten einen entwickelten Kanal und besitzen eine grosse Anzahl von ovalen Fasern.

Die BCBKS - Haare — Wildkaninchenhaare (Abb. 7) kennzeichnen sich durch eine grosse Gleichmässigkeit der Form, des Querschnittes und durch einen ziemlich ausgeprägten Kanal aus.

3. 2. Die tensionalen Eigenschaften

a) *Die Zugfestigkeit und die Reissdehnung*

Die tensionalen Eigenschaften wurden mit Hilfe des Dynamometers für Bestimmungen von Einzelfasern untersucht, das eine Vorrichtung für die graphischen Aufzeichnungen der Kraft-Längenänderungs-Kurven besitzt.

Die Untersuchungsbedingungen waren folgende: a) Anfangslänge, 10 mm; b) Anfangsspannung (Vorspannung), 0,055 gf/den; c) Mittlere Zerreissdauer des Einzelversuches, etwa 20 Sekunden.

Die einzelnen Haarproben wurden in einer Atmosphäre behandelt, deren relative Luftfeuchtigkeit 65 % und eine Temperatur von 20°C betrug.

Aus den erhaltenen Ergebnissen kann man folgendes feststellen:

Die Reissfestigkeit ist grosser bei den Rücken- und Seitenhaaren des Feldhasens, als bei denselben Kaninchenhaaren (Tabelle 2).

Tabelle 2

Probe	Reissfestigkeit P_r g/Faser	Reissdehnung e_r %	Völligkeit f_W
1	4,5	41	0,657
2	4,9	42	0,755
3	5,2	45	0,714
4	5,8	47	0,746
5	4,4	49	0,668
6	4,3	39	0,584

Es ist zu bemerken, dass alle Reissproben durchgeführt wurden, bevor man für jede einzelne Faser die Dicke bestimmte. Alle Reissprobemessungen wurden auf Fasern mit einer Dicke von $13{,}5 \pm 0{,}2\,\mu$, durchgeführt. Man wählte diese Methode, damit man die Möglichkeit hat, die einzelnen Fasern vom Standpunkt der Reissfestigkeit, zu vergleichen.

Sowohl bei den Kaninchenhaaren als auch bei den Feldhasenhaaren ist die Reissfestigkeit grösser bei den Rückenhaare.

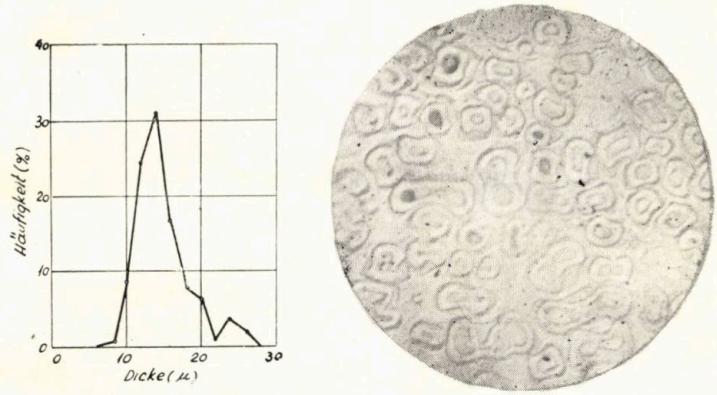


Abb. 5. — Häufigkeitspolygon nach Dicke und Querschnitte (×180) der Unterleibhaare des Feldhasens.

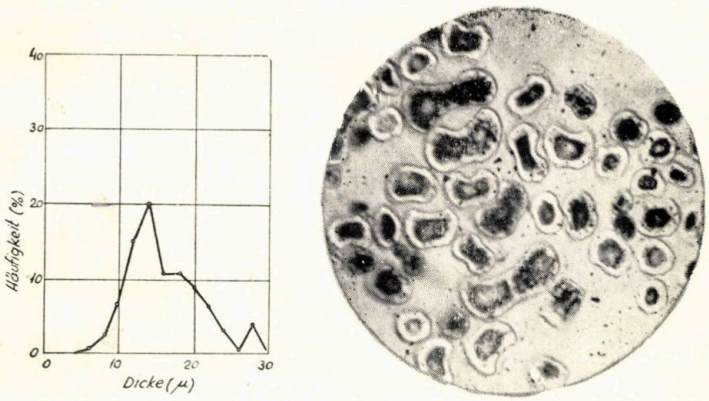


Abb. 6. — Häufigkeitspolygon nach Dicke und Querschnitte (×280) der Schweifhaare des Feldhasens.

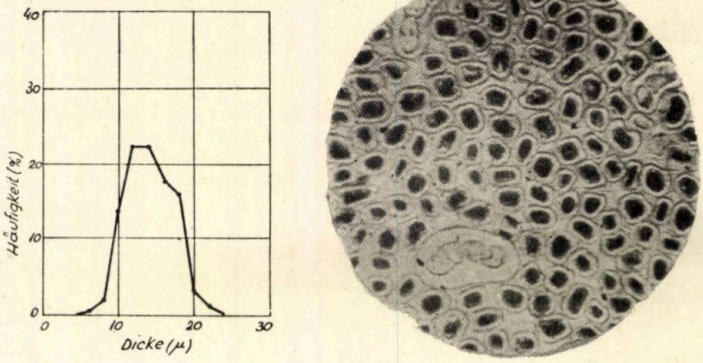


Abb. 7. — Häufigkeitspolygon nach Dicke und Querschnitte (×280) der Wildkaninchenhaare BCBKS.

Die kleinste Reissfestigkeit wurde bei den Wildkaninchenhaaren — BCBKS (4,3 g/Faser) und bei den Unterleibhaaren des Feldhhasens gemessen (4,4 g/Faser).

Die Reissdehnung bei den Kaninchenhaaren ist im allgemeineinen kleiner als bei den Feldhasenhaaren (Tabelle 2). Es ist zu bemerken, das auch in diesem Falle die Reissdehnung der Seitenhaare grösser ist als die der Rückenhaare.

Die Wildkaninchenhaare BCBKS zeigen die kleinste Reissdehung (39 %).

b) *Die Kraft — Längenänderungs - Kurven*

Aus Abb. 8, bemerkt man, dass bei den Rückenhaaren der Kaninchen (Diagramm *1*) eine ausgeprägte Deformation, in der ersten Phase der Beanspruchung festzustellen ist, nach dem wegen der Orientierung des Faserstoffes und der wachsenden Kohäsionskräfte zwischen den einzelnen Strukturelementen, sich diese Deformation weniger nach der Belastung bildet. Bei den Seitenhaaren (Diagramm *2*) ist die Dehnung kleiner am Anfang der Beanspruchung.

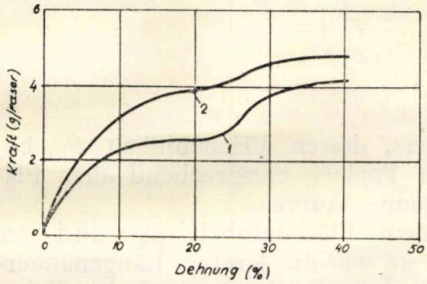


Abb. 8. — Kraft — Längenänderungs-Kurven der Kaninchenhaare: *1* — Rückenhaare, *2* — Seitenhaare.

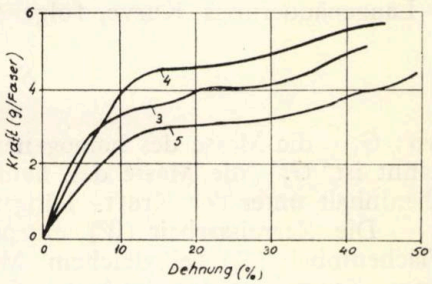


Abb. 9. — Kraft — Längenänderungs - Kurven der Feldhasenhaare: *1* — Rückenhaare, *2* — Seitenhaare, *3* — Unterleibhaare.

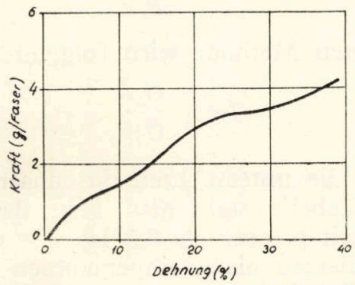


Abb. 10. — Kraft — Längenänderungs-Kurve der Wildkaninchenhaare BCBKS.

Die Kraft — Längenänderungs-Kurven bei den Feldhasenhaaren zeigen eine Dehnung bis zu 10%, während zwischen der Belastung und Deformation eine Proportionalität besteht, nach welcher die Deformation in Folge einer relativ kleinen Belastung, wahrnehmend wächst (Abb. 9, Diagramm *3*, *4* und *5*).

Eine ähnliche Erscheinung stellt man auch bei den BCBKS - Haaren fest (Abb. 10) mit dem Unterschied das die Proportionalität zwischen der Belastung und der Deformation weiter besteht, bis zu einer Dehnung von etwa 20%.

c) *Die Völligkeit*

Weil die Völligkeit, die Möglichkeit bietet, in einer genügenderen Weisen den Anfangprozess der Faser-Deformation zu bestimmen, erkannte man als nützlich, auch jenen im Falle der Hasenhaare zu untersuchen. Zu diesem Zweck verwendet man die einfache Methode, welche sich auf der Proportionalität zwischen der Masse und dem Flächeinhalts eines homogenen Papiers, stützt.

Nach dieser Methode entspricht der Flächeninhalt (S) unter den Kraft —Längenänderungs-Kurve, folgendem Ausdruck:

$$S = \frac{G_2 S_1}{G_1},$$

wo: G_1 — die Masse des homogenen Papiers, dessen Flächeninhalt S_1, bekannt ist, G_2 — die Masse des homogenen Papiers, entsprechend dem Flächeninhalt unter der Kraft—Längenänderungs-Kurve.

Die Zerreissarbeit (W) entspricht dem Flächeninhalt (S) und der Flächeninhalt (S_1) bei gleichem Masstab, so wie die Kraft — Längenänderungs-Kurve, ist der Produkt zwischen Reissfestigkeit (P_r) und der Reissdehnung (e_r). Die Formel der Völligkeit

$$f_W = \frac{W}{P_r e_r}$$

im Falle der angewendeten Methode wird folgende:

$$f_W = \frac{G_2}{G_1}.$$

Die Völligkeit für die untersuchten Hasenhaare sind in der Tabelle 2 enthalten. Aus dieser Tabelle stellt man fest, dass bei allen Arten von Hasenhaaren die Völligkeit grösser als 0,5 ist.

Weil für die Textilerzeugnisse, eingenommen Hüte, man immer Faser mit einer grösseren Völligkeit bevorzugt, ergibt sich, dass von den untersuchten Haaren, die Seitenhaare der Feldhasen, (f_W=0,746) als auch die der Kaninchen (f_W=0,755) besser jenen Anforderungen entsprechen.

Wenn man auch die anderen untersuchten Eigenschaften in Betracht zieht, Reissfestigkeit, Reissdehnung und die transversale Dimension, kann man den Schluss ziehen, dass das Seitenhaar ein wertvoller Rohstoff ist. Aus den ausgeführten Forschungen ergibt sich, dass die Rücken- und Seitenhaare des Feldhasens, die notwendigen Bedingungen für die Fabrikation von Hüten von höherer Qualität besitzen.

Technische Hochschule, Jassy,
Lehrstuhl für Spinnerei
und
Hutfabrik, Timişoara

LITERATURVERZEICHNIS

1. Stoves J. L., *Fibre Microscopy*. National Trade Press, London, 1957.
2. Morton W. E., Hearle J. W. S., *Physical Properties of Textile Fibres*. Published in conjunction with the Textile Institute, Manchester-London, Butterworts, 1962.
3. * * * *Handbuch der Werkstoffprüfung*. Bd. V, Zweite Aufl., Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1960.
4. Wildman A. B., *The Microscopy of Animal Textile Fibres*. Toridon, Leeds, 1954.
5. Koch S., *Grosses Textil-Lexikon*. Deutsche Verlags-Anstalt, Stuttgart, 1966.
6. * * * *Lexiconul Tehnic Român*. 12, Ed. Tehn., Buc., 1963.
7. Himmelreich W., Otto F., Pospischil E., *Prüfmethoden für die Betriebslabors der Textilindustrie*. VEB Fachbuchverlag, Leipzig, 1965.
8. Vlad I., *Fibre textile*, EDP, Buc., 1964.

CONTRIBUŢII LA STUDIUL DIMENSIUNII TRANSVERSALE ŞI A PROPRIETĂŢILOR TENSIONALE ALE PĂRULUI DE IEPURE FOLOSIT LA FABRICAREA PĂLĂRIILOR

(Rezumat)

Se prezintă un studiu asupra părului de iepure *(Lepus europaeus* şi *Lepus cuniculus)* produs în R.S.Romînia. Studiul se referă la neuniformitatea dimensiunii transversale a fibrelor fine (puf) în funcţie de regiunea corporală a animalului, la secţiunile transversale şi la proprietăţile tensionale — alungirea la rupere, sarcina de rupere şi factorul lucrului de rupere.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Poligonul de frecvenţă după diametru şi secţiunile transversale (×280) ale părului de iepure de casă de pe spate.

Fig. 2. — Poligonul de frecvenţă după diametru şi secţiunile transversale (×280) ale părului de iepure de casă de pe margine.

Fig. 3. — Poligonul de frecvenţă după diametru şi secţiunile transversale (×280) ale părului de iepure de cîmp de pe spate.

Fig. 4. — Poligonul de frecvență după diametru și secțiunile transversale (×280) ale părului de iepure de cîmp de pe margine.

Fig. 5. — Poligonul de frecvență după diametru și secțiunile transversale (×280) ale părului de iepure de cîmp de pe abdomen.

Fig. 6. — Poligonul de frecvență după diametru și secțiunile transversale (×280) ale părului de iepure de cîmp de pe coadă.

Fig. 7. — Poligonul de frecvență după diametru și secțiunile transversale (×280) ale părului de iepure BCBKS.

Fig. 8. — Diagramele sarcină — alungire ale părului de iepure de casă: *1* — de pe spate, *2* — de pe margine.

Fig. 9. — Diagramele sarcină — alungire ale părului de iepure de cîmp: *1* — de pe spate, *2* — de pe margine, *3* — de pe abdomen.

Fig. 10. — Diagrama sarcină — alungire a părului de iepure BCBKS.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

D. K. 621.833 ; 677.054

RATIONELLE BESTIMMUNG DER REIHE VON WECHSELRÄDERN FÜR NEGATIVE KETTABLASSGETRIEBE

VON

FILIP REICHER

Mitteilung an der wissenschaftlichen Tagung der Technischen Hochschule, Jassy, 28—30. September 1967

Das negative Kettablassgetriebe System Roper wird bei dem Bau zahlreicher Webmaschinen benutzt, darunter der Maschinen A 1, A 2 und anderer, die in Rumänien erzeugt werden.

Um einen grossen Schussdichtenbereich zu erzielen, wird das Kettablassgetriebe mit einer Reihe von Wechselrädern versehen. Es wird die Aufgabe gestellt die Mindestzahl von Wechselrädern in die Reihe aufzunehmen und gleichzeitig jede beliebige Schussdichte zwischen zwei gegebenen Grenzwerten zu erzielen.

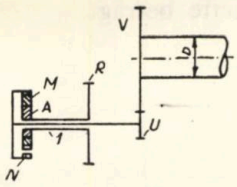


Abb. 1

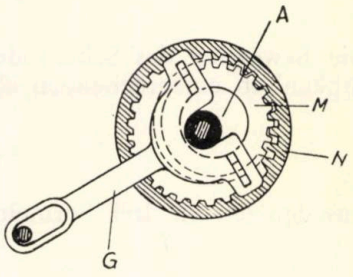


Abb. 2

Das Planetengetriebe des Kettablassmechanismus ist folgendermassen aufgebaut (Abb. 1) : Das Schaltrad *R* bildet gemeinsam mit der Muffe *1* und der Exzenterscheibe *A* einen Maschinenteil. Auf dem Exzenter *A* liegt das aussenverzahnte Planetenwechselrad *M*, welches das innenverzahnte

Zentralrad N dreht. Letzteres ist auf derselben Welle mit dem Stirnrad U befestigt, das über das Stirnrad V den Kettbaum dreht. Die Gabel G (Abb. 2) gestattet eine ebene Bewegung des Planetenrades M, aber keine Umdrehungen um dessen Mittelpunkt. Der Schwinghebel der die auf das Schaltrad R wirkende Schaltklinke bewegt, (in den Abbildungen nicht sichtbar), hat einen veränderlichen Hub, in Abhängigkeit von dem jeweiligen Kettbaumdurchmesser: wenn der Kettbaumdurchmesser gross ist, ist der Hub klein, und umgekehrt. Die Grenzwerte der Schaltklinkenamplitude betragen 0,5 Zähne (bei vollem Kettbaum) und 5 Zähne (bei minimalem Kettbaumdurchmesser).

Es werden mit z_m, z_n, z_u, z_v, z_r die Zähnezahlen der Zahnräder M, N U, V und R bezeichnet, während a, m, n, v, die Anzahl der Umdrehungen der betreffenden Zahnräder pro Zeiteinheit darstellen. Als Zeiteinheit wird die Dauer einer Umdrehung der Kurbelwelle der Maschine gewählt.

Ferner bedeuten D — jeweiliger Kettbaumdurchmesser, δ — Anzahl der Schussfäden die einem cm abgelassener Kette entsprechen, Z — Anzahl der Zähne um die das Schaltrad R durch eine Bewegung der Schaltklinke weitergedreht wird, $(0{,}5 \leqslant Z \leqslant 5)$.

Die Winkelgeschwindigkeiten der Zahnräder N und U sind gleich gross, ebenso die der Scheibe A und des Rades R. Die Winkelgeschwindigkeit des Rades V ist gleichzeitig die des Kettbaums.

Die Formel der Planetengetriebe ist hier

$$\frac{n-a}{m-a} = \frac{z_m}{z_n}. \tag{1}$$

Da aber $m = 0$, ergibt sich

$$n = a\left(1 - \frac{z_m}{z_n}\right). \tag{2}$$

Die Bewegung des Schaltrades ergibt $a = Z/z_r$. Die Länge der einem Sperrklinkenhub entsprechenden abgelassenenen Kette beträgt

$$\pi D v = \frac{1}{\delta}. \tag{3}$$

Aus den letzten drei Formeln ergibt sich

$$Z = \frac{z_r z_n z_v}{\pi D \delta (z_n - z_m) z_u}, \tag{4}$$

da $v = n z_u / z_v$ ist.

Man erhält demnach folgende zwei Ungleichheiten

$$0{,}5 \leqslant \frac{z_r z_n z_v}{\pi D_{\max} \delta (z_n - z_m) z_u} \tag{4'}$$

und

$$(4'') \qquad \frac{z_r z_n z_v}{\pi D_{\min} \delta (z_n - z_m) z_u} \leqslant 5.$$

Die Unbekannte ist jeweilig z_m oder δ, wie aus dem nachfolgenden Beispiel ersichtlich ist.

Bei der Webmaschine Muster A 1 sind $z_r = 90$, $z_n = 56$, $z_u = 31$, $z_v = 96$, $\delta_{\min} = 7$, $\delta_{\max} = 70$, $D_{\min} = 10{,}2$ cm, $D_{\max} = 56$ cm.

Erzetzt man die Buchstaben aus den Formeln (4') und (4") mit den entsprechenden Zahlen, so erhält man

$$(5') \qquad 0{,}5 \leqslant \frac{4\,970}{D_{\max} \delta (56 - z_m)},$$

und

$$(5'') \qquad \frac{4\,970}{D_{\min} \delta (56 - z_m)} \leqslant 0{,}5.$$

Man konstatiert dass gleichzeitig mit δ auch z_m grössere Werte annehmen muss. Deswegen wird für den Mindestwert von δ ($\delta_{\min} = 7$) der grösstmögliche Wert für z_m angenommen, den man aus der Ungleichheit (5") errechnet

$$\frac{4\,970}{10{,}2.\,7\,(56 - z_m)} \leqslant 5.$$

Da die Lösung $z \leqslant 42{,}1$ ist, hat das erste Wechselrad 42 Zähne.

Nun wird der Höchstwert von δ errechnet, das mit diesem Wechselrad erzielbar ist, unter Verwendung der Ungleichheit (5')

$$0{,}5 \leqslant \frac{4\,970}{56\,\delta\,(56 - 42)}.$$

Man erhält $\delta \leqslant 12{,}7$. Das Wechselrad $z_m = 42$ kann folglich für $\delta = 7 \ldots 12{,}7$ verwendet werden. Von $\delta = 12{,}7$ an muss man ein zweites Wechselrad einsetzen, das sich wiederum aus der Ungleichheit (5") errechnen lässt

$$\frac{4\,970}{10{,}2.\,12{,}7\,(56 - z_m)} \leqslant 5.$$

Man erhält die Lösung $z_m \leqslant 48{,}3$, somit ist $z_{m2} = 48$.

Indem man wechselweise die Ungleichheiten (5') und (5") benutzt, errechnet man nacheinander die Reihe der Wechselräder und die entsprechenden Schussdichten und erhält folgende Tabelle:

$$\begin{aligned}
\delta &= 7 \ldots 12{,}7, & z_{m1} &= 42,\\
\delta &= 12{,}7 \ldots 22{,}1, & z_{m2} &= 48,\\
\delta &= 22{,}1 \ldots 35{,}5, & z_{m3} &= 51,\\
\delta &= 35{,}5 \ldots 59{,}1, & z_{m4} &= 53,\\
\delta &= 59{,}1 \ldots 70, & z_{m5} &= 54.
\end{aligned}$$

Die angeführte Methode kann für jede Art von Kettablassgetrieben benutzt werden, die mit Planetengetrieben versehen sind.

Technische Hochschule, Jassy,
Lehrstuhl für Weberei

LITERATURVERZEICHNIS

1. Малышев А. П., Воробьев П. А., *Механика и конструктивные расчеты ткацких станков*. Машгиз, М., 1960.

DETERMINAREA RAȚIONALĂ A SERIEI DE ROȚI DINȚATE SCHIMBĂTOARE LA REGULATOARE NEGATIVE DE URZEALĂ

(Rezumat)

Se prezintă o metodă pentru determinarea seriei de roți dințate la regulatoare negative de urzeală ce includ mecanisme planetare, impunîndu-se condiția ca numărul de roți să fie minim și orice desime în bătătură, cuprinsă între două valori date, să fie realizabilă.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2, 1968

C. Z. 621.317.39 ; 68

METODĂ DE TENSOMETRIE ELECTRICĂ REZISTIVĂ PENTRU STABILIREA DEFORMAŢIEI MATERIALELOR ELASTO-PLASTICE

DE

VOINEA COCIU, LĂCRĂMIOARA DUMA, DAN CROITORU
şi GABRIELA MĂLUREANU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 28—30 septembrie 1967

1. Introducere

În procesul tehnologic de confecţionare a articolelor din piele şi în special a încălţămintei, problema obţinerii formelor spaţiale din detalii plane continuă să rămînă în centrul atenţiei specialiştilor, căile de rezolvare folosite în prezent nefiind încă satisfăcătoare sub aspectul cunoaşterii mecanismului intim al deformărilor elasto-plastice din material, condiţie necesară pentru dirijarea procesului de obţinere a semifabricatelor din piele precum şi a proceselor de prelucrare a acestora.

Această problemă a stat în atenţia colectivului nostru şi rezultatele studiilor efectuate sînt concretizate într-o serie de lucrări [1]...[6] pe această temă. Apreciind justeţea concluziilor studiilor anterioare sub aspectul elucidării mecanismului obţinerii deformaţiilor elasto-plastice necesare cît şi sub aspectul întrevederii căilor de conducere a proceselor de fabricaţie a produselor cu forme spaţiale, rămîne nerezolvată satisfăcător problema metodei de studiu şi a aparaturii necesare sub aspectele operativităţii şi urmăririi cu mijloace de laborator a fenomenului nu pe epruvete, ci pe semifabricate, în proces de spaţializare, unde solicitările şi deformaţiile sînt mult mai complexe şi de intensităţi şi direcţii variate.

Referitor la metoda de lucru folosită în cercetările anterioare se aminteşte că urmărirea fenomenelor de deformare elasto-plastică a materialelor s-a efectuat în principal cu ajutorul dinamometrului prevăzut cu unele anexe speciale pentru obţinerea parametrilor de condiţionare, putîndu-se urmări numai deformaţii liniare, pe epruvete. Deoarece dinamometrul permite numai solicitarea succesivă a epruvetelor individuale, iar timpul necesar pentru punerea în evidenţă a fenomenului de deformare plastică ajunge pînă la 24 de ore (fapt dovedit în lucrările anterioare), este evident că această metodă, satisfăcătoare pentru cercetări de principiu, nu poate fi eficientă sub aspectul operativităţii, în cazul folosirii ei ca metodă curentă de cercetare în laboratoarele uzinale, pentru stabilirea rapidă a parametrilor de formare spaţială.

2. Procedeul experimental

Pentru a crea condiţiile aplicării în practică a rezultatelor cercetărilor anterioare, avînd în vedere importanţa deosebită pe care o prezintă conducerea ştiinţifică a proceselor de solicitare-formare spaţială, colectivul şi-a propus găsirea unei metode mai operative, aplicabilă în laboratoarele uzinale, cu posibilităţi de cercetare a fenomenului mai apropiate de situaţiile reale.

Cunoscut fiind faptul că între rezistenţa electrică şi intensitatea curentului dintr-un circuit electric există o corelaţie directă exprimată prin legea lui Ohm, iar variaţia rezistenţei electrice a unui conductor este proporţională cu variaţia lungimii şi invers proporţională cu variaţia ariei secţiunii ($R = \rho l/A$), este posibilă, în cazul utilizării unui conductor elastic, traducerea mărimii care produce deformaţia în variaţii ale intensităţii curentului electric. Aplicabilitatea acestei metode este de altfel confirmată de utilizarea ei în diverse domenii ale tehnicii.

În acest sens s-a experimentat o metodă indirectă de urmărire a fenomenului de deformare utilizîndu-se un traductor care, solicitat prin intermediul materialului supus deformării, îşi modifică dimensiunile şi implicit proprietăţile de conductibilitate electrică şi care, introdus într-un circuit electric, produce o variaţie proporţională a intensităţii curentului din circuitul respectiv.

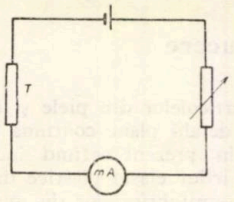


Fig. 1

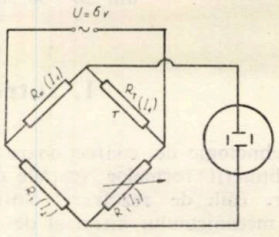


Fig. 2

Pentru soluţionarea practică a problemei, s-au experimentat două instalaţii; prima instalaţie constă dintr-un circuit electric simplu, alcătuit dintr-un traductor legat în serie cu un miliampermetru şi un reostat, circuitul fiind alimentat de la o sursă de curent continuu de tensiune joasă (fig. 1); a doua instalaţie include o punte Wheatstone pentru măsurarea rezistenţelor electrice şi un osciloscraf catodic, traductorul *T* fiind conectat în circuitul punţii (fig. 2) iar osciloscraful servind pentru determinarea momentului de echilibru al punţii.

Se precizează că traductorul este realizat dintr-un tub de cauciuc elastic cu diametrul interior de 1 mm, în interiorul lui introducîndu-se soluţie de sulfat de cupru a cărei concentraţie optimă a fost determinată; capetele tubului au fost etanşate cu doi electrozi din cupru cuplaţi în circuitul electric. De asemenea se precizează că în timp ce prima instalaţie posedă avan-

tajul posibilității de urmărire directă a variației intensității cu ajutorul miliampermetrului, prezintă însă dezavantajul producerii fenomenului de polarizare, ceea ce nu permite utilizarea în timp a aceluiași traductor. Metoda a doua, în care traductorul este alimentat cu tensiune alternativă, elimină dezavantajul primei instalații, necesitînd în schimb determinarea variației intensității pe baza cunoașterii variației rezistenței, cu ajutorul relației:

$$I_1 = \frac{U}{R_0 + R_T}.$$

Prin includerea oscilografului catodic în circuit a doua instalație oferă avantajul unei mai mari sensibilități în urmărirea variației intensității, respectiv a fenomenului intim de deformare. Pentru ca instalațiile să permită analiza solicitărilor elementare care intervin în procesul complex al formării spațiale (alungiri, comprimări) s-a considerat necesară etalonarea traductorului pentru ambele tipuri de solicitări.

În cele ce urmează se vor expune succint metodele de lucru utilizate în cazul celor două instalații.

a) *Instalația în curent continuu*

Pe baza schemei de principiu prezentată mai sus, s-a ivit necesitatea primordială de determinare a naturii soluției optime sub aspectul reducerii la minimum a consecințelor fenomenului de polarizare. Experimentînd diverse soluții s-a considerat satisfăcătoare sub acest aspect soluția de sulfat de cupru la care consecințele fenomenului de polarizare se instalează mai lent.

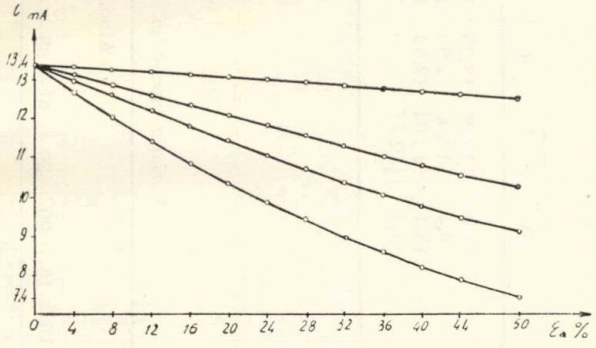


Fig. 3

În scopul stabilirii concentrației optime a soluției alese s-a experimentat o gamă de concentrații, traductorul fiind solicitat progresiv la alungire, pînă la valoarea de $1{,}5\,l$, unde l este lungimea traductorului, determinîndu-se valorile corespunzătoare ale intensității curentului (tabelul 1, fig. 3). Valoarea alungirii a fost stabilită în corelație cu domeniul alungirilor întîlnite în mod curent în cazul materialelor utilizate.

Tabelul 1

Variația intensității curentului în funcție de concentrația soluției și alungire

Concentrația	Alungirea %												
	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	50
n/1	13,4	13,36	13,29	13,23	13,16	13,06	13,00	12,94	12,83	12,75	12,63	12,59	12,54
n/5	13,4	13,09	12,85	12,59	12,32	12,07	11,84	11,55	11,34	11,03	10,83	10,60	10,24
n/10	13,4	13,04	12,63	12,26	11,81	11,48	11,10	10,68	10,38	10,10	9,80	9,57	9,15
n/20	13,4	12,714	12,006	11,40	10,814	10,32	9,87	9,41	8,99	8,58	8,20	7,90	7,40

Tabelul 2

Variația intensității curentului în funcție de comprimare

Con-cen-trația	Modificarea diametrului interior %																				
	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
n/20	11,40	11,40	11,39	11,35	11,30	11,27	11,21	11,15	11,10	11,02	10,95	10,83	10,79	10,60	10,40	10,16	9,85	9,38	8,30	5,50	0,00

După cum rezultă din tabelul 1 şi fig. 3 s-a tras concluzia că concentraţia optimă pentru această instalaţie este $n/20$ întrucît în acest caz variaţiile intensităţii curentului sînt mai uşor sesizabile pentru acelaşi grad de deformare.

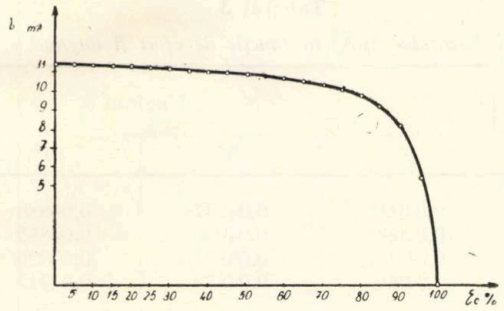


Fig. 4

Concentraţia optimă fiind stabilită s-au efectuat determinările necesare etalonării traductorului în condiţiile solicitării lui la comprimare progresivă pînă la întreruperea filonului de soluţie. Aşa cum rezultă din tabelul 2 şi fig. 4 variaţia intensităţii are loc după o lege cu totul diferită în comparaţie cu aceea din cazul alungirii, dar tot atît de uşor sesizabilă.

b) *Instalaţia în curent alternativ*

Considerînd suficient de concludente rezultatele de principiu obţinute cu ajutorul instalaţiei precedente şi cu atît mai probabil de obţinut în cazul instalaţiei în curent alternativ de tipul reprezentat în fig. 2, cu scopul reproducerii mai fidele a genurilor de deformaţii ce au loc în procesul formării spaţiale a materialelor, această ultimă instalaţie a fost completată cu un dispozitiv montat în clemele dinamometrului (fig. 5), cu ajutorul căruia se pot studia deformările materialului, urmărindu-se influenţa presiunii acestuia asupra traductorului. Pentru urmărirea fenomenului în acest mod, etalonarea traductorului s-a efectuat numai la comprimare. Aşa cum rezultă din fig. 5 a, dispozitivul se compune din două role peste care se înfăşoară o bandă elastică, traductorul fiind plasat între una din role şi bandă, introdus pe jumătate în rolă pentru a evita întreruperea filonului de soluţie la solicitare (fig. 5 b). În acest caz solicitarea la care este supus traductorul în momentul tensionării benzii elastice este o comprimare pe linia de con-

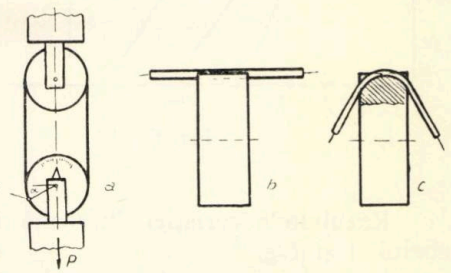


Fig. 5

tact dintre traductor şi bandă. Poziţia traductorului faţă de punctul iniţial de contact dintre bandă şi rolă a fost modificată succesiv, în scopul urmăririi fenomenului în situaţii similare cu cele întîlnite la formarea spaţială.

Tabelul 3

Variaţia intensităţii curentului (mA) *în funcţie de efort şi unghiul* α, *la contact liniar*

σ kgf/mm²	Unghiul α			
	0°	5°	10°	15°
0,5	0,04997	0,04947	0,04888	0,04836
0,6	0,04996	0,04910	0,04845	0,04811
0,7	0,04995	0,04887	0,04820	0,04794
0,8	0,04992	0,04878	0,04817	0,04776

Determinările variaţiei intensităţii curentului s-au efectuat pentru o gamă progresivă de valori ale efortului unitar din bandă, pînă la efortul de 0,8 kgf/mm² de secţiune a benzii, efort maxim întîlnit la formarea spaţială a materialelor curent utilizate în industria produselor din piele. Rezultatele acestui grup de determinări sînt prezentate în tabelul 3 şi fig. 6.

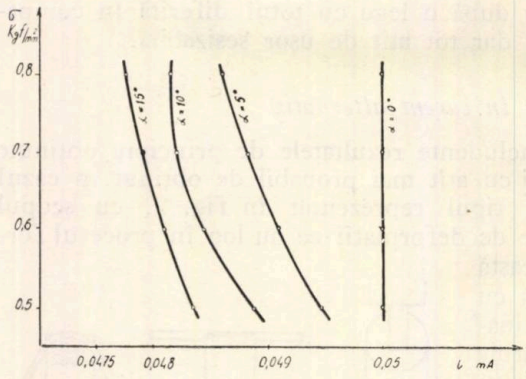


Fig. 6

Întrucît în cazul situaţiilor practice valoarea presiunii variază pe distanţe foarte mici, dat fiind forma spaţială caracterizată prin curburi foarte variate, a fost necesară studierea locală a presiunii prin solicitarea punctiformă a traductorului; în acest scop traductorul a fost montat în poziţia indicată în fig. 5 c, modul de lucru fiind identic cu cel din cazul precedent.

Rezultatele variaţiei intensităţii în acest din urmă caz sînt redate în tabelul 4 şi fig. 7.

Se menţionează că în cazul utilizării instalaţiei în curent alternativ, datorită sensibilităţii oscilografului catodic concentraţia soluţiei nu rămîne dependentă decît de caracteristicile punţii utilizate, care în cazul de faţă au impus folosirea unei soluţii avînd o concentraţie $n/1$.

Scopul acestei etape de cercetare reducîndu-se doar la stabilirea detaliilor metodei de cercetare şi etalonarea traductorului, prin cele expuse mai sus se consideră că scopul propus a fost atins.

Tabelul 4

Variația intensității curentului (mA) *în funcție de efort și unghiul* α, *la contact punctiform*

σ kgf/mm²	Unghiul α			
	0°	5°	10	15
0,5	0,04766	0,04622	0,04424	0.04249
0,6	0,04680	0,04279	0,03831	0,03736
0,7	0,04673	0,04109	0,03516	0,03243
0,8	0,03636	0,04081	0,04409	0,03157

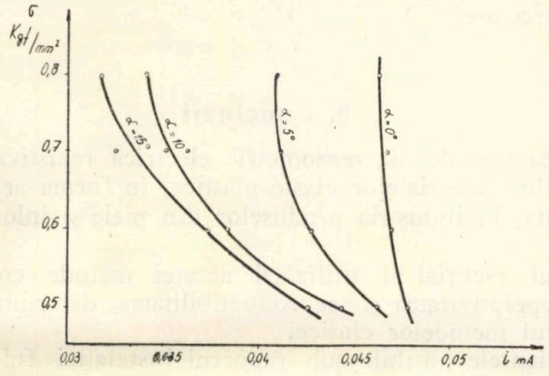


Fig. 7

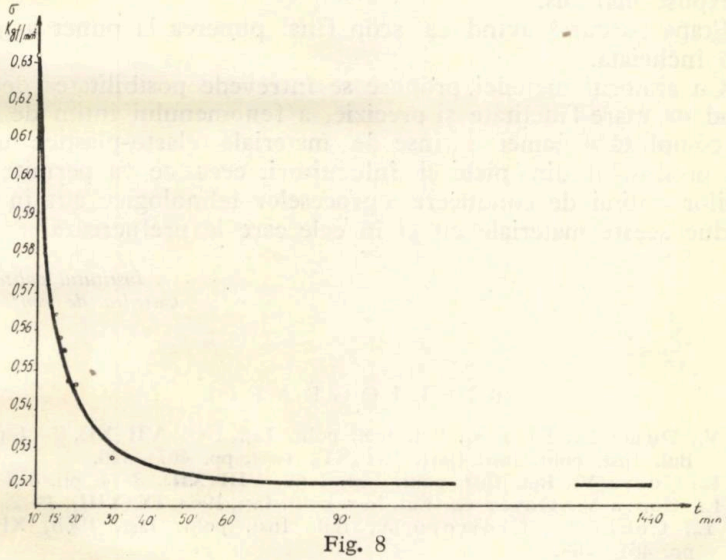


Fig. 8

Pentru demonstrarea justeţei metodei propuse şi aplicabilităţii sale în vederea elucidării mecanismului de deformare a materialelor elasto-plastice s-au efectuat experimentări cu caracter de tatonare care constau în determinarea variaţiei în timp a valorii efortului unitar din materialul supus solicitării la alungire constantă, sub efortul iniţial $\sigma = 0{,}8$ kgf/mm^2 de secţiune, în varianta plasării traductorului sub un unghi $\alpha = 10°$ şi contact punctiform cu materialul.

Aceste experimentări de tatonare au condus la obţinerea unei curbe de relaxare (fig. 8) de aceeaşi alură cu cele obţinute cu aparatura utilizată în lucrările anterioare [1]...[6], prezentînd avantajul unei fidelităţi maxime a înregistrării fenomenului pe etape.

Acest gen de experimentări urmează să constituie obiectul etapelor următoare de cercetare.

3. Concluzii

1. Utilizarea metodei de tensometrie electrică rezistivă în vederea stabilirii deformaţiilor materialelor elasto-plastice, în forma arătată, se propune pentru prima dată, în industria produselor din piele şi înlocuitori, în cercetările de faţă.

2. Avantajul esenţial al utilizării acestei metode constă în precizia înregistrărilor, operativitatea şi reproductibilitatea determinărilor, elemente deficitare în cazul metodelor clasice.

3. Din variantele posibile sub raportul instalaţiei folosite se propune ca optimă instalaţia în curent alternativ, ale cărei caracteristici şi avantaje au fost expuse mai sus.

4. Etapa parcursă avînd ca scop final punerea la punct a metodei, se consideră încheiată.

5. Cu ajutorul metodei propuse se întrevede posibilitatea determinării, la un grad de mare fidelitate şi precizie, a fenomenului intim de deformare spaţială complexă a gamei extinse de materiale elasto-plastice utilizate în industria produselor din piele şi înlocuitori, ceea ce va permite stabilirea parametrilor optimi de conducere a proceselor tehnologice atît în industriile care produc aceste materiale cît şi în cele care le prelucrează.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de confecţii din piele

BIBLIOGRAFIE

1. Cociu V., Duma L., Fica A., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1961, **VII (XI)**, *3—4*, pp. 385—398.
2. — Bul. Inst. polit. Iaşi, 1961, **VII (XI)**, *3—4*, pp. 407—420.
3. Duma L., Cociu V., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1962, **VIII (XII)**, *3—4*, pp. 457—466.
4. Duma L., Cociu V., Coşer C., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1963, **IX (XIII)**, *1—2*, pp. 445-454.
5. Duma L., Cociu V., Croitoru D., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI (XV)**, *1—2*, pp. 461—468.

6. Cociu V., Duma L., Croitoru D., Fica A.. Coşer C., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI (XV)**, *3—4*, pp. 511—520.
7. Buzdugan Gh., Blumenfeld M., *Tensometria electrică rezistivă*. Ed. tehn., Buc., 1966.
8. Mocanu D. R., Buga M., Georgescu C., *Determinarea experimentală a eforturilor unitare*. Ed. transp. şi telecom., Buc., 1966.
9. Аравин В. И., Хумеров С. Х., *Теория движения жидкостей и газов в недеформированной пористой среде*. Гостехиздат, М., 1953.

ЭЛЕКТРОРЕЗИСТИВНОТЕНЗОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЕФОРМАЦИЙ ЭЛАСТОПЛАСТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

(Резюме)

Предлагается метод исследования деформаций эластопластических материалов в процессе объемного формования, используя установку, при помощи которой явление может быть преобразовано в вариациях напряженности электрического тока.

Предложенный метод отличается от классических особой точностью записи явления, оперативностью и воспроизводительностью определений.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
KÖZPONTI KÖNYVTÁRA
1848

R F 1812

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI

SERIE NOUĂ

1969 OKT 2

TOMUL XIV (XVIII)

FASC. 3 — 4

1968

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI

SERIE NOUĂ

TOMUL XIV (XVIII)

FASC. 3 — 4

1968

1989

COLEGIUL DE REDACŢIE

Prof. emerit dr. doc. GH. ALEXA, prof. ing. D. ATANASIU, prof. ing. C. CALISTRU, prof. ing. T. GOLGOŢIU, prof. dr. doc. D. MANGERON (secretar), conf. ing. A. MARCHIŞ, prof. dr. doc. D. RUSU, prof. ing. A. ŞESAN, acad. prof. dr. doc. CRISTOFOR SIMIONESCU (preşedinte)

ÉME KÖZPONTI KÖNYVTÁRA
F
1812
FOLYÓIRAT OSZTÁLY

COMITETELE DE REDACŢIE ALE SECŢIILOR

MATEMATICI, MECANICĂ TEORETICĂ, FIZICĂ

Prof. dr. doc. Al. Climescu
Prof. Gh. Ciobanu
Prof. dr. doc. V. Petrescu

ELECTROTEHNICĂ, ELECTRONICĂ

Conf. dr. ing. D. Bărbulescu
Prof. dr. doc. N. Boţan
Conf. dr. ing. L. Sebastian

CONSTRUCŢII, HIDROTEHNICĂ

Prof. emerit ing. A. Cernătescu
Conf. ing. Vl. Boghian
Conf. ing. C. Ciobanu
Lector ing. A. Radu

CHIMIE

Prof. dr. doc. M. Dima
Prof. dr. ing. Gh. Chiriţă
Conf. ing. Gh. Botez

MECANICĂ TEHNICĂ

Prof. dr. doc. T. Fărcaş
Prof. ing. G. d'Albon
Conf. ing. Cr. Linde

INDUSTRIE UŞOARĂ

Prof. ing. I. Ştefănescu
Conf. ing. V. Copilu
Conf. ing. V. Cociu

REDACŢIA

Prof. dr. doc. D. MANGERON (redactor responsabil)

Lector dr. ing. H. ROSMAN (secretar)

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Tomul XIV (XVIII), fasc. 3—4 1968

SUMAR

Pag.

REDACŢIONALE XXI

MATEMATICĂ. MECANICĂ TEHNICĂ. FIZICĂ

AL. CLIMESCU, O funcţie numerică definită pentru algebrele lui Boole (franc., rez. rom.) 1
G. CĂLUGĂREANU, Asupra automorfismelor grupului fundamental al unei suprafeţe închise orientate (franc., rez. rom.) 5
K. GÜNTHER, P. CESKY (R.F.G.), O simplă problemă de izometrie pentru grupuri finite (germ., rez. rom.) 17
I. ENESCU, Asupra unei clase de algebre de ordin $4n$ (franc., rez. rom.) 21
C. BENZAKEN (Franţa), Pseudo-latice distributive şi aplicaţii (III) (franc., rez. rom.) 25
A. CORDUNEANU, Despre stabilitatea soluţiei ecuaţiilor singulare Volterra de speţa a II-a (rus., rez. rom.) 31
L. LORCH (Canada), Teoreme cvasi-Cauchy pentru derivate simetrice şi cele ale lui Dini (engl., rez. rom.) 35
R. P. GILBERT, R. B. KNIGHT, C. Y. LO (U.S.A.), Ecuaţii cu derivate parţiale neliniare, analitice, cu date generalizate ale lui Goursat (II) (engl., rez. rom.) 39
K. V. SAUNDERS, G. LEITMAN (U.S.A.), Unele aspecte geometrice ale proceselor optimale (II) (engl., rez. rom.) 45
C. P. TSOKOS, V. LAKSHMIKANTHAM (U.S.A.), Aplicarea principiului topologic al lui Wazewski la sistemele de control (engl., rez. rom.) 57
D. MANGERON (România), M. N. OGUZTÖRELI (Canada), Probleme optimale în sisteme de control cu parametri distribuiţi (III) (engl., rez. rom.) 63
V. K. IVANOV (U.R.S.S.), Asupra aplicării metodei lui Picard la integrarea ecuaţiilor integrale de prima specie (rus., rez. rom.) . . . 71
H. KNAPP (Austria), Metoda lui Gröbner şi aplicaţiile ei la calculul numeric al orbitelor în mecanica cerească (III) (germ., rez. rom.) 79
M. MÜLLER (R.F.G.), Asupra aproximării prin şirul de operatori al lui Meyer-König şi Zeller şi prin şirul derivatelor lor de primul ordin (germ., rez. rom.) 83
L. GODEAUX (Belgia), Suprafeţe şi varietăţi algebrice transformate raţionale ale suprafeţei lui Steiner (franc., rez. rom.) 91
H. FRANK (R.D.G.), Invarianţi ai suprafeţelor izometrice în spaţii cu curbură constantă (I) (germ., rez. rom.) 97
V. MURGESCU, Asupra prelungirii reprezentărilor conforme în spaţii L_n (franc., rez. rom.) 103
ŞT. RUSCIOR, Asupra unor varietăţi riglate cu linii asimptotice duble în E_5 (franc., rez. rom.) 109

I. RUSU, Proiecția centroafină în reprezentarea plană a suprafețelor cilindro-conice (rom., rez. franc.) 113
R. LEIS (R.F.G.), Asupra prelungirii univoce a soluțiilor ecuațiilor lui Maxwell în medii anizotrope neomogene (germ., rez. rom.) . . 119
S. GOSHAL (India), Asupra curgerii vîscoase, unidimensionale, a unui fluid (engl., rez. rom.) 125
D. D. BAINOV (Bulgaria), Metodă de integrare asimptotică a ecuației de mișcare a unui sistem neautonom cu mai multe grade de libertate (rus., rez. rom.) 127
C. ACKER, Curgeri barotrope nestaționare speciale pe o familie de plane paralele din E_3 (franc., rez. rom.) 133
D. K. SINHA (India), Asupra perturbațiilor magneto-elastice în plăci conductoare (engl., rez. rom.) 139
S. S. SANNIKOV (U.R.S.S.), O extindere a reprezentărilor liniare ale unui grup continuu (rus., rez. rom.) 143
R. V. DEUTSCH, Influența cîmpului gravitațional de structură arbitrară asupra propagării undelor Alfvén în medii neomogene (rus., rez. rom.) 149
N. REZLESCU, V. PETRESCU, Influența condițiilor de răcire după sinterizare asupra unor proprietăți electrice și magnetice ale feritelor de tip spinel (germ., rez. rom.) 155
N. CALINICENCO, N. A. MATEESCU, Dependența între presiune și distanță la descărcarea electrică pe un electrolit (franc., rez. rom.) 165
C. RUSCIOR, M. SUCIU, G. CĂLUGĂRU, P. PETRARIU, Proprietăți magnetice la pături de nichel-fosfor și cobalt-fosfor (franc., rez. rom.) 169
GH. TACU, M. MOISE, Dozajul spectroscopic al galiului în atmosferă de CO_2 (franc., rez. rom.) 175

CHIMIE

R. VASILIU, Asupra densității de curent la formarea electrochimică a amalgamului de sodiu (rom., rez. franc.) 179
GH. IONESCU, O. ROMAN, Determinarea indicelui de refracție și a densității în sistemul ternar: $NaOH—Al_2O_3—H_2O$ (rus., rez. rom.) . 185
A. LUCA, Considerații asupra proprietăților dielectrice ale unor soluri (rom., rez. franc.) 195
I. ANTONESCU, M. CARAMLĂU, F. MATEI, Dozarea oscilometrică a ionului de Bi^{3+} (rom., rez. engl.) 203
C. CALISTRU, L. IFRIM, Macrocinetica descompunerii termice a $NaHCO_3$ (engl., rez. rom.) 209
TH. SĂVEANU, M. VASILIU, AL. STANCU, Studii privind posibilitatea de intensificare a distilării peliculare (germ., rez. rom.) . . . 219
R. Z. TUDOSE, GH. CRISTIAN, Influența naturii lichidului asupra comportării hidrodinamice a picăturii (II) (rom., rez. franc.) . . . 227
I. MATEI, M. DUMITRIU, I. COCÎRLĂ, Condensarea 5-cloracenaftenchinonei cu fenoli și naftoli (germ., rez. rom.) 237
C. ONISCU, Cinetica reacției de esterificare a acizilor ariloxialchilcarboxilici halogenați (germ., rez. rom.) 245
I. MATEI, M. PĂSTRĂVANU, S. VASILIU, Condensarea 5,6-dinitroacenaftenchinonei cu fenoli (germ., rez. rom.) 261
H. I. AREȘIDZE, G. O. CIVADZE (U.R.S.S.), Mărirea proprietăților antidetonante ale benzinelor din Mirzaani și Baku cu ajutorul zeolitului sintetic (rus., rez. rom.) 269
GH. CHIRIȚĂ, M. MANCIU, Cercetări privind influența concentrației soluțiilor de taninuri vegetale asupra mărimii particulelor de tanin (rom., rez. franc.) 275

I. POPESCU, M. DIMA, Folosirea unor reziduuri din industria textilă ca îngrăşăminte (franc., rez. rom.) 281
C. POPESCU, Eficienţa îngrăşămintelor minerale aplicate la soia pe teren în pantă (rus., rez. rom.) 287
E. POPA, M. PONTA, I. ADUMITRĂCESEI, V. RĂUŢU, Rolul şi locul industriei chimice în cadrul revoluţiei ştiinţifice-tehnice contemporane (franc., rez. rom.) 293

ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ

E. LUCA, GH. BOTEZ, O. SCUTARU, A. VASILIU, Proprietăţile dielectrice ale unor derivaţi sulfamidaţi ai acizilor fenoxiacetici (rom., rez. franc.) 303
GH. SAVIN, N. ZITRON, D. BALAN, Oscilaţiile parametrice ale parametroanelor în push-pull (germ., rez. rom.) 309
H. ROSMAN, Asupra condiţiilor de pasivitate ale unui cuadripol diport liniar, în regim permanent sinusoidal (rom., rez. franc.) . . . 317
I. POPESCU, Regimul tranzitoriu al circuitului electric paralel cu bobină neliniară comandată (rom., rez. franc.) 325
L. PREDA, Asupra determinării componentelor simetrice pe cale analitică, într-o reţea trifazată cu trei conductoare (franc., rez. rom.) 339
E. DÎMBOIU, V. ŢĂRANU, Asupra unor nomograme simetrice cu drepte concurente (germ., rez. rom.) 345
V. PETRESCU, M. Creţu, Posibilităţi de măsurare a factorului de putere cu instrumente magnetoelectrice (franc., rez. rom.) . . 351
M. ANTONIU, V. PETRESCU, Frecvenţmetru cu logometru electrostatic pentru domeniul audio (rom., rez. franc.) 359
N. V. BOŢAN, E. BALABAN, G. BALABAN, I. CABA, Contribuţii la analiza şi sinteza unor scheme de protecţie prin relee pe bază de calcul algebric (germ., rez. rom.) 369
D. SANDU, Utilizarea consensului logic în sinteza structurală a automatelor finite combinaţionale cu o singură ieşire (franc., rez. rom.) 373
I. S. EREMEEV (U.R.S.S.), Asupra unei metode de îmbunătăţire a calităţii sistemelor de control liniarizate (rus., rez. rom.) . . . 383
V. BOICIU, C. ONU, Contribuţii la studiul şi realizarea amplificatoarelor cu caracteristică de amplitudine comandată (rom., rez. germ.) . . 389
I. BERGMAN, Studiul experimental al acţionării electrice cu un motor asincron alimentat de la un generator trifazat cu colector autoexcitat (germ., rez. rom.) 395
V. D. SAVIUC, M. T. LUCANU, Caracteristicile de funcţionare ale motorului asincron difazat cu rotor neferomagnetic în formă de pahar, comandat prin variaţia unghiului dintre axele înfăşurărilor statorului (engl., rez. rom.) 405
P. LEONTE, I. BERGMAN, Cu privire la influenţa cuplurilor produse de armonicele superioare ale solenaţiei asupra funcţionării maşinii asincrone cu statorul în formă de arc (germ., rez. rom.) . . . 411
A. DOBRANIŞ, Cu privire la calculul maşinilor electrice de curent continuu realizate pe principiul circuitelor imprimate (franc., rez. rom.) 421

MECANICĂ TEHNICĂ

D. MANGERON, A. OPREA, Inegalităţi în problema spectrală referitoare la sisteme polivibrante (franc., rez. rom.) 429
E. M. SHOEMAKER, (Canada), O reexaminare a vitezei critice a unui disc solid în rotaţie (engl., rez. rom.) 433
N. IRIMICIUC, SP. DELEANU, Principiile integrale ale mecanicii analitice în dinamica sistemelor de solide rigide (franc., rez. rom.) 441

R. S. DHALIWAL (Canada), Răspunsul dinamic al învelișurilor elastice anizotrope (engl., rez. rom.) 447
N. IRIMICIUC, I. IBĂNESCU, E. RUSU, Ecuații Appell pentru sisteme mecanice de solide rigide supuse la legături neolonome de mobilitate liniară (franc., rez. rom.) 455
E. J. SCOTT (U.S.A.), Probleme de contur asociate cu difuzie neomogenă și cu ecuațiile undelor cu argumente întîrziate în timp (engl., rez. rom.) 459
R. MÜLLER (Noua Zelandă), Asupra ecuațiilor balistice (engl., rez. rom.) 463
GH. MUNTEANU, Asupra accelerației de ordin oarecare în mișcarea generală a rigidului (franc., rez. rom.) 467
V. BAUȘIC, D. HORBANIUC, C. GIREADĂ, Contribuții la calculul bimomentului de încovoiere-răsucire într-o secțiune a unei grinzi drepte supusă la răsucire împiedicată (engl., rez. rom.) 469
M. PINTILIE, D. R. MOCANU, O metodă expeditivă pentru determinarea deformațiilor și elementelor static nedeterminate în cazul grinzilor drepte (franc., rez. rom.) 477
P. SIMA, Asupra dinamicii ambreiajului de automobil (engl., rez. rom.) 487
V. OLARIU, Solicitări dinamice în arce de autocamioane din foi semieliptice în timpul înscrierilor în curbă (germ., rez. rom.) . . . 497
GH. DELIU, Asupra forțelor laterale la roți de automobil (germ., rez. rom.) 505
N. G. POPINCEANU, V. MERTICARU, Contribuții la calculul îmbinărilor sudate la solicitări statice și la oboseală, simple și compuse, bazate pe încercări experimentale (franc., rez. rom.) 515
E. G. BERGER, A. S. KELZON (U.R.S.S.), Dinamica unui arbore rigid în rotație, cu reazeme articulate și elastice (rus., rez. rom.) . . . 527
D. MAROȘ, A. ANTAL, N. ORLANDEA, L. NEGRESCU, Contribuții la determinarea precisă a adîncimii și grosimii interspațiilor în roți cilindrice melcate (franc., rez. rom.) 533
C. LINDE, D. RĂDĂUCEANU, Studiu experimental asupra capacității de tracțiune a transmisiei prin frecarea cu cablu de oțel (II) (franc., rez. rom.) 545
I. ZĂGĂNESCU, V. HOANCĂ, GH. TUROS, Influența utilizării combustibililor inferiori indigeni asupra caracteristicilor de tracțiune ale locomotivelor Diesel (rom., rez. rus) 551
GH. CAȘLER, D. ZETU, Determinarea parametrilor forței principale de așchiere în procesul de strunjire longitudinală la oțelurile românești din grupa OLC STAS 880-60 (rom., rez. franc.) 561
B. PLĂHTEANU, I. CONDREA, Contribuții la studiul răcirii-ungerii prin pulverizarea lichidelor la joasă presiune în strunjirea profilată a rolelor de rulmenți (rom., rez. franc.) 563
T. GOLGOȚIU, T. FARCAȘ, GH. AILINCĂI, C. CIOCHINĂ, E. ANDREI, I. MĂLUREANU, Comportarea la coroziune a unor oțeluri aliate de construcție, standardizate (II) (rom., rez. franc.) 569
C. PICOȘ, C. BOHOSIEVICI, O. PRUTEANU, V. BRAHA, Influența deformării plastice superficiale prin rulare cu bile asupra rezistenței la oboseală (rom., rez. rus.) 573
I. IVANOV, Scurtă schiță a evoluției istoriei învățămîntului mecanicii în România (rom., rez. engl.) 581

CONSTRUCȚII. HIDROTEHNICĂ

J. **KOŽEŠNIK** (Cehoslovacia), Sisteme oscilatoare liniare complexe (engl., rez. rom.) 587
A. ȘESAN, A. VULPE, N. TUTOȘ, F. MACAVEI, Rezolvarea structurilor spațiale articulate prin matrici de transfer (rom., rez. engl.) . . 593

A. EFTIMIE, Starea de tensiune a unui teren de fundație cu anizotropie transversală în cazul problemei plane (franc., rez. rom.) . . . 603
D. DIACONU, I. CIONGRADI, M. IȚICOVICI, C. LUPAȘCU, Asupra unor factori care determină răspunsul seismic al unor clădiri cu mai multe etaje (engl., rez. rom.) 613
A. CERNĂTESCU, T. SILION, V. CIUBOTARU, M. CIJEVSCHI, P. RĂILEANU, R. APOSTOLESCU, Tasarea unor construcții în orașul Iași (engl., rez. rom.) 629
V. FOCȘA, Amortizarea și defazajul oscilațiilor termice ale pereților exteriori, determinate prin analogie electrică (engl., rez. rom.) . 639
C. CAPATU, A. MIHUL, D. DIACONU, A. CUCIUREANU, Posibilități de utilizare a instalațiilor de înregistrare a caracteristicilor dinamice ale epruvetelor, la studiul aderenței barelor de oțel înglobate în beton (engl., rez. rom.) 645
E. FLOREA, L. GROLL, Alegerea proceselor de transport și montaj ale elementelor prefabricate de construcții (franc., rez. rom.) . . 649
R. WALKUS (Polonia), Starea de fisurare și alungire a ferocimentului la încercări axiale de întindere (engl., rez. rom.) 653
I. TEOREANU, A. ȚANDREU, Cimenturi cu zgură activă (franc., rez. rom.) 665
E. PĂUNEL, R. GRIGORESCU, V. DASCĂLU, Studiu în vederea stabilirii parametrilor optimi de obținere a betoanelor cu ciment aluminos românesc (rom., rez. franc.) 673
P. BOYER, C. CASTINEL, J. NOUGARO (Franța), Repartiția debitului de-a lungul unui deversor lateral cu pereți subțiri (franc., rez. rom.) 681
L. GUȘTIUC, E. GHEORGHIU, Geneza unor forme de microrelief din zonele frecvent inundabile din luncile rîurilor din Moldova și evoluția procesului de solificare în aceste condiții (rom., rez. rus.) . . 691
V. BLIDARU, E. BLIDARU, M. GOBJILĂ, C. CISMARU, V. NĂSTASE, F. ZAVADOVSCHI, Cercetări privind irigarea prin aspersiune a terenurilor în pantă din bazinul hidrologic Bahlui (rom., rez. franc.) 703

INDUSTRIE UȘOARĂ

F. REICHER, D. LIUȚE, Cercetarea unor mecanisme ale mașinii de țesut cu ajutorul accelerației de ordinul II (germ., rez. rom.) . . . 711
V. V. EVDOKIMOV, I. I. KAPUSTIN (U.R.S.S.), Sisteme pneumatice de reglare a mecanismelor de frînare a dispozitivelor de desfășurare de pe rulouri (rus., rez. rom.) 715
B. SEMAK (U.R.S.S.), Studiul permeabilității față de aer a tricotajelor de lingerie (rus., rez. rom.) 723
V. COCIU, N. ROMAN, V. TIGAN, Contribuții la studiul formării spațiale a unor materiale elasto-plastice (rom., rez. rus.) 729
RECENZII 739

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Vol. XIV (XVIII), fasc. 3–4 1968

CONTENTS

EDITORSHIP'S ANNOUNCEMENTS XXI

MATHEMATICS. THEORETICAL MECHANICS. PHYSICS

AL. CLIMESCU, Une fonction numérique définie pour les algèbres de Boole (french, rom. summ.) 1
G. CĂLUGĂREANU, Sur les automorphismes du groupe fondamental d'une surface fermée orientable (french, rom. summ.) . . . 5
K. GÜNTHER, P. CESKY (Deutsche Bundesrepublik), Ein einfaches Isomorphieproblem für endliche Gruppen (germ., rom. summ.) . . 17
I. ENESCU, Sur une classe d'algèbres d'ordre 4*n* (french, rom. summ.) 21
C. BENZAKEN (France), Pseudo-treillis distributifs et applications (III) (french, rom. summ.) 25
A. CORDUNEANU, On the Solution Stability of the Second Kind Volterra's Singular Integral Equations (russ., rom. summ.) . . . 31
L. LORCH (Canada), Quasi-Cauchy Theorems for Symmetric and Dini Derivatives (english, rom. summ.) 35
R. P. GILBERT, R. B. KNIGHT, C. Y. LO (U.S.A.), Nonlinear, Analytic Partial Differential Equations with Generalized Goursat Data (II) (english, rom. summ.) 39
K. V. SAUNDERS, G. LEITMAN (U.S.A.), Some Geometric Aspects of Optimal Processes (II) (english, rom. summ.) 45
C. P. TSOKOS, V. LAKSHMIKANTHAM (U.S.A.), Application of the Topological Principle of Wazewski to Control Systems (english, rom. summ.) 57
D. MANGERON (Romania), M. N. OĞUZTÖRELI (Canada), Optimal Problems in Distributed Parameter Control Systems (III) (english, rom. summ.) 63
V. K. IVANOV (U.S.S.R.), On the Application of the Picard's Method to the Solution of Integral Equations of the First Kind (russ., rom. summ.) 71
H. KNAPP (Österreich), Die Gröbnersche Methode und ihre Anwendung auf die numerische Bahnberechnung in der Himmelsmechanik (II), (germ., rom. summ.) 79
M. MÜLLER (Deutsche Bundesrepublik), Über die Ordnung der Approximation durch die Folge der Operatoren von Meyer-König und Zeller und durch die Folge deren erster Abteilungen (germ., rom. summ.) 83
L. GODEAUX (Belgique), Surfaces et variétés algébriques transformées rationnelles de la surface de Steiner (french, rom. summ.) . . 91
H. FRANK (D.D.R.), Invarianten isometrischer Flächen in Räumen konstanter Krümmung (I), (germ., rom. summ.) 97

V. MURGESCU, Sur le prolongement des applications conformes dans les espaces L_n (french, rom. summ.) 103
ŞT. RUSCIOR, Sur certaines variétés réglées avec lignes asymptotiques doubles en E_5 (french, rom. summ.) 109
I. RUSU, Projection centroaffine dans la représentation plane des surfaces cylindro-coniques (rom., french. summ). 113
R. LEIS (Deutsche Bundesrepublik), Über die eindeutige Fortsetzbarkeit der Lösungen der Maxwellschen Gleichungen in anisotropen inhomogenen Medien (germ., rom. summ.) 119
S. GOSHAL (India), On One Dimensional Viscous Compressible Flow (english, rom. summ.) 125
D. D. BAINOV (Bulgaria), Asymptotic Integration Method of the Equations of Motion of Nonautonomous Quasilinear Systems with Several Degrees of Freedom (russ., rom. summ.) 127
C. ACKER, Écoulements barotropes nonstationnaires spéciaux sur une famille de plans parallèles de l'espace E_3 (french, rom. summ.) . 133
D. K. SINHA (India), Note on Magneto-Elastic Disturbances in a Conducting Plate (english, rom. summ.) 139
S. S. SANNIKOV (U.S.S.R.), On an Extension of Linear Representations of a Continuous Group (russ., rom. summ.) 143
R. V. DEUTSCH, The Influence of an Arbitrary Gravitational Field Propagation of Alfvén Waves in Nonhomogeneous Media (russ., rom. summ.) 149
N. REZLESCU, V. PETRESCU, Der Einfluss der Abkühlungsbedingungen nach der Sinterung auf die elektrischen und magnetischen Eigenschaften der Ferrite vom Spineltypus (germ., rom. summ.) . . 155
N. CALINICENCO, N. A. MATEESCU, Étude de la dépendace entre la pression et la distance pour une décharge électrique sur un électrolyte (french, rom. summ.) 165
C. RUSCIOR, M. SUCIU, GH. CĂLUGĂRU, P. PETRARIU, Propriétés magnétiques des couches de nickel-phosphore et cobalt-phosphore (french, rom. summ.) 169
GH. TACU, M. MOISE, Dosage spectroscopique du gallium dans une atmosphère de CO_2 (french, rom. summ.) 175

CHEMISTRY

R. VASILIU, Sur la densité de courant dans la formation électrique de l'amalgame de sodium (rom., french summ.) 179
GH. IONESCU, O. ROMAN, Determination of Refractive Index and Density in the Ternary System $NaOH-Al_2O_3-H_2O$ (russ., rom. summ.) 185
A. LUCA, Considérations sur les propriétés diélectriques de quelques sols (rom., french summ.) 195
I. ANTONESCU, M. CARAMLĂU, F. MATEI, Oscillometric Determination of Bi^{3+} ion (rom., english summ.) 203
C. CALISTRU, L. IFRIM, Macrokinetics of $NaHCO_3$ Thermical Decomposition (I) (english, rom. summ.) 209
T. SĂVEANU, M. VASILIU and AL. STANCU, Über die Intensivierung der Rieselfilmdestillation (germ., rom. summ.) 219
R. Z. TUDOSE, GH. CRISTIAN, Processus de transfert en goutte pulsée (II) (rom., french summ.) 227
I. MATEI, M. DUMITRIU, I. COCÎRLĂ, Kondensation von 5-Chloracenaphthenchinon mit Phenolen und Naphtholen (germ., rom. sum.) 237
C. ONISCU, Die Kinetik der Esterifizierungsreaktion der Halogenierten Aryloxyalkylkarboxysäuren (germ., rom. summ) 245

I. MATEI, M. PĂSTRĂVANU, S. VASILIU, Die Kondensation von 5,6-Dinitroacenaphtenchinon mit Phenolen (germ., rom. summ.) . 261
H. I. ARESHIDZE, G. O. CZIVADZE (U.S.R.R.), Rise of Benzines'Antidetonation Properties using Synthetic Zeolites (russ., rom. summ.) 269
GH. CHIRIȚĂ, M. MANCIU, Recherches concernant l'influence de la concentration des tanins végétaux sur la grandeur des particles du tanin (rom., french summ.) 275
I. POPESCU, M. DIMA, L'utilisation de certains résidus de l'industrie textile comme engrais (french, rom. summ.) 281
C. POPESCU, Chemical Fertilizer Efficiency in Soya-bean Cultures on Versants (russ., rom. summ.) 287
E. POPA, M. PONTA, I. ADUMITRĂCESEI, V. RĂUȚU, Rôle et place de l'industrie chimique dans le cadre de la révolution technico-scientifique contemporaine (french, rom. summ.) 293

ELECTRICAL ENGINEERING. ELECTRONICS

E. LUCA, GH. BOTEZ, O. SCUTARU, A. VASILIU, Propriétés diélectriques des dérivés sulfonamidés des acides phénoxyacétiques (rom., french summ.) 303
GH. SAVIN, N. ZITRON, D. BALAN, Parametrische Schwingungen der Parametronen in Push-Pull (germ., rom. summ.) 309
H. ROSMAN, Sur les conditions de passivité d'un quadripôle diporte, linéaire, en régime permanent sinusoïdal (rom., french summ.) . 317
I. POPESCU, Le régime transitoire du circuit électrique parallèle, à bobine nonlinéaire commandée (rom., french summ.) 325
L. PREDA, Sur la détermination des composantes symétriques par voie analytique dans un réseau triphasé à trois conducteurs (french, rom. summ.) 339
E. DÎMBOIU, V. ȚĂRANU, Über symmetrische Nomogramme mit sich schneidenen Geraden (germ., rom. summ.) 345
V. PETRESCU, M. CREȚU, Possibilités de mesure du facteur de puissance avec des instruments magnétoélectriques (french, rom. summ.) 351
M. ANTONIU, V. PETRESCU, Fréquencemètre à logomètre électrostatique pour audio-fréquences (rom., french summ.) 359
N. V. BOȚAN, E. BALABAN, G. BALABAN, I. CABA, Beiträge zur Analyse und Synthese einiger Relaisschutzschemas, auf Grund der algebraischen Berechnung (germ., rom. summ.) 369
D. SANDU, Sur l'utilisation du consensus dans la synthèse logique structurale des automates finis combinatoires à une sortie (french, rom. summ.) 373
I. I. EREMEEV (U.S.S.R.), The Step toward Increasing the Quality of Linearizing Control Systems (russ., rom. summ.) 383
V. BOICIU, C. ONU, Beiträge zum Studium und Ausführung der Verstärker mit gesteuerter Amplitudenkennlinie (rom., germ. summ.) 389
I. BERGMAN, Erfahrungsmässiges Studium des elektrischen Antriebes mit einen von einen selbsterregten Drehstrom-Stromwendergenerators Gespeisten Asynchronmotor (I) (germ., rom. summ.) . 395
V. D. SAVIUC, M. T. LUCANU, The Operating Characteristics of Two-phase Drag-cup Induction Motor Controlled by Varying the Angle between the Axes of the Stator Windings (english, rom. summ.) 405
P. LEONTE, I. BERGMAN, Über den Einfluss der von den höheren Harmonischen der Durchflutung gebildeten zusätzlichen Drehmomente auf der Asynchronmaschine mit bogenformigen Ständer (germ., rom. summ.) 411

A. DOBRANIȘ, Sur le calcul des machines électriques à courant continu basées sur le principe des circuits imprimés (french, rom. summ.) 421

MECHANICAL ENGINEERING

D. MANGERON, A. OPREA, Inégalités dans le problème spectrale concernant les phénomènes polyvibrants (french, rom. summ.) . . 429
E. M. SHOEMAKER (Canada), A Re-examination of the Critical Speed of a Rotating Solid Disk (english, rom. summ.) 433
N. IRIMICIUC, SP. DELEANU, Les principes intégrales de la mécanique analytique dans la dynamique des systèmes de solides rigides (french, rom. summ.) 441
R. S. DHALIWAL (Canada), Dynamic Response of Anisotropic Elastic Shells (english, rom. summ.) 447
N. IRIMICIUC, I. IBĂNESCU, E. RUSU, Équations d'Appel pour des systèmes mécaniques de solides rigides soumis à des liaisons nonholonomes, de mobilité linéaire (french, rom. summ.) . . 455
E. J. SCOTT (U.S.A.), Boundary-value Problems Associated with the Inhomogeneous Diffusion and Wave Equations with Retarded Arguments in Time (english, rom. summ.) 459
R. MÜLLER (New Zealand), Note on the Ballistic Equations (english, rom. summ.) 463
GH. MUNTEANU, Sur l'accélération d'ordre quelconque dans le mouvement général du corps rigide (french, rom. summ.) . . . 467
V. BAUȘIC, D. HORBANIUC, C. GIREADĂ, Contribution to the Calculus of the Bending-torsion Bimoment in a Straight Beam under Hobbled Torsion Stress (english, rom. summ.) 469
M. PINTILIE, D. R. MOCANU, Une méthode expéditive pour déterminer les déformations et les éléments statiquement non-déterminés dans le cas des poutres droites (french, rom. summ.) . . . 477
P. SIMA, On the Dynamics of Automobile Clutches (english, rom. summ.) 487
V. OLARIU, Dynamische Beanspruchungen der progressiven Halbelliptikblattfederung der Lastkraftwagen in der Kurvenfahrt (germ., rom. summ.) 497
GH. DELIU, Über die Seitenkräfte an Kraftfahrzeugrädern (germ., rom. summ.) 505
N. G. POPINCEANU, V. MERTICARU, Contributions au calcul des assemblages soudés aux sollicitations statiques et à la fatigue, simples et composées, fondées sur des recherches expérimentales (french, rom. summ.) 515
E. G. BERGER, A. S. KELSON (U.S.S.R.), A Rigid Rotating Shaft's Dynamics with Elastic and Linked Joints (russ., rom. summ.) . . . 527
D. MAROȘ, A. ANTAL, N. ORLANDEA, L. NEGRESCU, Contributions to the Accurate Determination of the Thickness of the Thread, or of the Width of the Space in Cylindrical Worm Gears (english, rom., summ.) 533
C. LINDE, D. RĂDĂUCEANU, Étude expérimentale concernant la capacité de traction des transmissions à câble en acier (II) (french, rom. summ.) 545
I. ZĂGĂNESCU, V. HOANCĂ, GH. TUROS, Der Einfluss der Verwendung minderwertiger inländischer Brennstoffe auf die Zugeigenschaften der Diesellokomotiven (rom., germ. summ.) . . . 551
GH. CAȘLER, D. ZETU, Détermination des paramètres des forces de coupe concernant les aciers roumains soumis au tournage longitudinal. Les aciers standardisés STAS 880-60 (rom., french. summ.) 561

B. PLĂHTEANU, I. CONDREA, Contributions à l'étude du refroidissement et de la lubrification par pulvérisation des liquides à basse pression, dans le tournage profilé des rouleaux de roulement (rom., french. summ.) 563

T. GOLGOȚIU, T. FĂRCAȘ, GH. AILINCĂI, C. CIOCHINĂ, E. ANDREI, I. MĂLUREANU, Comportement à la corrosion de quelques alliages d'acier pour constructions, standardisés (II) (rom., french summ.) 569

C. PICOȘ, C. BOHOSIEVICI, OCT. PRUTEANU, V. BRAHA, Rolling Pins Superficial Plastic Deformation Effect upon Resistence at Fatigue (rom., russ. summ.) 573

I. IVANOV, Outline of the History of Teaching of Mechanics in Romania (I) (rom., english summ.) 581

CONSTRUCTIONS HIDROTECHNICS

J. **KOŽEŠNIK** (Czechoslovakia), Complex Linear Oscillating Systems (english, rom. summ.) 587

A. ȘEȘAN, A. VULPE, N. TUTOȘ, F. MACAVEI, Analysis of Space Pin-jointed Structures by Transfer Matrix (rom., english summ.) . 593

A. EFTIMIE, État de tensions d'un terrain de fondation à anisotropie transversale dans le cas du problème plan (french, rom. summ.) 603

D. DIACONU, I. CIONGRADI, M. IȚICOVICI, C. LUPAȘCU, Some Factors Determining the Eartquake Response of Few-Story Buildings (english, rom. summ.) 613

A. CERNĂTESCU, T. SILION, V. CIUBOTARU, M. CIJEVSCHI, P. RĂILEANU, R. APOSTOLESCU, Settlement of Structures in the City of Jassy, Romania (rom., english summ.) 629

V. FOCȘA, Electric Analogue Study Regarding the Damping and Phase Difference of the Thermical Oscillations in the Building Outer Walls (english, rom. summ.) 639

C. CAPATU, A. MIHUL, D. DIACONU, A. CUCIUREANU, Some Possibilities to the Installations of Dynamical Characteristics Recording of the Specimens, in the Study of the Inbedded-in-Concrete Steel Bar Bond (english, rom. summ.) 645

E. FLOREA, L. GROLL, Le choix des processus de transport et de montage des éléments préfabriqués basé sur l'emploi des méthodes mathématiques (french, rom. summ.) 649

R. WALKUS (Poland), State of Cracking and Elongation of Ferrocement under Axial Tensile Load (english, rom. summ.) . . 653

I. TEOREANU, A. ȚANDREU, Ciments à laitier activé (french, rom. summ.) 665

E. PĂUNEL, R. GRIGORESCU, V. DASCĂLU, Étude pour établir les paramètres optimes en vue d'obtenir des bétons avec le ciment alumineux roumain (rom., french summ.) 673

P. BOYER, C. CASTINEL, J. NOUGARO (France), Répartition du débit le long d'un deversoir latéral a mince paroi (french, rom. summ.) 681

L. GUȘTIUC, E. GHEORGHIU, Origin of Certain Microrelief Forms in Easily Flooded Valley Rivers Zones (Moldavie, Romania) in Evolution of the Ground Formation Process (rom., russ. summ.) . . 691

V. BLIDARU, E. BLIDARU, M. GOBJILĂ, C. CISMARU, V. NĂSTASE, F. ZAVADOVSCHI, Études relatifs à l'irrigation par aspersion des terrains en pante du bassin hydrographique Bahlui (rom., french summ.) 703

LIGHT INDUSTRY ENGINEERING

F. REICHER, D. LIUȚE, Untersuchung von Getrieben der Webmaschine mittels Beschleunigungen zweiter Ordnung (germ., rom. summ.) . 711
V. V. EVDOKIMOV, I. I. KAPUSTIN (U.S.S.R.), Pneumatic Control Systems of Roll Spreading Devices Braking Mechanisms (russ., rom. summ.) 715
B. SEMAK (U.S.S.R.), Studies of the Permeability with Respect to Air of Linendrapeay (russ., rom. sum.) 723
V. COCIU, N. ROMAN, V. TIGAN, Über die Pressformen einiger elastoplastische Rohstoffe (rom., germ. summ.) 729

BOOK REVIEWS 739

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Том XIII (XVII), вып. 3—4 1968 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

ОТ РЕДАКЦИИ XXI

МАТЕМАТИКА. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. ФИЗИКА

АЛ. КЛИМЕСКУ, Численная определенная функция для алгебр Буля (франц., рез. рум.) 1
Г. КЭЛУГЭРЯНУ, Об автоморфизмах фундаментальной группы замкнутой ориентированной поверхности (франц., рез. рум.) 5
К. ГЮНТЕР, П. ЧЕСКИ (ГФР), Простая изоморфная задача для конечных групп (нем., рез. рум.) 17
И. ЕНЕСКУ, О классе алгебр порядка $4n$ (франц., рез. рум.) . . . 21
К. БЕНЗАКАН (Франция), Псевдо-распределительные структуры и приложения (франц., рез. рум.) 25
А. КОРДУНЯНУ, Об устойчивости решения сингулярных интегральных уравнений Вольтерра 2-ого рода (русск., рез. рум.) 31
Л. ЛОРЧ (Канада), Кваси-Коши теоремы для симметрических и Дини производных (англ., рез. рум.) 35
Р. П. ГИЛЬБЕРТ, Р. Б. НАЙТ, К. И. ЛО (США), Нелинейные аналитические уравнения в частных производных с обобщенными данными условиями Гурса (II) (англ., рез. рум) 39
К. В. САУНДЕРС, Г. ЛЕЙТМЕН (США), Некоторые геометрические аспекты оптимальных процессов (II) 45
К. П. ЦОКОС, В. ЛАКШМИКАНТАН (США), Применение топологического принципа Важевского к контрольным системам (англ., рез. рум.) 57
Д. МАНЖЕРОН (Румыния), М. Н. ОГЮСТОРЕЛИ (Канада), Оптимальные задачи с распределенными параметрами (III) (англ., рез. рум.) . . 63
В. К. ИВАНОВ (СССР), О применении метода Пикара к решению интегральных уравнений первого рода (русск., рез. рум.) 71
Г. КНАПП (Австрия), Метод Грёбнера и его применение к численному вычислению орбит в небесной механике (III) (нем., рез. рум.) . . 79
М. МЮЛЛЕР (ГФР), О порядке приближения рядами операторов Мейер-Кёнига и Целлера и рядами их первых производных (нем., рез. рум.) 83
Л. ГОДО (Бельгия), Поверхности и алгебраические многообразия рациональные преобразования поверхностей Штейнера (франц., рез. рум.) . 91
Г. ФРАНК (ГДР), Инварианты изометрических поверхностей в пространствах постоянной кривизны (I) (нем., рез. рум.) 97
В. МУРДЖЕСКУ, О продолжении конформных отображений в пространствах L_n (франц., рез. рум.) 103
Ш. РУСЧОР, О некоторых линейчатых многообразиях с двойными асимптотическими линиями в E_5 (франц., рез. рум.) 109

И. РУСУ, Центроаффинная проекция в плоском отображении цилиндрическо-конических поверхностей (рум., рез. франц.) 113
Р. ЛАЙС (ГФР), Однозначное продолжение решений уравнений Макевелля в анизотропных негомогенных средах (нем., рез. рум.) . . . 119
С. ГОШАЛ (Индия), Об одном сжимаемом вязком течении одного измерения (англ., рез. рум.) 125
Д. Д. БАЙНОВ (Болгария), Метод асимптотического интегрирования уравнений движения квазилинейных неавтономных систем со многими степенями свободы (русск., рез. рум.) 127
К. АКЕР, Баротропные нестационарные специальные истечения на семействе параллельных плоскостей в пространстве E_3 (франц., рез. рум.) . 133
Д. К. СИНГА (Индия), О магнито-упругих пертурбациях в проводимой плите (англ., рез. рум.). 139
С. С. САННИКОВ (СССР), Об одном обобщении линейных представлений непрерывной группы (русск., рез. рум.) 143
Р. В. ДОЙЧ, Влияние гравитационного поля любой структуры на альфвеновские волны распространяющиеся в неоднородной среде (русск., рез. рум.) 149
Н. РЕЗЛЕСКУ, В. ПЕТРЕСКУ, Влияние условий охлаждения после синтеризации на электрические и магнитные свойства феррит типа спинеля (нем., рез. рум.) 155
Н. КАЛИНИЧЕНКО, Н. А. МАТЕЕСКУ, Зависимость между давлением и расстоянием при электрической разрядке на электролите (франц., рез. рум.) 165
К. РУСЧОР, М. СУЧУ, Г. КЭЛУГЭРУ, П. ПЕТРАРЮ, Магнитные свойства слоев никель-фосфора и кобальт-фосфора (франц., рез. рум.) . . 169
Г. ТАКУ, М. МОЙСЕ, Спектроскопическая дозировка галлия в атмосфере CO_2 (франц., рез. рум.) 175

ХИМИЯ

Р. ВАСИЛИУ, О плотности тока при химическом формировании амальгамы натрия (рум., рез. франц.) 179
Г. ИОНЕСКУ, О. РОМАН, Определение показателя преломления и плотности в тройной системе: едкий натрий-глинозем-вода (русск., рез. рум.) 185
А. ЛУКА, О диэлектрических свойствах некоторых почв (рум., рез. франц.) 195
И. АНТОНЕСКУ, М. КАРАМЛЭУ, Ф. МАТЕЙ, Осциллометрическая дозировка иона Bi^{+3} (рум., рез. англ.) 203
К. КАЛИСТРУ, Л. ИФРИМ, Макрокинетика термического разложения $NaHCO_3$ (англ., рез. рум.) 209
Т. СЭВЯНУ, М. ВАСИЛИУ, АЛ. СТАНКУ, Изучение возможности интенсификации пленочной дистилляции (нем., рез. рум.) 219
Р. З. ТУДОСЕ, Г. КРИСТИЯН, Процессы трансфера в пульсируемых каплях (II) (рум., рез. франц.) 227
И. МАТЕЙ, М. ДУМИТРИУ, И. КОКЫРЛЭ, Конденсация 5-хлораценафтенхинона с фенолами и нафтолами (нем., рез. рум.) 237
К. ОНИСКУ, Кинетика реакции эстерификации галловых арилкеиалкилкарбоксиловых кислот (нем., рез. рум.) 245
И. МАТЕЙ, М. ПЭСТРЭВАНУ, С. ВАСИЛИУ, Конденсация 5,6-динитроаценафтенхинона с фенолами (нем., рез. рум.) 261
Х. И. АРЕШИДЗЕ, Г. О. ЧИВАДЗЕ (СССР), Повышение антидетонационных свойств бензинов с помощью синтетического цеолита (русск., рез. рум.) 269
Г. КИРИЦЭ, М. МАНЧУ, Исследование влияния концентрации растворов растительных таннинов на величину частиц таннина (рум., рез. франц.) 275
И. ПОПЕСКУ, М. ДИМА, Использование промышленных текстильных остатков как сельскохозяйственное удобрение (франц., рез. рум.) . . 281

К. ПОПЕСКУ, Эффективность удобрений внесенных под сою на склонах (русск., рез. рум.) 287
Е. ПОПА, М. ПОНТА, И. АДУМИТРЭЧЕСЕЙ, В. РЭУЦУ, Роль и место химической промышленности в современных научно-технических рамках (франц., рез. рум.) 293

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА. ЭЛЕКТРОНИКА

Е. ЛУКА, Г. БОТЕЗ, О. СКУТАРУ, А. ВАСИЛИУ, Диэлектрические свойства некоторых сульфамидных феноксиуксусной кислоты (рум., рез. франц.) 303
Г. САВИН, Н. ЦИТРОН, Д. БАЛАН, Параметрические осцилляции параметронов в условиях контравременной связи (нем., рез. рум.) . . 309
Г. РОСМАН, Об условиях пассивности линейного дипортового четырехполюсника в установившемся синусоидальном режиме (рум., рез. франц.) 317
И. ПОПЕСКУ, Переходный режим параллельной электрической цепи с нелинейной управляемой катушкой (рум., рез. франц.) 324
Л. ПРЕДА, К определению симметрических составляющих аналитическим путем в трехфазной сети с тремя проводниками (франц., рез. рум.) . 339
Е. ДЫМБОЮ, В. ЦЭРАНУ, О симметричных номограммах с пересекающимися прямыми (нем., рез. рум.) 345
В. ПЕТРЕСКУ, М. КРЕЦУ, Возможности измерения коэффициента мощности магнитоэлектрическими инструментами (франц., рез. рум.) . . . 351
М. АНТОНИУ, В. ПЕТРЕСКУ, Частотометр с электростатическим логометром для аудио-частоты (рум., рез. франц.) 359
Н. В. БОЦАН, Е. БАЛАБАН, Г. БАЛАБАН, И. КАБА, К анализу и синтезу схем релейной защиты на основе алгебраического расчета (нем., рез. рум.) 369
Д. САНДУ, Об использовании логического консенсуса в структурном синтезе комбинационных конечных автоматов с одним выходом (франц., рез. рум.) 373
И. С. ЕРЕМЕЕВ (СССР), Об одном пути повышения качества линеаризованных систем (русск., рез. рум.) 383
В. БОЙЧУ, К. ОНУ, К исследованию и конструкции амплификаторов с характеристикой с управляемой амплитудой (рум., рез. нем.) . . 389
И. БЕРГМАН, Опытное исследование электрического возбуждения асинхронным двигателем алиментированным трехфазным генератором с автовозбужденным коллектором (I) (нем., рез. рум.) 395
В. Д. САВЮК, М. Т. ЛУКАНУ, Функциональные характеристики асинхронного двух фазного двигателя с неферромагнитным ротором в виде стакана управляемым изменением угла между осями намоток статора (англ., рез. рум.) 405
П. ЛЕОНТЕ, И. БЕРГМАН, О влиянии вращающих моментов — продукт высших гармоник соленации — на функционирование асинхронной машины с дугообразным статором (нем., рез. рум.) 411
А. ДОБРАНИЩ, О расчете электрических машин постоянного тока с печатной обмоткой якоря (франц., рез. рум.) 421

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Д. МАНЖЕРОН, А. ОПРЯ, Неравенства в спектральной задаче относящейся к поливибрантным системам (франц., рез. рум.) 429
Е. М. ШОУМЕКЕР (Канада), Новая проверка задачи о критической скорости твердого диска в вращательном движении (англ., рез. рум.) 433
Н. ИРИМИЧУК, С. ДЕЛЯНУ, Интегральные принципы аналитической механики в динамике систем твердых жестких тел (франц., рез. рум.) 441

Р. С. ДАЛИВАЛ (Канада), Динамическая отдача анизотропных эластических оболочек (англ., рез. рум.) 447
Н. ИРИМИЧУК, И. ИБЭНЕСКУ, Е. РУСУ, Уравнения Аппеля для механических систем твердых жестких тел с неголономными связями линейной подвижности (франц., рез. рум.) 455
Е. ДЖ. СКОТТ (США), Граничные задачи соответствующие негомогенной диффузии и волновым уравнениям с запаздывающими по времени аргументами (англ., рез. рум.) 459
Р. МЮЛЛЕР (Новая Зеландия), О баллистических уравнениях (англ., рез. рум.) 463
Г. МУНТЯНУ, Об ускорении любого порядка в сложном движении твердых тел (франц., рез. рум.) 467
В. БАУШИК, Д. ГОРБАНЮК, К. ДЖИРЯДЭ, Вклады к расчете изгибно-крутящего бимомента в сечение прямой балки подлежащей стесненному кручению (англ., рез. рум.) 469
М. ПИНТИЛИЕ, Д. Р. МОКАНУ, Экспедитивный метод определения деформаций и статически неопределенных элементов в прямых балках (франц., рез. рум.) 477
П. СИМА, О динамике сцепления коробки передач автомобиля (англ., рез. рум.) 487
В. ОЛАРИУ, Динамическая нагрузка полуэллиптических рессор грузовиков на криволинейном пути (нем., рез. рум.) 497
Г. ДЕЛИУ, О боковых силах в колесах автомобиля (нем., рез. рум.) . . 505
Н. Г. ПОПИНЧЯНУ, В. МЕРТИКАРУ, Расчет сварных соединении, подвергаемых статическим простым и сложным усилиям и усталости (франц., рез. рум.) 515
Е. Г. БЕРГЕР, А. С. КЕЛЬЗОН (СССР), Динамика жесткого вала, вращающегося в шарнирной и упругой опорах (русск., рез. рум.) . . 527
Д. МАРОШ, А. АНТАЛ, Н. ОРЛАНДЯ, Л. НЕГРЕСКУ, К точному определению толщины вутка или же ширины канавки винтовых цилиндрических зацеплений (англ., рез. рум.) 533
К. ЛИНДЕ, Д. РЭДЭУЧАНУ, Экеперимептальное иеследование тяговой способности передачи с канатоведущим шкивом (II) (франц., рез. рум.) 545
И. ЗЭГЭНЕСКУ, В. ХОАНКЭ, Г. ТУРОС, Влияние использования местных топлив низшего качества на тяговые характеристики тепловозов (рум., нем. рез.) 551
Г. КАШЛЕР, Д. ЗЕТУ, Определение технических характеристик сил резания в процессе токарной продольной румынских сталей группа ОЛК СТАС 880-60 (рум., рез. русск.) 561
Б. ПЛЭХТЯНУ, И. КОНДРЯ, К вопросу изучения охлаждения смазки распылением жидкостей при низком давлении в фасонном обтачивании подшипниковых роликов (рум., рез. франц.) 563
Т. ГОЛГОЦЮ, Т. ФЭРКАШ, Г. АИЛИНКЭЙ, С. ЧОКИНЭ, Е. АНДРЕЙ, И. МЭЛУРЯНУ, О коррозии некоторых стандартных сплавов стали в машиностроении (II) (рум., рез. франц.) 569
К. ПИКОШ, К. БОГОСИЕВИЧ, О. ПРУТЯНУ, В. БРАГА, Влияние поверхностного пластического деформирования обкаткой шариками на усталостную прочность (рум., рез. русск.) 573
И. ИВАНОВ, Заметка об истории развития преподавания механика в Румынии (рум., рез. англ.) 581

СТРОИТЕЛЬСТВО. ГИДРОТЕХНИКА

Ж. КОЖЕШНИК (Чехословакия), Линейные колебательные системы (англ., рез. рум.) 587

А. ШЕСАН, А. ВУЛЬПЕ, Н. ТУТОШ, Ф. МАКАВЕЙ, Решение пространственно шарнирных структур при помощи матриц переноса (рум., рез. англ.) 593
А. ЕФТИМИЕ, Состояние напряжений в грунте фундамента с поперечной анизотропией в случае плоской задачи (франц., рез. рум.) . . . 603
Д. ДИАКОНУ, И. ЧЁНГРАДИ, М. ИЦИКОВИЧ, К. ЛУПАШКУ, О некоторых факторов определяющие сеисмический ответ многоэтажных зданий (англ., рез. рум.) 613
А. ЧЕРНЭТЕСКУ, Т. СИЛЙОН, В. ЧЮБОТАРУ, М. ЧИЖЕВСКИЙ, П. РЭИЛЯНУ, Р. АПОСТОЛЕСКУ, Осадка структур в город Яссы, Румыния (англ., рез. рум.) 629
В. ФОКША, Затухание и сдвиг фаз тепловых колебаний наружных стен определенных методом электрического моделирования (англ., рез. рум.) 638
К. КАПАТУ, А. МИХУЛ, Д. ДИАКОНУ, А. КУЧЮРЯНУ, Возможность использования помещений регистрирования динамических характеристик образов, в исследовании сцепления стержневой арматуры периодического профиля с бетоном (англ., рез. рум.) 645
Е. ФЛОРЯ, Л. ГРОЛЛ, Выбор транспортных и монтажных процессов сборных строительных элементов пользуя математические методы (франц., рез. рум.) 649
Р. ВАЛКУС (Польша), Состояние тещиностойкости и удлинение ферроцемента под действием растягаемых нагрузках (англ., рез. рум.) . . 653
И. ТЕОРЯНУ, А. ЦАНДРЕУ, Активированные скория цементы (франц., рез. рум.) 665
Е. ПЭУНЕЛ, Р. ГРИГОРЕСКУ, В. ДАСКЭЛУ, К изучению установления оптимальных параметров для получения бетонов с румынским алюминоцементом (рум., рез. франц.) 673
П. БОАЙЕ, К. КАСТИНЕЛ, Ж. НУГАРО (Франция), Распределение расхода жидкости вдоль побогного тонкостенного водослива (франц., рез. рум.) 681
Л. ГУШТЮК, Е. ГЕОРГИУ, Генезис некоторых микрорельефных форм затопляемых зон из речных поим Молдавии и эволюция почвообразовательного процесса в этих условиях (рум., рез. русск.) 691
В. БЛИДАРУ, Е. БЛИДАРУ, М. ГОБЖИЛЭ, К. ЧСМАРУ, В. НЭСТАСЕ, Ф. ЗАВАДОВСКИЙ, Исследования по орошению дождеванием на склонах гидрографического бассейна Бахлуя (рум., франц. рез.) . 703

ЛЕГКАЯ ПРОМЫШЛЕННОСТЬ

Ф. РЕЙГЕР, Д. ЛИУЦЕ, Исследование двух механизмов ткацкого станка ускорениями второго порядка (немец., рез. рум.) 711
В. В. ЕВДОКИМОВ, И. И. КАПУСТИН (СССР), Пневматические системы управления тормозными механизмами рулоноразмоточных устройств (русск., рез. рум.) 715
Б. СЕМАК (СССР), Исследование воздухопроницаемости бельевого трикотажа (русск., рум. рез.) 723
В. КОЧЮ, Н. РОМАН, В. ТИГАН, Аспекты объемного формирования некоторых эласто-пластичных материалов (рум., рез. русск.) . . 729
РЕЦЕНЗИИ 739

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

REDACŢIONALE

EDITORSHIP'S ANNOUNCEMENTS ОТ РЕДАКЦИИ

Articole ale colaboratorilor externi primite la redacţia revistei *Buletinul Institutului politehnic din Iaşi*

Papers received from the external colaborators by the Editorial Staff of the *Bulletin of the Polytechnic Institute of Jassy*

Статы внеинститутских сотрудников полученные редакцией журнала *Известия Ясского политехнического института*

P. S. BULLEN, (University of British Columbia Vancouver, Canada), *On Some Theorems of Popoviciu.*

BR. BROSOWSKI, (Max-Plank-Institut für Physik und Astrophysik, München, Deutsche Bundesrepublik), *Zur Charakterisierung von Minimallösungen im Raume C [Q, H].*

CH. P. TSOKOS, M. RAMA MOHANA RAO, (University of Rhode Island, Kingston, Rhode Island, U.S.A.), *Finite Time Stability of Control Systems and Integral Inequalities.*

E. J. SCOTT, (University of Illinois, Urbana, III., U.S.A.), *On a Class of Linear Partial Differential Equations with Retarded Argument in Time.*

M. STIEGLITZ, (Technische Hochschule, Stuttgart, Deutsche Bundesrepublik), *Ein Taubersatz für die Kreisverfahren der Limitierungstheorie bei Doppelfolgen.*

И. Т. КИГУРАДЗЕ (Тбилиский Гос. Университет, СССР), *О некоторых нелинейных краевых задачах.*

K. P. HADELER, (Universität Hamburg, Deutsche Bundesrepublik), *Das Verhalten konvexer Funktionen in endlich vielen Punkten und in ganzen.*

R. MÜLLER, (University of Otago, Dunedin, New Zealand), *The Hodograph of almost Vertical Ballistic Trajectories.*

С. БЫЧВАРОВ, З. ЧЕРНЕВА—ПОПОВА, (Машинно-Электротехрический Институт София,-Н. Р. Болгария), *Своиства дополнительных кинематических элементов при релятивном движении плоскости.*

P. LANCASTER, (University of Calgary, Alberta, Canada), *Some Questions in the Classical Theory of Vibrating Systems.*

J. CULLUM, (I. B. M. T. J. Watson Research Center, Yorktown Heights, New York, U.S.A.), *Penalty Functions and Continuous Optimal Control Problems.*

H. S. CHAKRABORTY, (Kanyapur Polytechnic, Asanrol, West Bengal, India), *On Thermoelectric Disturbances in an Semi-infinite Rod due to an Impact at one End.*

J. HUBERT, T. V. NARAYANA, (University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada), *A Note of the Birthday Problem.*

B. d'ORGEVAL, (Faculté des Sciences, Université de Dijon, France), *Sur une configuration de points, droites et quadriques.*

J. STEINGENBERGER, (Technische Hochschule Illmenau, Institut für technische Mechanik und Thermodynamik, D.D.R.), *Sur les conditions de séparabilité des variables dans l'équation de Laplace en espace riemannien.*

H. LECOCQ, (Université Libre de Bruxelles, Belgique), *Application du calcul numérique incrémental à l'operation d'intégration.*

H. LECOCQ, (Université Libre de Bruxelles, Belgique), *Mise en oeuvre d'un analyseur différential numérique basé sur le calcul incrémental.*

К. Н. ЧИМЕВ (Висш лесотехнически институт, София, Н. Р. Болгария), *Об отделимах парах функции к-значной логики.*

M. R. SCOTT, L. F. SHAMPINE, G. MILTON WING, (University of New Mexico Albuquerque, New Mexico, U.S.A.), *Invariant Imbedding and the Calculation of Eigenvalues for Sturm-Liouville Systems.*

F. SAVERIO ROSSI, (Ministero di Pubblica Istruzione, Roma, Italia), *Teoria del calcolo combinatorio generalizzato.*

P. A. LEBEDEV, N. A. TIKHONOV, (Institut Textile de Leningrade et Université d'Alger, Algérie), *Synthèse du système plan à quatre articulations admettant la pause approchée de l'élément mené.*

L. M. MILNE-THOMSON, (University of Queensland, Australia), *The Operator Nabla.*

N. MULLINEUX, J. R. REED, (The University of Aston, Birmingham, England), *The Behaviour of the Core Flux following the Chopping of Transformer Magnetising Current.*

A. FAVRE, J. GAVIGLIO, H. BURNACE, (Université d'Aix, Marseille, France), *Developpement de la transition dans le sillage d'un cylindre perpendiculaire à un écoulement supersonique.*

M. LUCIUS, (Université de Nancy, France), *Recherche d'une loi de comportement d'un matériau viscoélastique.*

W. SCHMID, (Institut für Mechanik, Universität Stuttgart, Deutsche Bundesrepublik), *Angefachte Mutationsschwingungen bei hochlaufenden Kardankreiseln.*

J. M. SKOWRONSKI, (Brisbane, Australia), *Space Delta Method for Analysis and Synthesis of Nonlinear Lumped-Systems.*

A. H. SONI, (School of Mechanical Engineering, Oklahoma State University, U.S.A.), *Coupler Cognates of Eight-link Mechanisms with Ternary Links and Double Joints.*

Sul calcolo della lastra circolare su suolo elastico soggetta a carichi parziali di superficie ed a carichi lineari.

C. E. CALLIARI, (Instituto di Scienza delle Costruzioni, Politecnico di Torino),

И. М. ЛИТВИНОВ (Институт строительных конструкций, Киев, СССР), *Новый способ глубинного уплотнения просадочных лессовых грунтов большой мощности.*

В. И. КОРОЗА (ЗИЛТП, Москва, СССР), *К теории периодических волноводов.*

Л. М. ГУСЕВ (Ленинградский институт текстильной и легкой промышленности им. С. М. Кирова, СССР), *Особенности конструкции и расчета механизмов тихоходных лифтов с безредукторным дугостаторным приводом П. А. Фрудкина.*

И. ЕРЕМЕЕВ (Конструкторско-технологический институт городского хозяйства, Киев, СССР), *Магнитные и магнитно-транзисторные преобразователи дискретных величин в непрерывные.*

C. TRUESDELL, (The John Hopkins University, Baltimore, Md., U.S.A.), *Rational Mechanics of Deformation and Flow* (III. *Problems Related with Simple Fluid*).

M. PICONE, (Academia Nazionale dei Lincei, Roma, Italia), *Problemi classici ed attuali concernenti la maggiorazione* (I).

D. J. GRIFFITHS, D. V. OSBORNE, J. F. ALLEN, (St. Andrews University, St. Andrews, Fife, Scotland), *On the Nature of the Critical Velocities of Helium II carrying a Heat Current.*

M. TROISI, *Alcuni teoremi concernenti inclusione negli spazi di Sobolev* (Università di Napoli, Italia).

M. N. OĞUZTÖRELI, (University of Alberta, Edmonton, Canada), *A Cauchy Problem for an Integro-Differential Equation of Parabolic Type with a Delayed Argument.*

F. ISAAC, (Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen, Stuttgart, Deutsche Bundesrepublik), *On the Matrix Method in Heat Conduction Phenomena.*

V. V. TOPENTCHAROV, (Institut d'Electrotechnique et de Mécanique, Sofia, Bulgarie), *Contributions à l'étude des foncteurs.*

D. D. BAINOV, (Institut d'électrotechnique et de mécanique, Sofia, Bulgarie), *Sur quelques problèmes de spectres.*

А. И. ЯСЮЛЕНИС, (**Академия Наук, Каунас, СССР**), *К применению матрично-гармонического метода при исследовании колебаний.*

Д. К. КАТАМАДЗЕ (**Грузинский политехнический институт, Тбилиси, СССР**), *Некоторые применения методов Манжерона в теории машин и механизмов.*

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Vol. XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

Matematici, Mecanică teoretică, Fizică

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том XIV (XVIII), вып. 3—4, 1968

Математика, Теоретическая механика, фивика

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

Mathematics, Theoretical Mechanics, Physics

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

C. D. 512.9

UNE FONCTION NUMÉRIQUE DÉFINIE POUR LES ALGÈBRES DE BOOLE

PAR

AL. CLIMESCU

Communication présentée au Congrès International des Mathématiciens, Moscou, Août 1966

1. Dans [1] nous avons introduit une fonction numérique qui existe pour chaque ensemble de toutes les parties d'un ensemble donné; cette fonction, appelée indice, était définie à l'aide de 5 axiomes, suggérés par certaines applications physiques possibles (homogénéité ou hétérogénéité des matériaux respectivement du déroulement d'un processus). Nous nous proposons ici d'étendre la définition des indices aux algèbres de Boole quelconques et de démontrer constructivement leur existence.

2. Soient B une algèbre de Boole, R l'ensemble des réels, K l'intervalle fermé défini par $-1 \leqslant x \leqslant 1$. $H: B \to R$ sera par définition un indice si: 1° $H(x) \in K$; 2° $x \cap y = 0 \Rightarrow \min[H(x), H(y)] \leqslant H(x \cup y) \leqslant \max[H(x), H(y)]$.

L'intervalle K de variation de H est seulement conventionnel et quelquefois commode: en effet on a la

Proposition I. *Si la condition* 1° *est remplacée par* $a \leqslant H(x) \leqslant b$ *ou par* $-\infty \leqslant H(x) \leqslant \infty$, *on peut se ramener au cas* $a = -1$, $b = 1$.

En choisissant convenablement les constantes c, d, e on voit que $H_1(x) = cH(x) + d$, respectivement $H_1(x) = e \operatorname{arctg} x$ est un indice.

Proposition II. *Si* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *sont mutuellement disjoints, on a*

$$\min_i H(x_i) \leqslant H(x_1 \cup x_2 \cup \ldots \cup x_n) \leqslant \max_i H(x_i).$$

Démonstration par induction. En remplaçant min par inf et max par sup, II n'est plus vraie même pour le cas dénombrable (ex.: M ensemble infini, $A, B \subset M$, $H(A) = 0$ si A est fini, $H(B) = 1$ si B est infini), ce qui conduit à distinguer les indices, les σ-indices et les τ-indices (B complète et II valable et la famille des i ayant un cardinal quelconque).

Proposition III. *Si C est une sousalgèbre de B et si H est un indice de B, par relativisation on obtient un indice de C.*

C'est évident.

3. Les propriétés suivantes se rapportent à l'existence des indices.

Proposition IV. *Il existe des indices à une ou deux valeurs* (le cas banal).

Soit $\mathcal{J}$ un idéal de B; en posant $H(x) = a$ si $x \in \mathcal{J}$ et $H(x) = b$, si $x \in B - \mathcal{J}$, on obtient un indice à deux valeurs ou à une seule valeur si $B = \mathcal{J}$.

Proposition V. *Si B est d'ordre fini > 2, il y a des indices qui ne rentrent pas dans le cas banal.*

Soient $p_1, p_2, ..., p_n$ les atomes de B, $b_i \in K$, $(i = 1, 2, ..., n)$. On peut prendre $H(0)$ quelconque, $H(p_i) = e_i$, $H(p_i \cup p_j) = (p_i + p_j)/2$ etc. ou on peut pendre $H(0)$ arbitraire, $H(p_i) = \operatorname{sign} e_i$, $H(p_i \cup p_j) = 0$, si $e_i = e_j = 0$ et $(e_i + e_j)/[|e_i| + |e_j|]$ autrement, etc.

Corollaire. *Si φ est définie pour $x \in K$, est non-décroissante et $\varphi(x) \in K$, alors $\varphi(H(x))$ est encore un indice* (H est par ex. l'un des indices de V).

Proposition VI. *Soit B l'ensemble des parties d'un ensemble dénombrable $M = \{a_1, a_2, ...\}$. H est un indice pour B si l'on pose $H(\varnothing)$ arbitraire, $H(a_i) = e_i$ et*

$$H(A) = \frac{\sum_k e_k}{\sum_k |e_k|} \tag{1}$$

pour A fini, a_k étant les atomes de A.

Si A est infini, $H(A)$ est defini par (1) *si $\sum |e_n| < \infty$ et $H(A) = a$ (arbitraire) si $\sum |e_n| = \infty$.*

La démonstration est celle de V pour A, B finis et si A est infini, $A \cup B$ l'est aussi et $H(A) = H(A \cup B) = a$, 2° étant vérifiée dans tous les cas. Le corollaire de V reste aussi valable.

Proposition VII (extension de V). *Soit B quelconque, m une mesure finie sur B, $a_1, a_2, ..., a_n$ une décomposition de l'unité $(a_i \cap a_j = 0, \bigcup_i a_i = 1)$, $e_1, e_2, ..., e_n$ des nombres quelconques, $\varphi(x) : K \to K$ non-décroissante. On obtient un indice H si l'on pose*

$$H(x) = \varphi(0) \text{ si } q(x) = 0, \quad H(x) = \varphi\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right) \text{ si } q(x) \neq 0, \text{ où:}$$

$$p(x) = \sum e_i\, m(x \cap a_i), \quad q(x) = \sum |e_i|\, m(x \cap a_i).$$

On observe que m étant additive, $p(x)$ et $q(x)$ le sont aussi et que $q(x) = 0 \Rightarrow p(x) = 0$. En considérant séparément les cas $q(x) = q(y) = 0$, $q(x) = 0$,

$q(y)>0$, $q(x)>0$, $q(y)>0$, on démontre sans peine la proposition. Par ex. si $x\cap y=0$, $p(x)>0$, $q(x)>0$ on a

$$\frac{p(x\cup y)}{q(x\cup y)}=\frac{p(x)+p(y)}{q(x)+q(y)}$$

et si par ex. $p(x)/q(y)\leqslant p(y)/q(y)$ on a de même

$$\frac{p(x)}{q(x)}\leqslant\frac{p(x)+p(y)}{p(x)+q(y)}\leqslant\frac{p(y)}{q(y)},$$

d'où $H(x)\leqslant H(x\cup y)\leqslant H(y)$, c'est-à-dire 2°.

Pour une σ-mesure on généraliserait de la même manière VI.

Proposition VIII. *Soit $H(u,v)$ une fonction réelle définie pour $u\geqslant 0$, $v\leqslant 0$, ayant les propriétés suivantes:*

(A) $$H(u,v)\in K,$$

(B) $$\min[H(u,w),\ H(v,t)]\leqslant H(u+v,\ w+t)\leqslant\max[H(u,w),H(v,t)].$$

Si B est une algèbre de Boole, m et n deux mesures finies sur B, on obtient un indice en posant:

$$H(x)=H(m(x),n(x)).$$

Si $x\cap y=0$, on a $H(x\cup y)=H[m(x)+m(y),n(x)+n(y)]$ et pour $u=m(x)$, $w=n(x)$, $v=m(y)$, $t=n(y)$

$$\min[H(m(x),\ n(x)),\ H(m(y),\ n(y))]\leqslant$$
$$\leqslant H(m(x)+m(y),\ n(x)+n(y))\leqslant\max(\ldots),$$

c'est-à-dire

$$\min[H(x),\ H(y)]\leqslant H(x\cup y)\leqslant\max[\ldots].$$

On peut prendre $H(0,0)=0$, $H(u,v)=(u-v)/(u+v)$ si $u+v>0$; on trouve dans [1] toute une famille de telles fonctions.

Proposition IX. *Soit $M=\bigcup_i M_i$, $i\in\mathfrak{I}$, $M_i\neq\emptyset$, $M_i\cap M_i=\emptyset$, $\mathfrak{I}$ bien ordonné. Si l'on sait définir un indice pour chaque $P(M_i)$, on peut trouver un indice pour $P(M)$* (les M_i peuvent être finis ou dénombrables, $P(X)$ désigne ici l'algèbre de Boole de toutes les parties de X).

Soit H_i l'indice de $P(M_i)$; on pose pour $A\subset M$, $H(A)=H_i(A\cap M_i)$, i étant le premier indice pour lequel $A\cap M_i\neq\emptyset$.

Corollaire. *En employant le théorème de Stone, la relativisation et l'isomorphisme, on peut obtenir de IX des indices sur n'importe quelle algèbre de Boole.*

4. Proposition X. *Chaque algèbre B est egale à une réunion d'ensembles disjoints et $\neq \emptyset$, notés B_i, et*

$$x \cap y = 0 \text{ et } x, y \in B_i \Rightarrow x \cup y \in B_i .$$

Il y a deux décompositions triviales (un seul $B_i = B$, chaque B_i contient un élément et un seul). Si B a plus de deux éléments il y a des décompositions qui ne sont pas triviales en prenant pour les B_i les sous-ensembles de B sur lesquels un indice H est constant.

Institut Polytechnique de Jassy,
Chaire de Mathematiques I

BIBLIOGRAPHIE

1. Climescu Al., *Une fonction d'ensemble.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1962, **VIII (XII)**, *3—4*, pp. 1—4.

O FUNCŢIE NUMERICĂ DEFINITĂ PENTRU ALGEBRELE LUI BOOLE

(Rezumat)

Numind indice o funcţie numerică definită pe o algebră Boole şi care satisface la condiţiile 1°, 2° din § 2, pe cale constructivă se dovedeşte existenţa indicilor pentru orice algebră Boole.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

C. D. 513,832

SUR LES AUTOMORPHISMES DU GROUPE FONDAMENTAL D'UNE SURFACE FERMÉE ORIENTABLE

PAR

GEORGES CĂLUGĂREANU
Membre de l'Académie de la République Socialiste de Roumanie

1. Introduction

Soit S_p une surface fermée orientable, de genre $p \geqslant 2$. Les applications homéomorphes de S_p sur elle-même forment le groupe Aut S_p des automorphismes de S_p. Parmi ces applications, les déformations isotopes de S_p en elle-même jouent un rôle particulier. Une telle déformation est une famille d'automorphismes a_t de S_p qui dépend continûment d'un paramètre réel $t \in [0,1]$, a_0 se réduisant à l'application identique. Soit P un point de base choisi sur S_p, G_p le groupe fondamental de S_p, et C une courbe fermée tracée sur S_p, passant par P. Alors C appartient à une classe d'homotopie $h \in G_p$, et l'on sait que toute déformation isotope de S_p fait passer la courbe C de la classe h dans une classe conjuguée $k^{-1}hk$, $k \in G_p$, le point de base P revenant à sa position initiale après deformation. Mais S_p admet bien d'autres automorphismes, que l'on ne peut obtenir par déformation. Les automorphismes de S_p peuvent être groupés en classes d'isotopie qui forment un groupe isomorphe à Aut G_p (deux automorphismes appartiennent à une même classe si l'un résulte de l'autre par une déformation qui ramène le point P à sa position initiale). Les déformations correspondent aux automorphismes intérieurs de G_p. Quant aux autres automorphismes de S_p, leur connaissance revient à celle des automorphismes extérieurs du groupe fondamental G_p. La solution algébrique de ce problème n'est pas connue, sauf des résultats relatifs aux cas $p \leqslant 2$. Mais une analyse topologique approfondie de Max Dehn [1] contient virtuellement cette solution, du moins pour les petites valeurs de p. Cette analyse envisage directement les automorphismes de S_p, et le résultat essentiel qui s'en dégage est que chaque automorphisme de S_p peut être ramené, aux déformations près, à une suite finie d'automorphismes d'un type spécial, que M. Dehn appelle „Schraubungen" (glissements, dans notre traduction), qui jouent le rôle de générateurs du groupe Aut S_p.

Dans ce travail, nous arrivons à un système de générateurs du groupe Aut G_p, en effectuant le passage de Aut S_p à Aut G_p, c'est-à-dire en déterminant les générateurs de Aut G_p qui correspondent aux „Schraubungen". Une solution purement algébrique reste à trouver, ainsi que les relations qui relient ces générateurs, puis se pose le problème de réduire leur nombre au minimum.

2. Indicatrice d'un automorphisme

On sait que S_p admet des systèmes de coupures canoniques ; un tel système est composé de $2p$ courbes simples C_i passant par même point P, sans autre point commun et non-homotopes deux-à-deux ; S_p coupée le long de ces courbes est un disque appelé polygone canonique de S_p. Chaque automorphisme de S_p transforme un tel système en un autre système de coupures canoniques de S_p.

Prenons P comme point de base sur S_p, et soit γ un contour fermé qui enferme sur S_p un voisinage de P, homéomorphe à un disque. Choisissons γ de manière que cette courbe coupe chaque C_i en deux points, de part et d'autre de P. Après orientation de chaque C_i, nous désignerons par i la classe d'homotopie qui contient C_i ; on sait que les i, $(i = 1, 2, \ldots, 2p)$, forment un système de générateurs du groupe fondamental G_p.

Choisissons le sens positif sur γ (aire intérieure, contenant P, vue à gauche) et numérotons les générateurs i, avec leurs sens positifs, dans l'ordre naturel de succession sur γ de leurs intersections avec γ (fig. 1). Nous désignerons par i' l'opposé i^{-1} du générateur i. De cette manière, l'unique relation qui relie les générateurs i de G_p s'écrit (voir fig. 1)

$$R = 1\,2'3\,4'5 \ldots (2p)'1'2\,3'4 \ldots 2p = v,$$

en désignant par v le mot vide. Un automorphisme de G_p s'écrit

$$(1) \quad \begin{cases} \overline{1} = i_{11}\, i_{12} \ldots i_{1k_1}, \\ \overline{2} = i_{21}\, i_{22} \ldots i_{2k_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \overline{j} = i_{j1}\, i_{j2} \ldots i_{jk_j}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \overline{2p} = i_{2p,1}\, i_{2p,2} \ldots i_{2p,k_{2p}}, \end{cases}$$

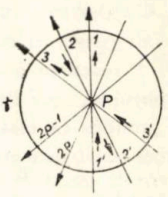


Fig. 1

les mots $\overline{j}$ représentant des classes d'homotopie qui contiennent des courbes simples de S_p ; de plus, dans les $2p$ classes $\overline{j}$ on peut choisir $2p$ courbes simples qui ont en commun, deux-à-deux, le seul point P. On sait ([2, p. 176], [3, p. 38]) que les formules (1) définissent un automorphisme de G_p si elles donnent lieu à

$$(2) \quad \overline{R} = \overline{1}\,\overline{2}'\overline{3}\,\overline{4}'\overline{5} \ldots (\overline{2p})'\,\overline{1}'\overline{2}\,\overline{3}'\overline{4} \ldots \overline{2p} = W^{-1} R^{\varepsilon} W, \quad W \in G_p, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

cette relation étant vérifiée après application des seuls „absorptions triviales" $a'a = v$; cette condition nécessaire est aussi suffisante. Un automorphisme (1) est *propre* si les points $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$,... se succèdent sur γ dans le même sens que 1, 2, 3,... ; on a alors $\varepsilon = 1$. Le passage de $\varepsilon = 1$ à $\varepsilon = -1$ étant

facilement obtenu par une symétrie de la surface S_p par rapport à un plan, on peut se limiter à l'étude des automorphismes propres, correspondant à $\varepsilon = 1$. De plus, la relation (2) montre que chaque automorphisme a détermine d'une manière univoque un automorphisme tel que $\bar{R} = R$; il suffit de composer a avec l'automorphisme intérieur $W \times W^{-1}$, $x \in G_p$. Aux automorphismes intérieurs près, on peut donc se limiter aux $a \in \mathrm{Aut}\, G_p$ qui vérifient $\bar{R} = R$ et qui forment un sous-groupe $\Gamma_p \subset \mathrm{Aut}\, G_p$. Nous appellerons *automorphisme normé* de G_p chaque $a \in \mathrm{Aut}\, G_p$ tel que $\bar{R} = R$. Tout revient donc à l'étude des générateurs du groupe Γ_p des automorphismes normés de G_p.

L'étude topologique du problème est facilitée par l'introduction de *l'indicatrice d'un automorphisme*. Soit $m = i_1 i_2 \ldots i_k \in G_p$ un *mot simple*, représentant donc une classe d'homotopie de S_p qui contient des courbes simples. En revenant à notre fig. 1, prolongeons le disque (γ) par $2p$ bandes (ou rubans) sur S_p, contenant respectivement les courbes C_1, C_2,...,C_{2p}, ces bandes étant assez minces pour qu'elles soient deux-à-deux disjointes à l'extérieur de (γ). Avec le disque (γ), ces bandes forment une surface que nous appellerons une *gerbe sur* S_p, dont le bord est homotope à zéro, en vertu de la relation $R = v$.

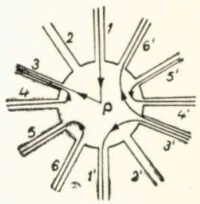


Fig. 2

Le mot simple m peut être représenté par une courbe simple intérieure à la gerbe. En partant de P, nous construirons un arc de courbe sortant de (γ) par la bande i_1, ($i_1 = 3$ sur la fig. 2). En revenant dans (γ) par i_1^{-1}, nous éviterons de revenir en P, et continuerons notre courbe en sortant de (γ) par la bande i_2, ($i_2 = 6$ sur la fig. 2). En revenant dans (γ) par i_2^{-1}, nous éviterons de couper les arcs déjà construits et ferons sortir la courbe par la bande i_3, etc. Le dernier arc, sur la bande i_k, aboutira en P, et si m est un mot simple, il sera possible de construire ainsi une courbe fermée simple représentant le mot m. Cette courbe est complètement déterminée par ses arcs intérieurs au disque (γ). Le nombre de ces arcs est k, et un seul d'entre eux passe par P. L'ensemble de ces arcs orientés forme ce que nous appelons l'*indicatrice* du mot m.

Dans le cas d'un automorphisme (1), chacun des mots $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$,...,$\overline{2p}$ est simple et peut donc être représenté par son indicatrice à l'intérieur de (γ). Les courbes $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$,...,$\bar{C}_{2p}$ étant encore disjointes en dehors de P, on pourra construire les indicatrices de $\bar{1}$, $\bar{2}$,...,$\overline{2p}$ de manière que deux arcs quelconques appartenant à ces indicatrices soient disjoints, à l'exception des $2p$ arcs qui passent par P, et qui ne se rencontrent deux-à-deux qu'en ce point P. Les arcs ainsi obtenus forment ce que nous appelons l'*indicatrice de l'automorphisme* (1).

3. Glissement de S_p sur une courbe simple

Rappelons l'opération que M. Dehn appelle „Schraubung". C étant une courbe simple tracée sur S_p, construisons une bande B sur S_p, homéomorphe à une couronne circulaire K, l'un de ses bords coïncidant avec C. Ceci sera réalisé si l'autre bord C' est une courbe simple assez raprochée de C. Soit h l'homéomorphie qui mène de K à B. Coupons S_p suivant C, puis déformons B de manière que C' reste fixe, ainsi que $S_p - B$, tandis que le bord C_B de B glisse sur lui-même, chaque point de C_B revenant à sa position initiale après avoir décrit une fois la courbe C. L'image sur K de cette déformation est visible sur notre fig. 3. Un tel glissement de S_p

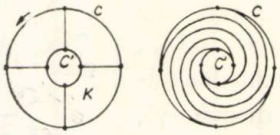


Fig. 3

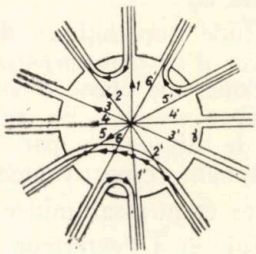


Fig. 4

définit un automorphisme de S_p, donc aussi un automorphisme de G_p, et le résultat fondamental de M. Dehn consiste dans le fait que Aut S_p est engendré par un nombre fini de glissements, aux déformations près. Il ne reste qu'à trouver l'équivalent de ces glissements dans Aut G_p pour obtenir un système de générateurs de ce groupe.

Soit m le mot correspondant à C. Traçons l'indicatrice de m sur la gerbe de manière que C ne passe pas par P (fig. 4 ; $p = 3$, $m = 56'1'2$). Traçons la courbe C' de manière que la bande B occupe, sur la gerbe, la moitié de chaque ruban extérieur à (γ). Traçons aussi, sur la gerbe, les générateurs $1, 2, \ldots, 2p$, en les faisant passer, à l'extérieur de (γ), dans les moitiés des rubans non-occupées par B. À l'intérieur de (γ), certains des arcs appartenant aux générateurs $1, 2, \ldots, 2p$ traverseront la bande B (5, 6, 1′, 2′ sur la fig. 4). Après glissement de S_p sur le bord C de B, les segments de ces arcs qui sont intérieurs à B seront allongés sur B, leurs extrémités sur C' restant fixes, tandis que les extrémités sur C seront entrainées le long de C, en revenant à leurs positions initiales (sur la fig. 4 on a marqué d'une flèche le bord mobile de C). La position initiale des générateurs correspondant à l'automorphisme identique, $1 = 1$, $2 = 2, \ldots, 2p = 2p$, on calcule sans peine ce que deviennent ces générateurs après le glissement (dans le cas de la fig. 4 : $\overline{1}' = 56'1'21'$, $\overline{2}' = 56'1'22' = 56'1'$, $\overline{3} = 3$, $\overline{4} = 4$, $\overline{5} = 56'1'25$, $\overline{6} = 56'1'26$, donc : $\overline{1} = 12'165'$, $\overline{2} = 165'$, $\overline{3} = 3$, $\overline{4} = 4$, $\overline{5} = 56'1'25$ $\overline{6} = 56'1'26$). Suivant que i coupe C de droite à gauche ou de gauche à

droite, on a $\overline{i} = mi$ ou $\overline{i} = im'$, si i coupe une seule fois la courbe C. Le cas de plusieurs intersections (i, C) peut être traité sans difficulté.

Nous désignerons un automorphisme tel que (1) par $a\,[m_1, m_2,..., m_{2p}]$. Les mots m_i seront appelés *composantes* de l'automorphisme a. Soit l_k la longueur du mot m_k, que l'on suppose réduit quant aux relations triviales $xx' = v$, et désignons par $L(a)$ la somme $l_1 + l_2 + \cdots + l_{2p}$ que l'on appelle *longueur* de a. Nous appellerons *degré* de a le nombre $d = \max_k l_k$.

L'unique automorphisme de degré l est $[2, 3,..., 2p, 1']$. De même que ses puissances $[k, k+1,..., 2p, 1'2',..., (k-1)']$, cet automorphisme n'est pas normé, sauf sa puissance $4p$-me, qui se reduit à l'identité.

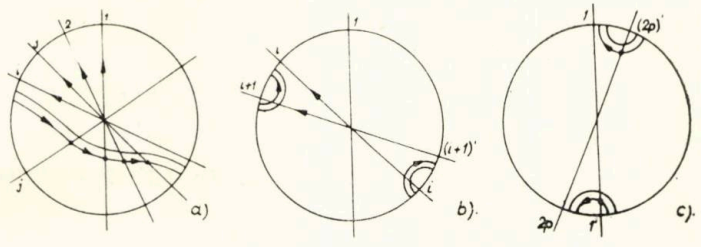


Fig. 5

On obtient des automorphismes „élémentaires" de degré croissant en faisant glisser les générateurs sur des courbes C parallèles à un, deux,..., k générateurs consécutifs. Ainsi, C étant parallèle au générateur i, avec $1 \leqslant i \leqslant 2p$, on trouve (fig. 5a) les automorphismes normés de degré 2

$$(3)\quad \begin{cases} \alpha_1\,[1,\ 1'2,\ 1'3,\ldots,1'(2p)], \\ \alpha_2\,[12,\ 2,\ 2'3,\ldots,2'(2p)], \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_i\,[1i,\ 2i,\ldots,(i-1)\,i,\ i,\ i'\,(i+1),\ldots,i'\,(2p)], \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{2p}\,[1(2p),\ 2(2p),\ldots,(2p-1)2p,\ 2p]. \end{cases}$$

Un glissement sur la courbe $i\,(i+1)'$ pour $1 \leqslant i \leqslant 2p-1$, sur $1(2p)$ pour $i = 2p$, donne (fig. 5b, c)

$$(4)\quad \begin{cases} \beta_i\,[1,\ 2,\ldots,i-1,\ i\,(i+1)'i,\ i,\ i+2,\ i+3,\ldots,2p], & 1 \leqslant i \leqslant 2p-1, \\ \beta_{2p}\,[(2p)',\ 2,\ 3,\ldots,2p-1,(2p)1(2p), & i = 2p, \end{cases}$$

de degré 3, qui sont normés sauf le dernier β_{2p}.

Un glissement sur $i'(i+1)(i+2)'$ pour $1 \leqslant i \leqslant 2p-2$, sur $(2p-1)(2p)'1'$ pour $i = 2p-1$ et sur $2'(2p)'1'$ pour $i = 2p$, donne (fig. 6) les automorphismes de degré 4

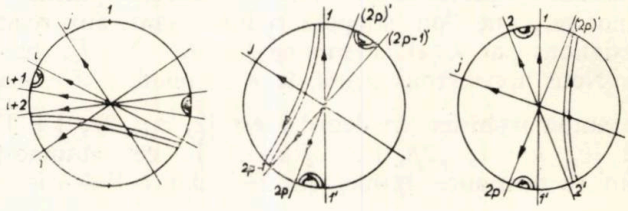


Fig. 6

$$
(5)\quad \begin{cases} 1 \leqslant i \leqslant 2p-2 : \gamma_i [1(i+2)(i+1)'i,\ 2(i+2)(i+1)'i,\ldots,(i-1)(i+2)(i+1)'i, \\ \qquad i,\ i+1,\ i+2,\ i'(i+1)(i+2)'(i+3),\ldots,i'(i+1)(i+2)'(2p)], \\ i = 2p-1 : \gamma_{2p-1} [1,\ (2p-1)(2p)'1'2,\ldots,(2p-1)(2p)'1'(2p-2), \\ \qquad 2p-1,\ 2p], \\ i = 2p : \gamma_{2p} [1,\ 2,\ 32'1(2p),\ 42'1(2p),\ldots,(2p-1)2'1(2p),\ 2p)] \end{cases}
$$

qui sont tous normés. En continuant ainsi on obtient des automorphismes de degrés croissants parmi lesquels on pourra choisir les générateurs de Γ_p. Mentionnons encore les automorphismes de degrés 5, 6, 7, que l'on peut suivre sur la fig. 7

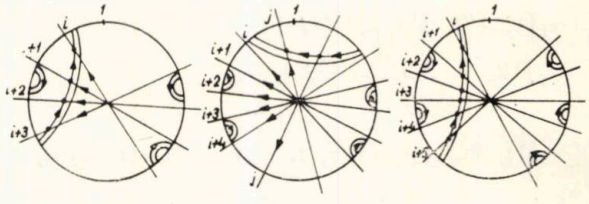


Fig. 7

$$
(6)\quad \begin{aligned} &1 \leqslant i \leqslant 2p-3 : \delta_i [1,\ 2,\ldots,i-1,\ i(i+1)'(i+2)(i+3)'i, \\ &\qquad i(i+1)'(i+2)(i+3)'(i+1),\ i(i+1)'(i+2)(i+3)'(i+2), \\ &\qquad\qquad i(i+1)'(i+2),\ i+4,\ldots,2p], \\ &\delta_{2p-2} [(2p)'(2p-1)(2p-2)',\ 2,\ 3,\ldots,2p-3,\ (2p-2)(2p-1)'(2p)1(2p-2), \\ &\qquad (2p-2)(2p-1)'(2p)\ 1\ (2p-1),\ (2p-2)(2p-1)'(2p)\ 1\ (2p)], \end{aligned}
$$

$$\delta_{2p-1}[12'\,1\,(2p)\,(2p-1)',1\,(2p)\,(2p-1)',3,4,\ldots,2p-2,$$

(6) $$(2p-1)\,(2p)'\,1'\,2\,(2p-1),(2p-1)\,(2p)'\,1'\,2\,(2p)],$$

$$\delta_{2p}[13'\,21'\,(2p)',23'\,21'\,(2p)',21'\,(2p)',4,\ 5,\ldots,2p-1,\ (2p)\,12'\,3\,(2p)],$$

dont les trois derniers ne sont pas normés, puis

(7)
$$\begin{cases} i=1,\ \varepsilon_1 :\ \bar{j}=j,\ j=1,2,3,4,5;\ \bar{j}=j5'\,43'\,21',\ 6\leqslant j\leqslant 2p, \\ i>1,\ \varepsilon_i :\ \bar{j}=i\,(i+1)'\,(i+2)\,(i+3)'\,(i+4)j,\ 1\leqslant j<i-1, \\ \bar{j}=j,\ j=i,i+1,i+2,i+3,i+4\,; \\ \bar{j}=j\,(i+4)'\,(i+3)\,(i+2)'\,(i+1)\,i,\ i+5\leqslant j\leqslant 2p, \\ \eta_{1i} :\ \bar{j}=j,\ \ j\neq i,\ i+1,\ldots,i+5\,; \\ \bar{j}=i\,(i+1)'\,(i+2)\,(i+3)'\,(i+4)\,(i+5)'j,\ \ j=i,i+1,..,i+5 \end{cases}$$

et ainsi de suite. Remarquons que, parmi ces automorphismes, ceux qui sont de degré impair peuvent être exprimés à l'aide des autres. Ainsi, on trouve

$$\beta_i=\alpha_{i+1}\,\alpha_i^{-1}\,\alpha_{i+1}^{-1},\quad \delta_i=\alpha_i^{-1}\,\gamma_{i+1}^{-1}\,\alpha_i,\ldots$$

Il suffit donc d'employer les automorphismes élémentaires de degré pair : α_i, γ_i, ε_i,...

4. Cas de $p=2$ ou 3

Max Dehn a traité complètement les cas $p=2$, 3, 4. Pour $p=2$, les glissements indiqués par Dehn sont a_1, b_1, a_2, b_2, a_3 (fig. 8a). En choisissant les générateurs indiqués sur la fig. 8b, les mots qui représentent ces générateurs sont

$$a_1=1'2,\ b_1=2'34',\ a_2=34',$$
$$b_2=4',\ a_3=2'143'=a_1'\,a_2'.$$

Les glissements correspondants conduisent aux automorphismes

$$[2,\ 21'2,\ 3,\ 4]=\beta_1^{-1}=\alpha_2\,\alpha_1\,\alpha_2^{-1},\ [12'34',\ 2,\ 3,\ 4]=\gamma_2^{-1},$$
$$[1,\ 2,\ 34'3,\ 3]=\beta_3=\alpha_4\,\alpha_3^{-1}\,\alpha_4^{-1},\ [4'1,\ 4'2,\ 4'3,\ 4]=I_4\,\alpha_4,$$
$$[12'143',\ 143',\ 34'1'23,\ 34'1'24]=\alpha_2\,\gamma_3^{-1}\,\alpha_2^{-1},$$

I_4 étant l'automorphisme intérieur $4'x4$. On a $\gamma_3=\gamma_2^{-1}\,\beta_1^{-1}\,\gamma_2=\beta_1^{-1}\,\gamma_2\,\beta_1$. Les automorphismes élémentaires α_1, α_2, α_3, α_4, γ_2 sont donc des générateurs du groupe Γ_2 :

$\alpha_1\,[1,\ 1'2,\ 1'3,\ 1'4]$, $\alpha_2\,[12,\ 2,\ 2'3,\ 2'4]$, $\alpha_3\,[13,\ 23,\ 3,\ 3'4]$,

$\alpha_4\,[14,\ 24,\ 34,\ 4]$, $\gamma_2\,[143'2,\ 2,\ 3,\ 4]$.

Pour $p = 3$, nous choisirons les générateurs indiqués sur la fig. 9.

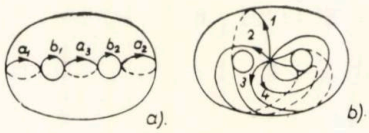


Fig. 8

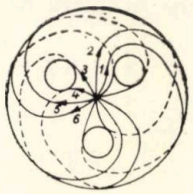


Fig. 9

Les glissements indiqués par Dehn sont alors

$$a_1 = 1'24',\ b_1 = 43',\ a_2 = 45'61,$$
$$a_4 = 34'6,\ b_2 = 12',\ a_3 = 2\,34'5,$$
$$a_5 = 5'62,\ b_3 = 6'5,\ c_{51} = 6'1'23',$$
$$c_{14} = 45'612'6'5,\ c_{25} = 6'1'23'42'1,$$
$$c_{36} = 2'34'56'73'.$$

Les automorphismes élémentaires sont, pour $p = 3$,

$\alpha_1\,[1,\ 1'2,\ 1'3,\ 1'4,\ 1'5,\ 1'6]$, $\beta_1\,[12'1,\ 1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6]$,

$\alpha_2\,[12,\ 2,\ 2'3,\ 2'4,\ 2',5,\ 2'6]$, $\beta_2\,[1,\ 23'2,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6]$,

$\alpha_3\,[13,\ 23,\ 3,\ 3'4,\ 3'5,\ 3'6]$, $\beta_3\,[1,\ 2,\ 34'3,\ 2,\ 5,\ 6]$,

$\alpha_4\,[14,\ 24,\ 34,\ 4,\ 4'5,\ 4'6]$, $\beta_4\,[1,\ 2,\ 3,\ 45'4,\ 4,\ 6]$,

$\alpha_5\,[15,\ 25,\ 35,\ 45,\ 5,\ 5'6]$, $\beta_5\,[1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 56'5,\ 5]$,

$\alpha_6\,[16,\ 26,\ 36,\ 46,\ 56,\ 6]$, $^*\beta_6\,[6',\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 616]$,

$\gamma_1\,[1,\ 2,\ 3,\ 1'23'4,\ 1'23'5,\ 1'23'6]$, $\delta_1\,[12'34'1,\ 12'34'2,\ 12'34'3,\ 12'3,\ 5,\ 6]$,

$\gamma_2\,[143'2,\ 2,\ 3,\ 4,\ 2'34'5,\ 2'34'6]$, $\delta_2\,[1,\ 23'45'2,\ 23'45'3,\ 23'45'4,\ 23'4,\ 6]$,

$\gamma_3\,[154'3,\ 254'3,\ 3,\ 4,\ 5,\ 3'45'6]$, $\delta_3\,[1,\ 2,\ 34'56'3,\ 34'56'4,\ 34'56'5,\ 34'5]$,

$\gamma_4\,[165'4,\ 265'4,\ 365'4,\ 4,\ 5,\ 6]$, $^*\delta_4\,[6'54',\ 2,\ 3,\ 45'614,\ 45'615,\ 45'616]$,

$\gamma_5\,[1,\ 56'1'2,\ 56'1'3,\ 56'1'4,\ 5,\ 6]$, $^*\delta_5\,[12'165',\ 165',\ 3,\ 4,\ 56'\ 1'25,\ 56'1'26]$,

$\gamma_6\,[1,\ 2,\ 32'16,\ 42'16,\ 52'16,\ 6]$, $^*\delta_6\,[13'21'6',\ 23'21'6',\ 21'6',\ 4,\ 5,\ 612'36]$,

$$\varepsilon_1\,[1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 1'23'45'6],$$

$$\varepsilon_2\,[165'43'2,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6],$$

$$\varepsilon_3\,[1,\ 34'56'1'2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6],$$

$$\varepsilon_4\,[1,\ 2,\ 31'165'4,\ 4,\ 5,\ 6],$$

$$\varepsilon_5\,[1,\ 2,\ 3,\ 56'1'23'4,\ 5,\ 6],$$

$$\varepsilon_6\,[1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 54'32'16,\ 6].$$

Ces automorphismes sont normés, à l'exception de ceux qui sont marqués d'une étoile à gauche (β_6, δ_4, δ_5, δ_6). Le glissement sur $a_1 = 1'24'$ conduit à l'automorphisme $\xi\,[1,\ 2,\ 34'1'2,\ 4,\ 42'15,\ 42'16]$, et l'on trouve

$$(8)\qquad \xi = \beta_4^{-1}\,\beta_5^{-1}\,\gamma_6^{-1}\,\alpha_6\,\alpha_4^{-1}\,\alpha_5^{-1}\,\alpha_6^{-1} = \alpha_5\,\alpha_4\,\alpha_5^{-1}\,\alpha_6\,\alpha_5\,\alpha_6^{-1}\,\gamma_6^{-1}\,\alpha_6\,\alpha_4^{-1}\,\alpha_5^{-1}\,\alpha_6^{-1}.$$

Le glissement sur $b_2 = 12'$ conduit à $\eta\,[12'1, 1, 3, 4, 5, 6] = \beta_1 = \alpha_2\,\alpha_1^{-1}\,\alpha_2^{-1}$.
Le glissement sur $a_3 = 2'34'5$ conduit à

$$\zeta\,[1,\ 25'43'2,\ 35',43'2,\ 45'43'2,\ 43'2,\ 6] = \alpha_5\,\gamma_2^{-1}\,\alpha_5^{-1}.$$

Enfin, le glissement sur $c_{36} = 2'34'56'43$ conduit à

$$\omega\,[12'34'56'43',\ 2,\ 34'56'43'23,\ 34'56'43'24,\ 34'65'43'243'2'34'56'5,$$
$$34'56'43'243'2'34'6]$$

et l'on trouve

$$\omega = \alpha_3^{-1}\,\alpha_4^{-1}\,\delta_3^{-1}\,\alpha_4\,\beta_2^{-2}\,\delta_3^{-1}\,\beta_2^{-1}\,\varepsilon_4^{-1}\,\gamma_4\,\beta_4\,\beta_3\,\alpha_3^{-1}\,\alpha_6^{-1}\,\gamma_5\,\varepsilon_2\,\beta_1^{-1}\,\alpha_5\,\gamma_2\,\alpha_1^{-1}\,\gamma_1\,\beta_2\,\beta_3\,\alpha_2^{-1}\,\alpha_3^{-1}.$$

Les autres glissements nécessaires pour obtenir un système de générateurs du groupe Γ_3 résultent des précédents par des permutations convenables, en tenant compte de la symétrie circulaire des générateurs du groupe G_3, que nous avons employés. Ainsi, le glissement sur $a_4 = 34'6$ conduit à

$$\xi'\,[6'43'1,\ 6'43'2,\ 3,\ 4,\ 43'6'5,\ 6]$$

que nous écrivons sous la forme développée

$$\overline{1} = 6'43'1,\ \overline{2} = 6'43'2,\ \overline{3} = 3,\ \overline{4} = 4,\ \overline{5} = 43'6'5,\ \overline{6} = 6.$$

On voit alors que ξ' résulte de ξ en appliquant la permutation P_1 aux chiffres barrés et non-barrés, avec

$$P_1: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1' & 2' & 3' & 4' & 5' & 6' \\ 3' & 4' & 5' & 6' & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1' & 2' \end{pmatrix}.$$

De même, le glissement sur $a_5 = 5'62$ conduit à

$$\xi''\,[6'52'1,\ 2,\ 35'62,\ 45'62,\ 5,\ 6]$$

qui résulte de ξ' par application de P_1. D'ailleurs, ξ' et ξ'' ne sont pas normés, mais on en déduit des automorphismes normés par „renversement" des composantes :

$$\xi_1\,[13'46',\ 23'46',\ 3,\ 4,\ 56'3'4,\ 6],\quad \xi_2\,[12'56',\ 2,\ 265'3,\ 265'4,\ 5,\ 6].$$

Ce renversement correspond au changement simultané des sens positifs des générateurs 1, 2, 3, 4, 5, 6 (barrés et non-barrés) ; il n'altère pas le caractère „générateur" de ces automorphismes, et nous pouvons substituer ξ_1, ξ_2 à ξ', ξ''.

On obtient ξ_1 et ξ_2 à partir de ξ par $\xi_1 = P_2\xi$, $\xi_2 = P_2^{-1}\xi$, avec

$$P_2: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1' & 2' & 3' & 4' & 5' & 6' \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1' & 2' & 3' & 4' & 5' & 6' & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

L'expression de ξ_1 et ξ_2 à l'aide des automorphismes élémentaires peut donc être obtenue en appliquant P_2 ou P_2^{-1} à chaque facteur figurant dans l'expression (8) de ξ. Or, on obtient sans peine des relations telles que

$$P_2\,\alpha_1 = \alpha_3,\ P_2\,\alpha_2 = \alpha_4,\ P_2\,\alpha_3 = \alpha_5,\ P_2\,\alpha_4 = \alpha_6,\ P_2\,\alpha_5 = I_1\,\alpha_1,\ P_2\,\alpha_6 = I_2\,\alpha_2$$

avec I_1 : $1x1'$, I_2 : $2x2'$. L'application de P_2 a pour effet une permutation entre eux des automorphismes élémentaires de chaque degré, et introduit aussi certains automorphismes intérieurs (I_1, I_2 plus haut). Mais, ces automorphismes intérieurs s'éliminent d'eux mêmes dans l'expression finale de ξ_1 ou ξ_2, ces derniers automorphismes étant normés. Les mêmes remarques sont applicables aux automorphismes qui résultent de η, ζ, ω par application de P_2 et P_2^{-1}. En somme, on voit que les automorphismes élémentaires α_i, γ_i, ε_i, $i = 1, 2,\ldots,6$, suffisent pour générer le groupe Γ_3. Mais on peut vérifier les relations

$$(9)\quad \begin{cases} \gamma_2\gamma_1\gamma_2^{-1} = \beta_1\beta_2\beta_3^{-1}\beta_2^{-1}\beta_1^{-1}, & \varepsilon_2\varepsilon_1\varepsilon_2^{-1} = \beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\beta_5^{-1}\beta_4^{-1}\beta_3^{-1}\beta_2^{-1}\beta_1^{-1}, \\ \gamma_3\gamma_2\gamma_3^{-1} = \beta_2\beta_3\beta_4^{-1}\beta_3^{-1}\beta_2^{-1}, & \varepsilon_3\varepsilon_2\varepsilon_3^{-1} = \beta_1^{-1}, \\ \gamma_4\gamma_3\gamma_4^{-1} = \beta_3\beta_4\beta_5^{-1}\beta_4^{-1}\beta_3^{-1}, & \varepsilon_4\varepsilon_3\varepsilon_4^{-1} = \beta_2^{-1}, \\ \gamma_4\gamma_5\gamma_4^{-1} = \beta_1^{-1}\beta_2^{-1}\beta_3^{-1}\beta_2\beta_1, & \varepsilon_5\varepsilon_4\varepsilon_5^{-1} = \beta_3^{-1}, \\ \gamma_5\gamma_6\gamma_5^{-1} = \beta_2^{-1}\beta_3^{-1}\beta_4^{-1}\beta_3\beta_2, & \varepsilon_6\varepsilon_5\varepsilon_6^{-1} = \beta_4^{-1}, \quad \varepsilon_1^{-1}\varepsilon_6\varepsilon_1 = \beta_5^{-1}. \end{cases}$$

Les β étant exprimables avec les α, et (9) permettant d'exprimer les γ et ε en fonction des β et de γ_4, ε_6, on voit que α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, α_6, γ_4, ε_6 suffisent comme générateurs de Γ_3. Ainsi, le nombre 12 des générateurs indiqués par Dehn peut être diminué à 8, dans ce cas $p = 3$. Signalons les relations

$$\gamma_1 \rightleftarrows \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3;\ \gamma_2 \rightleftarrows \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4;\ \gamma_3 \rightleftarrows \alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_5;\ \gamma_4 \rightleftarrows \alpha_4,\ \alpha_5,\ \alpha_6;$$

$$\gamma_5 \rightleftarrows \alpha_5,\ \alpha_6,\ \alpha_1;\ \gamma_6 \rightleftarrows \alpha_6,\ \alpha_1,\ \alpha_2;\ \beta_1 \rightleftarrows \alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_5,\ \alpha_6;\ \beta_2 \rightleftarrows \alpha_4,\ \alpha_5,\ \alpha_6,\ \alpha_1;$$

$$\beta_3 \rightleftarrows \alpha_5,\ \alpha_6,\ \alpha_1,\ \alpha_2;\ \beta_4 \rightleftarrows \alpha_6,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3;\ \beta_5 \rightleftarrows \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_i\alpha_k\alpha_i = \alpha_k\alpha_i\alpha_k,$$

$$\alpha_2 = \beta_1\alpha_1\beta_1^{-1},\ \alpha_3 = \beta_2\alpha_2\beta_2^{-1},\ \alpha_4 = \beta_3\alpha_3\beta_3^{-1},\ \alpha_5 = \beta_4\alpha_4\beta_4^{-1},\ \alpha_6 = \beta_5\alpha_5\beta_5^{-1}.$$

La double flèche $\alpha \rightleftarrows \beta$ signifie, comme il est d'usage, l'égalité $\alpha\beta = \beta\alpha$. Les dernières relations expriment les α_i en fonction de α_1 et des $\beta_1,\ldots,\beta_5$, de manière à ramener les automorphismes élémentaires à β_1, β_2, β_3, β_4, β_5, α_1, γ_4, ε_6.

Signalons encore les automorphismes de degré 3

$$u_1[12'3,\ 12'4,\ 13'4,\ 23'4,\ 5,\ 6],\quad u_2[1,\ 23'4,\ 23'5,\ 24'5,\ 34'5,\ 6],$$

$$u_3[1,\ 2,\ 34'5,\ 34'6,\ 35'6,\ 45'6],$$

qui peuvent remplacer avantageusement δ_1, δ_2, δ_3. Reste à trouver une démonstration algébrique du fait que les automorphismes élémentaires signalés ici suffisent comme générateurs du groupe Γ_p pour $p \geqslant 4$.

Reçue le 8 I 1968

Académie de la République Socialiste de Roumanie, Filiale de Cluj

BIBLIOGRAPHIE

1. Dehn M., *Die Gruppe der Abbildungsklassen.* Acta math., 1938, **69**, S. 135—206.
2. Magnus W., Karrass A., Solitar D., *Combinatorial Group Theory.* Interscience Publishers, New-York, 1966.
3. Zieschang H., *Algorithmen für einfache Kurven auf Flächen.* Mathematica scandinavica, 1965, **17**, pp. 17—40.

ASUPRA AUTOMORFISMELOR GRUPULUI FUNDAMENTAL AL UNEI SUPRAFEŢE ÎNCHISE ORIENTATE

(Rezumat)

Autorul, luînd ca punct de plecare o lucrare a lui Max Dehn [1], parvine la un sistem de generatori ai grupului fundamental Aut G_p al unei suprafeţe închise orientabile S_p, de gen $p \geqslant 2$, efectuînd trecerea de la grupul automorfismelor Aut S_p al suprafeţei S_p la Aut G_p, adică determinînd generatorii lui Aut G_p care corespund la „Schraubungen" [1].

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

D. K. 519.444

EIN EINFACHES ISOMORPHIEPROBLEM FÜR ENDLICHE GRUPPEN

VON

KLAUS GÜNTHER und PETER LESKY

Zwei endliche Gruppen können nur dann isomorph sein, wenn sie in ihren Gruppenordnungen übereinstimmen. Bei dem Isomorphismus ist es wieder nur möglich, Elemente gleicher Ordnung einander zuzuordnen, also müssen in beiden Gruppen gleichviel Elemente von derselben Ordnung vorkommen. Diese Bedingung, die man bei der praktischen Arbeit mit Gruppen niedriger Ordnung oft benützt, ist somit für die Isomorphie notwendig. Es erhebt sich nun die Frage, ob sie für die Isomorphie auch hinreichend ist.

Mc. Haffey hat in [1] bewiesen, dass dies für abelsche Gruppen tatsächlich der Fall ist. Wird mit n_k die Anzahl der Elemente der Ordnung k und mit $O(G)$ die Ordnung der Gruppe G bezeichnet, dann lautet der diebezügliche

Satz: *Sind G und G' zwei endliche abelsche Gruppen, dann ist die Isomorphie der beiden Gruppen G und G' äquivalent mit folg-nden Bedingungen:*

1° $O(G) = O(G')$;

2° *für jede positive ganze Zahl k, die Teiler der Gruppenordnung $O(G)$ ist, gilt $n_k = n_k'$.*

Lässt man auch nichtabelsche Gruppen zu, dann ist die oben genannte Bedingung für die Isomorphie zweier endlicher Gruppen nicht mehr hinreichend. Schon Mc. Haffey hat in seiner Arbeit auf ein Gegenbeispiel der Ordnung 27 hingewiesen. Wir wollen hier hingegen bereits ein Gegenbeispiel der Ordnung 16 angeben und in diesem Zusammenhang zeigen, dass 16 die niedrigste Gruppenordnung ist, bei der ein solches Gegenbeispiel möglich ist. Das bedeutet, dass man für $O(G) < 16$ noch auf Isomorphie schliessen kann, wenn in beiden Gruppen gleichviel Elemente von derselben Ordnung enthalten sind.

BUDAPEST MŰSZAKI KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

Unserer Aufgabe gemäss beschränken wir die folgenden Untersuchungen auf Gruppen der Ordnung 1 bis 16; daher genügt es die 6 Typen mit den Gruppenordnungen $p, p^2, p.q, p^3, p^2.q, p^4$ zu betrachten (p und q sind Primzahlen). Die definierenden Relationen der jeweiligen Erzeugenden entnehmen wir für die ersten vier Fälle [2] und für die letzten beiden Fälle [3]. Da es bei p^4 insgesamt 14 ($p = 2$) bzw. 15 ($p > 2$) nicht isomorphe Gruppen gibt, werden wir uns in diesem Fall mit der Angabe der beiden Möglichkeiten begnügen, die sich auf das Gegenbeispiel beziehen. Ausserdem gehen wir bei $p^2.q$ aus Gründen der Vereinfachung nur auf den Sonderfall $p = 2$ und $q = 3$ ein (Gruppenordnung 12). In Klammern setzen wir immer diejenigen Gruppenordnungen von 2 bis 16, auf die der Typ zutrifft.

a) Ordnung p: (2, 3, 5, 7, 11, 13) — Zyklische Gruppe mit $a^p = e$.

b) Ordnung p^2: (4, 9)
1° Zyklische Gruppe mit $a^{p^2} = e$.
2° Abelsche Gruppe mit $a^p = e$, $b^p = e$, $ab = ba$.

c) Ordnung $p.q$: (6, 10, 14, 15)
1° Zyklische Gruppe mit $a^{pq} = e$.
2° Nichtabelsche Gruppe mit $a^p = e$, $b^q = e$, $ba = ab$, und p teilt $q - 1$ $(p < q)$. r ist aus den Forderungen $r^p = 1 \pmod q$ und $r \neq 1 \pmod q$ zu bestimmen.

d) Ordnung p^3: (8)
1° Zyklische Gruppe mit $a^{p^3} = e$.
2° Abelsche Gruppe mit $a^{p^2} = e$, $b^p = e$, $ba = ab$.
3° Abelsche Gruppe mit $a^p = b^p = c^p = e$, $ba = ab$, $ca = ac$, $cb = bc$.
4° Nichtabelsche Gruppe mit $a^{p^2} = e$, $b^p = e$, $ab = ba^{1+p}$.
5° Für $p > 2$ nichtabelsche Gruppe mit $a^p = b^p = c^p = e$, $ab = bac$, $ca = ac$, $cb = bc$.
5'° Für $p = 2$ nichtabelsche Gruppe mit $a^4 = e$, $b^2 = a^2$, $ba = a^3b$.

e) Ordnung $2^2.2$:
1° Zyklische Gruppe mit $a^{12} = e$.
2° Abelsche Gruppe mit $a^6 = e$, $b^2 = e$, $ba = ab$.
3° Nichtabelsche Gruppe mit $a^6 = e$, $b^4 = e$, $a^3 = b^2$, $ba = a^5b$.
4° Nichtabelsche Gruppe mit $a^3 = e$, $b^3 = e$, $ba = a^2b^2$.
5° Nichtabelsche Gruppe mit $a^3 = e$, $b^2 = e$, $c^2 = e$, $ba = a^2b$, $ca = a^2c$, $cb = bc$.

f) Ordnung p^4: (16)
1° Abelsche Gruppe mit $ap^3 = e$, $b^p = e$, $ab = ba$.
2° Nichtabelsche Gruppe mit $a^{p^3} = e$, $b^p = e$, $ab = ba^{1+p^2}$.

Ausserdem noch 12 Gruppen für $p = 2$ bzw. 13 für $p > 2$.

Es ist unmittelbar klar, dass in den Fällen a), b) und c) keine Überlegungen mehr nötig sind. Die zyklischen Gruppen enthalten ja immer mindestens ein Element, dessen Ordnung mit der Gruppenordnung übereinstimmt;

enthält aber eine Gruppe ein Element, dessen Ordnung mit der Gruppenordnung übereinstimmt, so ist sie zyklisch.

Für die Gruppenordnung 8 haben wir ausser der zyklischen Gruppe noch die vier Fälle:

Gruppe	Ordnung der Elemente	1	2	4	
2°	Zahl der Elemente	1	3	4	
3°		1	7	—	
4°		1	5	2	(Dieder)
5°		1	1	6	(Quaternionen)

Darunter kann kein Gegenbeispiel gefunden werden. Bei der Ordnung p^3 erkennt man sofort das von Mc. Haffey angegebene Gegenbeispiel für $p = 3$: sowohl in 3° als auch in 5° treten neben dem Einselement lauter Elemente der Ordnung 3 auf (noch allgemeiner bei $p \geqslant 3$ lauter Elemente der Ordnung p); 3° ist aber eine abelsche Gruppe, während 5° nichtabelsch ist, also kann keine Isomorphie bestehen.

Für die Gruppenordnung 12 haben wir ausser der zyklischen Gruppe noch die vier Fälle:

Gruppe	Ordnung der Elemente	1	2	3	4	6
2°	Zahl der Elemente	1	3	2	—	6
3°		1	1	2	6	2
4°		1	3	8	—	—
5°		1	7	2	—	2

Auch hier ist ein Gegenbeispiel unmöglich.

Für die Grupppenordnung 16 interessieren uns die beiden angegebenen Fälle:

$$e,\ a,\ b,\ a^2,\ ab,\ a^5b,\ a^3,\ a^2b,\ a^6b,\ a^5,\ a^4,\ a^3b,\ a^7b,\ a^6,\ a^7,\ a^4b,$$
$$e,\ a,\ b,\ a^2,\ ab,\ ba,\ a^3,\ a^2b,\ aba,\ bab,\ a^4,\ a^3b,\ ba^3,\ a^6,\ a^7,\ a^4b,$$
$$1,\ 8,\ 2,\ 4,\ 8,\ 8,\ 8,\ 4,\ 4,\ 8,\ 2,\ 8,\ 8,\ 4,\ 8,\ 2.$$

In der ersten Zeile stehen die Elemente der Gruppe 1°, in der zweiten Zeile diejenigen der Gruppe 2°, in der dritten Zeile stehen die Ordnungen der Elemente. Da die erste Gruppe abelsch ist, die zweite dagegen

nicht, ist damit das Gegenbeispiel erbracht. Wir weisen noch darauf hin, das bei der Gruppenordnung 16 ausserdem zwei weitere Gegenbeispiele existieren.

Eingegangen am 20.VII 1968

Universität Stuttgart,
Bundesrepublik Deutschland

LITERATURVERZEICHNIS

1. Mc. Haffey R., *Isomorphism of finite Abelian Groups.* Amer. Math. Monthly, 1965, **72**, pp. 48–50.
2. Hall M. Jr., *The Theory of Groups.* New York, 1959.
3. Hölder O., *Die Gruppen der Ordnung p^3, pq^2, pqr, p^4.* Math. Ann., 1893, **43**, S. 301–412.

O PROBLEMĂ SIMPLĂ DE IZOMORFIE PENTRU GRUPURI FINITE

(Rezumat)

Autorii demonstrează teorema: *Dacă G şi G' sînt două grupuri finite abeliene, atunci izomorfia ambelor grupuri G şi G' este echivalentă cu următoarele condiţii:*

1° $O(G) = O(G')$;

2° *pentru fiecare număr pozitiv întreg k, divizor al ordinului $O(G)$ al grupului G, avem $n_k = n'_k$, $O(G)$ fiind ordin al grupului G şi n_k numărul elementelor de ordin k.*

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

C. D. 519.4

SUR UNE CLASSE D'ALGÈBRES D'ORDRE $4n$

PAR

I. ENESCU

Extrait de la comunication présentée dans la session scientifique de l'Université „Al. I. Cuza" de Jassy, 26—28 octobre 1967

1. Dans [1] nous avons démontré que l'ensemble des couples ordonnés des quaternions réels peut être organisé comme un espace linéaire de dimension huit, soit-il V_8, à scalaires réels, pour lequel une base est formée par les éléments

$$(1) \qquad \begin{cases} u_1 = (1,0), & u_2 = (\mathrm{i},0), & u_3 = (\mathrm{j},0), & u_4 = (\mathrm{k},0), \\ u_5 = (0,1), & u_6 = (0,\mathrm{i}), & u_7 = (0,\mathrm{j}), & u_8 = (0,\mathrm{k}), \end{cases}$$

où $1, \mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}$ constituent une base pour l'algèbre Q des quaternions réels, avec la multiplication bien connue [2].

Dans cette Note, nous allons étudier l'algèbre obtenue en définissant pans V_8 le produit, par

$$(2) \qquad (a,b)\,(c,d) = (ac + bd, ad + bc)$$

et aussi l'algèbre d'ordre $4n$ obtenue comme produit direct du corps Q et l'algèbre polynômiale engendrée par le polynôme $P(\lambda) = \prod_1^n (\lambda - \lambda_s)$.

2. On constate facilement que l'espace V_8 doué avec la produit (2) forme une algèbre d'ordre huit, A_8, linéaire, associative, non commutative, à scalaires réels, ayant l'unité principale donnée par l'élément $u_1 = (1,0)$.

Le calcul des produits $u_p u_q$, $(p, q = 1, \ldots, 8)$, conduit à la table

(3)

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
u_1	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
u_2	u_2	$-u_1$	u_4	$-u_3$	u_6	$-u_5$	u_8	$-u_7$
u_3	u_3	$-u_4$	$-u_1$	u_2	u_7	$-u_8$	$-u_5$	u_6
u_4	u_4	u_3	$-u_2$	$-u_1$	u_8	u_7	$-u_6$	$-u_5$
u_5	u_5	u_6	u_7	u_8	u_1	u_2	u_3	u_4
u_6	u_6	$-u_5$	u_8	$-u_7$	u_2	$-u_1$	u_4	$-u_3$
u_7	u_7	$-u_8$	$-u_5$	u_6	u_3	$-u_4$	$-u_1$	u_2
u_8	u_8	u_7	$-u_6$	$-u_5$	u_4	$-u_3$	$-u_2$	$-u_1$

.

3. En considérant l'algèbre polynômiale $\mathcal{H}$, engendrée par $P(\lambda)=\lambda^2-1$ qui a, dans la base de puissances e_1, e_2, la table [3]:

(4)

	e_1	e_2
e_1	e_1	e_2
e_2	e_2	e_1

,

et l'algèbre Q avec la base $1, \mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}$, nous allons former le produit direct $\mathcal{H} \times Q$.

Une base pour $\mathcal{H} \times Q$ est donnée par

(5)
$$\begin{cases} \varepsilon_1 = 1e_1, & \varepsilon_2 = \mathrm{i}e_1, & \varepsilon_3 = \mathrm{j}e_1, & \varepsilon_4 = \mathrm{k}e_1, \\ \varepsilon_5 = 1e_2, & \varepsilon_6 = \mathrm{i}e_2, & \varepsilon_7 = \mathrm{j}e_2, & \varepsilon_8 = \mathrm{k}e_2. \end{cases}$$

Le calcul des produits $\varepsilon_r \varepsilon_s$, $(r, s = 1, \ldots, 8)$, conduit, compte tenu des propriétés du produit direct [2], à une table identique à (3), ce qui démontre la

Proposition 1. *L'algèbre A_8 est le produit direct $\mathcal{H} \times Q$.*

Un calcul facile démontre que les éléments x de A_8 avec la propriété $x^2 = x$, $(x \neq e_1, \ x \neq 0)$, sont

$$x_1 = \frac{1}{2} e_1 + \frac{1}{2} e_2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1}{2} e_1 - \frac{1}{2} e_2 .$$

Aussi, on vérifie que $x_1 x_2 = x_2 x_1 = 0$ et $x_1 + x_2 = e_1$, ce qui démontre que les éléments x_1 et x_2 sont idempotents orthogonaux de l'algèbre $\mathcal{H}$; par conséquent les éléments

$$v_1 = \frac{1}{2} u_1 + \frac{1}{2} u_5 \quad \text{et} \quad v_5 = \frac{1}{2} u_1 - \frac{1}{2} u_5$$

sont idempotents orthogonaux de l'algèbre $\mathcal{H} \times Q$.

Alors, faisons dans A_8 le changement de base

$$(6)\quad \begin{cases} v_1 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_5, \quad v_2 = \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_6, \quad v_3 = \frac{1}{2}u_3 + \frac{1}{2}u_7, \\ \qquad\qquad v_4 = \frac{1}{2}u_4 + \frac{1}{2}u_8, \\ v_5 = \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_5, \quad v_6 = \frac{1}{2}u_2 - \frac{1}{2}u_6, \quad v_7 = \frac{1}{2}u_3 - \frac{1}{2}u_7, \\ \qquad\qquad v_8 = \frac{1}{2}u_4 - \frac{1}{2}u_8. \end{cases}$$

Le calcul des produits $v_r v_s$, $(r, s = 1, ..., 8)$, conduit à la table:

$$(7)\quad \begin{array}{c|cccccccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 \\ \hline v_1 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & v_2 & -v_1 & v_4 & -v_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_3 & v_3 & -v_4 & -v_1 & v_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_4 & v_4 & -v_3 & -v_2 & -v_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 \\ v_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_6 & -v_5 & v_8 & -v_7 \\ v_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_7 & -v_8 & -v_5 & v_6 \\ v_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_8 & v_7 & -v_6 & -v_5 \end{array},$$

qui démontre la

Proposition 2. *L'algèbre $\mathcal{H} \times Q$ est semisimple, en étant la somme directe des deux algèbres d'ordre quatre, isomorphes respectivement à Q.*

4. Soit $\mathcal{H}'$ l'algèbre polynômiale engendrée par $P(\lambda) = \prod_1^n (\lambda - \lambda_s)$, $(\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \ldots \neq \lambda_n)$. On sait [4] que $\mathcal{H}'$ est semisimple et qu'elle peut être exprimée comme la somme directe des n algèbres isomorphes respectivement au corps réel.

En notant par $W_1, W_2, ..., W_n$ les idempotents orthogonaux de $\mathcal{H}'$, on sait qu'ils constituent une base pour respectivement chaque composante de la somme directe [4] et alors:

$$(8)\quad W_p W_q = \begin{cases} W_p & \text{si } p = q \\ 0 & \text{si } p \neq q \end{cases} \quad (p, q = 1, ..., n).$$

En considérant le produit direct $\mathcal{H}' \times Q$, soit une base formée par les éléments $1W_p$, iW_p, jW_p, kW_p, $(p = 1, ..., n)$, que nous allons arranger en n classes, à savoir

(9) $(1W_1, iW_1, jW_1, kW_1), (1W_2, iW_2, jW_2, kW_2), ..., (1W_n, iW_n, jW_n, kW_n)$.

Les quatre éléments de chaque classe, constituent, évidemment, une base pour une algèbre isomorphe à Q.

Compte tenu des relations (8) et de la permutabilité des 1, i, j, k avec tous les W_p, on observe que le produit de deux éléments quelconques placés dans des classes distinctes est égal à zero, ce qui démontre la

Proposition. 3. *Le produit direct* $\mathcal{H}' \times Q$ *est la somme directe formée avec n algèbres d'ordre quatre, isomorphes respectivement à* Q, *étant donc une algèbre semisimple. Une base qui met en évidence cette structure est donnée par* (9).

Institut Polytechnique de Jassy,
Chaire de Mathématiques II

BIBLIOGRAPHIE

1. Enescu I., *O extindere a algebrelor polinomiale cu scalari reali.* An. şt. Univ. „Al. I. Cuza" Iaşi, s. I, 1968, **XIV**, *1*, pp. 1–5.
2. Curtis C, Reiner I., *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras.* Intersc. Publish., New York-London, 1962.
3. Enescu I., *Asupra algebrelor polinomiale* (I). Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI** (**XV**), *3—4*, pp. 25—28.
4. — *Asupra algebrelor polinomiale* (II). Bul. Inst. polit. Iaşi, 1966, **XII** (**XVI**), *1—2*, pp. 17–20.

ASUPRA UNEI CLASE DE ALGEBRE DE ORDIN $4n$

(Rezumat)

Considerînd spaţiul liniar V_8 definit în [1], acesta se organizează într-o algebră A_8, în care produsul este dat prin (2). Se arată că A_8 este produsul direct dintre corpul Q al cuaternionilor reali şi algebra polinomială (4), determinîndu-se structura sa. Se studiază apoi produsul direct dintre Q şi algebra polinomială generată de $\prod_1^n (\lambda - \lambda_s)$.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

C. D. 519.56

PSEUDO-TREILLIS DISTRIBUTIFS ET APPLICATIONS

NOTE III

PAR

C. BENZAKEN

1. Introduction

Dans cette Note, qui continue les deux autres, précédentes, insérées dans le même *Bulletin* [1], [2], on étudie l'obtention des pseudo-tréillis à partir d'un monoïde ordonné et on donne nombre d'applications.

2. Obtention de pseudo-treillis à partir d'un monoïde ordonné

a) *Monoïde régulièrement ordonné*

Définition. C'est un monoïde noté multiplicativement (multiplication associative), partiellement ordonné: a) l'ordre est compatible avec.; b) la règle suivante est vérifiée $(a.b) \leqslant a$ et $(b.a) \leqslant a$. Cette dernière condition peut être remplacée (si $\mathfrak{M}$ a une unité 1) par $a \leqslant 1$.

Exemples

Exemple 1. N est l'ensemble des entiers positifs muni du produit, la relation d'ordre est la duale, de l'ordre ordinaire $a \leqslant b \langle\Longrightarrow\rangle a$ est plus grand que b.

Exemple 2. N est l'ensemble des entiers positifs muni du produit; la relation d'ordre $a \leqslant b \langle\Longrightarrow\rangle b$ est un diviseur de a.

Exemple 3. S est un alphabet fini: $S = \{a, b, c, ..., l\}$. On considère l'ensemble $\mathfrak{M}(S)$ des chaînes finies de S ou monoïde libre sur S muni de la loi de concaténation notée. (l'unité ou mot vide sera noté 1).

L'ordre est choisi de la manière suivante: $\sigma \leqslant \tau$ signifie qu'en supprimant un nombre éventuellement nul de lettres de σ et en concaténant dans l'ordre ce qui reste, on obtient τ; par exemple: $abce \leqslant ac$, $ab \leqslant b$, $a \leqslant 1$. On vérifie aisément que le monoïde ainsi défini est régulièrement ordonné. Notons qu'ici nous avons en plus:

$$\sigma \leqslant \lambda . \mu \Longrightarrow \sigma = \lambda_1 . \mu_1 \text{ avec } \lambda_1 \leqslant \lambda \text{ et } \mu_1 \leqslant \mu.$$

Nous pouvons définir en plus une notion de transposé: le transposé de σ noté σ^T est le mot formé des letres de σ dans le sens inverse; si $\sigma \leqslant \tau \iff \sigma^T \leqslant \tau^T$.

b) *Pseudo-treillis sur un monoïde $\mathfrak{M}$ régulièrement ordonné*

Soit $\mathfrak{S}$ l'ensemble des parties finies de $\mathfrak{M}$ (y compris la partie vide notée $\emptyset$). Nous structurons $\mathfrak{S}$ à l'aide des opérations de: a) réunion (au sens des ensembles) notée $+$, b) produit: $A.B = \{x \in \mathfrak{M};\ x = \alpha.\beta,\ \alpha \in A,\ \beta \in B\}$; la première opération est associative, commutative, idempotente, tandis que la deuxième operation est associative et distributive par rapport à la première.

Notons que $\emptyset . A = A . \emptyset = \emptyset$.

On considère la relation sur $\mathfrak{S}$ définie par:

$$A < B \iff \forall \alpha \in A,\ \exists \beta \in B : \alpha \leqslant \beta.$$

Cette relation est une relation de pré-ordre (reflexive et transitive) comme on peut aisément la vérifier et compatible en outre avec les opérations.

Notons enfin que:

$$\text{a) } \emptyset < A, \quad \text{b) } A < \emptyset \Longrightarrow A = \emptyset, \quad \text{c) } A.B < A < A + B \text{ et } A.B < B < A + B.$$

Cette relation de pré-ordre n'est pas antisymétrique. En effet, soit deux éléments α, β de $\mathfrak{M}$ tels que: $\alpha \neq \beta$ et $\alpha \leqslant \beta$; alors $A = \alpha + \beta$ et $B = \beta$ sont tels que $A < B$, $B < A$ et $A \neq B$.

Nous définirons classiquement la relation d'équivalence $A \equiv B$ si $A < B$ et $B < A$. Cette équivalence est compatible avec les opérations de $\mathfrak{S}$ et définit donc un quotient E, muni des opérations $+$ et $.$, vérifiant les règles $R1$, $R2$, $R3$ [1] du pseudo-treillis. Quant à la régle $R4$ [1], elle est également vérifiée, car $A + (A.B) < A$ et $A < A + (A.B)$, d'où $A \equiv A + (A.B)$, de même $A \equiv A + (B.A)$.

Donc E est un pseudo-treilis distributif à unités; 0 est la classe de $\emptyset$ réduite d'ailleurs à $\emptyset$, 1 est la classe de tout ensemble fini A contenant l'unité du monoïde $\mathfrak{M}$.

Nous vérifions également que le pseudo-treillis E est décomposable. En effet, soit a et b deux classes de E. Nous noterons que $a \leqslant b$ équivaut à: pour tout élément α de A (représentant de a) il existe un élément β du représentant B de b tel que $\alpha \leqslant \beta$. Cela étant si $a < b + c$ à tout élément α correspond un élément β de $b + c$ tel que $\alpha \leqslant \beta$. En classant les $\alpha \in a$ en deux parties a_1, b_1, telles que: a) a_1 est l'ensemble des α de a tels qu'il existe un $\beta \in b$ avec $\alpha \leqslant \beta$, b) a_2 les autres — si a_2 est vide, alors $a_2 = 0$.

On a bien dans ce cas

$$a = a_1 + a_2 \text{ avec } a_1 \leqslant b \text{ et } a_2 \leqslant c.$$

c) *Représentation canonique de E*

Soit $A \in \mathcal{E}$ et R l'application de $\mathcal{E}$ dans lui-même notée réduction et telle que

$$R(A) = \{\alpha\,;\ \alpha \in A \text{ et } \bar{\exists}\ \beta \in A \text{ tel que } \beta > \alpha \text{ strictement}\}.$$

Il est évident que $R(A) \equiv A$ car manifestement $R(A) < A$; par ailleurs $A < R(A)$ car tout élément α de A ne figurant pas dans $R(A)$ admet un élément β de A: $\beta \geqslant \alpha$, $(\beta \neq \alpha)$, nous pouvons admettre que $\beta \in \kappa(A)$ sinon, puisque $R(A) < A$, on continuerait sur β et A ayant un nombre fini d'éléments, on s'arrêterait obligatoirement. Donc $R(A) \equiv A$.

Enfin $A \equiv B \longleftrightarrow R(A) = R(B)$. Cela est évident dans le sens $R(A) = R(B) \Longrightarrow A \equiv B$ à cause de la propriété précédente.

L'inverse a lieu également car si $A \equiv B$ tout élément maximal α de A est couvert par $\beta \in B$, ce même β est couvert par $\alpha' \in A$ donc $\alpha \leqslant \beta \leqslant \alpha'$ et α étant maximal $\alpha = \alpha' = \beta$. Donc tout élément maximal de A est un élément maximal de B, d'où $R(A) = R(B)$.

Exemples

Reprenons les exemples de monoïde régulièrement ordonné décrits dans le § 2 a).

Exemple 1. Chaque classe d'équivalence a son représentant canonique réduit à 1 seul élément, donc $E = N$.

L'opération $+$ est la borne inférieure de deux entiers. L'opération . est la multiplication ordinaire.

Exemple 2. Le représentant canonique d'une classe comporte des entiers tels que deux à deux ils ne soient pas dans la relation de division.

Exemple 3. Le pseudo-treillis formé présente une particularité supplémentaire, à savoir que le représentant canonique du produit de deux représentants canoniques est lui-même son représentant canonique. Ce qui veut dire que si $A = R(A)$ et $B = R(B)$ alors $R(A.B) = A.B$.

En effet, tout élément de $A.B$, soit $\alpha.\beta$, est maximal, sinon $\alpha.\beta \leqslant \gamma.\delta$, $(\gamma \in A\,;\ \delta \in B)$. Alors $\alpha.\beta = \gamma_1.\delta_1$ avec $\gamma_1 \leqslant \gamma$ et $\delta_1 \leqslant \delta$, l'une au moins des inégalités étant stricte, supposons la première; γ_1 étant une section gauche de $\alpha.\beta$ alors a) ou bien γ_1 est section gauche de α alors $\alpha \leqslant \gamma_1 < \gamma$ et α ne serait pas maximal, b) ou bien γ_1 est une section gauche qui déborde sur β alors $\beta < \delta_1 \leqslant \delta$ et $\beta < \delta$ d'où β ne serait pas maximal.

Notons en dernier qu'il existe une transposition dans E. Une matrice sur un tel E sera dite hermitique si $a_{ij} = a_{ij}^T$.

3. Applications

a) *Problèmes relatifs aux chemins et cycles dans un réseau ou graphe*

Considérons dans un premier cas un réseau non orienté, éventuellement bouclé (fig. 1), et dans un deuxième cas un réseau orienté (fig. 2) dont les points sont numérotés.

Proposons-nous de chercher tous les chemins simples joignant le sommet *1* au sommet *2* ainsi que les cycles élémentaires passant par le sommet *1*.

Nous associons (dans les figures) à chaque branche, une lettre. Soit $S = \{a, b, c, d, e, f, g, h, k\}$ l'ensemble des branches. Nous définirons la marice des noeuds (matrice de passage par des chemins de longueur 1) sur le pseudo-treillis libre sur S.

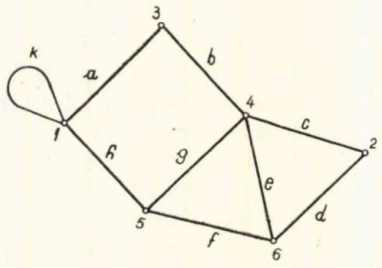


Fig. 1

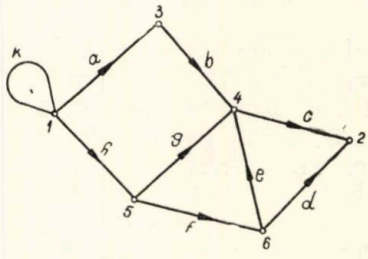


Fig. 2

Soit dans les deux cas

$$A = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & k & 0 & a & 0 & h & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & d \\ 3 & a & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 4 & 0 & c & b & 0 & g & e \\ 5 & h & 0 & 0 & g & 0 & f \\ 6 & 0 & d & 0 & e & f & 0 \end{array}, \quad B = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & k & 0 & a & 0 & h & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 4 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & g & 0 & f \\ 6 & 0 & d & 0 & e & 0 & 1 \end{array}.$$

La première est hermitique car le graphe est symétrique (ou non orienté).

Les matrices stationnaires associées à A et B donneront tous les chemins et cycles simples des réseaux (1) et (2). On peut opérer soit par puissance matricielle soit à l'aide des permutants.

En fait, étant donné le problème restreint nous opérerons par réduction respectivement sur les indices 6, 5, 4, 3.

Ceci conduit aux résultats

$$A_6 = \begin{vmatrix} k & 0 & a & 0 & h \\ 0 & d^2 & 0 & c+de & df \\ a & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c+ed & b & e^2 & g+ef \\ h & fd & 0 & g+fe & f^2 \end{vmatrix}, \text{ etc.}$$

$$\alpha = A_{3456} = \begin{array}{c|c|c} & 1 & 2 \\ \hline 1 & k + h^2 = a^2 + \\ & + abgh + abefh + \\ & + hgba + hfeba & \begin{array}{c} hfd + hgc + \\ + hged + hfec + \\ + abc + abed + \\ + abgfd \end{array} \\ \hline 2 & \alpha_{12}^T & \begin{array}{c} d^2 + c^2 + ced + \\ + cgfd + dec + \\ + dfgc \end{array} \end{array} .$$

Il est évident que $\alpha_{12} . \alpha_{21} = \alpha_{12} . \alpha_{12}^T < \alpha_{11}$, donc l'élément α_{11} donne tous les cycles simples passant par *1* et α_{12} donne les chemins simples de *1* à *2*.

Dans le 2 ème cas (fig. 2) nous obtenons

$$\beta = B_{3456} + \begin{array}{c|c|c} & k & hfd + hgc + \\ & & + hfec + abc \\ \hline 0 & 0 \end{array} .$$

b) *Interprétation de la notion d'idéal*

Supposons que nous nous posions le même problème qu'en a) mais que nous nous interdisions d'avoir dans les chemins où les cycles en même temps les branches d et g ce qu'on considère comme incompatible.

On considérera alors l'idéal fermé $\mathcal{J}$ engendré par $dg + gd$ et les calculus se feront comme auparavant en nous plaçant sur le quotient $E/\mathcal{J}$.

c) *Application aux automates*

Soit un automate à n états internes et $X = \{a, b, \ldots, l\}$ l'ensemble des valeurs d'entrée de l'automate. Proposons nous de chercher quelles sont les séquences minimales [1]) d'entrée qui font passer d'un état interne i à un état interne i_0, $(i \neq i_0)$, (problème d'initialisation d'un automate).

Nous définirons la matrice des états internes $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(E)$, E étant le pseudo-treillis libre sur X, de la manière suivante :

1° $a_{ij} = 0$ si aucune entrée ne fait passer l'automate de l'état (i) à l'état (j),

2° $a_{ij} = \sum_{a \in s} a$, ($S$ étant une partie de X),

1) minimales est pris au sens : toute autre sous-séquence ne répond pas au problème.

si toute entrée faisant partie de S conduit l'automate de l'état (i) à l'état (j). Le permutant P_{ij} de la matrice ainsi définie donnera la solution.

Exemple

Soit l'automate à trois états, $\{X, a, b, c\}$:

	a	b	c
1	2	2	1
2	2	3	⌴, (⌴ non déf.ni).
3	1	3	2

La matrice des états est:

$$A = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{vmatrix} c & a+b & 0 \\ 0 & a & b \\ a & c & b \end{vmatrix}.$$

Pour la recherche des séquences minimales de *2* à *1* et *3* à *1* on forme $A + A^2 + A^3 = A_\infty$.

$$A_\infty = \begin{vmatrix} c+aba+b^2a & a+b & ab+b^2 \\ ba & a+bc & b \\ a & c+a^2+ab & b \end{vmatrix}.$$

On obtient pour *2* à *1*: ba, pour *3* à *1*: a.

Reçue le 11 IX 1965 *Université de Grenoble, France*

BIBLIOGRAPHIE

1. Benzaken C., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1966, **XII (XVI)**, *3–4*, pp. 13–18.
2. — Bul. Inst. polit. Iaşi, 1967, **XIII (XVII)**, *3–4* pp. 11—15.

PSEUDO-LATICE DISTRIBUTIVE ŞI APLICAŢII
Nota III

(Rezumat)

Se studiază obţinerea pseudo-laticelor plecînd de la un monoid ordonat şi se dau un număr de aplicaţii.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

УДК 517.948

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА 2-го РОДА

АДРИАН КОРДУНЯНУ

Сообщение представленное на научной сессии Ясского политехнического института, 28—30 сентября 1967 г.

Рассматриваем сингулярное интегральное уравнение вида:

$$y(x) = f(x) + \int_x^\infty k(x, s)\, y(s)\, \mathrm{d}s, \quad x \geqslant 0, \tag{1}$$

где ядро $k(x, s)$ непрерывная функция при $0 \leqslant x \leqslant s < +\infty$, $f \in L_\infty(0, \infty)$: банахово пространство всех измеримых и почти всюду ограниченных функций на каждом конечном интервале, с нормой $\|f\| = \operatorname*{ess\,sup}_{x \geqslant 0} |f(x)|$, а решение y будем искать в том же пространстве.

Уравнение $(Vf)(x) = \int_x^\infty k(x, s) f(s)\, \mathrm{d}s$, $x \geqslant 0$, определяет в этом случае линейный ограниченный оператор V в пространстве $L_\infty(0, \infty)$ если

$$\sup_{x \geqslant 0} \int_x^\infty |k(x, s)|\, \mathrm{d}s < +\infty, \tag{2}$$

и норма $\|V\|$ не превосходит этот супремум.

В [2] мы рассматривали оператор V и установили для его спектрального радиуса неравенство:

$$r(V) \leqslant \lim_{t \to \infty} \left\{ \sup_{x \geqslant t} \int_x^\infty |k(x, s)|\, \mathrm{d}s \right\}. \tag{3}$$

Винокуров [1] исследовал устойчивость решения классического уравнения Вольтерра; по его определению решение уравнения (1) устойчиво, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$, что при $\|f\| < \delta$ следует $\|y\| < \varepsilon$.

Не предполагая сперва что V ограничен, мы докажем:

Теорема 1. *Устойчивость решения уравнения* (1) *имеет место, если решение уравнения устойчиво*

$$y(x) = f(x) + \int_x^\infty k(x,s)\,y(s)\,ds, \quad x \geqslant a, \text{ и } \int_a^\infty |k(x,s)|\,ds \leqslant M, \tag{4}$$

при $0 \leqslant x \leqslant a$.

Доказательство. При $0 \leqslant x \leqslant a$, уравнение (1) запишется в виде

$$y(x) = f(x) + \int_a^\infty k(x,s)\,v(s)\,ds + \int_x^a k(x,s)\,y(s)\,ds. \tag{5}$$

Если $\|f\| < \delta$, то $\|y\| < \varepsilon$ при $s \geqslant a$ и следовательно:

$$\left| f(x) + \int_a^\infty k(x,s)\,y(s)\,ds \right| \leqslant \delta + \varepsilon M, \quad 0 \leqslant x \leqslant a, \tag{6}$$

а решение уравнения (5) существует при $0 \leqslant x \leqslant a$ и достаточно мало откуда легко следует наше утверждение.

Теорема 2. *Если* V *ограниченный оператор в* $L_\infty(0,\infty)$ *и*

$$\lim_{t\to\infty}\left\{\sup_{x\geqslant t}\int_x^\infty |k(x,s)|\,ds\right\} < 1, \tag{7}$$

то решение уравнения (1) *устойчиво.*

Доказательство. Ввиду (3) следует что $\lambda = 1$ есть регулярная точка для оператора V, то есть $(1-V)^{-1}$ существует и ограничен. Мы имеем $\|y\| \leqslant \|(1-V)^{-1}\|.\|f\|$ откуда следует и устойчивость.

В частности, условие (7) выполнено если

$$\sup_{x\geqslant 0}\int_x^\infty |k(x,s)|\,ds < 1. \tag{8}$$

Теорема 3. *Если* $|k(x,s)| \leqslant a(x)b(s)$, *где* $a(x)$ *и* $b(x)$ *непрерывные функции при* $x \geqslant 0$ *и:*

$$(9)\qquad a(x)\int_x^\infty b(s)\exp\left[\int_x^s a(\tau)b(\tau)\,d\tau\right]ds\leqslant B \quad при \quad x\geqslant 0,$$

то решение уравнения (1) *устойчиво.*

Доказательство. Прежде всего заметим что оператор V ограничен в $L_\infty(0,\infty)$ и поэтому можем определить:

$$y_0(x)=f(x),$$

$$y_1(x)=f(x)+\int_x^\infty k(x,s)y_0(s)\,ds,\quad x\geqslant 0,$$

. . . . . .

$$y_{n+1}(x)=f(x)+\int_x^\infty k(x,s)y_n(s)\,ds,\quad x\geqslant 0,$$

. . . . . .

Обозначая $k_0(x,s)=k(x,s)$ и дальше $k_i(x,s)=\int_x^s k(x,\tau)k_{i-1}(\tau,s)\,d\tau$, $i\geqslant 1$, при $0\leqslant x\leqslant s<+\infty$, $\sigma_n(x,s)=\sum_{i=0}^{n-1}k_i(x,s)$, следует что

$$(10)\qquad y_n(x)=f(x)+\int_x^\infty \sigma_n(x,s)f(s)\,ds,\quad x\geqslant 0.$$

Дальше, показывается, что ряд $\sum_{i=0}^{\infty}k_i(x,s)$ сходится абсолютно и что его сумма $\sigma(x,s)=\lim_{n\to\infty}\sigma_n(x,s)$ удовлетворяет неравенству:

$$(11)\qquad |\sigma(x,s)|\leqslant a(x)b(s)\exp\left[\int_x^s a(\tau)b(\tau)\,d\tau\right],\quad 0\leqslant x\leqslant s<\infty.$$

Откуда, учитывая (9) и применяя большую теорему Лебега, легко заключаем, что

$$(12)\qquad y(x)=f(x)+\int_x^\infty \sigma(x,s)f(s)\,ds,\quad x\geqslant 0,$$

действительно есть решение уравнения (1) и более того:

$$\|y\| \leqslant (1+B)\cdot\|f\|, \tag{13}$$

откуда следует и устойчивость.

Теорема 4. *При тех же условиях для* $k(x,s)$ *что в теореме* 3, *если* $\tilde{k}(x,s)$ *удовлетворяет неравенству*:

$$\sup_{x\geqslant 0}\int_x^\infty |\tilde{k}(x,s)|\,\mathrm{d}s = h < \frac{1}{1+B}, \tag{14}$$

то решение уравнения

$$y(x) = f(x) + \int_x^\infty [k(x,s)+\tilde{k}(x,s)]\,y(s)\,\mathrm{d}s, \quad x\geqslant 0, \tag{15}$$

также устойчиво.

Доказательство. Из вышеуказанного следует, что $(1-V)^{-1}$ существует и что $\|(1-V)^{-1}\| \leqslant 1+B$. Оператор $1-(V+\tilde{V})$ также обратим если $\|\tilde{V}\| < (\|(1-V)^{-1}\|)^{-1}$, а это имеет место учитывая (14).

Замечание 1. Можно пользоваться аналогичными рассуждениями и для доказательства устойчивости решения уравнения:

$$y'(x) = a(x)\,v(x) + \int_0^x k(x,s)\,y(s)\,\mathrm{d}s, \quad x\geqslant 0,$$

или даже для других уравнений.

Замечание 2. Результаты могут быть сформулированы в векториальной форме.

Ясский политехнический институт
Кафедра математики I

ЛИТЕРАТУРА

1. Винокуров В. Р., *Об устойчивости решения системы интегральных уравнений Вольтерра 2 рода* (I). Изв. вузов, матем., 1959, *1*, стр. 23—34.
2. Corduneanu A., *Sur le spectre de l'opérateur Volterra*. Bul. Inst. polit. Iaşi, 1968, **XIV (XVIII)**, *1—2*, pp. 79—82.

DESPRE STABILITATEA SOLUŢIEI ECUAŢIILOR SINGULARE VOLTERRA DE SPEŢA A DOUA

(Rezumat)

Se găsesc cîteva condiţii suficiente pentru stabilitatea ecuaţiei (1) în sens Vinokurov, folosind unele rezultate simple din teoria operatorilor liniari mărginiţi.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

D. C. 517.22

QUASI-CAUCHY THEOREMS FOR SYMMETRIC AND DINI DERIVATIVES

BY

LEE LORCH

The (first) symmetric (Schwarz) derivative, $f^s(x)$, of a function $f(x)$ is defined to be

$$\lim_{\to 0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h},$$

if this limit exists. A. Y. Khintchine [3] discussed this concept in some detail, especially in its relation to ordinary differentiation. More recent work, leading also to an extensive bibliography, has been performed by S. N. Mukhopadhyay [4].

Also recently, C. E. Aull [1] obtained what he called quasi-Rolle and quasi mean value theorems. These results fill the gap created by the well-known failure of Rolle's theorem and the mean value theorem to hold for $f^s(x)$.

The purpose of this note is to point out that a Cauchy-type extension of the quasi mean value theorem holds under quite general conditions but not always. Moreover, both these remarks and Aull's results remain valid if $f^s(x)$ is replaced by, say, a Dini derivative [2, p. 113].

The first extension can be formulated as follows:

(I) *Let* $f(x)$, $F(x)$ *be continuous,* $a \leqslant x \leqslant b$. *Suppose that* $f^s(x)$, $F^s(x)$ *exist for* $a < x < b$, *and that* (i) $F(a) \neq F(b)$, (ii) $F^s(x) \neq 0$, $a < x < b$. *Then there exists at least one* (but not necessarily both) *of the pair of numbers* $x_1, x_2, a < x_i < b$, $(i = 1, 2)$, *such that*

$$\frac{f^s(x_1)}{F^s(x_1)} \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)} \leqslant \frac{f^s(x_2)}{F^s(x_2)}. \tag{1}$$

The quasi-Rolle theorem established by Aull assumes in addition that $f(a) = f(b)$, $F(x) = x$, and demonstrates the existence of both ξ_1 and ξ_2, under his conditions, such that $f^s(\xi_1) \leqslant 0$ and $f^s(\xi_2) \geqslant 0$. (In passing, it can be noted that this result follows also from Khintchine's theorem [3, pp. 212—213] whereby a continuous function $f(x)$ with $f^s(x) > 0$ is strictly

increasing. On the other hand, Aull's approach yields an alternative proof of Khintchine's theorem).

(I) follows at once from the quasi-Rolle theorem in the same fashion as does the corresponding result for ordinary derivatives from Rolle's theorem, except for the parenthetic remark.

The same construction can be employed. Let

$$\Phi(x) = [f(x) - f(a)]\,[F(b) - F(a)] - [f(b) - f(a)]\,[F(x) - F(a)]$$

and apply the quasi-Rolle theorem to $\Phi(x)$.

This application assures the existence of only one of the numbers x_1, x_2 in (1) because both ξ_1 and ξ_2 arising from $\Phi(x)$ could serve merely as different choices of one of the pair x_1, x_2 in (1) depending on the signs of $F^s(x_i)$, $(i = 1,2)$. These signs can be opposite to one another, although $F^s(x) \neq 0$, since symmetric derivatives do not possess the Darboux (intermediate value) property.

To see that this can actually occur, define

$$f(x) = x; \quad F(x) = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -2x, & x < 0. \end{cases}$$

Then, for $a < 0 < b$, $b > -2a$,

$$\frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{b - a}{b + 2a} > 1,$$

whereas

$$\frac{f^s(x)}{F^s(x)} \leqslant 1 \text{ for all } x.$$

Thus, x_2 in (1) cannot exist for this pair of functions.

Under slightly stronger assumptions, both x_1 and x_2 do exist:

(II) *Let* $f(x)$, $F(x)$ *be continuous,* $a \leqslant x \leqslant b$. *Suppose that* $f^s(x)$, $F^s(x)$ *exist for* $a < x < b$, *and that* $F^s(x) > (<)\, 0$, $a < x < b$. *Then there exist numbers* x_i, $a < x_i < b$, $(i = 1,2)$, *such that both of the inequalities* (1) *hold.*

This follows from the same application of the quasi-Rolle theorem to $\Phi(x)$ since the signs of $F^s(\xi_i)$, $(i = 1,2)$, are required now to be the same. The quasi mean value theorem is the case $F(x) = x$ of (II).

If $f^s(x)/F^s(x)$ possesses the Darboux property, then the strict analogue of the classical mean value theorem holds.

In (II) it was not necessary to include assumptions (i) and (ii) of (I), since these follow from Khintchine's theorem.

Remarks. 1°. In establishing (I) and (II), the only properties of the symmetric derivative actually used are shared by, say, the Dini derivative [2, p. 113ff] so that these results hold also for such derivatives. The same counter-example is also valid. All that was required of the symmetric derivative is that it (i) is linear, (ii) takes constants into zero and x into

1, and (iii) either complies with Aull's Lemma 1 or with Khintchine's theorem. For Dini derivatives, (i), (ii) and the second alternative of (iii) are all true. The last part of this assertion follows readily from [2, p. 123].

2°. Aull establishes [1, Theorem 2] that the ordinary derivative $f'(x)$ exists if both $f(x)$ and $f^s(x)$ are continuous, $a < x < b$. It is natural to ask if this result can be improved by assuming that $f^s(x)$ is not continuous but only Darboux continuous. The answer is *no*: D. J. Newman pointed out that the even function $f(x) = x \sin(1/x)$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$, provides a counterexample. For it, $f^s(x)$ exists for all x and is Darboux continuous, while $f'(0)$ does not exist.

Received the 26 VI 1968

University of Alberta, Edmonton,
and
York University, Toronto,
Canada

REFERENCES

1. Aull C. E., *The First Symmetric Derivative.* Amer. Math. Monthly, 1967, **74**, pp. 708—711.
2. Boas R. P. Jr., *A Primer of Real Functions.* John Wiley, New York, 1960.
3. Khintchine A. Y., *Recherches sur la Structure des Fonctions Mésurables.* Fund. Math., 1927, **9**, pp. 212—279.
4. Mukhopadhyay S. N., *On Schwarz Differentiability* (V). Amer. Math. Monthly, 1967, **74**, pp. 542—544.

TEOREME CVASI-CAUCHY PENTRU DERIVATE SIMETRICE ŞI CELE ALE LUI DINI

(Rezumat)

Este bine cunoscut faptul că teorema de valoare medie nu este valabilă pentru derivate simetrice şi cele ale lui Dini. Forme mai slabe ale acestei teoreme au fost stabilite pentru aceste cazuri în [1], [2]. În această lucrare o „extensie în sensul lui Cauchy" a teoremei slăbite (sau cvasi) de valoare medie este dată pentru aceste cazuri şi anume:

Există x_1, x_2, $a < x_i < b$, $(i = 1,2)$ *satisfăcind ambele inegalităţi* (1), *cu condiţia ca* $f(x)$, $F(x)$ *să fie continue,* $a \leqslant x \leqslant b$, $f^s(x)$, $F^s(x)$ *să existe şi* $F^s(x) > (<) 0$, $a < x < b$.

Dacă se presupune, în loc de $F^s(x) > (<) 0$, doar că $F^s(x) \neq 0$, atunci rezultă că numai unul din cele două numere x_1, x_2 din (1) trebuie să existe şi nu în mod necesar amîndouă. Un contraexemplu este dat.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

D. C. 517.946

NONLINEAR, ANALYTIC PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH GENERALIZED GOURSAT DATA (II) [1]

BY

R. P. GILBERT, R. B. KNIGHT and C. Y. LO

1. Introduction

In several previous papers the problem of giving generalized Goursat data,

$$u_x(x,y) = \tilde{\alpha}_0(x)\,u(x,y) + \tilde{\alpha}_1(x)\,u_y(x,y) + g(x), \tag{1}$$

on the analytic curve $\hat{\Gamma}_1 \equiv \{(x,y)\,|\,y = f_1(x),\ 0 \leqslant x \leqslant a\}$, and

$$u_y(x,y) = \tilde{\beta}_0(y)\,u(x,y) + \tilde{\beta}_1(y)\,u_x(x,y) + k(y), \tag{2}$$

on the analytic curve $\hat{\Gamma}_2 \equiv \{(x,y)\,|\,x = f_2(y),\ 0 \leqslant y \leqslant b\}$, with $u(0,0) = u_0$ and $f_1(0) = f_2(0) = 0$ has been considered for second order elliptic partial differential equations, [1]...[4]. In [3] it was shown that the case where the $\hat{\Gamma}_k$, $k = 1, 2$, are non-parallel, straight lines, is central to this problem. Indeed, if one is considering the non-linear partial differential equation,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \tilde{f}(x, y, u, u_x, u_y) \tag{3}$$

with $\tilde{f}$ analytic in a neighborhood of the origin in $\mathfrak{C}^5$, a conformal mapping which takes $\hat{\Gamma}_1$ and $\hat{\Gamma}_2$ into two straight line segments transforms (3) into an equation of the same type. Furthermore, if sufficient analyticity conditions are prescribed for the coefficients of the Goursat data these also retain their essential form under the conformal mapping. Consequently, without loss of generality we treat just this *central problem*, i. e. the case where the analytic carriers are two (different) straight lines.

---

[1]) This work has been partially supported by the Air Force Office of Scientific Research through Grant AFOSR – 1206 – 67.

2. The Associated Hyperbolic System

We adopt the approach of [1] and [2] and introduce the two *independent* complex variables $z = x + iy$, $z^* = x - iy$, thereby obtaining a new partial differential equation of hyperbolic form in the variables z, z^*,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z\, \partial z^*} = f(z, z^*, U, U_z, U_{z^*}), \tag{4}$$

and the following transformed Goursat data

$$U_z = \alpha_0(z)\, U + \alpha_1(z)\, U_{z^*} + g(z) \text{ on } z^* = e^{i\alpha} z, \tag{5}$$

and

$$U_{z^*} = \beta_0(z^*)\, U + \beta_1(z^*) U_z + h(z^*) \text{ on } z = e^{i\beta} z^*. \tag{6}$$

Here we assume that $f(z, z^*, U, U_z, U_{z^*})$ is analytic in the product space $\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}^* \times \mathfrak{B}^{(3)}$, where $\mathfrak{B}^{(3)}$ is a ball in $\mathfrak{C}^3$, $\mathfrak{S}^* \equiv \{z^* \mid \overline{z^*} \in \mathfrak{S}\}$, and $\mathfrak{S}$ is a simply-connected domain in $\mathfrak{C}^1$. Furthemore, the transformed Goursat coefficients $\alpha_i(z)$, $g(t)$, and $\beta_i(z^*)$, $h(z^*)$, $(i = 0, 1)$, are to be analytic in $\mathfrak{S}$ and $\mathfrak{S}^*$ respectively. We refer to such a region as being *fundamental* in the sense of Vekua [4], [5]. It is clear that a similar condition must hold for $\tilde{f}(x, y, u, u_x, u_y)$ and the original Goursat data, [2], [4].

The conditions (5) and (6) may be rewritten as

$$U_z = \{1 - \alpha_1(z)\, e^{-i\alpha}\}^{-1} [\alpha_0(z)\, U + g(z)], \text{ on } z^* = e^{i\alpha} z \tag{7}$$

and

$$U_{z^*} = \{1 - \beta_1(z^*)\, e^{-i\beta}\}^{-1} [\beta_0(z^*)\, U + h(z)], \text{ on } z = e^{i\beta} z^*. \tag{8}$$

We now follow the scheme of [2] by introducing the function $s(z, z^*) \equiv U_{zz^*}$, where $U(z, z^*)$ is a solution of (4)...(6). However, in the present case the reduced form of the Goursat data (7)...(8) affords us a considerable simplification in the analysis. In terms of the function $s(z, z^*)$ conditions (7) and (8) may be rewritten as

$$\begin{aligned} \varphi(z) = {} & [a(z)\, \alpha_0(z) \int_0^z \int_0^{z^*} s(\xi, \xi^*)\, d\xi^*\, d\xi - \int_0^{z^*} s(z, \xi^*)\, d\xi^*] + \\ & + a(z)\, \alpha_0(z) \left[\int_0^z \varphi(\xi)\, d\xi + \int_0^{z^*} \psi(\xi^*)\, d\xi^* \right] + \\ & + a(z)\, \alpha_0(z) [g(z) + U(0, 0)], \text{ on } z^* = e^{i\alpha} z, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\psi(z^*) = [b(z^*)\,\beta_0(z^*)\int_0^z\int_0^{z^*} s(\xi,\xi^*)\,d\xi^*\,d\xi - \int_0^z s(\xi,z^*)\,d\xi] +$$

$$+ b(z^*)\,\beta_0(z^*)\Big[\int_0^{z^*}\psi(\xi^*)\,d\xi^* + \int_0^z \varphi(\xi)\,d\xi\Big] + \tag{10}$$

$$+ b(z^*)\,\beta_0(z^*)\,[h(z^*) + U(0,0)], \text{ on } z = e^{i\beta}z^*.$$

Here $\varphi(z) \equiv U_z(z,0)$, $\psi(z^*) \equiv U_{z^*}(0,z^*)$, $a(z) \equiv [1-\alpha_1(z)\,e^{-i\alpha}]^{-1}$, and $b(z^*) \equiv [1-\beta_1(z^*)\,e^{-i\beta}]^{-1}$.

Remark. We assume that $\alpha_1(z) \neq e^{i\alpha}$ in $\mathfrak{S}$ and $\beta_1(z^*) \neq e^{i\beta}$ in $\mathfrak{S}^*$.

The system (9)...(10) may be written in the following operator notation

$$\chi = \underset{\sim}{\Omega} s + \underset{\sim}{\mathcal{J}}\chi + \chi_0, \text{ or } (\underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{\mathcal{J}})\,\chi = \Omega s + \chi_0, \tag{11}$$

where

$$\chi \equiv \{\varphi,\psi\},\ \chi_0 \equiv \{a(z)\,\alpha_0(z)\,[g(z)+U(0,0)],\ b(z^*)\,\beta_0(z^*)\,[h(z^*)+U(0,0)]\},$$

$$\underset{\sim}{\mathcal{J}}\chi \equiv \Big\{a(z)\,\alpha_0(z)\Big[\int_0^z \varphi(\xi)\,d\xi + \int_0^{ze^{i\alpha}} \psi(\xi^*)\,d\xi^*\Big],$$

(12)

$$b(z^*)\,\beta_0(z^*)\Big[\int_0^z \psi(\xi^*)\,d\xi^* + \int_0^{z^*e^{i\beta}} \varphi(\xi)\,d\xi\Big]\Big\},$$

and

$$\underset{\sim}{\Omega} s \equiv \Big\{a(z)\,\alpha_0(z)\int_0^z\int_0^{ze^{i\alpha}} s(\xi,\xi^*)\,d\xi^*\,d\xi - \int_0^{ze^{i\alpha}} s(z,\xi^*)\,d\xi^*,$$

(13)

$$b(z^*)\,\beta_0(z^*)\int_0^{z^*}\int_0^{z^*e^{i\beta}} s(\xi,\xi^*)\,d\xi\,d\xi^* - \int_0^{z^*e^{i\beta}} s(\xi,z^*)\,d\xi\Big\}.$$

By using the Banach space of analytic couples χ, with the norm $\|\chi\|_\lambda \equiv \max\{\|\varphi\|_\lambda,\ \|\psi\|_\lambda\}$, with $\|\varphi\|_\lambda \equiv \sup_{\mathfrak{S}}(e^{-\lambda|z|}\,|\varphi(z)|)$, $\|\psi\|_\lambda \equiv \sup_{\mathfrak{S}}(e^{-\lambda|z^*|}\,|\psi(z^*)|)$, and $\lambda \geqslant 0$, as given in [2, p. 335]), we are able to obtain, using arguments similar to those of [2], an estimate for the norm

of the operator $\underset{\sim}{\mathcal{J}}$, namely $\|\underset{\sim}{\mathcal{J}}\|_\lambda \leqslant M/\lambda$. Herre M is a suitably chosen constant. By choosing λ sufficiently large, $\|\underset{\sim}{\mathcal{J}}\|_\lambda < 1$, and the Neumann series for the operator equation (11) has a unique solution in the Banach space of couples of analytic functions defined above (See [2] further details).

In order to show the existence of a unique solution to (4)...(6) in a sufficiently small neighborhood of the origin, we only need to use the above conclusion and follow the program given in [2, pp. 336—338]. We conclude our discussion with the following:

Theorem. *A unique solution to the problem* (4)...(6), *and hence the associated elliptic problem* (1)...(3) *exists in the small providing,*

(i) *the origin is an interior point of a fundamental domain* $\mathfrak{S}$ *associated with* (1)...(3), *and*

(ii) *neither* $\widetilde{\alpha}_1(0)$ *nor* $\beta_1(0)$ *is real.*

Condition (i) follows from the above discussion. In order to show (ii) we first note that a necessary and sufficient condition for us to replace (5)...(6) by (7)...(8) is that $\alpha_1(z) \neq e^{i\alpha}$ and $\beta_1(z^*) \neq e^{i\beta}$ for *some* fundamental domain $\mathfrak{S}$ and $\mathfrak{S}^*$ respectively. The relations between the original and transformed Goursat coefficients α_1, $\widetilde{\alpha}_1$, β_1, $\widetilde{\beta}_1$ are given by

$$\alpha_1(z) = \frac{i\widetilde{\alpha}_1\left[\frac{z}{2}(1+e^{i\alpha})\right]+1}{i\widetilde{\alpha}_1\left[\frac{z}{2}(1+e^{i\alpha})\right]-1}, \tag{14}$$

and

$$\beta_1(z^*) = \frac{i-\widetilde{\beta}_1\left[\frac{z^*}{2}(1-e^{i\beta})\right]}{i+\widetilde{\beta}_1\left[\frac{z^*}{2}(1-e^{i\beta})\right]}. \tag{15}$$

If $\alpha_1(0) \neq e^{i\alpha}$ and $\beta_1(0) \neq e^{i\beta}$, then by continuity this holds in some neighborhood of the origin. From (14) and (15) we see that $\widetilde{\alpha}_1(0)$ and $\widetilde{\beta}_1(0)$ cannot be real for this to be fulfilled, and hence condition (ii) follows.

3. Concluding Remarks

In the above we recall that the first step of our approach to the system (1)...(3) was to straighten the analytic carriers. Indeed, this step was a necessary one in order to bound the Neumann series representation of $(\underset{\sim}{I}-\underset{\sim}{\mathcal{J}})^{-1}$ in the norm topology. For instance, if $z^* = F_1(z)$, and

$z = F_2(z^*)$ are the analytic surfaces corresponding to $y = f_1(x)$ and $x = f_2(y)$ respectively; then we have (9), (10) holding on $z^* = F_1(z)$ and $z = F_2(z^*)$ respectively, with

$$a(z) = \left[1 - \frac{\alpha_1(z)}{F_1'(z)}\right]^{-1} \quad \text{and} \quad b(z^*) = \left[1 - \frac{\beta_1(z^*)}{F_2'(z^*)}\right]^{-1}.$$

These two conditions may again be reformulated as an operator equation of the form (11), with $\underset{\sim}{\mathcal{J}}$ and $\underset{\sim}{\Omega}$ slightly modified. For instance, $\underset{\sim}{\mathcal{J}}\chi$ is modified by having the upper limits $ze^{i\alpha}$ and $z^*e^{i\beta}$ of the indicated integrations replaced by $F_1(z)$ and $F_2(z^*)$ respectively. Now suppose we are considering the Banach space of analytic couples χ defined over the bidisk $(\Delta_\rho, \Delta_\rho^*)$. Then in order for the operator equation (11) to be solvable in *this* space we must have that $F_1 : \Delta_\rho \to \Delta_\rho^*$ and $F_2 : \Delta_\rho \to \Delta_\rho^*$. Since $F_1(0) = F_2(0) = 0$, and the F_k, $(k = 1, 2)$, are analytic functions we must have by Schwarz's lemma $|F_k(z)| \leqslant |z|$, $(k = 1, 2)$, $|z| \leqslant \rho$. However, if the Goursat data is given on *real* analytic curves this is impossible unless these curves are both straight lines; in which case $F_k(z) = e^{i\theta_k} z$, $(k = 1, 2)$, with θ_k a real constant. To show the first part of this statement we note, that

$$F_1'(z) = \frac{i + f_1'\left(\frac{z + z^*}{2}\right)}{i - f_1'\left(\frac{z + z^*}{2}\right)}, \quad \text{and} \quad F_2'(z^*) = -\frac{i + f_2'\left(\frac{z - z^*}{2i}\right)}{i - f_2'\left(\frac{z - z^*}{2i}\right)},$$

and hence when $z^* = \bar{z}$, (i. e. x and y are real), $|F_k'| \equiv 1$ on the corresponding analytic curve. Since $f_k'(0)$ is real, $F_k'(0) \neq 0$ and $w = F_k'(z)$, $(k = 1, 2)$, is a bi-homeomorphic mapping in Δ_ρ for ρ sufficiently small, unless F_k' is identically a constant. Consequently, there are directions starting from the origin for which the modulus of $F_k'(z)$ is greater than 1. This implies that we cannot have $|F_k(z)| \leqslant |z|$ for *any* Δ_ρ, unless we have the case of two straight lines, i. e. $F_k'(z) \equiv e^{i\theta_k}$, $(k = 1, 2)$. We conclude, that other than straight lines there are no *real* analytic curves whose continuation to a fundamental bicylinder represents an injective mapping. This shows the necessity of first performing a conformal mapping, to achieve the *normal form* of the elliptic system (1)...(3), before attempting to show the equation (11) has a fixed point.

Received the 15 VI 1968

Indiana University,
Catholic University
and
Michigan State University,
USA

REFERENCES

1. Aziz A. K., Gilbert R. P., *A Generalized Goursat Problem for Elliptic Equations.* J. für Reine u. Angew. Math., 1966, **222**, S. 1—13.
2. Aziz A. K., Gilbert R. P., Howard H. C., *A Second Order Non-linear Elliptic Boundary Value Problem with Generalized Goursat Data.* Ann. Math. Pura Appl., 1966, **73**, pp. 325—342.
3. Colton D., Gilbert R. P., *Nonlinear, Analytic Partial Differential Equations with Generalized Goursat Data,* (to appear).
4. Gilbert R. P., *Function Theoretic Methods in the Theory of Partial Differential Equations.* Academic Press, New York, 1968.
5. Vekua I. N., *New Methods for Solving Elliptic Equations.* John Wiley, 1967, (transl. from Russian).

ECUAŢII CU DERIVATE PARŢIALE NELINIARE, ANALITICE, CU DATE GENERALIZATE ALE LUI GOURSAT (II)

(Rezumat)

Se studiază problema integrării unor ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale de ordinul al doilea, neliniare, cu date generalizate ale lui Goursat, pe două curbe analitice.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

D. C. 513.82; 519.3; 621—52

SOME GEOMETRIC ASPECTS OF OPTIMAL PROCESSES

PART II

PROBLEMS WITH STATE CONSTRAINTS[1])

BY

K. V. SAUNDERS and G. LEITMANN

1. Introduction

Using the notations and the concepts corresponding to various symbols to be find in the first part of this lecture, [1], published in the same *Bulletin*, let us consider in what follows the problems with state constraints.

2. State Constraints

Thus far we have dealt with systems for which admissible control belongs to a prescribed constant set, but for which the state variables are not subject to *a priori* constraints. We shall now consider some features of optimal control problems for which the system's states are constrained to a given closed region of state space, say $B \subset E^n$. In other words, we shall consider as admissible only those transfer paths from θ^0 to θ^1, which lie entirely in B; i.e. $\underset{\sim}{x}(t) \subset B$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$.

In particular, we shall be concerned with state constraints such that $B \triangleq \{x : g(\underset{\sim}{x}) \leqslant 0\}$, where $g(\underset{\sim}{x})$ is a prescribed function which is defined and possesses continuous second partial derivatives in the neighborhood of the boundary ∂B given by $g(x) = 0$.

Clearly $g(\underset{\sim}{x}) \equiv g(\underset{\sim}{x})$ so that we may consider a region in E^{n+1}

$$G \triangleq \{\underset{\sim}{x} : g(\underset{\sim}{x}) \leqslant 0\}. \tag{1}$$

---

[1]) This paper is the second part of the lecture based on a portion of the doctoral dissertation *Some Geometric Aspects of Optimal Control Problems with State Inequality Constraints* by K. V. Saunders, University of California, Berkeley, 1965.

All admissible trajectories must lie in G; i.e., $\underset{\sim}{x}(t) \subset G$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$.

In what follows we shall be concerned especially with those portions of an optimal trajectory belonging to boundary ∂G. Regarding the latter, we shall assume that

(i) $\nabla g(x) \triangleq (0, \partial g/\partial x_1, \ldots, \partial g/\partial x_n) \neq 0$ for all $x \in \partial G$; and

(ii) $T_{\partial(E^* \times x_0)}(\underset{\sim}{x})$ is defined and $T_{\partial(E^* \times x_0)}(\underset{\sim}{x}) = T_{\partial G}(\underset{\sim}{x})$ for all $\underset{\sim}{x} \in \partial G \cap \cap \partial(E^* \times x_0)$; i.e., the boundaries of $E^* \times x_0$ and G possess equal tangent planes at points of their intersection.

3. Control Constraints

For the problems to be discussed henceforth, we shall suppose that admissible control belongs to a set U given by

$$h_r(\underset{\sim}{u}) \leqslant 0, \quad (r = 1, 2, \ldots, s). \tag{2}$$

If at any instant of time, t', optimal control $u^*(t')$ is such that

$$h_r(\underset{\sim}{u}^*(t')) = 0, \quad (r = 1, 2, \ldots, s'), \tag{3}$$

we shall assume that

$$s' \leqslant m \text{ if } \underset{\sim}{x}^*(t') \in \operatorname{int} G, \quad s' < m \text{ if } x^*(t') \in \partial G.$$

In what follows, we shall have occasion to consider the scalar function

$$p(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{u}) \triangleq \nabla g(\underset{\sim}{x}) \cdot \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{u}). \tag{4}$$

We shall consider also vectors

$$\nabla_u p(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{u}) \triangleq (\partial p/\partial u_1, \ldots, \partial p/\partial u_m), \quad \nabla_u h_r(\underset{\sim}{u}) \triangleq (\partial h_r/\partial u_1, \ldots, \partial h_r/\partial u_m)$$

and assume that

(i) $\nabla_u p(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{u}) \neq 0$; and

(ii) $\nabla_u p(x, u)$, $\nabla_u h_r(\underset{\sim}{u})$, $(r = 1, 2, \ldots, s')$,

are linearly independent along any portion of an optimal trajectory on boundary ∂G.

Since $p(\underset{\sim}{x}(t), \underset{\sim}{u}(t)) = (\mathrm{d}g(\underset{\sim}{x}(t))/\mathrm{d}t$ it follows from assumption (i) above that $\mathrm{d}g(\underset{\sim}{x}(t))/\mathrm{d}t_{\underset{\sim}{x}(t) = \underset{\sim}{x}^*(t) \subset \partial G}$ is an explicit function of the control; the case for which the control does not occur in the first derivative of function $g(\underset{\sim}{x}(t))$ is treated in the dissertation on which this discussion is based, as is the case of a boundary which is not smooth.

Assumption (ii) above assures that $p(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{u}) = 0$, $h_r(\underset{\sim}{u}) = 0$, $(r = 1, 2, \ldots, s')$, can be solved for $s' + 1$ components of $\underset{\sim}{u}$ in a neighborhood of $x = \underset{\sim}{x}^*(t)$, $\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{u}^*(t)$; we shall have occasion to utilize this fact.

Finally, we shall assumme that functions $f_j(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{u})$, $\partial f_j(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{u})/\partial x_i$, and $\partial f_j(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{u})/\partial u_k$, $(i=1,2,...,n;\ k=1,2,...,m;\ j=0,1,...,n)$, are continuous on $\hat{B}\times\hat{U}$, where $\hat{B}$ and $\hat{U}$ are open sets containing B and U, respectively.

4. Optimal Trajectory on Prescribed Boundary

Let us now investigate a portion of an optimal trajectory, Γ^*, corresponding to $x^*(t)$ and $u^*(t)$, $t_0\leqslant t\leqslant t_1$, which belongs to boundary ∂G for all $t\in[t_e,t_l]$, where $t_0\leqslant t_e<t_1$ and $t_0<t_l\leqslant t_1$. Points $\underset{\sim}{x}^*(t_e)$ and $\underset{\sim}{x}^*(t_l)$ will be called entering and leaving points, respectively.

Henceforth we shall restrict the discussion to the case for which the limiting surface, Σ, which contains Γ^* is *regular* in a neighborhood $\mathfrak{N}$ of boundary ∂G, i.e., possesses a unique tangent plane at each of its points in $\mathfrak{N}$.

As in [1, Section 8], we shall consider a portion $\Delta(\underset{\sim}{x}^*(t_e))$ of Σ in a neighborhood of entering point $\underset{\sim}{x}^*(t_e)$, and study its transformation along Γ^* by means of trajectory equation (11) with an appropriately chosen control $\underset{\sim}{u}(t)$, $t_e\leqslant t\leqslant t_l$. In [1, Section 8] we treated such a transformation between regular, interior points, $x^*(t')$ and $x^*(t'')$, of Σ, and utilized as an appropriate control $u^*(t)$, $t'\leqslant t\leqslant t''$. Since $x^*(t')$ and $\underset{\sim}{x}^*(t'')$ were taken to be *interior* points of Σ, Theorem I resulted in Lemma 5; namely, the transfer of the tangent plane of Σ by means of the linear transformation defined by variational equations (12). Here we are concerned with a transformation of surface $\Delta(\underset{\sim}{x}^*(t_e))$ along a portion of Γ^* belonging to the boundary of Σ.

In order to make use of Theorem I, we must assure that

(i) the controls which generate trajectories emanating from $\Delta(\underset{\sim}{x}^*(t_e))$ at time t_e are admissible, i.e., satisfy [1]; and

(ii) such trajectories are admissible, i.e., remain in G, for all $t\in[t_e,t_l]$.

To assure condition (i) above, we shall impose on $\underset{\sim}{u}(t)$ the restriction that

$$h_r(\underset{\sim}{u}(t))=0,\quad (r=1,2,...,s'). \tag{5}$$

In other words, a control $u(t)\in\partial U$, the boundary of U, whenever $u^*(t)\in\partial U$. Of course, the range s' of the index in (5), and hence ∂U, may change discontinuously at a finite number of instants on $[t_e,t_l]$.

To assure condition (ii) above, we shall impose on $u(t)$ the additional constraint that

$$p(\underset{\sim}{x}(t),\underset{\sim}{u}(t))=0,\quad t_e\leqslant t\leqslant t_l, \tag{6}$$

so that $g(x(t))\equiv$ const. Since $g(\underset{\sim}{x}(t_e))\leqslant 0$ we have $\underset{\sim}{x}(t)\subset G$, $t_e\leqslant t\leqslant t_l$.

An admissible control, $\underset{\sim}{u}(t)$, which satisfies (5) and (6) will be said to have range in the restricted control set $\Omega \subset U$.

5. Restricted Control Set

We shall now consider the transformation of $\Delta(\underset{\sim}{x}^*(t_e)) \subset \mathfrak{N}$ by means of trajectory equation (11) [1] with $\underset{\sim}{u}(t) \in \Omega$ for all $t \in [t_e, t_l]$.

By hypothesis, $\nabla_u p(\underset{\sim}{x}^*(t), \underset{\sim}{u}^*(t))$, $\nabla_u h_r(\underset{\sim}{u}^*(t))$, $(r = 1, 2, ..., s' < m)$, are linearly independent; hence, we can solve (5) and (6) for $s' + 1$ control components

$$\underset{\sim}{u}^c(t) = \underset{\sim}{U}^c(\underset{\sim}{x}(t), \underset{\sim}{u}^a(t)), \quad \forall t \in [t_e, t_l], \tag{7}$$

where

$$\underset{\sim}{u}^c = (u_1, u_2, ..., u_{s'+1}), \quad \underset{\sim}{u}^a = (u_{s'+2}, u_{s'+3}, ..., u_m).$$

Functions $U_i^c(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{u}^a)$ and their first partial derivatives are continuous in a neighborhood of $x_j = x_j^*(t)$, $(j = 0, 1, ..., n)$, and $u_k^a = u_k^*(t)$, $(k = s' + 2, s' + 3, ..., m)$, $\forall t \in [t_e, t_l]$.

The vector function $\underset{\sim}{u}^a(t)$, $t_e \leqslant t \leqslant t_l$, is at our disposal. We shall choose its components equal to those generating Γ^*, namely, $u_k^a(t) = u_k^*(t)$, $(k = s' + 2, s' + 3, ..., m)$.

With $\underset{\sim}{u}^a(t)$ so specified, the trajectory equation is

$$\frac{\mathrm{d}\underset{\sim}{x}}{\mathrm{d}t} = \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{U}^c(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{u}^a(t)), \underset{\sim}{u}^a(t)). \tag{8}$$

We shall utilize (8) to generate trajectories which emanate from the points of $\Delta(\underset{\sim}{x}^*(t_e))$ at time t_e and thereby transform $\Delta(\underset{\sim}{x}^*(t_e))$ along Γ^*. To accomplish this, we select initial conditions in

$$\Delta(\underset{\sim}{x}^*(t_e)) \triangleq \{\underset{\sim}{x} : \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{x}(t_e) \in \sum\}$$

where

$$\underset{\sim}{x}(t_e) = \underset{\sim}{x}^*(t_e) + \varepsilon \underset{\sim}{\eta}^e + \underset{\sim}{o}(\varepsilon) \tag{9}$$

and

$$\operatorname*{Lim}_{\varepsilon \to 0} \frac{\underset{\sim}{o}(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0, \quad \underset{\sim}{\eta}^e \in T_\Sigma(\underset{\sim}{x}^*(t_e)).$$

The solution of (8), corresponding to initial condition (9), is

$$\underset{\sim}{x}(t) = \underset{\sim}{x}^*(t) + \varepsilon \underset{\sim}{\eta}(t) + \underset{\sim}{o}(t, \varepsilon), \quad t_e \leqslant t \leqslant t_l \tag{10}$$

where $\underset{\sim}{o}(t, \varepsilon)/\varepsilon \to 0$ uniformly for all $t \in [t_e, t_l]$ as $\varepsilon \to 0$, and $\underset{\sim}{\eta}(t)$ is the solution of variational equation [2])

$$\frac{d\underset{\sim}{\eta}}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\underset{\sim}{\eta} + \frac{\partial f}{\partial u^c}\underset{\sim}{K^c}, \tag{11}$$

with initial condition $\underset{\sim}{\eta}(t_e) = \underset{\sim}{\eta^e}$, where

$$\frac{\partial f}{\partial x} \triangleq \left[\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right], \ (i, j = 0, 1, ..., n), \quad \frac{\partial f}{\partial u^c} \triangleq \left[\frac{\partial f_j}{\partial u_k}\right], \ (j = 0, 1, ..., n; \ k = 1, 2, ..., s'+1)$$

and

$$\underset{\sim}{K^c} \triangleq (k_1^c, k_2^c, ..., k_{s'+1}^c), \quad K_k^c \triangleq \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial U_k^c}{\partial x_j}\eta_{ij},$$

all evaluated at $x_j = x_j^*(t)$, $(j = 0, 1, ..., n)$, and $u_i^a = u_i^*(t)$, $(i = s'+2, s'+3, ..., m)$.

Since $\underset{\sim}{u}(t) \in \Omega$ for all $t \in [t_e, t_l]$, conditions (5) and (6) are met; i.e.,

$$\frac{\partial R}{\partial x}\underset{\sim}{\eta} + \frac{\partial R}{\partial u^c}\underset{\sim}{K^c} = 0, \tag{12}$$

where

$$\underset{\sim}{R} \triangleq (p, h_1, ..., h_{s'}), \quad \frac{\partial R}{\partial x} \triangleq \left[\frac{\partial R_i}{\partial x_j}\right], \ (i = 1, 2, ..., s'+1; \ j = 0, 1, ..., n),$$

$$\frac{\partial R}{\partial u^c} \triangleq \left[\frac{\partial R_i}{\partial u_k}\right], \ (i, k = 1, 2, ..., s'+1),$$

all evaluated at $x_j = x_j^*(t)$, $(j = 0, 1, ..., n)$, and $u_i^a = u_i^*(t)$, $(i = s'+2, s'+3, ..., m)$. Note that all elements of $\partial R/\partial x$, except those in the first row, are zero.

It is easy to see now that $\Omega \subset U$, namely, that $h_r(\underset{\sim}{u}(t)) < 0$, $(r = s'+2, s'+3, ..., s)$, for sufficiently small $|\varepsilon|$, since

$$h_r(\underset{\sim}{u}(t)) = h_r(\underset{\sim}{u}^*(t)) + \sum_{k=1}^{s'+1}\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial h_r}{\partial U_k^c}\frac{\partial U_k^c}{\partial x_j}\Bigg|_{\substack{\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{x}^*(t) \\ \underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{u}^*(t)}} \varepsilon\eta_j' + o(t, \varepsilon)$$

and

$$h_r(u^*(t)) < 0.$$

---

[2]) For the sake of convenience, we write all vectors as row vectors. However, it is to be understood that a vector may be either a row or a column vector as required by the indicated matrix operation.

Upon solving (12) for K^c and substituting in (11), we have

$$\frac{d\underset{\sim}{\eta}}{dt} = \left[\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial u^c}\frac{\partial R^{-1}}{\partial u^c}\frac{\partial R}{\partial x}\right]\underset{\sim}{\eta}. \tag{13}$$

Since (13) defines a nonsingular, linear transformation, $A(t_e, t)$, such that

$$\underset{\sim}{\eta}(t) = A(t_e, t)\,\underset{\sim}{\eta}^e, \quad t_e \leqslant t \leqslant t_l.$$

Lemma 4 [1] is applicable; i.e., the set of points $\Delta(\underset{\sim}{x}^*(t)) \triangleq \{\underset{\sim}{x} : \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{x}(t)\}$, where $\underset{\sim}{x}(t)$ is given by (10), is an n-dimensional surface whose tangent plane at $\underset{\sim}{x}^*(t)$ is

$$T_\Delta(\underset{\sim}{x}^*(t)) = A(t_e, t)\,T_\Delta(\underset{\sim}{x}^*(t_e)).$$

Since the points of $\Delta(\underset{\sim}{x}^*(t))$ belong to admissible trajectories — namely, trajectories which are generated by admissible controls and lie in G — whose initial points are in Σ, no points of $\Delta(\underset{\sim}{x}^*(t))$ are B-points relative to Σ. However, since $\underset{\sim}{x}^*(t)$ is a regular but not an interior point of Σ or $\Delta(\underset{\sim}{x}^*(t))$, we cannot draw the conclusion embodied in Lemma 5 [1]; i.e., even though $T_\Delta(\underset{\sim}{x}^*(t_e)) = T_\Sigma(\underset{\sim}{x}^*(t_e))$, we cannot conclude that $T_\Delta(\underset{\sim}{x}^*(t)) = T_\Sigma(\underset{\sim}{x}^*(t))$ for all $t \in [t_e, t_l]$.

By an argument analogous to that used in [1, Section 10], it is seen readily that a vector function, $\underset{\sim}{\lambda}(t)$, which is normal to surface $\Delta(\underset{\sim}{x}^*(t))$ at $\underset{\sim}{x}^*(t)$, $t_e \leqslant t \leqslant t_l$, is a solution of the equation adjoint to (13), namely,

$$\frac{d\underset{\sim}{\lambda}}{dt} = -\underset{\sim}{\lambda}\left[\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial u^c}\frac{\partial R^{-1}}{\partial u^c}\frac{\partial R}{\partial x}\right].$$

In view of the structure of $\partial R/\partial x$, this equation may be written

$$\frac{d\underset{\sim}{\lambda}}{dt} = -\underset{\sim}{\lambda}\frac{\partial f}{\partial x} + v_0 \nabla p(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{u}), \tag{14}$$

where

$$\underset{\sim}{v} = (v_0, v_1, \ldots, v_n) \triangleq \underset{\sim}{\lambda}\frac{\partial f}{\partial u^c}\cdot\frac{\partial R^{-1}}{\partial u^c}$$

and

$$\nabla p(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{u}) \triangleq \left(\frac{\partial p}{\partial x_0}, \frac{\partial p}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial p}{\partial x_n}\right).$$

6. A Relation Among Normals to Tangent Planes

We shall now derive a relation among vectors normal to tangent planes $T_\Sigma(\underset{\sim}{x}^*(t))$, $T_\Delta(\underset{\sim}{x}^*(t))$ and $T_{\partial G}(\underset{\sim}{x}^*(t))$ of Σ, $\underset{\sim}{\Delta}(x^*(t))$ and ∂G, respectively, at a point $\underset{\sim}{x}^*(t)$, $t_e \leqslant t \leqslant t_l$.

As in Part I [1], $n(\underset{\sim}{x})$ denotes a unit vector normal to Σ and directed into B/Σ at a regular, interior point of Σ. Vector $\underset{\sim}{n}(\underset{\sim}{x})$ and tangent plane $T_\Sigma(\underset{\sim}{x})$ are defined at a point $\underset{\sim}{x} \in \partial G \times \partial(E^* \times x_0)$ by considering $\underset{\sim}{n}(\underset{\sim}{x}+\underset{\sim}{\Delta x})$, where $\underset{\sim}{x}+\underset{\sim}{\Delta x} \in \mathfrak{N}$, and letting $|\underset{\sim}{\Delta x}| \to 0$. Of course, normal $\underset{\sim}{\lambda}(t)$ and tangent plane $T_\Delta(\underset{\sim}{x}^*(t))$ of $\Delta(\underset{\sim}{x}^*(t))$ at $\underset{\sim}{x}^*(t)$ are defined similarly, i.e., in the one-sided sense.

We shall consider a vector $\underset{\sim}{N}(\underset{\sim}{x})$, which is normal to Σ at a point $\underset{\sim}{x} \in \mathfrak{N}$, and given by

$$\underset{\sim}{N}(\underset{\sim}{x}) \triangleq -\operatorname{grad}\Phi(\underset{\sim}{x}) \text{ if } n_0(\underset{\sim}{x}) \neq 0, \qquad \underset{\sim}{N}(\underset{\sim}{x}) \triangleq k\underset{\sim}{n}(\underset{\sim}{x}),\ k>0, \text{ if } n_0(\underset{\sim}{x}) = 0, \tag{15}$$

where

$$\Phi(\underset{\sim}{x}) = C$$

is the equation of surface Σ, and k is at our disposal.

Furthermore, we shall choose

$$\underset{\sim}{\lambda}(t_e) = \underset{\sim}{N}(\underset{\sim}{x}^*(t_e)), \tag{16}$$

which is clearly feasible since $T_\Delta(\underset{\sim}{x}^*(t_e)) = T_\Sigma(\underset{\sim}{x}^*(t_e))$. Again,

$$\lambda_0(t) \equiv \text{const.},\ t_e \leqslant t \leqslant t_z \tag{17}$$

so that, in view of (15) and (16),

$$\lambda_0(t) \equiv -1 \text{ if } n_0(\underset{\sim}{x}^*(t_e)) \neq 0, \qquad \lambda_0(t) \equiv 0 \text{ if } n_0(\underset{\sim}{x}^*(t_e)) = 0,$$

for $t \in [t_e, t_l]$.

The third vector under consideration is $\nabla g(\underset{\sim}{x}^*(t))$ normal to the tangent plane, $T_{\partial G}(\underset{\sim}{x}^*(t))$, of boundary ∂G. Concerning the three normals $\underset{\sim}{N}(\underset{\sim}{x}^*(t))$, $\underset{\sim}{\lambda}(t)$ and $\nabla g(\underset{\sim}{x}^*(t))$, we shall prove

Lemma 1. *If Γ^* is an optimal trajectory in limiting surface Σ, given by $\underset{\sim}{x}^*(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, and if $\underset{\sim}{x}^*(t) \subset \partial G$ on $[t_e, t_l]$, then $\underset{\sim}{\lambda}(t)$, $\underset{\sim}{N}(\underset{\sim}{x}^*(t))$ and $\nabla g(\underset{\sim}{x}^*(t))$ are linearly dependent. Furthermore, if $\underset{\sim}{\lambda}(t)$ and $\nabla g(\underset{\sim}{x}^*(t))$ as well as $\underset{\sim}{N}(\underset{\sim}{x}^*(t))$ and $\nabla g(\underset{\sim}{x}^*(t))$ are linearly independent, then*

$$\underset{\sim}{\lambda}(t) = \underset{\sim}{N}(\underset{\sim}{x}^*(t)) + a(t)\nabla g(\underset{\sim}{x}^*(t)),\ t_e \leqslant t \leqslant t_l, \tag{18}$$

where $a(t) \leqslant 0$ and is continuous on $[t_e, t_l]$.

Let us prove first that the three normals are linearly dependent. Suppose that this assertion is incorrect; i.e., at a point $\underset{\sim}{x}' = \underset{\sim}{x}^*(t')$, $t_e \leqslant t \leqslant t_l$, vectors $\underset{\sim}{\lambda}(t')$, $\underset{\sim}{N}(\underset{\sim}{x}')$ and $\nabla g(\underset{\sim}{x}')$ are linearly independent. Let

$$L(\underset{\sim}{x}') \triangleq T_\Delta(\underset{\sim}{x}') \cap T_\Sigma(\underset{\sim}{x}') \cap T_{\partial G}(\underset{\sim}{x}').$$

Then we can choose two vectors, $\underset{\sim}{\alpha}$ and $\underset{\sim}{\beta}$, at $\underset{\sim}{x}'$ such that[3])

$$\underset{\sim}{\alpha} \in T_\Delta(\underset{\sim}{x}') \cap T_\Sigma(\underset{\sim}{x}') - L(\underset{\sim}{x}'), \quad \underset{\sim}{\lambda}(t') \cdot \underset{\sim}{\alpha} = \underset{\sim}{N}(\underset{\sim}{x}') \cdot \underset{\sim}{\alpha} = 0, \quad \nabla g(\underset{\sim}{x}') \cdot \underset{\sim}{\alpha} < 0 \tag{19}$$

and

$$\underset{\sim}{\beta} \in T_\Delta(\underset{\sim}{x}') \cap T_{\partial G}(\underset{\sim}{x}') - L(\underset{\sim}{x}'), \quad \underset{\sim}{\lambda}(t') \cdot \underset{\sim}{\beta} = \nabla g(\underset{\sim}{x}') \cdot \underset{\sim}{\beta} = 0, \quad \underset{\sim}{N}(\underset{\sim}{x}') \cdot \underset{\sim}{\beta} > 0. \tag{20}$$

Consider a vector

$$\underset{\sim}{\gamma} \triangleq c\underset{\sim}{\alpha} + d\underset{\sim}{\beta}, \quad c > 0, \quad d > 0.$$

Then it follows from (19) and (20) that

$$\underset{\sim}{N}(\underset{\sim}{x}') \cdot \underset{\sim}{\gamma} > 0, \quad \nabla g(x') \cdot \underset{\sim}{\gamma} < 0.$$

These inequalities imply that $\underset{\sim}{\gamma}$ points into B/Σ; i.e., there exists a $\delta > 0$ such that for all ε, $0 < \varepsilon \leqslant \delta$, $\varepsilon\underset{\sim}{\gamma} \in B/\Sigma$. However, $\underset{\sim}{\gamma}$ clearly belongs to $T_\Delta(\underset{\sim}{x}')$. Hence our conclusion results in a contradiction of the earlier of Section 5 that $\Delta(\underset{\sim}{x}') \subset A/\Sigma \cup \Sigma$. Thus, $\underset{\sim}{\lambda}(t)$, $\underset{\sim}{N}(\underset{\sim}{x}^*(t))$ and $\nabla g(\underset{\sim}{x}^*(t))$ are linearly dependent for all $t \in [t_l, t_l]$; i.e., at every instant t, there exist constants c_i, $(i = 1, 2, 3)$, not all zero, such that

$$c_1 \underset{\sim}{\lambda}(t) + c_2 \underset{\sim}{N}(\underset{\sim}{x}^*(t)) + c_3 \nabla g(\underset{\sim}{x}^*(t)) = 0.$$

In order to demonstrate the validity of (18), we consider two cases:

(i) $\lambda_0(t) \equiv -1$. If $n_0(\underset{\sim}{x}^*(t)) = 0$, the zeroth component of the equation above implies $c_1 = 0$ which leads to a contradiction of the assumed linear independence of $\underset{\sim}{N}(\underset{\sim}{x}^*(t))$ and $\nabla g(\underset{\sim}{x}^*(t))$. Thus, $n_0(\underset{\sim}{x}^*(t)) \neq 0$ so that $\underset{\sim}{N}_0(\underset{\sim}{x}^*(t)) = -1 = \lambda_0(t))$, whence we have $c_1 = -c_2 \neq 0$ and hence (18).

(ii) $\lambda_0(t) \equiv 0$. From the assumed linear independence of $\underset{\sim}{N}(\underset{\sim}{x}^*(t))$ and $\nabla g(\underset{\sim}{x}^*(t))$ we have $c_1 \neq 0$, whereas that of $\underset{\sim}{\lambda}(t))$ and $\nabla g(\underset{\sim}{x}^*(t))$ implies $c_2 \not\equiv 0$. If $n_0(\underset{\sim}{x}^*(t)) \neq 0$, then it follows from the zeroth component of the equation above that $c_2 = 0$. Thus, $n_0(\underset{\sim}{x}^*(t)) = 0$ and $\underset{\sim}{N}(\underset{\sim}{x}^*(t)) = k\underset{\sim}{n}(\underset{\sim}{x}^*(t))$. Relation (18) may then be obtained by proper choice of k.

---

[2]) Subtraction is to be understood in the sense of sets: e. g., $T_\Delta \cap T_\Sigma - L$ denotes the complement of L in $T_\Delta \cap T_\Sigma$.

Secondly, let us show that $a(t) \leqslant 0$ in (18). Consider a vector γ at $x^*(t)$ such that

(i) $\underset{\sim}{\gamma} \in T_\Delta(\underset{\sim}{x}^*(t))$;

(ii) $\nabla g(\underset{\sim}{x}^*(t)) \cdot \underset{\sim}{\gamma} < 0$, i.e., $\underset{\sim}{\gamma}$ points into G.

Since $\Delta(\underset{\sim}{x}^*(t)) \subset \overline{A/\Sigma \cup \Sigma}$, it follows from (i) and (ii) above that $N(\underset{\sim}{x}^*(t)) \cdot \underset{\sim}{\gamma} \leqslant 0$. However, from (18) we have

$$\underset{\sim}{N}(\underset{\sim}{x}^*(t)) \cdot \underset{\sim}{\gamma} + a(t) \nabla g(\underset{\sim}{x}^*(t)) \cdot \underset{\sim}{\gamma} = 0,$$

whence we obtain the desired result.

The continuity of $a(t)$ follows directly from the continuity of $\lambda(t)$, $\nabla\Phi(\underset{\sim}{x}^*(t))$ or $\underset{\sim}{n}(\underset{\sim}{x}^*(t))$, and $\nabla g(\underset{\sim}{x}^*(t))$.

7. A Restricted Maximum Principle

We shall now derive a Maximum Principle which applies to portions of an optimal trajectory on boundary ∂G. From (18) and the properties of control set Ω, we have

$$\underset{\sim}{\lambda}(t) \cdot f(\underset{\sim}{x}^*(t)), \underset{\sim}{u}) = \underset{\sim}{N}(\underset{\sim}{x}^*(t)) \cdot f(\underset{\sim}{x}^*(t), \underset{\sim}{u}), \quad \forall u \in \Omega, \tag{21}$$

for all $t \in [t_e, t_l]$. However, since $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{u})$ and $\underset{\sim}{n}(x)$ are continuous functions of x on $\mathfrak{N}$, relations (18) and (19) [1] apply also at a point $\underset{\sim}{x'} \in \partial G$. Thus, it follows from (21) that

$$\underset{\sim}{\lambda}(t) \cdot f(\underset{\sim}{x}^*(t), u) \leqslant 0, \quad \forall u \in \Omega, \tag{22}$$

and

$$\underset{\sim}{\lambda}(t)\ \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}^*(t), \underset{\sim}{u}^*(t)) = 0. \tag{23}$$

In contrasting relations (18) and (19) [1], applicable at regular *interior* points of Σ, with (22) and (23), applicable at regular *boundary* points of Σ, we note that

(i) $\underset{\sim}{\lambda}(t)$ is a solution of (20) [1] for the former, and of (14) for the latter;

(ii) $\underset{\sim}{u} \in U$ for the former, and $\underset{\sim}{u} \in \Omega \subset U$ for the latter (hence, the name „restricted" Maximum Principle),

We shall now show that $v_0(t)$ in (14) in equal to $a(t)$ in (18) for all $t \in [t_e, t_l]$. Since relations (18) and (19) [1] apply at boundary points, it follows from the multiplier rule of the ordinary calculus that at every instant $t \in [t_e, t_l]$ there exists a unique nonzero vector $\underset{\sim}{b} = (b_1, b_2, .., b_{s'})$ such that

$$\sum_{r=1}^{s'} b_r \nabla_u h_r(\underset{\sim}{u}^*(t)) = \underset{\sim}{N}(\underset{\sim}{x}^*(t)) \frac{\partial f}{\partial u}, \tag{24}$$

where

$$\frac{\partial f}{\partial u} \triangleq \left[\frac{\partial f_j}{\partial u_k}\right], \quad (j = 0,\ 1,...,n;\ k = 1,\ 2,...,m),$$

evaluated at $\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{x}^*(t)$, $\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{u}^*(t)$.

Similarly, it follows from the multiplier rule applied to (22) and (23) that at every $t \in [t_e,\ t_l]$ there exists a unique nonzero vector $\underset{\sim}{e} = (e_0, e_1,..., e_{s'})$ such that

$$e_0 \nabla_u p\,(\underset{\sim}{x}^*(t), \underset{\sim}{u}^*(t)) + \sum_{r=1}^{s'} e_r \nabla_u h_r\,(\underset{\sim}{u}^*(t)) = \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial u}. \tag{25}$$

Upon substituting $\lambda(t)$ from (18) in (25), and thereafter employing (24) we have

$$(e_0 - a)\ \nabla_u p(x^*(t), u^*(t)) + \sum_{r=1}^{s'} (e_r - b_r)\ \nabla_u h_r\,(u^*(t)) = 0.$$

In view of the assumed linear independence of $\nabla_u p(x^*(t),\ u^*(t))$ and $\nabla_u h_r\,(u^*(t))$, $(r = 1, 2,..., s')$, we conclude that

$$e_0 = a, \quad e_r = b_r, \quad (r = 1,\ 2,...,s'). \tag{26}$$

We note now that (25) constitutes a set of m equations for the $s' + 1$ components of $\underset{\sim}{e}$, which has a coefficient matrix of maximum rank. Thus, we may solve $s' + 1$ of these equations, namely,

$$\underset{\sim}{e} \frac{\partial R}{\partial u^c} = \underset{\sim}{\lambda}\,(t) \frac{\partial f}{\partial u^c}$$

for $\underset{\sim}{e}$. But from the definition of $\underset{\sim}{v}$, introduced in Section 5, we see that $\underset{\sim}{e} \equiv \underset{\sim}{v}$ so that, in particular

$$v_0\,(t) = a\,(t). \tag{27}$$

To summarize the main results of Sections **2...7**, we state a restricted Maximum Principle [4]) in

Theorem I. *If* $\underset{\sim}{u}^*(t)$, $t_e \leqslant t \leqslant t_l$, *is an optimal control for the portion of an optimal trajectory* $\underset{\sim}{x}^*(t) \subset \partial G$ on $[t_e,\ t_l]$, *there exists a nonzero continuous vector function,* $\underset{\sim}{\lambda}\,(t)$, *which is a solution of* (14) *such that*

(i) $\underset{u \in \Omega}{\mathrm{Sup}}\ H\,(\underset{\sim}{\lambda}\,(t), \underset{\sim}{x}^*(t), \underset{\sim}{u}) = H\,(\underset{\sim}{\lambda}\,(t), \underset{\sim}{x}^*(t), \underset{\sim}{u}^*(t))$;

(ii) $H\,(\underset{\sim}{\lambda}\,(t), \underset{\sim}{x}^*(t), \underset{\sim}{u}^*(t)) = 0$;

(iii) $\lambda_0\,(t) = \text{const.} \leqslant 0$

for all $t \in [t_e,\ t_l]$, *and*

[4]) E. g., see [2, Theorem 22].

(iv) $\underset{\sim}{\lambda}(t_e) = \underset{\sim}{N}(\underset{\sim}{x}^*(t_e)) = \underset{\sim}{\lambda}(t_e - 0)$;

(v) $\underset{\sim}{\lambda}(t_l + 0) = \underset{\sim}{N}(\underset{\sim}{x}^*(t_l)) = \underset{\sim}{\lambda}(t_l) - v_0(t_l)\,\nabla g(\underset{\sim}{x}^*(t_l))$.

Condition (v) is a *jump condition* which relates the terminal value of the solution of (14), valid for $\underset{\sim}{x}^*(t) \subset \partial G$, to the succeeding initial value of (20) [1], valid for $\underset{\sim}{x}^*(t) \subset \operatorname{int} G$.

It can also be shown that $\mathrm{d}v_0(t)/\mathrm{d}t \leqslant 0$ for all $t \in [t_e, t_l]$ where that derivative is defined. The proof of this relation rests on the easily seen result that if $\underset{\sim}{\lambda}(t)$ is a solution of (14), then $\underset{\sim}{\lambda}(t) + c\nabla g(\underset{\sim}{x}^*(t))$, $c = \text{const.}$, is a solution of (14) with $v_0(t)$ replaced by $v_0(t) + c$.

8. An Unrestricted Maximum Principle

Here we shall derive a so-called „unrestricted" Maximum Principle To accomplish this, we invoke relation (20) with $a(t) = v_0(t)$; i. e.,

$$\underset{\sim}{\lambda}(t) = \underset{\sim}{N}(\underset{\sim}{x}^*(t)) + v_0(t)\,\nabla g(\underset{\sim}{x}^*(t)). \tag{28}$$

Upon differentiation, treating $v_0(t)$ as a generalized function if necessary, we have

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\underset{\sim}{\lambda}(t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\underset{\sim}{N}(\underset{\sim}{x}^*(t))}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}v_0(t)}{\mathrm{d}t}\,\nabla g(\underset{\sim}{x}^*(t)) + \\ &+ v_0(t)\left[\nabla p(\underset{\sim}{x}^*(t), \underset{\sim}{u}^*(t)) - \nabla g(\underset{\sim}{x}^*(t))\,\frac{\partial f}{\partial x}\right]. \end{aligned} \tag{29}$$

Using (28) and (29) in (14) results in

$$\frac{\mathrm{d}\underset{\sim}{N}(\underset{\sim}{x}^*(t))}{\mathrm{d}t} = -\underset{\sim}{N}(\underset{\sim}{x}^*(t))\,\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}v_0(t)}{\mathrm{d}t}\,\nabla g(x^*(t)), \tag{30}$$

which is an equation for the transfer of the normal, $\underset{\sim}{N}(\underset{\sim}{x})$, of Σ along a portion of an optimal trajectory on the boundary of region G.

We may now state an unrestricted Maximum Principle in

Theorem II. *If* $\underset{\sim}{u}^*(t)$, $t_e \leqslant t \leqslant t_l$, *is an optimal control for the portion of an optimal trajectory* $\underset{\sim}{x}^*(t) \subset \partial G$ *on* $[t_e, t_l]$, *there exists a nonzero continuous vector function,* $\underset{\sim}{N}(\underset{\sim}{x}^*(t))$, *which is a solution of* (30) *such that*

(i) $\underset{\underset{\sim}{u} \in U}{\operatorname{Sup}} H(\underset{\sim}{N}(\underset{\sim}{x}^*(t)), \underset{\sim}{x}^*(t), \underset{\sim}{u}) = H(\underset{\sim}{N}(\underset{\sim}{x}^*(t)), \underset{\sim}{x}^*(t), \underset{\sim}{u}^*(t))$;

(ii) $H(\underset{\sim}{N}(\underset{\sim}{x}^*(t)), \underset{\sim}{x}^*(t), \underset{\sim}{u}^*(t)) = 0$;

(iii) $N_0(\underset{\sim}{x}^*(t)) = \equiv \text{const.} \leqslant 0,$

for all $t \in [t_e, t_l]$.

Note that $\underset{\sim}{u}$ has range in U rather than Ω; hence, the label „unrestricted". Furthermore, there is no jump condition, since $\underset{\sim}{N}(\underset{\sim}{x}^*(t))$ is normal to Σ; i. e., we may choose $\underset{\sim}{\lambda}(t_l + 0) = \underset{\sim}{N}(\underset{\sim}{x}^*(t_l))$.

Received the 23 VIII 1966

University of California,
Departament of Mechanical Engineering,
Berkeley, U. S. A.
and
University of Paris,
Faculty of Science,
France

REFERENCES

1. Blaquière A., Leitmann G., Bul. Inst. polit. Iași, 1967, **XIII (XVII)**, *1–2*, pp. 91—104.
2. Pontryagin L. S. et al., *The Mathematical Theory of Optimal Processes.* Interscience Wiley, N. Y., 1962, (translated from Russian).

UNELE ASPECTE GEOMETRICE ALE PROCESELOR OPTIMALE

Nota II

Probleme cu constrîngeri de stare

(Rezumat)

Se studiază problema traiectoriilor optimale cu frontiere precise. De asemenea se stabilesc relații între normale și plane tangente precum și un principiu restrictiv și unul nerestrictiv de maxim.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

D. C. 513.82; 513.83; 621-52

APPLICATION OF THE TOPOLOGICAL PRINCIPLE OF WAŻEWSKI TO CONTROL SYSTEMS

BY

C. P. TSOKOS and V. LAKSHMIKANTHAM

1. Introduction

Let $\mathcal{J}$ denote the half line $0 \leqslant t < \infty$, R^n is the Euclidean n-space and $R^+ = [0, \infty)$. Let $\|x\|$ denote the Euclidean norm of $x \in R^n$.

Consider a control system of the form

$$x' = F(t, x, u), \quad \left(' \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right), \tag{1}$$

where F is a continuous mapping from $[0, \infty) \times R^n \times R^m \to R^n$ and $u = u(t)$ is a control function.

Let $W(t, \xi, \eta)$ be a continuous function defined on $\mathcal{J} \times R^+ \times R^+$. If $\varphi(t)$ is a positive solution of the differential inequality $r' < W(t, r, \psi(t))$, for a given continuous function $\psi(t) \geqslant 0$ which is defined on $[0, \infty)$, we pose the following problem:

Can we characterize an admissibile control set $E \subset R^m$, such that there is a solution $x(t, u)$ of the control system (1) satisfying the estimate

$$\|x(t, u)\| < \varphi(t) \text{ for } t \geqslant \tau?$$

The purpose of the present paper is to find an answer to this question.

2. Preliminaries

In the solution to the problem we are utilizing Wazewski's work [1] in a suitable form. In this part we also present some definitions and notations which are necessary for Wazewski's topological principle.

Let $\psi(t) \geqslant 0$ be given continuous function defined on $[0, \infty)$. Designate the set E by $E = [u \in R^m : \|u\| = \psi(t),\ t \geqslant 0]$. For a fixed control $u = u(t) \in E$, the control system (1) becomes

$$x' = F(t, x, u(t)) \equiv f(t, x). \tag{2}$$

We assume that the ordinary differential system (2) satisfies the following conditions: a) the function $f(t,x)$ is continuous in a set $\Omega \subset R^{n+1}$; b) through every point of Ω, system (2) possesses a unique integral curve.

Let ω and Ω be open sets of R^{n+1} such that $\omega \subset \Omega$, and let $\Gamma(\omega, \Omega)$ represent the boundary of ω in Ω. Let $\rho_0 = (t_0, x_0) \in \Omega$ and $I(t, \rho_0) = (t, x(t, \rho_0))$, where $x(t, \rho_0)$ is the integral curve of the system (2) passing through the point ρ_0. Also, let $(\alpha(\rho_0), \beta(\rho_0))$ be the maximum open interval in which the integral curve passing through ρ_0 exists. Denote by $I(\Delta, \rho_0) = [(t, x(t, \rho_0) | t \in \Delta]$ for every Δ contained in $(\alpha(\rho_0), \beta(\rho_0))$.

Definition 1. The point $\rho_0 = (t_0, x_0) \in \Gamma(\omega, \Omega)$ is a *point of egress* from ω with respect to system (2) and the set γ such that $I((t_0 - \gamma, t_0), \rho_0) \subset \omega$. The set of all points of egress will be denoted by S.

Definition 2. The point ρ_0 is a *point of strict egress* from ω, if ρ_0 is a point of egress and if there exists a positive number γ such that $I((t_0, t_0 + \gamma), \rho_0) \subset \Omega - \bar{\omega}$. The set of all points of strict egress will be denoted by S^*.

Definition 3. If $A \subset B$ are any two sets of a topological space and $K: B \to A$ is a continuous mapping from B onto A such that $K(\rho) = \rho$ for every $\rho \in A$, then K is said to be a *retraction* from B into A and A is a *retract* of B.

Theorem 1 (Wazewski). *Suppose that the differential system* (2) *and the open sets* $\omega \subset \Omega \subset R^{n+1}$ *satisfy the following assumptions:*

(i) *conditions a) and b),*

(ii) *the set of all points of egress equals all the points of strict egress* $(S = S^*)$,

(iii) *there exists at least one set* $Z \subset \omega \cup S$ *such that* $Z \cap S$ *is a retract of* S, *but not a retract of* Z.

Then there exists at least one point $\rho_0 = (t_0, x_0) \in Z - S$ *such that* $I(t, \rho_0) \subset \omega$ *for every* t *in* $t_0 \leq t < \beta(\rho_0)$.

Let $g(\rho) = g(t, x) \subset \Omega \subset R^{n+1}$ be a real-valued function of which the first derivatives exist and are continuous in Ω. Let $x(t)$ be the integral curve of the differential system (2) passing through the point ρ_0, $\rho_0 = (t_0, x_0) \in \Omega$. Define $\xi(t) = g(t, x(t))$. Denote by $[D_{(2)} g(\rho)]_{\rho = \rho_0}$ the derivative of $g(t,x)$ at the point ρ_0, with respect to system (2).

Theorem 2 (Wazewski). *Let* $m(t,x)$ *and* $l(t,x)$ *be real-valued functions; their first derivatives exist and are continuous on the open set* $\Omega \subset R^{n+1}$.

Define

$$\omega = [\rho \in \Omega \mid m(\rho) < 0,\ l(\rho) < 0],$$
$$M = [\rho \in \Omega \mid m(\rho) = 0,\ l(\rho) \leq 0],$$
$$L = [\rho \in \Omega \mid m(\rho) \leq 0,\ l(\rho) = 0].$$

Assume that $[D_{(2)} m(\rho)]_{\rho \in M}$ is positive and $[D_{(2)} l(\rho)]_{\rho \in L}$ is negative. Then $S = S^* = M - L$.

Finally, we require the following two basic theorems on differential inequalities [5], [6].

Theorem 3. *Let* $m(t) \geqslant 0$ *be continuous on* $\mathcal{J}$. *Suppose that* $G(t,v)$ *is continuous on* $\mathcal{J} \times R^+$ *and*

$$D^+ m(t) \leqslant G(t, m(t)),$$

where $D^+ m(t) = \limsup_{h \to 0^+} \{[m(t+h) - m(t)]/h\}$. *Let* $r(t)$ *be the maximal solution of* $v' = G(t,v)$, $v(t_0) = v_0 \geqslant 0$, *existing to the right of* t_0. *Then,* $m(t_0) = v_0$, *implies*

$$m(t) \leqslant r(t), \quad t \geqslant t_0.$$

Theorem 4. *Let* $g(t,\eta,v)$ *be a continuous function on* $\mathcal{J} \times R^+ \times R^+$ *which is non-decreasing in* v *for each* t *and* η. *Suppose that* $r(t)$ *is the maximal solution of the differential equation*

$$\eta' = g(t,\eta,\eta), \quad \eta(t_0) = \eta_0 \geqslant 0,$$

existing on $\mathcal{J}$ *and* $r(t) \geqslant 0$, $t \in \mathcal{J}$. *Then the maximal solution* $r_1(t)$ *of* $\eta' = g_1(t,\eta)$, $\eta(t_0) = \eta_0 \geqslant 0$, *where* $g_1(t,\eta) = g(t,\eta,r(t))$, *exists on* $\mathcal{J}$ *and*

$$r(t) \equiv r_1(t), \quad t \in \mathcal{J}.$$

3. Main Results

With respect to the question posed we state and prove the following theorems.

Theorem 1. *Let* $\psi(t) \geqslant 0$ *be a given continuous function on* $[0,\infty)$ *and let the admissible control set be defined by*

$$E = [u \in R^m : \|u\| = \psi(t),\ t \geqslant 0].$$

Suppose that for every $u \in E$, $F(t,x,u)$ *satisfies the inequality*

$$\|x + hF(t,x,u)\| \geqslant \|x\| + hW(t, \|x\|, \|u\|) + \sigma(h) \tag{3}$$

for all sufficiently small $h > 0$, $\|x\| = \varphi(t)$, *where* $W(t,\xi,\eta)$ *is continuous on* $\mathcal{J} \times R^+ \times R^+$ and $\varphi(t) > 0$ *is continuously differentiable. Then, if* $\psi(t)$ *and* $\varphi(t)$ *satisfy the inequality*

$$\varphi'(t) < W(t, \varphi(t), \psi(t)),$$

there exists a solution $x(t,u)$ *for each* $u \in E$ *of the control system* (1), *such that*

$$\|x(t,u)\| < \varphi(t), \quad t \geqslant \tau \geqslant 0.$$

Proof. Designate the set $\omega = [(t,x) : \|x\| < \varphi(t),\ t > t_0]$ such that if we define $m(t,x) = \|x\| - \varphi(t)$ and $l(t,x) = t_0 - t$, it follows that

$$\omega = [(t, x) \mid \|x\| - \varphi(t) < 0,\ (t_0 - t) < 0],$$

$$M = [(t, x) \mid \|x\| - \varphi(t) = 0,\ (t_0 - t) \leqslant 0],$$

$$L = [(t, x) \mid \|x\| - \varphi(t) \leqslant 0,\ (t_0 - t) = 0].$$

Define $\alpha(t) = \|x(t, (u)\|$, where $x(t, u)$ is a solution of the control system (1) for a fixed control $u = u(t) \in E$. Suppose that for some $t = t_1 \geqslant t_0$, we have $\alpha(t_1) = \varphi(t_1)$. Then as a result of (3) we obtain

$$\alpha(t_1 + h) = \|x(t_1 + h, u)\| = \|x(t_1, u) + hF(t_1, x(t, u), u) + \varepsilon(h)\| \geqslant$$

$$\geqslant \|x(t_1, u)\| + hW(t_1, \|x(t_1, u)\|, \|u\|) + \varepsilon(h),$$

which follows that

$$\limsup_{h \to 0^+} \frac{1}{h} [\alpha(t_1 + h) - \alpha(t_1)] \geqslant W(t_1, \|x(t_1, u)\|, \|u(t)\|).$$

This implies that $\alpha'(t_1) \geqslant W(t_1, \varphi(t_1), \psi(t_1))$. It follows from this that

$$[D_{(1)} m(t, x)]_{(t_1, x_1) \in M} = m'(t_1, x(t_1, t_0, x_0)) = \alpha'(t_1) - \varphi'(t_1) \geqslant$$

$$\geqslant W(t_1, \varphi(t_1), \psi(t_1)) - \varphi'(t_1) > 0,$$

and

$$[D_{(1)} l(t, x)]_{(t_1, x_1) \in L} = -1.$$

Hence, in view of Theorem 2, this implies that $S = S^* = M$. Define for $\tau > t_0$, the set

$$Z = [(t, x) \mid t = \tau,\ \|x\| \leqslant \varphi(t)] = \mathcal{B}^n,$$

where $\mathcal{B}^n$ is a solid sphere in R^n. Further,

$$S = [(t, x) \mid t > t_0,\ \|x\| = \varphi(\tau)] = S^{n-1},$$

where S^{n-1} is the boundary of Γ^n in R^n. It is clear that $Z \cap S$ is not a *retract* of Z. However, the function $\zeta: S \to S \cap Z$ given by $\zeta(t, x) = (\tau, x^*)$, with $x^* = x\varphi(\tau)/\varphi(t)$, is a retraction. Using Theorem 1, we can conclude that there exists at least one point $\rho_0 = (\tau, x_0) \in Z - S$ such that, $(t, x(t, \rho_0, u)) = I(t, \rho_0) \subset \omega$ for all $t \geqslant \tau$. It is also observed that $\beta(\rho_0) = \infty$ otherwise $x(t, u)$ would be unbounded which is not possible. Therefore, $x(t, t_0, x_0, u)$ is defined in the future and

$$\|x(t, t_0, x_0, u)\| < \varphi(t) \text{ for } t \geqslant \tau.$$

This completes the proof.

Remark. If we know that the positive solution $\varphi(t)$ of the differential inequality $r' < W(t, r, \psi(t))$, for a given $\psi(t)$, which possesses the property $\lim_{t \to \infty} \varphi(t) \to 0$, then we can conclude from our theorem that there exist solutions $x(t, u)$ of the control system (1) such that $\lim_{t \to \infty} x(t, u) = 0$, for every $n = u(t) \in E$.

It will now be shown that we can obtain similar results without using Ważewski's Theorems, whenever the inequalities (3) and $r' < W(t,r,\psi(t))$ are reversed. In this approach we utilize arguments similar to those developed by Lakshmikantham, [3], [4].

Theorem 2. *Let $\psi(t) \geqslant 0$ be a given continuous function defined on $[0,\infty)$ and $\varphi(t)$ be a positive solution of $r' > W(t,r,\psi(t))$ for $t \geqslant t_0$. Suppose further that*

$$\|x + hF(t,x,u)\| \leqslant \|x\| + hW(t,\|x\|,\|u\|) + \varepsilon(h) \tag{4}$$

for sufficiently small $h > 0$, $t \geqslant t_0$ and $\|x\| = \varphi(t)$. Then there are infinitely many solutions $x(t,u)$ of the control system (1) such that

$$\|x(t,u)\| \leqslant \varphi(t), \quad t \geqslant t_0.$$

Proof. Let $x(t,u)$ be a solution of the control system (1) such that $\|x(t_0,u)\| \leqslant \varphi(t_0)$. Define $m(t) = \|x(t,u)\|$. Then we claim that $m(t) \leqslant \varphi(t)$ as long as $x(t,u)$ exists. If our assertion is false then there exists a t_1, the greatest lower bound of $t > t_0$ for which $m(t) \leqslant \varphi(t)$ is false. Since $m(t)$ and $\varphi(t)$ are continuous, we have that $t = t_1$, $m(t_1) = \varphi(t_1)$ and $m(t_1 + h) > \varphi(t_1 + h)$, $h > 0$. This implies the inequality $\limsup_{h \to 0^+} \{[m(t_1 + h) - m(t_1)]/h\} \geqslant \varphi'(t_1)] > W(t_1, \varphi(t_1), \psi(t_1))$. However, from condition (4), for $t = t_1$ we have

$$\limsup_{h \to 0^+} \frac{1}{h} [m(t_1 + h) - m(t_1)] \leqslant W(t_1, m(t_1), \psi(t_1)),$$

hence, a contradiction. Therefore, $\|x(t,u)\| \leqslant \varphi(t)$, $t \geqslant t_0$, is true as long as $x(t,u)$ exists. Now applying the result of Wintner [2], it follows that $x(t,u)$ exists in the future. This completes the proof.

The following result is another variation of theorem 2 which depends on the notion of the maximal solution of $r' = W(t,r,r)$. Furthermore we can characterize the control set E by the maximal solution $r(t)$ of $r' = W(t,r,r)$, $r(t_0) = r_0 \geqslant 0$, as follows:

$$E_r = [u \in R_+^m : \|u\| \leqslant r(t),\ t \geqslant 0].$$

The interesting part of this result is that we are able to obtain an estimate of solutions $x(t,u)$ of the control system (1) for all $u \in E$, such that $\|x(t,u)\| \leqslant r(t)$, $t \geqslant t_0$. Note that the function characterizing the control set and the solution set is the same maximal solution $r(t)$.

As an application of Theorem 4, we formulate the following

Theorem 3. *Suppose that*

$$\|x + hF(t,x,u)\| \leqslant \|x\| + hW(t,\|x\|,\|u\|) + \varepsilon(h) \tag{5}$$

for sufficiently small $h > 0$. Assume that $r(t)$ is the maximal solution of $r' = W(t,r,r)$, $r(t_0) = r_0 \geqslant 0$ existing on $[t_0,\infty)$ and $W(t,\xi,\eta)$ non-decreasing in η for each (t,ξ). Then, for every $u = u(t) \in E_r$, the solutions $x(t,u)$ of the control system (1) satisfy the inequality

$$\|x(t,u)\| \leqslant r(t), \quad t \geqslant t_0.$$

Proof. Let $m(t) = \| x(t,u) \|$. Then

$$m(t+h) \leqslant \| x(t,u) + hF(t, x(t,u), u) \| + \| \varepsilon(h) \|.$$

Applying condition (5), we have

$$m(t+h) \leqslant \| x(t,u) + hW(t, \| x(t,u) \|, \| u \|) \| + \| \varepsilon(h) \|.$$

It follows that

$$\limsup_{h \to 0^+} \frac{1}{h} [m(t+h) - m(t)] \leqslant W(t, m(t), \| u \|).$$

Since $W(t, \xi, \eta)$ is non-decreasing in η for each (t, ξ) we have, if $u(t) \in E_r$, the inequality $m'(t) \leqslant W(t, m(t), r(t))$. Utilizing Theorem 3 (Comparison Theorem Principle), we have $m(t) \leqslant r(t)$, $r(t_0) = r_0 \geqslant 0$ or

$$\| x(t,u) \| \leqslant r(t), \quad t \geqslant t_0.$$

Remark. If $r(t)$ is the maximal solution of $r' = w(t,r,r)$, $r(t_0) = r_0 \geqslant 0$, and possessing the property that the $\lim_{t \to \infty} r(t) \to 0$, then we can conclude from our theorem that there exists a solution $x(t,u)$ of the control system (1) such that $\lim_{t \to \infty} x(t,u) = 0$, for every $u = u(t) \in E_r$.

Received the 21 XII 1967

University of Rhode Island
Kingston, USA

REFERENCES

1. Ważewski T., *Sur un principe topologique de l'examen de l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles ordinaires*. Ann. Soc. Pol. Mat., 1947, **20**, pp. 279–313.
2. Wintner A., *The Infinities in the Non-local Existence Problem of Ordinary Differential Equations*. Amer. J. Math., 1946, **68**, pp. 173–178.
3. Lakshmikantham V., *Notes on a Variety of Problems of Differential Systems*. Arch. Rat. Mech. Anal., 1962, **10**, pp. 119–126.
4. Lakshmikantham V., Leela S., *Differential Inequalities, Theory and Applications*. Monograph to be published by Academic Press, 1968.
5. Lakshmikantham V., *On the Boundedness of Solutions of Nonlinear Differential Equations*. Proc. Amer. Math. Soc., 1957, **8**, pp. 1044–1048.
6. Tsokos C., Lakshmikantham V., *Control Systems and Differential Inequalities*. Camb. Phil. Soc., 1968, (to appear).

APLICAREA PRINCIPIULUI TOPOLOGIC AL LUI WAŻEWSKI LA SISTEMELE DE CONTROL

(Rezumat)

Se caracterizează un şir de control admisibil $E \subset R^m$ astfel încît acesta să devină soluţie $x(t,u)$ a sistemului de control (1) satisfăcînd la condiţia de evaluare $\| x(t,u) \| < \varphi(t)$ pentru $t \geqslant \tau$.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

D. C. 519.3 ; 517.946 6; 621-52

OPTIMAL PROBLEMS IN DISTRIBUTED PARAMETER CONTROL SYSTEMS (III)

BY

D. MANGERON and M. N. OĞUZTÖRELI

1. Introduction

In the last two years several scientists and particularly G. Birkhoff, W. Gordon and S. A. Coons [8], [15], [28] did considered polyvibrating equations[1]), studied by the first by D. Mangeron, in connection with problems of automated graphic design of free form surfaces.

In what follows an optimization problem for a polyvibrating control system is discussed. The results of the very recent authors' papers published in the *Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei* are discussed.

2. Description of the Control System and the Optimal Problem

Let $I=\{t|t_0\leqslant t\leqslant t_1\}$ be a given time interval and $\mathcal{J}=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ a given 1-dimensional spatial interval. Let S be a polyvibrating control system defined on $\mathcal{J}$ for $t\in I$. We assume that the *state* $u=u(t,x)$ at $(t,x)\in I\times\mathcal{J}$ of the system S is described by the following equation

$$\frac{\partial^4 u(t,x)}{\partial t^2\,\partial x^2}-\lambda A(t,x)\,u(t,x)=v(t,x), \tag{2.1}$$

where λ is a parameter, $A=A(t,x)$ is a given function continuous on $I\times\mathcal{J}$, and $v=v(t,x)$ is a function belonging to a given set V of continuous functions on $I\times\mathcal{J}$. System S is supposed to be subject to the following mixed conditions

$$\begin{cases} u(t_0,x)=\varphi_1(x), \quad u(t_1,x)=\varphi_2(x) \text{ for } x\in\mathcal{J}, \\ u(t,a)=\psi_1(t), \quad u(t,b)=\psi_2(t) \text{ for } t\in I, \end{cases} \tag{2.2}$$

[1]) The polyvibrating equations were called by various scientists „Mangeron's Equations".

where φ_1, φ_2 and ψ_1, ψ_2 are certain functions belonging to certain given sets Φ_1, Φ_2 and Ψ_1, Ψ_2 of continuously differentiable functions on $\mathcal{J}, \mathcal{J}$ and I, I respectively, satisfying the conditions

$$(2.3) \qquad \psi_1(t_0) = \varphi_1(a), \quad \varphi_1(b) = \psi_2(t_0), \quad \varphi_2(a) = \psi_1(t_0), \quad \varphi_2(b) = \psi_2(t_1).$$

Eq. (2.1) subject to the conditions (2.2), (2.3) has been extensively investigated by D. Mangeron [6] and subsequently by Yu. M. Berezanski [7], G. Birkhoff [8], D. Bainov [9], E. de Giorgi [10], S. Faedo [12], P. Delerue [11], J. Favard [13], G. Fichera [14], W. J. Gordon [15], L. E. Krivoshein [16], T. Kamytov [17], F. Manaresi [18], F. G. Mazzella [19], M. N. Oğuztöreli [20], M. Picone [21], L. Poli [22], D. Pompeiu [23], F. S. Rossi [25], M. Salvadori [26], G. Stampacchia [27], A. Rosenblatt [24],...

Now let $P = \Phi_1 \times \Phi_2 \times \Psi_1 \times \Psi_2 \times V$. Any $p = \{\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2, v\} \in P$ will be called an *admissible policy* and the set P the *policy space* for the system S.

It has been shown in [6] that Eq. (2.1) admits a unique continuous solution satisfying conditions (2.2) together with (2.3) for each $p \in P$. We denote this solution by $u = u(t,x;p)$. To measure the performance of the system S under the policy $p \in P$, we associate with the systems S the following *cost functional:*

$$(2.4) \qquad F(u,p) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{a}^{b} Q(u(t,x;p), u_x(t,x;p), p, t, x)\, dx\, dt,$$

where Q is a given nonnegative function continuous in (t,x) and continuously differentiable in u, u_x and $p = \{\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2, v\} \in P$. Our optimization problem consists of the finding an admissible policy $p^0 \in P$ for which the cost functional $F(u,p)$ assumes its minimum; i.,e.,

$$(2.5) \qquad F(u^0, p^0) = \min_{p \in P} F(u,p),$$

where $u = u(t,x;p)$ and $u^0 = u(t,x;p^0)$.

In this Note we shall deal only with the necessary conditions for optimality of an admissible policy.

3. Representation of $u(t,x;p)$

In [6] it has been shown that the solution $u(t,x;p)$ of Eq. (2.1) satisfying the conditions (2.2), (2.3) also satisfies the following Fredholm integral equation of the second kind:

$$u(t,x;p) = h(t,x;p) + \int_{t_0}^{t_1}\int_{a}^{b} G(t,x;\sigma,\eta)\, A(\sigma,\eta)\, u(\sigma,\eta)\, d\eta\, d\sigma, \tag{3.1}$$

for $(t,x;p) \in I \times \mathcal{J} \times P$, where

$$\begin{aligned} h(t,x;p) = {} & \frac{x-a}{b-a}\psi_2(t) - \frac{x-b}{b-a}\psi_1(t) + \frac{t-t_0}{t_1-t_0}\varphi_2(x) - \frac{t-t_1}{t_1-t_0}\varphi_1(x) + \\ & + \frac{(x-a)(t-t_1)}{(b-a)(t_1-t_0)}\psi_2(t_0) + \frac{(x-b)(t-t_0)}{(b-a)(t_1-t_0)}\psi_1(t_1) - \\ & - \frac{(x-a)(t-t_0)}{(b-a)(t_1-t_0)}\psi_2(t_1) - \frac{(x-b)(t-t_1)}{(b-a)(t_1-t_0)}\psi_1(t_0) + \\ & + \int_{t_0}^{t_1}\int_{a}^{b} G(t,x;\theta,\xi)\, v(\theta,\xi)\, d\xi\, d\theta, \end{aligned} \tag{3.2}$$

and $G(t,x;\sigma,\eta)$ is the Green's function associated with Eq. (2.1) :

$$(b-a)(t_1-t_0)\, G(t,x;\sigma,\eta) = \begin{cases} (b-x)(t_1-t)(\eta-a)(\sigma-t_0) \text{ for } \eta \leqslant x,\ \sigma \leqslant t, \\ (b-x)(t-t_0)(\eta-a)(t_1-\sigma) \text{ for } \eta \leqslant x,\ \sigma \geqslant t, \\ (x-a)(t_1-t)(b-\eta)(\sigma-t_0) \text{ fot } \eta \geqslant x,\ \sigma \leqslant t, \\ (x-a)(t-t_0)(b-\eta)(t_1-\sigma) \text{ for } \eta \geqslant x,\ \sigma \geqslant t, \end{cases} \tag{3.3}$$

for $(\sigma,\eta) \in I \times \mathcal{J}$, $(t,x) \in I \times \mathcal{J}$. In [6] has also been shown that the function $G \equiv G(t,x;\sigma,\eta)$ is continouous in all of its arguments, and

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial G}{\partial x}\right|_{\eta+\varepsilon} - \left.\dfrac{\partial G}{\partial x}\right|_{\eta-\varepsilon} = -\dfrac{(t_1-t)(\sigma-t_0)}{t_1-t_0} & \text{for } \sigma \leqslant t, \\ \left.\dfrac{\partial G}{\partial x}\right|_{\eta+\varepsilon} - \left.\dfrac{\partial G}{\partial x}\right|_{\eta-\varepsilon} = -\dfrac{(t-t_0)(t_1-\sigma)}{t_1-t_0} & \text{for } \sigma \geqslant t, \\ \left.\dfrac{\partial G}{\partial x}\right|_{\sigma+\varepsilon} - \left.\dfrac{\partial G}{\partial t}\right|_{\sigma-\varepsilon} = -\dfrac{(b-x)(\eta-a)}{b-a} & \text{for } \eta \leqslant x, \\ \left.\dfrac{\partial G}{\partial t}\right|_{\sigma+\varepsilon} - \left.\dfrac{\partial G}{\partial t}\right|_{\sigma-\varepsilon} = -\dfrac{(x-a)(b-\eta)}{b-a} & \text{for } \eta \geqslant x. \end{cases} \tag{3.4}$$

Further, the function $G(t,x;\sigma,\eta)$ is nonnegative and symmetric with respect to (t,x) and (σ,η).

Hence, if $\Gamma(t,x;\eta,\sigma;\lambda)$ is the *resolvent kernel* corresponding to the kernel $G(t,x;\sigma,\eta)A(\sigma,\eta)$, we have

$$u(t,x;p) = h(t,x;p) + \lambda \int_{t_0}^{t_1}\int_{a}^{b} \Gamma(t,x;\sigma,\eta;\lambda)\, h(\sigma,\eta,p)\, d\eta\, d\sigma \tag{3.5}$$

for $(t,x;p) \in I \times \mathcal{J} \times P$, provided that λ is not a characteristic value for the integral operator

$$T(u)(t,x) = \int_{t_0}^{t}\int_{a}^{b} G(t,x;\sigma,\eta)\, A(\sigma,\eta)\, u(\sigma,\eta)\, d\eta\, d\sigma. \tag{3.6}$$

In this Note we assume that λ is not a charactetistic value.

It is clear that the function $h(t,x;p)$ is continuously differentiable in $(t,x,p) \in I \times \mathcal{J} \times P$. The resolvent kernel Γ is continuous in all of its arguments and $\partial\Gamma/\partial t$ and $\partial\Gamma/\partial x$ are piecewise smooth with week singularities at $t=\sigma$, $x=\eta$, where they have the same jumps as $\partial G/\partial t$ and $\partial G/\partial x$, described in Eqs (3.4). It is shown in [6] that differentiation with respect to t and x under the integral sign in

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{a}^{b} G(t,x;\sigma,\eta)\, A(\sigma,\eta)\, u(\sigma,\eta)\, d\eta\, d\sigma$$

is permitted. Consequently, we can also differentiate under the integral sign in

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{a}^{b} \Gamma(t,x;\sigma,\eta;\lambda)\, h(\sigma,\eta;p)\, d\eta\, d\sigma,$$

with respect to t and x.

4. Necessary Conditions for Optimality

We now establish the necessary conditions for optimality of an admissible policy p, using a dynamic programming approach, which is employed in our previous notes in this series, [2]...[4], and in [5a] and [5b].

Making use of the principle of optimality of R. Bellman [1], and the method uzed in [2]...[5], we can easily show that for an optimal policy $p = \{\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2, v\}$, the functional

$$G(p;\tau) \equiv -\int_{a}^{b} Q(u(\tau,x,p), u_x(\tau,x,p), p, \tau, x)\, dx \tag{4.1}$$

assumes its minimum for each $\tau \in I$. Thus, for an optimal policy, we have

$$\delta_v G(p;\tau) = 0,\ \delta_{\varphi_k} G(p;\tau) = 0,\ \delta_{\psi_k} G(p;\tau) = 0,\ (k=1,2),\ \tau \in I, \tag{4.2}$$

where δG_v, $\delta_{\varphi_k} G$ and $\delta_{\psi_k} G$ are the first variations of the functional $G = G(p;\tau)$ with respect to v, φ_k and ψ_k, corresponding to the increments $\delta v = \delta v(t,x)$, $\delta\varphi_k = \delta\varphi_k(x)$ and $\delta\psi_k = \delta\psi_k(t)$, such that $v + \delta v \in V$, $\varphi_k + \delta\varphi_k \in \Phi$ and $\psi_k + \delta\psi_k = \Psi$, $(k=1,2)$, respectively. Further, by virtue of the representation formula (3.5) we have

$$\delta_* u(t,x;p) = \delta_* h(t,x;p) + \lambda \int_{t_0}^{t_1}\int_{a}^{b} \Gamma(t,x;\sigma,\eta;\lambda)\, \delta_* h(\sigma,\eta;p)\, d\eta\, d\sigma, \tag{4.3}$$

where δ_* denotes one of the symbols δ_v, δ_{φ_k}, δ_{ψ_k}. By Eq. (3.2), we have

$$\begin{cases} \delta_v h(t,x;p) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1}\int_{a}^{b} G(t,x;\theta,\xi)\, \delta v(\theta,\xi)\, d\xi\, d\theta, \\ \delta_{\varphi_1} h(t,x;p) = \dfrac{t_1 - t}{t_1 - t_0}\, \delta\varphi_1(x), \\ \delta_{\varphi_2} h(t,x;p) = \dfrac{t - t_0}{t_1 - t_0}\, \delta\varphi_2(x), \\ \delta_{\psi_1} h(t,x;p) = \dfrac{b-x}{b-a}\, \delta\psi_1(t) + \dfrac{(x-b)(t-t_0)}{(b-a)(t_1-t_0)}\, \delta\psi_1(t_1) - \\ \qquad - \dfrac{(x-b)(t-t_1)}{(b-a)(t-t_0)}\, \delta\psi_1(t_0), \\ \delta_{\psi_2} h(t,x;p) = \dfrac{x-a}{b-a}\, \delta\psi_2(t) - \dfrac{(x-a)(t-t_0)}{(b-a)(t_1-t_0)}\, \delta\psi_2(t_1) + \\ \qquad + \dfrac{(x-a)(t-t_1)}{(b-a)(t_1-t_0)}\, \delta\psi_2(t_0). \end{cases} \tag{4.4}$$

Furthermore, by the remarks at the end of § 3, we have

$$\delta_* u_x(t,x;p) = \delta_* h_*(t,x;p) + \lambda \int_{t_0}^{t_1}\int_{a}^{b} \Gamma_*(t,x;\sigma,\eta;\lambda)\, \delta_* h(\sigma,\eta;p)\, d\eta\, d\sigma, \tag{4.5}$$

where $u_* = \partial u/\partial x$. Finally, we have

$$(4.6)\qquad \delta_* G(p;\tau) = -\int_a^b \left\{ \frac{\partial Q}{\partial u}\,\delta_* u(\tau,x;p) + \frac{\partial Q}{\partial u_x}\,\delta_* u_x(\tau,x;p) + \frac{\partial Q}{\partial_*}\,\delta_*(\tau,x) \right\} dx,$$

where $Q \equiv Q(u(\tau,x;p), u_x(\tau,x;p), (p,\tau,x),\ \tau \in I$.

We can easily verify that the equation $\delta_v G(p;\tau) = 0$ will be satisfied for any continuous $\delta v, (v + \delta v \in V)$, if and only if

$$(4.7)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial v} = 0, \\ \dfrac{\partial Q}{\partial u} G(\tau,x;\theta,\xi) + \dfrac{\partial Q}{\partial u_x} G_x(\tau,x;\theta,\xi) + \\ + \lambda \displaystyle\int_{t_0}^{t_1}\int_a^b \left\{ \frac{\partial Q}{\partial u}\,\Gamma(\tau,x;\sigma,\eta;\lambda) + \frac{\partial Q}{\partial u_x}\,\Gamma_x(\tau,x;\sigma,\eta;\lambda) \right\} G(\sigma,\eta;\theta,\xi)\,d\eta\,d\sigma = 0 \end{cases}$$

for $\tau, \theta \in I$, $x, \xi \in I$. Further, the equation $\delta_{\varphi_1} G(p;\tau) = 0$ will be satisfied for any continuously differentiable $\delta\varphi_1, (\varphi_1 + \delta\varphi_1 \in \Phi_1)$, with $\delta\varphi_1(a) = \delta\varphi_1(b) = 0$ if and only if

$$(4.8)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial \varphi_1} = 0, \\ \dfrac{\partial Q}{\partial u} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial Q}{\partial u_x} \right) + \\ \quad + \displaystyle\int_{t_0}^{t_1}\int_a^b \left[\frac{\partial Q}{\partial u}\,\Gamma(\tau,x;\sigma,\eta;\lambda) + \frac{\partial Q}{\partial u_x}\,\Gamma_x(\tau,x;\sigma,\eta;\lambda) \right] \frac{t_1 - \sigma}{t_1 - \tau}\,dx\,d\sigma = 0 \end{cases}$$

for $(\tau,\eta) \in I \times \mathcal{J}$; likewise the equation $\delta_{\varphi_2} G(p;\tau) = 0$ will be satisfied for any continuous by differentiable $\delta\varphi_2, (\varphi_2 + \delta\varphi_2 \in \Phi_2)$, with $\delta\varphi_2(a) = \delta\varphi_2(b) = 0$, if and only if

$$(4.9)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial \varphi_2} = 0, \\ \dfrac{\partial Q}{\partial u} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial Q}{\partial u_x} \right) + \\ \quad + \lambda \displaystyle\int_{t_0}^{t_1}\int_a^b \left[\frac{\partial Q}{\partial u}\,\Gamma(\tau,x;\sigma,\eta;\lambda) + \frac{\partial Q}{\partial u_x}\,\Gamma_x(\tau,x;\sigma,\eta;\lambda) \right] \frac{\sigma - t_0}{\tau - t_0}\,dx\,d\sigma = 0 \end{cases}$$

for $(\tau, \eta) \in I \times \mathcal{J}$. Furthermore, the equation $\delta_{\psi_1} G(p; \tau) = 0$ will be satisfied for any continuous $\delta\psi_1$, $(\delta\psi_1 + \psi_1 \in \Psi_1)$, with $\delta\psi_1(t_0) = \delta\psi_1(t_1) = 0$, if and only if

$$(4.10)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial \psi_1} + (b - x)\dfrac{\partial Q}{\partial u} - \dfrac{\partial Q}{\partial u_x} = 0, \\ \displaystyle\int_a^b\int_a^b \left[\frac{\partial Q}{\partial u}\Gamma(\tau, x; \sigma, \eta; \lambda) + \frac{\partial Q}{\partial u_x}\Gamma_x(\tau, x; \sigma, \eta; \lambda)\right](b - \eta)\,dx\,d\eta = 0 \end{cases}$$

for any $\tau, \sigma \in I$; and, finally, the equation $\delta\psi_2 G(p, \tau) = 0$ will be satisfied for any continuous $\delta\psi_2$, $(\delta\psi_2 + \psi_2 \in \Psi_2)$, with $\delta\psi_2(t_0) = \delta\psi_2(t_1) = 0$, if and only if

$$(4.11)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial \psi_2} + (x - a)\dfrac{\partial Q}{\partial u} - \dfrac{\partial Q}{\partial u_x} = 0, \\ \displaystyle\int_a^b\int_a^b \left[\frac{\partial Q}{\partial u}\Gamma(\tau, x; \sigma, \eta; \lambda) + \frac{\partial Q}{\partial u_x}\Gamma_x(\tau, x; \sigma, \eta; \lambda)\right](\eta - a)\,dx\,d\eta = 0 \end{cases}$$

for $\tau, \sigma \in I$. Thus, *optimal policies are among admissible policies* $\{\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2, v\}$ *satisfying the equations* (4.7)...(4.11), simultaneously.

Received the 10 V 1968

Polytechnic Institute of Jassy
and
University of Alberta,
Edmonton, Canada

REFERENCES

1. Bellman R. E., *Dynamic Programming*. Princeton University Press, Princeton N. Y., 1957.
2. Oğuztöreli M. N., *Una classe di equazioni funzionali nella teoria dei controlli ottimi*. Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Cl. sci. fis., mat. e nat., s. 8a,1968, **44.**
3. Mangeron D., Oğuztöreli M. N., *Optimal Problems in Distributed Parameter Control Systems*. I. Funk. Ekv., 1968, **11.**
4. — *Optimal Problems in Distributed Parameter Control Systems*. II. Funk. Ekv., 1968, **11.**
5. Oğuztöreli M. N., **a)** *Time-Lag Control Systems*. Academic Press, New York and London, 1965; b) *Optimization in Distributed Parameter Control Systems. A Dynamic Programming Approach*. A Publication of the Department of Mathematics of the University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada, 1968.
6. Mangeron D., *Problemi al contorno per le equazioni differenziali alle derivate parziali con caratteristiche reali multiple*. Rend. Accad. Sci. fis. e mat., Napoli, s. 4a, 1932, **II**, pp. 28—40.
7. Березанский Ю. М., *Об обобщенных дифференциальных операторах*. ДАН СССР, 1958, **122**, *6*, стр. 959—962.
8. Birkhoff G., Gordon W. J., *The Draftsman's and related Equations*. Research Publ. GMR-748, Warren, Michigan, 1968, 14 pp.
9. Bainov D., *Quelques problèmes concernant les équations de Mangeron*. Bul. Inst. polit. Iaşi, (in print).

10. de Giorgi E., *Un teorema di unicità per il problema di Cauchy relativo ad equazioni differenziali a derivate parziali.* Scritti Matematici offerti a Mauro Picone. Bologna, Azzoguidi, 1955, pp. 781–787.
11. Fichera S., *Alcuni problemi risoluti nell'ambito dell I.N.A.C.*, Bul. Inst. polit. Iaşi, 1949, **IV**, *2*, pp. 63–107.
12. Delerue G., *Quelques nouveaux problèmes à la frontière.* Bul. Inst. polit. Iaşi, (in print).
13. Favard J., *Quelques théorèmes concernant les équations polyvibrantes, dites „équations de Mangeron".* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **11** (15), *1–2*, pp. 17–20.
14. Picone M., *Nuovi risultati conseguiti nell'ambito dell I. N. A. C.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1948, **III**, *1*, pp. 78–86.
15. Gordon W. J., *Spline-Weighted Bivariate Interpolation through Curve Networks.* Research Publ. GMR-758, Warren, Michigan, 1968, 29 pp.
16. Кривошеин Л. Е., *Метод Манжерона в и.-д.у.* Труды 12-й Конф. Гос Ун-та, Фрунзе, 1965, 6 стр.
17. Kamytov T., *Applicazione del metodo di Mangeron-Krivoshein nello studio di alcuni sistemi integro-differenziali.* Rend. Accad. Naz. dei Lincei. Cl. sci. fis., mat. e nat., s. 8, 1965, **37**, *5*, pp. 242–245.
18. Manaresi F., *Studio di una equazione differenziale alle derivate parziali con caratteristiche reali doppie.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 1954, **23**, pp. 163–213.
19. Mazzella F. G., *Alcuni teoremi concerenti i problemi di Mangeron.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1963, **IX (XIII)**, *3–4*, pp. 35–38.
20. Oguztöreli M. N., Mangeron D., *Studies of Mathematical Physics Differential Systems by Laplace-Picone Transforms.* Rev. Roum. des Sci., Techn., Série de Méc. Appl., 1968, **13**, *5*, p. 841–852.
21. Poli L., Delerue P., *Le Calcul Symbolique à deux Variables et ses Applications.* Gauthier-Villars, Paris, 1954.
22. Picone M., *Nuovi metodi per il calcolo delle soluzioni delle equazioni a derivate parziali della Fisica Matematica.* Ann. Sci. Univ. Jassy, s. I, 1940, **26**, *1*, pp. 183–232.
23. Pompeiu D., *Équations à caractéristiques réelles doubles.* Bull. Soc. Roum. Math., 1948,
24. Rosenblatt A., *Approximations successives pour les équations à caractéristiques réelles et multiples.* C. r. Acad. Sci., Paris, 1933, **198**, pp. 1278–1280.
25. Rossi F. S., *Problemi di Mangeron non lineari.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1963, **IX (XIII)**, *3–4*, pp. 39–42.
26. Salvadori M., *Ricerche variazionali par gli integrali doppi in forma non parametrica.* Ann. Scuola Norm. Sup., Pisa, s. II, 1936, **5**, pp. 51–72.
27. Stampacchia G., *Un teorema di calcolo delle variazioni ed applicazioni a problemi al coutorno per equazioni a derivate parziali del tipo iperbolico.* Giorn. Mat., 1948–49, **78**, pp. 81–96.
28. Coons S. A., *Surfaces for computer Aided Design of Space Forms.* Project MAC, Design Div., Dept. of Mech. Engineering, MIT, 1964. Revised to MAC-TR-41, June, 1967.

PROBLEME OPTIMALE ÎN SISTEME DE CONTROL CU PARAMETRI DISTRIBUIŢI (III)

(Rezumat)

Se studiază o problemă pentru un sistem de control referitor la ecuaţii polivibrante. Se folosesc în expunere rezultatele publicate de către autori în *Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei* [6].

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

УДК 517.948.32

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ПИКАРА К РЕШЕНИЮ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

В. К. ИВАНОВ

1. Мы рассматриваем уравнение

$$\int_a^b K(x,t)u(t)\,dt = f(x), \tag{1}$$

или

$$Ku = f.$$

Ядро $K(x,t)$ — предполагается симметричным, замкнутым суммируемым с квадратом. Пусть $\{\lambda_n\}$, $|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$, система характеристических чисел, а $\{\varphi_n(x)\}$ ортонормированная система собственных функций ядра $K(x,t)$. Правую часть $f(x)$ и решение $u(t)$ уравнения (1) будем считать суммируемыми с квадратом, нормы их будем брать в метрике пространства $L_2[a,b]$, сходимость функциональных рядов будем понимать как сходимость в среднем. Метод, рассматриваемый в работе, можно применять и для других метрик. Симметричность ядра предполагается ради простоты: используя приём Э. Шмидта [1] можно было бы развить всю теорию и для несимметричного ядра.

Пусть разложение $f(x)$ в ряд Фурье по системе функций $\{\varphi_n(x)\}$ имеет вид

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x). \tag{2}$$

По теореме Пикара [1, стр. 161—163] для существования в $L_2[a,b]$ решения уравнения (1) необходимо и достаточно, чтобы было

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 c_k^2 < +\infty.$$

Это условие мы будем предполагать выполненным. Тогда решение уравнения (1) есть сумма, сходящегося в среднем ряда

$$u(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k c_k \varphi_k(x). \tag{3}$$

2. Формула (3) имеет теоретический интерес, она может применяться лишь в том случае, когда функция $f(x)$ и коэффициенты c_k известны лишь приближенно. Предположим что вместо $f(x)$ нам известна функция $\tilde{f}(x)$, такая, что $\|f-\tilde{f}\|\leqslant\delta$, где $\delta>0$ заданное число. Тогда вместо коэффициентов c_k мы будем иметь $\tilde{c}_k$ такие, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}(c_k-\tilde{c}_k)^2\leqslant\delta^2 \tag{4}$$

и вместо ряда (3) мы сможем построить лишь ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\tilde{c}_k\varphi_k(x). \tag{5}$$

Как бы мало ни было δ, вследствие неограниченно растущих множителей λ_k, сумма ряда (5) может сколь угодно сильно отличаться от (3), ряд (5) может даже не сходиться в среднем. Поэтому непосредственное использование ряда (5) не дает возможности получить приближение к $u(x)$.

Обычно при приближенном решении уравнение (1) регуляризируют. Простейший способ регуляризации (когда ядро $K(x,t)$ определено положительно) состоит в замене (1) уравнением второго рода

$$\int_a^b K(x,t)\tilde{u}_\alpha(t)\,dt+\alpha\tilde{u}_\alpha(t)=\tilde{f}(x),$$

где α — малый положительный параметр [2]...[5]. Параметр α удается связать с δ такой зависимостью $\alpha=\alpha(\delta)$, что $u_{\alpha(\delta)}\to u$ при $\delta\to 0$.

Мы показываем, что тех же результатов можно добиться, беря частные суммы ряда (5)

$$\tilde{u}_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\tilde{c}_k\varphi_k(x) \tag{6}$$

и связывая число членов n с погрешностью δ, соответствующей зависимостью $n=n(\delta)$, благодаря чему получается $\tilde{u}_{n(\delta)}\to u$ при $\delta\to 0$. Здесь число членов n играет такую же роль, как и параметр α при сведении уравнения (1) к уравнению 2-го рода.

3. Рассмотрим семейство функций $\tilde{f}_\delta(x)$, зависящих от положительного параметра δ таких, что

$$\|f - f_\delta\| \leqslant \delta, \quad 0 < \delta \leqslant \delta_0. \tag{7}$$

Каждому δ соответствует система $\widetilde{c}_k = \widetilde{c}_k(\delta)$ коэффициентов Фурье функции $\widetilde{f}_\delta(x)$. Для каждой пары значений n и δ можно составить сумму (6). Оценим уклонение этой суммы от точного решения

$$\Delta(n, \delta) = \|u - \widetilde{u}_n\|.$$

Для того, чтобы функцию $\widetilde{u}_n(x)$ можно было принять за приближенное решение, необходимо добиться, чтобы

$$\lim_{\delta \to 0} \Delta(n(\delta), \delta) = 0. \tag{8}$$

Введем еще частную сумму ряда (3)

$$u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k c_k \varphi_k(x)$$

и положим

$$\begin{cases} \Delta_1(n) = \|u - u_n\| = \left(\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k^2 c_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \Delta_2(n, \delta) = \|u_n - \widetilde{u}_n\| = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k (c_k - \widetilde{c}_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{cases} \tag{9}$$

Тогда очевидно

$$\Delta(n, \delta) \leqslant \Delta_1(n) + \Delta_2(n, \delta). \tag{10}$$

Если точное решение $u(x)$ существует, то по теореме Пикара

$$\lim_{n \to \infty} \Delta_1(n) = 0. \tag{11}$$

Таким образом, для справедливости (8) достаточно, чтобы

$$\lim_{\delta \to 0} \Delta_2(n(\delta), \delta) = 0. \tag{12}$$

4. Теорема 1. *Имеет место следующая оценка*

$$\Delta_2(n, \delta) \leqslant |\lambda_n| \delta. \tag{13}$$

Доказательство. Учитывая, что последовательность $\{|\lambda_k|\}$ не убывает, найдем, что при переменных $\widetilde{c}_k$, удовлетворяющих (4), правая часть (9) достигает наибольшего значенияпри $\widetilde{c}_k = c_k$, $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$, и $|c_k - \widetilde{c}_k| = \delta$. Отсюда и следует (13).

Следствие 1. Для справедливости (12) достаточно взять такую зависимость $n = n(\delta)$, чтобы

$$\lim_{\delta \to 0} |\lambda_{n(\delta)}| \delta = 0. \tag{14}$$

Используя (10) и учитывая, что (11) выполняется автоматически, получим

Следствие 2. Каково бы ни было семейство функций $\tilde{f}_\delta(x)$, удовлетворяющих (7), для выполнения соотношения $\tilde{u}_{n(\delta)} \to u$ при $\delta \to 0$ достаточно выбрать зависимость $n = n(\delta)$ так, чтобы выполнялось (14). Оценка (13) является точной для функции $\tilde{f}(x) = f(x) + \delta\varphi_\alpha(x)$, в ней достигается равенство.

Если удается оценить $\Delta_1(n)$, что относится к теории приближения функций, то неравенство (10), с учетом (13), позволяет дать оценку для $\Delta(n, \delta)$. Зная $\Delta_1(n)$, можно при данном δ найти оптимальное n, при котором правая часть (10) достигает минимума.

Теорема 1 основывается на замечании, содержащемся на [6, стр. 548]. Для простоты мы ограничимся здесь квадратичной матрицей. Однако, если известно, что ряд Фурье для точного решения $u(x)$ сходится в каком-либо ином смысле, например, равномерно, то теорема 1 сохранится и для этого случая: надо лишь при оценке $\Delta_2(n, \delta) = \|u_n - \tilde{u}_n\|$ норму взять в соответствующей метрике; это, конечно, приведет к иной зависимости $n = n(\delta)$. В несколько ином виде на возможность регуляризации задачи путем отсечения остатка ряда, указывается в [7, пример 2, стр. 674].

5. Пусть $L(x, t)$ симметричное ядро с суммируемым квадратом, имеющее те же собственные функции, что и ядро $K(x, t)$, а характеристические числа $\{\mu_n\}$, $|\mu_1| \leqslant |\mu_2| \leqslant \ldots$. Предположим, что решение $u(x)$ представимо при помощи ядра $L(x, t)$

$$u(x) = \int_a^b L(x, t) v(t)\, dt, \tag{15}$$

где $v(t) \in L_2[a, b]$. Если известны порядки роста λ_n и μ_n, то можно найти наилучший возможный порядок убывания уклонения $\Delta(n, \delta)$ в зависимости от убывания δ.

Пусть коэффициенты Фурье функций $u(x)$ и $v(x)$ равны соответственно a_n и b_n, $(a_n = \lambda_n c_n)$. Тогда $a_n = b_n/\mu_n$.

Имеем

$$\Delta_1^2(n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{b_k^2}{\mu_k^2} \leqslant \frac{1}{\mu_{n+1}^2} \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k^2 \leqslant \frac{\|v\|^2}{\mu_{n+1}^2},$$

или

$$\Delta_1(n) \leqslant \frac{1}{|\mu_{n+1}|}\|v\|. \tag{16}$$

6. Рассмотрим два варианта роста λ_n и μ_n. Верхние пределы

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log|\lambda_n|}{\log n}, \quad \sigma = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log|\mu_n|}{\log n}$$

назовем порядками степенного роста последовательностей $\{\lambda_n\}$ и $\{\mu_n\}$. Если они конечны, то

$$|\lambda_n| \leqslant C_1(\varepsilon) n^{\rho+\varepsilon}, \quad |\mu_n| \leqslant C_2(\varepsilon) n^{\sigma+\varepsilon}.$$

Мы будем обозначать это в виде асимптотических соотношений $\lambda_n \asymp n^{\rho}$, $\mu_n \asymp n^{\sigma}$. Из сходимости рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2}$ следует, что $\rho > 1/2$ и $\sigma > 1/2$.

Теорема 2. *Если $u(x)$ имеет представление* (15), *а последовательности $\{\lambda_n\}$ и $\{\mu_n\}$ имеют конечные степенные порядки роста ρ и σ, то оптимальный порядок убывания уклонения $\Delta(n, \delta)$ при $\delta \to 0$ достигается при*

$$n \asymp \delta^{-\frac{1}{\rho+\sigma}}$$

и равен

$$\Delta(n(\delta), \delta) \asymp \delta^{\frac{\sigma}{\rho+\sigma}}.$$

Доказательство. Учитывая (10), (15), (13) и (16), получим

$$\Delta(n, \delta) \leqslant C_3(\varepsilon) n^{-\sigma+\varepsilon} + C_4(\varepsilon) n^{\rho+\varepsilon}\delta.$$

Зависимость $\delta = \delta(n)$, дающая наинизшую в смысле порядка величину $\Delta(n, \delta)$ получается, если порядки каждого слагаемого в правой части равны, т. е.

$$n^{-\sigma+\varepsilon} = n^{\rho+\varepsilon}\delta(n).$$

Отсюда

$$\delta(n) \asymp n^{-\rho-\sigma}, \quad n \asymp \delta^{-\frac{1}{\rho+\sigma}},$$

$$\Delta(n, \delta(n)) \asymp n^{-\sigma} \text{ или } \Delta(n(\delta), \delta) \asymp \delta^{\frac{\sigma}{\rho+\sigma}}.$$

Пример. Рассмотрим ядро

$$K(x,t)=\begin{cases}\dfrac{x(\pi-t)}{\pi} & \text{при } x<t,\\[2ex] \dfrac{t(\pi-x)}{\pi} & \text{при } x\geqslant t.\end{cases}$$

Это функция Грина краевой задачи

$$y''+\lambda y=0,\quad u(0)=u(\pi)=0.$$

Здесь $\lambda_n=n^2$, $\varphi_n(x)=\sqrt{2/\pi}\sin ut$.

Предположим, что $L(x,t)=K(x,t)$. Тогда $\mu_n=n^2$, $\rho=\sigma=2$ (степенной рост). При $n=\left[\delta^{-\frac{1}{4}}\right]$ имеем:

$$\Delta(n(\delta),\delta)\sim\sqrt{\delta}.$$

Это означает, что если правая часть уравнения задана приближенно с погрешностью δ, то беря $\widetilde{u}_n(x)$ с числом членов порядка n мы приблизим $u(x)$ с точностью порядка $\sqrt{\delta}$

7. Верхние пределы

$$\rho=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log|\lambda_n|}{n},\quad \sigma=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log|\mu_n|}{n},$$

назовем показательными порядками роста последовательностей $\{\lambda_n\}$ и $\{\mu_n\}$. Если эти порядки конечны, то асимптотически $\lambda_n\sim e^{\rho n}$, $\mu_n\sim e^{\sigma n}$.

Теорема 3. *Если $u(x)$ имеет представление* (15), *а последовательности характеристических чисел $\{\lambda_n\}$ и $\{\mu_n\}$ имеют конечные показательные порядки роста ρ и σ, то при асимптотической зависимости*

$$n\sim-\frac{1}{\sigma+\rho}\log\delta$$

имеет место асимптотическое соотношение

$$\Delta(n(\delta),\delta)\sim\delta^{\frac{\sigma}{\rho+\sigma}}.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

Пример. Рассмотрим задачу Коши для уравнения Лапласа: в области $0\leqslant x\leqslant\pi$ $0\leqslant t\leqslant H$, найти гармоническую функцию $w(x,y)$, удовлетворяющую условиям

$$w(0,t)=w(\pi,t)=0,\quad w(x,0)=f(x),\quad w'_t(x,0)=0.$$

Задачу можно было бы свести к интегральному уравнению первого рода, однако здесь проще сразу пользоваться рядами Фурье. Положим

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\sin kx.$$

Тогда

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \operatorname{ch} kt \sin kx.$$

Возьмем

$$u(x) = w(x, h) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \operatorname{ch} kh \sin kx,$$

$$v(x) = w(x, H) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \operatorname{ch} kH \sin kx, \quad (0 < h < H).$$

Здесь

$$\lambda_n = \operatorname{ch} nh, \quad \mu_n = \frac{\operatorname{ch} nH}{\operatorname{ch} nh}.$$

Асимптотически

$$\lambda_n \sim e^{nh}, \quad \mu_n = e^{n(H-h)}, \quad \rho = h, \quad \sigma = H - h.$$

Если брать $n = \left[-\frac{1}{H} \log \delta\right]$, то $\Delta(n(\delta), \delta) \sim \delta^{1-h/H}$.

Поступила 4 XI 1967 г.

Математический институт,
Свердловск, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Pogorzelski W., *Integral Equations and their Applications.* Vol. **1**, 1966, Pergamon Press, PNN—Polish Scientific Publishers, Warszawa.
2. Лаврентьев М. М., *О некоторых некорректных задачах математической физики.* Новосибирск, 1962.
3. Тихонов А. Н., *О регуляризации некорректно поставленных задач.* ДАН СССР, 1963, **153,** *1*, стр. 49—52.
4. Бакушинский А. Б., *Об одном численном методе решения интегральных уравнений I рода.* Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1965, **5,** *4*, стр. 744—749.
5. Иванов В. К., *Об интегральных уравнениях Фредгольма первого рода.* Дифференциальные уравнения, 1967, **3,** *3*, стр. 410—421.
6. — *О равномерной регуляризации неустойчивых задач.* Сибирский математический журнал, 1966, **7,** *3*, стр. 546—558.
8. Бакушинский А. Б., *Один общий прием построения регуляризующих операторов для линейного некорректного уравнения.* Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1967, **7,** *3*, стр. 672—677.

ASUPRA APLICĂRII METODEI LUI PICARD LA INTEGRAREA ECUAŢIILOR INTEGRALE DE PRIMA SPECIE

(Rezumat)

Fie (1) ecuaţia integrală în spaţiul L_2, posedînd o soluţie unică $u(x)$. Se presupune că în loc de $f(x)$, se dă o funcţie $f_\delta(x)$ astfel, încît $\|f - f_\delta\| \leqslant \delta$, $\delta > 0$. În acest caz suma lui Picard

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \tilde{c}_k \varphi_k(x), \quad c_k = \int_a^b f_\delta(x) \varphi_k(x)\, dx,$$

nu poate fi considerată drept soluție aproximativă a ecuației (1) deoarece pentru valori mari ale lui k erorile mici în determinarea lui $\tilde{c}_k$ pot crește foarte mult în urma înmulțirii prin λ_k, $(\lambda_k \to 0)$.

S-a demonstrat că, pentru unele funcții $n = n(\delta)$, sumele parțiale

$$\tilde{u}_n(x) = \sum_{k=1}^{n(\delta)} \tilde{c}_k \varphi_k(x)$$

converg către soluția exactă $u(x)$ pentru $\delta \to 0$ și pot fi, în consecință, luate drept soluții aproximative ale lui (1). Folosind unele ipoteze suplimentare referitoare la $u(x)$, s-a determinat funcția $n = n(\delta)$ care furnizează o deviație asimptotică minimă $\|u - \tilde{u}_{n(\delta)}\|$ pentru $\delta \to 0$.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

D.K. 517.941 ; 518.12

DIE GRÖBNERSCHE METHODE UND IHRE ANWENDUNG AUF DIE NUMERISCHE BAHNBERECHNUNG IN DER HIMMELSMECHANIK (III)

VON

HANS KNAPP

In was folgt wir fortsetzen unsere Ergebnisse [1], [2] die die Gröbnersche Methode betreffen bei Erhaltung aller Bezeichnungen und Definitionen. Vgl. man vor allem [4].

1. Einige Bemerkungen zur Anwendung der Methode auf das astronomische n-Körperproblem:

Die Bewegungsgleichungen für n Massenpunkte, die sich nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz anziehen, sind

$$\dot{\mathfrak{y}}_i = \mathfrak{u}_i, \quad \dot{\mathfrak{u}}_i = \sum_k{}' m_k \frac{\mathfrak{y}_k - \mathfrak{y}_i}{|\mathfrak{y}_k - \mathfrak{y}_i|^3}, \quad (i = 1,...,n). \tag{1}$$

Zu summieren ist über k, der i-te Summand ist wegzulassen, was durch den Strich am Summenzeichen angedeutet wird.

$\mathfrak{y}_i = \{x_i, y_i, z_i\}$ und $\mathfrak{u}_i = \{u_i, v_i, w_i\}$ sind Ort und Geschwindigkeit des i-ten Massenpunktes in einem Inertialsystem, m_i die Massenzahl ($= K^2 M_i$, Gravitationskonstante mal Masse), der Punkt bezeichnet, wie üblich, die Ableitung nach der Zeit t.

Vorgegeben seien die Ausgangsstell un gen und -geschwindigkeiten für den Zeitpunkt t_0

$$\mathfrak{y}_i(t_0) = \mathfrak{a}_i \text{ und } \mathfrak{u}_i(t_0) = \mathfrak{b}_i, \quad (i = 1,...,n). \tag{1}$$

Man interessiert sich für die Stellung der Massenpunkte in Abhängigkeit von der Zeit t, muss aber wegen der Notwendigkeit, die Lösungen fortsetzen zu müssen, auch die Geschwindigkeiten kennen; man hat also insgesamt $6n$ Funktionen zu bestimmen, von denen aber 10 mit Hilfe der

algebraischen Integrale eliminiert werden können[1]). Zu (1) gehört der Operator[2])

$$D = \sum_{j=1}^{n} \left[\mathfrak{u}_j \frac{\partial}{\partial \mathfrak{y}_j} + \sum_k{}' m_k \frac{\mathfrak{y}_k - \mathfrak{y}_j}{|\mathfrak{y}_k - \mathfrak{y}_j|^3} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathfrak{u}_j} \right] + \frac{\partial}{\partial t}, \tag{3}$$

den wir etwa in

$$D_1 = \sum_{j=1}^{n} \left[\mathfrak{u}_j \frac{\partial}{\partial \mathfrak{y}_j} + \mathfrak{g}_j \frac{\partial}{\partial \mathfrak{u}_j} \right] + \frac{\partial}{\partial t} \tag{4}$$

und

$$D_2 = \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_k{}' m_k \frac{\mathfrak{y}_k - \mathfrak{y}_j}{|\mathfrak{y}_k - \mathfrak{y}_j|^3} - \mathfrak{g}_j \right] \frac{\partial}{\partial \mathfrak{u}_j} \tag{5}$$

zerlegen, wo $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_n$ in mannigfacher Weise frei wählbar sind[3]). Von dieser Wahl hängt dann die Güte und die leichte Berechnenbarkeit der iterierten Funktionen ab; die Ausgangsfunktionen $\hat{\mathfrak{y}}_i$ und $\hat{\mathfrak{u}}_i$, $(i = 1, \ldots, n)$, sind nämlich die Lösungen des Systems

$$\dot{\hat{\mathfrak{y}}}_i = \hat{\mathfrak{u}}_i, \quad \dot{\hat{\mathfrak{u}}}_i = \mathfrak{g}_i, \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{5}$$

zu denselben Anfangswerten (1).

---

[1]) Der Schwerpunktssatz erlaubt insbesondere die Einführung von Relativkoordinaten, wodurch ein Orts- und ein Geschwindigkeitsvektor eliminiert werden können; Drehimpuls- und Energie-Erhaltungssatz verwendet man oft nur zu Kontrollzwecken. Auf Besonderheiten die bei speziellen Problemstellungen vorteilhaft ausgenutzt werden können und dort zu bedeutender Arbeitsersparnis führen, gehen wir hier nicht weiter ein, sondern beschränken uns auf das Prinzipielle der Methode. Selbstverständlich kann man auch in anderen Koordinatensystemen (etwa den Elementen der oskulierenden Keplerbahnen) rechnen.

[2]) Es ist dies der nach (7) [1] gebildete Operator in Vektorschreibweise.

$$\frac{\partial}{\partial \mathfrak{y}} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}, \quad \frac{\partial}{\partial \mathfrak{u}} = \left\{ \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial w} \right\}$$

sind Gradientensymbole; beispielsweise ist dann

$$\mathfrak{u} \frac{\partial}{\partial \mathfrak{y}} = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

als skalares Produkt aufzuffassen.

[3]) Entsprechend der Fussnote 7 [2] könnte man z. B.

$$\mathfrak{g}_i(t) = \sum_{\alpha=2}^{3} \frac{(t - t_0)^{\alpha-2}}{(\alpha - 2)!} [D^\alpha \mathfrak{y}_i]_{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, t_0}$$

also

$$\hat{\mathfrak{u}}_i(t) = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{(t - t_0)^{\alpha-1}}{\alpha - 1!} [D^\alpha \mathfrak{y}_i]_{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, t_0}$$

und

Wenn wir bis $m = 3$ gehen (weil dies noch wenig Schreibarbeit erfordert und doch in den meisten Fällen bei einmaligem Einsetzen schon ausreichend genaue Ergebnisse liefert!), bekommen wir bei dieser Operatorenzerlegung nach (26) [1] (ohne Restglied!) die Formeln[4])

$$(6)\qquad \begin{cases} \mathfrak{y}_i(t) = \hat{\mathfrak{y}}_i(t) + \int_{t_0}^{t} (t-\tau)\,\hat{\mathfrak{w}}_i(\tau)\,d\tau + \int_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)^3}{3!}\,\hat{\mathfrak{d}}_i(\tau)\,d\tau, \\ \mathfrak{u}_i(t) = \hat{\mathfrak{u}}_i(t) + \int_{t_0}^{t} \hat{\mathfrak{w}}_i(\tau)\,d\tau + \int_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)^2}{2!}\,\mathfrak{d}_i(\tau)\,d\tau. \end{cases}$$

$$\hat{\mathfrak{y}}_i(t) = \sum_{\alpha=0}^{3} \frac{(t-t_0)^\alpha}{\alpha!}\,[D^\alpha \mathfrak{y}_i]_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},t_0}$$

nehmen. Dabei ist

$$(e)\qquad \begin{cases} D^0\mathfrak{y}_i = \mathfrak{y}_i\,, \quad D^1\mathfrak{y}_i = \mathfrak{u}_i\,, \\ D^2\mathfrak{y}_i = \sum_k{}' m_k \frac{\mathfrak{y}_k - \mathfrak{y}_i}{|\mathfrak{y}_k - \mathfrak{y}_i|^3}\,, \\ D^3\mathfrak{y}_i = \sum_k{}' m_k \left[\frac{\mathfrak{u}_k - \mathfrak{u}_i}{|\mathfrak{y}_k - \mathfrak{y}_i|^3} - 3\,\frac{<(\mathfrak{y}_k - \mathfrak{y}_i)\,(\mathfrak{u}_k - \mathfrak{u}_i)>}{|\mathfrak{y}_k - \mathfrak{y}_i|^5}\,(\mathfrak{y}_k - \mathfrak{y}_i)\right]; \end{cases}$$

die weiteren Glieder sind schon ziemlich kompliziert gebaut!

[4]) Aus (e) (s. Fussnote 3) ensteht

$$D_2 D^0 \mathfrak{y}_i = 0,$$

$$D_2 D^1 \mathfrak{y}_i = \sum_k{}' m_k \frac{\mathfrak{y}_k - \mathfrak{y}_i}{|\mathfrak{y}_k - \mathfrak{y}_i|^3} - \mathfrak{g}_i = \mathfrak{w}_i\,,$$

$$D_2 D^2 \mathfrak{y}_i = 0,$$

$$D_2 D^3 \mathfrak{y}_i = \sum_k{}' m_k \left[\frac{\mathfrak{w}_k - \mathfrak{w}_i}{|\mathfrak{y}_k - \mathfrak{y}_i|^3} - 3\,\frac{<(\mathfrak{y}_k - \mathfrak{y}_i)\,(\mathfrak{w}_k - \mathfrak{w}_i)>}{|\mathfrak{y}_k - \mathfrak{y}_i|^5}\,(\mathfrak{y}_k - \mathfrak{y}_i)\right] = \mathfrak{d}_i.$$

Zur Abkürzung schreiben wir in den Formeln (7)

$$\hat{\mathfrak{w}}_i(\tau) = [\mathfrak{w}_i]_{\hat{\mathfrak{y}}(\tau),\,\hat{\mathfrak{u}}(\tau),\,\tau}\,, \qquad \hat{\mathfrak{d}}_i(\tau) = [\mathfrak{d}_i]_{\hat{\mathfrak{y}}(\tau),\,\hat{\mathfrak{u}}(\tau),\,\tau}\,.$$

Wie bisher immer, bedeuten auch diesmal die nach den eckigen Klammern stehenden Zeichen, dass in die Formeln für $\mathfrak{w}_i$ bzw. $\mathfrak{d}_i$ anstelle der Variablen $\mathfrak{y}_1,\ldots,\mathfrak{y}_n$, $\mathfrak{u}_1,\ldots,\mathfrak{u}_n$, t die Funktionen $\hat{\mathfrak{y}}_1(\tau),\ldots,\hat{\mathfrak{y}}_n(\tau)$, $\hat{\mathfrak{u}}_1(\tau),\ldots,\hat{\mathfrak{u}}_n(\tau)$, τ einzusetzen sind. ($\mathfrak{u}_1,\ldots,\mathfrak{u}_n$, t treten zwar oben nicht explizit auf, aber es könnten ja die Funktionen $\mathfrak{g}_i$ so gewählt worden sein, dass sie von diesen Variablen abhängen).

Bei geeignet gewählter Schrittweite $t - t_0 = \Delta t$ erhalten wir daraus im Rahmen der vorgesehenen Genauigkeit die Anfangswerte $\mathfrak{y}_k(t_0 + \Delta t)$ und $\mathfrak{u}_k(t_0 + \Delta t)$, $(k = 1,...,n)$, für den nächsten Rechenschritt. Fehler, die dabei entstehen, können wir unter Kontrolle halten. Die Methode gestattet eine beliebige Änderung der Schrittweite, die per Programm sinnvoll gesteuert werden kann, sodass sie insbesondere den sehr unterschiedlichen Situationen bei der Berechnung einer Raumschiffbahn gerecht werden kann. Irgendwelche Zusatzglieder in den Differentialgleichungen, welche etwa die Abplattung der Körper, die Luftreibung udgl. berücksichtigen sollen, können nach demselben Formalismus mitintegriert werden.

Proberechnungen, vor allem an einem einfachen Beispiel eines Dreikörperproblems, haben bei geringem Aufwand sehr gute Resultate geliefert; bei Vergleichen mit anderen Methoden zur numerischen Integration von Differentialgleichungen hat Gröbners Verfahren bisher gut abgeschnitten, insbesondere dürfte noch manches nützliche Ergebnis zu erwarten sein, wenn man die Formeln dazu verwendet, schon vorhandene grobe Tabellen einer Funktion (deren Differentialgleichung man kennt) zu verbessern!

Eingegangen am 26 X 1966

Universität Innsbruck, Österreich

LITERATURVERZEICHNIS

1. Knapp H., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1967, **XIII (XVII)**, *3–4*, pp. 129–134.
2. — Bul. Inst. polit. Iaşi, 1968, **XIV (XVIII)**, *1–2*, pp. 97—105.
3. Gröbner W., *Die Lie-Reihen und ihre Anwendungen*. Berlin, Akad. Verlag, 1960.
4. Knapp H., Mh. f. Math., 1964, **68**, S. 1.
5. Gröbner W., Knapp H., *Contributions to the Method of Lie Series*. Institute of Mathematics. University of Innsbruck. Hochschulskripten 802/802 a, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1967.

METODA LUI GRÖBNER ŞI APLICAŢIILE EI LA CALCULUL NUMERIC AL ORBITELOR ÎN MECANICA CEREASCĂ (III)

(Rezumat)

Se expune adaptarea metodei lui Gröbner [5] la calculul numeric al orbitelor în mecanica cerească.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

D. K. 517.512

ÜBER DIE ORDNUNG DER APPROXIMATION DURCH DIE FOLGE DER OPERATOREN VON MEYER-KÖNIG UND ZELLER UND DURCH DIE FOLGE DEREN ERSTER ABLEITUNGEN

VON

MANFRED MÜLLER

1. Einleitung

Es seien $C[0,1]$ bzw. $C^{(k)}[0,1]$, $(k=1,2,...)$, die Räume derjenigen komplexwertigen Funktionen f, die auf dem reellen Intervall $[0,1]$ definiert und stetig bzw. k-fach stetig differenzierbar sind und die mit der üblichen uniformen Norm $\|f\| := \max_{0\leqslant x\leqslant 1} |f(x)|$ versehen sind. Der n-te Operator M_n, $(n=1,2,...)$, von Meyer-König und Zeller [5] ... [8] ordnet bekanntlich einer Funktion $f \in C[0,1]$ formal die n-te Bernsteinsche Potenzreihe

$$(1) \qquad (M_n f)(x) = (1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+n}{k} x^k f\left(\frac{k}{k+n}\right) := \sum_{k=0}^{\infty} m_{nk}(x) f\left(\frac{k}{k+n}\right), \quad (0 \leqslant x < 1),$$

mit dem positiven Gewicht $m_{kn}(x)$ zu. Durch

$$(2) \qquad (M_n f)(1) := f(1), \quad (n=1,2,...),$$

lässt sich die Funktion $M_n f$ stetig in den Punkt $x=1$ hinein fortsetzen [6, Hifssatz 3]. Für $n=2,3,...$ besitzt das M_n-Bild einer Funktion $f \in C^{(1)}[0,1]$ die Ableitung (Lupaş [4, Gl. (7)])

$$(3) \qquad (M_n f)'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} m_{n-1,k}(x) f'(\vartheta_{n,k}), \quad \left(\frac{k}{k+n} < \vartheta_{n,k} < \frac{k+1}{k+n+1} \; ; \; 0 \leqslant x < 1\right),$$

die man durch die naheliegende Festsetzung [8, Gl. (4)]

$$(4) \qquad (M_n f)'(1) := f'(1), \quad (n=2,3,...),$$

ebenfalls bis in die Stelle $x=1$ hinein stetig fortsetzen kann. Die durch $(M_n' f)(x) := (M_n f)'(x)$. $(n=2,3,...)$, erklärten linearen positiven Operatoren M_n' nennen wir die *ersten Ableitungen der M_n-Operatoren.*

Wir knüpfen in dieser Arbeit an die beiden folgenden Ergebnisse über die (globale) Approximationsordnung von Funktionen $f \in C[0,1]$ bzw. $C^{(1)}[0,1]$ durch die Folge $\{M_n\}$ an (Lupaş und Müller [5, Nr. 2]):

(I) *Ist* $f \in C[0,1]$ *und* $\omega(f,\delta)$ *der Stetigkeitsmodul von* f, *so gilt*

$$\| M_n f - f \| \leq 1{,}(148)\, \omega\left(f, \frac{1}{\sqrt{n-1}}\right), \quad (n = 2, 3, \ldots),$$

(Satz von Popoviciu für M_n-Operatoren).

(II) *Ist* $f \in C^{(1)}[0,1]$ *und* $\omega(f',\delta)$ *der Stetigkeitsmodul von* f', *so gilt*

$$\| M_n f - f \| \leq \frac{2(2+\sqrt{3})}{27\sqrt{n-1}}\, \omega\left(f', \frac{1}{\sqrt{n-1}}\right), \quad (n = 2, 3, \ldots),$$

(Satz von Lorentz für M_n-Operatoren).

Eine Aussage über die Güte dieser Abschätzungen macht

Satz 1.1. (a) *Die in* (I) *bzw.* (II) *gegebenen Approximationsordnungen sind bestmöglich, d. h. es gibt Funktionen* $f \in C[0,1]$ *bzw.* $C^{(1)}[0,1]$, *für die der jeweilige Stetigkeitsmodul nicht durch eine Funktion von n ersetzt werden kann, die mit* $n \to \infty$ *schneller gegen Null konvergiert.* (b) *In* (I) *lässt sich das Infimum* K_1 *aller Konstanten* $C > 0$ *mit*

$$\| M_n f - f \| \leq C\, \omega\left(f, \frac{1}{\sqrt{n-1}}\right), \quad (n = 2,3,\ldots;\ f \in C[0,1]), \tag{5}$$

einschränken durch

$$1 \leq K_1 \leq \frac{31}{27} = 1{,}(148). \tag{6}$$

Der Beweis dieses Satzes (§ 3) stützt sich in wesentlichen Punkten auf eine asymptotische Abschätzung der Gewichte $m_{nk}(x)$, die zuvor in § 2 durchgeführt wird. In § 4 leiten wir dann die Sätze von Popoviciu bzw. Lorentz für M_n-Operatoren her und zeigen wieder mit Hilfe der asymptotischen Abschätzung der Gewichte in § 2, dass die gefundenen Approximationsordnungen im Sinne von Satz 1.1 bestmöglich sind.

2. Einige asymptotische Abschätzungen

Das Gewicht $m_{nk}(x)$ hat für festes $0 < x < 1$ und festes n sein Maximum an der Stelle $k = nx(1-x)^{-1}$. Sein asymptotisches Verhalten in der Umgebung dieser Maximumstelle wird beschrieben durch

Hilfssatz 2.1. *Für festes* $0 < x < 1$ *und* $\alpha < 1/3$ *gilt*

$$m_{nk}(x) \cong \frac{1-x}{\sqrt{2\pi n x}} \exp\left[-\frac{n}{2x(1-x)^2}\left(\frac{k}{k+n} - x\right)^2\right]$$

gleichmässig jür diejenigen Werte von k, *die der Menge*

$$M := \left\{k : k = 0,1,\ldots, \left| k - \frac{nx}{1-x} \right| \leq n^{1-\alpha}\right\}$$

angehören.

Beweis. Aus $k(k+n)^{-1} \cong x$ für $k \in M$ und der Stirlingschen Formel folgt zunächst

$$m_{nk}(x) \cong \frac{1-x}{\sqrt{2\pi n x}}\left[\frac{(k+n)x}{k}\right]^k\left[\frac{(k+n)(1-x)}{n}\right]^n H_{nk} := \frac{1-x}{\sqrt{2\pi n x}} W H_{nk},$$

mit $\lim_{n\to\infty} H_{nk} = 1$ gleichmässig in $k \in M$. Der Logarithmus von W^{-1} lässt sich leicht umformen in

$$-\log W = \frac{nx}{1-x}\cdot\frac{1+x^{-1}[k/(k+n)-x]}{1-(1-x)^{-1}[k/(k+n)-x]}\log\left[1+\frac{1}{x}\left(\frac{k}{k+n}-x\right)\right]+$$

$$+n\log\left[1-\frac{1}{1-x}\left(\frac{k}{k+n}-x\right)\right].$$

Wir gehen von hier ab wie Lorenz [3, S. 16 ff.] vor und erhalten — in den Bezeichnungen seines Beweises — nach längeren aber elementaren Rechnungen das Zwischenresultat

$$-\log W = \frac{1}{2x(1-x)^2}\cdot\frac{n[k/(k+n)-x]^2}{1-(1-x)^{-1}[k/(k+n)-x]}+$$

$$+\frac{n[k/(k+n)-x]^2}{(1-x)\{1-(1-x)^{-1}[k/(k+n)-x]\}}\left\{\frac{1}{x}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\rho-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{2x}\left(\frac{k}{k+n}-x\right)\rho\right]+\frac{1}{1-x}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\rho_1+\frac{1}{2(1-x)}\left(\frac{k}{k+n}-x\right)\rho_1\right]\right\} := S_1+S_2.$$

Wie im Lorentzschen Beweis zeigt man leicht, dass S_2 gleichmässig für $k \in M$ gegen Null konvergiert. Wegen $k \in M$ impliziert $(k+n)/n \cong 1/(1-x)$ gilt für diese Werte von k andererseits

$$S_1 \cong \frac{n[k/(k+n)-x]^2}{2x(1-x)^2}.$$

Für Summen der Bauart

$$S_{\delta_n}(x) = \sum_{\left|\frac{k}{k+n}-x\right| \leqq \delta n} m_{nk}(x), \quad (0<x<1,\ \delta_n = n^{-\alpha},\ \alpha > 1/3,\ n\delta_n \to \infty),$$

liefert die Methode von Lorentz den asymptotischen Ausdruck

$$S_{\delta_n}(x) \cong \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{D_n} e^{-v^2}\,dv,\quad D_n = \sqrt{\frac{n}{2x}}\cdot\frac{\delta_n}{1-x},\quad (0<x<1). \tag{7}$$

Folgerungen:

(8) $$\lim_{n\to\infty} S_{\delta_n}(x) = 0 \quad \text{falls } \delta_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),\ (n \to \infty),$$

(9) $$\lim_{n\to\infty} S_{\delta_n}(x) = 1 \quad \text{falls } \sqrt{n}\,\delta_n \to \infty.$$

Bemerkung. Leviatan weist in zwei limitierungstheoretischen Arbeiten [1], [2] ohne Beweis darauf hin, dass sich das Theorem 1.9.1 im Buch von Lorentz [3] — und damit indirekt auch die Folgerungen aus den asymptotischen Abschätzungen in Theorem 1.5.2 — auf Bernsteinsche Potenzreihen bzw. deren Gewichte übertragen lassen.

3. Beweis von Satz 1.1

Wir betrachten die auf $[0, 1]$ stetige Funktion $f(x) = |x - x_0|^\alpha$, $(0 < x_0 < 1$, $0 < \alpha \leqslant 1)$. Es gilt $\omega(f, \delta) = \delta^\alpha$, und aus (I) folgt somit

$$\| M_n f - f \| \leqslant \frac{31}{27}(n-1)^{-\alpha/2},\ (n = 2, 3, \ldots).$$

Andererseits ist aber auf Grund von (7) mit $\delta_n = (n-1)^{-1/2}$

$$\| M_n f - f \| \geqslant |(M_n f)(x_0) - f(x_0)| = (M_n f)(x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} m_{nk}(x_0) \left| \frac{k}{k+n} - x_0 \right|^\alpha \geqslant$$

$$\geqslant (n-1)^{-\alpha/2} \sum_{\left|\frac{k}{k+n} - x_0\right| \geqslant (n-1)^{-1/2}} m_{nk}(x_0) \geqslant (n-1)^{-\alpha/2}[1 - S_{\delta_n}(x_0)] \cong C(n-1)^{-\alpha/2},$$

$(0 < C < 1$ — eine geeignete Konstante).

Ganz entsprechende Abschätzungen für die Funktion $f(x) = (x - x_0)^2$ aus $C^{(1)}[0, 1]$ mit $\omega(f', \delta = 2\delta$ zeigen, dass auch (II) die bestmögliche Approximationsordnung von Funktionen $f \in C^{(1)}[0, 1]$ durch M_n-Operatoren angibt. Damit ist Teil (a) von Satz 1.1 bewiesen. Zum Beweis von Teil (b) betrachten wir die Folge $\{f_n\}$ von Funktionen aus $C[0, 1]$, deren n-tes Element, $(n = 2, 3, \ldots)$, den nebengezeichneten Graph (Abb. 1) besitzt $(0 < x_0 < 1)$. Wir zeigen, dass es zu jedem $C < 1$ in (5) ein Folgenelement f_n gibt, für das

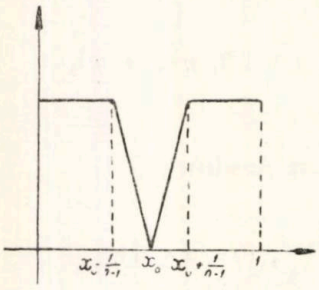


Abb. 1

$$\| M_n f_n - f_n \| > C\omega\left(f_n, \frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)$$

ist. Von einem genügend grossen n ab gilt $\omega(f_n, (n-1)^{-1/2}) = 1$ und auf Grund von (8) ist

$$\| M_n f_n - f_n \| \geqslant | (M_n f_n)(x_0) - f_n(x_0) | = (M_n f_n)(x_0) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} m_{nk}(x_0) f_n\left(\frac{k}{k+n}\right) \geqslant \sum_{\left|\frac{k}{k+n} - x_0\right| \geqslant \frac{1}{n-1}} m_{nk}(x_0) \geqslant 1 - S_{\frac{1}{n-1}}(x_0) \to 1, (n \to \infty) .$$

4. Die Approximationsordnung der M_n'-Operatoren

Die Approximationsaussage „$\|M_n' f - f'\| = O(1)$, $(n \to \infty)$, für jede Funktion $f \in C^{(1)}[0, 1]$“ (Müller [8, Satz 1]) ist als Spezialfall enthalten in

Satz 4.1. *Ist* $f \in C^{(1)}[0, 1]$ *und* $\omega(f', \delta)$ *der Stetigkeitsmodul von* f', *dann gilt*

$$\| M_n' f - f' \| \leqslant \varphi(n)\, \omega\left(f', \frac{1}{\sqrt{n-2}}\right), \quad (n = 3, 4, \ldots)$$

mit

$$\varphi(n) = 1 + \frac{2}{3\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{n-2}}{n} \leqslant 1{,}7384,$$

(Satz von Popoviciu für M_n'-Operatoren).

Korollar 4.2. *Die Approximationsordnung einer Funktion* $f \in C^{(1)}[0, 1]$ *mit* $f' \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $(0 < \alpha \leqslant 1)$, *durch die Folge der* M_n'*-Operatoren ist höchstens gleich* $n^{-\alpha/2}$.

Beweis zu Satz 4.1. Für $0 \leqslant x < 1$ lässt sich $|(M_n' f)(x) - f'(x)|$ nach der Methode von Popoviciu durch den Stetigkeitsmodul von f' abschätzen ([3, Theorem 1.6.1], vgl. auch Stancu [9] und Lupaş und Müller [5]). Man muss dabei nur die Beziehungen

$$(10) \quad (M_{n-1} 1)(x) = 1, \ (M_{n-1} t)(x) = x, \ (M_{n-1} t^2)(x) \leqslant \frac{x(1-x)^2}{n-2} = \frac{4}{27(n-2)} ,$$

$(n = 3, 4, \ldots)$, aus [5], sowie die Zerlegung

$$(11) \quad \vartheta_{n,k} - x = \left(\vartheta_{n,k} - \frac{k}{k+n-1}\right) + \left(\frac{k}{k+n-1} - x\right), \left|\vartheta_{n,k} - \frac{k}{k+n-1}\right| \leqslant \frac{1}{n} ,$$

verwenden und ausserdem beachten, dass auf Grund der Festsetzung (4) $(M_n' f)(1) - f'(1) = 0$ ist.

Im Raum $C^{(2)}[0, 1]$ verbessert sich die Approximationsordnung durch M_n'-Operatoren ganz wesentlich. Dies zeigt der folgende

Satz 4.3. Ist $f \in C^{(2)}[0, 1]$ *und* $\omega(f'', \delta)$ *der Stetigkeitsmodul von* f'', *dann gilt für* $n = 3, 4, \ldots$

$$\| M_n' f - f' \| \leqslant [1 + \psi(n)]\, \psi(n) \frac{1}{\sqrt{n-2}}\, \omega\left(f'', \frac{1}{\sqrt{n-2}}\right) + \frac{\| f'' \|}{n}$$

mit

$$\psi(n) = \frac{2\sqrt{3}}{9} + \frac{\sqrt{n-2}}{n} \leqslant 0{,}73843,$$

(Satz von Lorentz für M_n'-Operatoren).

Korollar 4.4. *Die Approximationsordnung einer Funktion $f \in C^{(2)}[0, 1]$ mit $f'' \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $(0 < \alpha \leqslant 1)$, durch die Folge der M_n'-Operatoren ist höchstens gleich $n^{(1+\alpha)/2}$.*

Beweis zu Satz 4.3. Sei $n \geqslant 3$ fest. Für festes $0 \leqslant x < 1$ gilt

$$f'(\vartheta_{n,k}) - f'(x) = (\vartheta_{n,k} - x)\, f''(x) + (\vartheta_{n,k} - x)\, [f''(\eta_{n,k}) - f''(x)]$$

mit $\min(\vartheta_{n,k}, x) < \eta_{n,k} < \max(\vartheta_{n,k}, x)$, und hieraus folgt

$$|(M_n' f)(x) - f'(x)| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} m_{n-1\,k}(x)\, (f'(\vartheta_{n,k}) - f'(x)) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \| f'' \| \cdot \left| \sum_{k=0}^{\infty} m_{n-1,k}(x)(\vartheta_{n,k} - x) \right| +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} m_{n-1,k}(x)\, |\vartheta_{n,k} - x| \cdot |f''(\eta_{n,k}) - f''(x)| := S_1 + S_2.$$

Auf Grund von (10) und (11) ist $S_1 = n^{-1} \| f'' \|$. Der Summand S_2 wird unter Verwendung der Definition des Stetigkeitsmoduls $\omega(f'', \delta)$, der Ungleichung

$$|\eta_{n,k} - x| < |\vartheta_{n,k} - x| \leqslant \left| \frac{k}{k+n-1} - x \right| + \frac{1}{n}$$

und der Schwartzschen Ungleichung in üblicher Weise abgeschätzt (vgl. Stancu [10]). Es ergibt sich

$$S_2 \leqslant \left[\left(1 + \frac{2}{n\delta}\right) \frac{2}{3\sqrt{3}\sqrt{n-2}} + \frac{4}{27(n-2)\,\delta} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2 \delta} \right] \omega(f'', \delta),$$

woraus dann schliesslich unsere Behauptung folgt, wenn wir noch die Festsetzung (4) beachten und $\delta = (n-2)^{-1/2}$ setzen.

Unser letzter Satz macht wieder eine Aussage über die Güte der obigen Abschätzungen (vgl. Satz 1.1).

Satz 4.5 (a) *Die in Satz* 4.1 *bzw. Satz* 4.3 *gegebenen Approximationsordnungen sind bestmöglich im Sinne von Satz* 1.1. (b) *In Satz* 4.1 *lässt sich das Infimum K_2 aller Konstanten $C > 0$ mit*

(12) $$\| M_n' f - f' \| \leqslant C\,\omega\left(f', \frac{1}{\sqrt{n-2}}\right), \quad (n = 3, 4, \ldots; f \in C^{(1)}[0, 1]),$$

einschränken durch

$$1 \leqslant K_2 \leqslant 1{,}7384.$$

Beweis. (a) Wir betrachten die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}(x - x_0)\,|x - x_0|$ aus $C^{(1)}[0, 1]$, $(0 < x_0 < 1)$. Wegen $f'(x) = |x - x_0|$ gilt $\omega(f', \delta) = \delta$, und aus Satz 4.1 folgt somit

$$\| M_n' f - f' \| = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad (n \to \infty).$$

Für $k \in I_n := \left\{k : k = 0, 1, \ldots, \left|\frac{k}{k+n} - x_0\right| > \frac{1}{\sqrt{n-2}}\right\}$ gilt

$$\left|\vartheta_{n,k} - x_0\right| \geqslant \left|\frac{k}{k+n} - x_0\right| - \frac{1}{n-2}, \quad (n = 3, 4, \ldots,),$$

und wir erhalten dann bei Verwendung von (7) mit $\delta_n = (n-2)^{-1/2}$ und per einfachen Abschätzung

$$\frac{n}{k+n} \leqslant 1 - x_0 + \delta_n \text{ für } \left|\frac{k}{k+n} - x_0\right| \leqslant \delta_n,$$

$$\| M_n' f - f' \| \geqslant (M_n' f)(x_0) \geqslant \sum_{I_n} m_{n-1,k}(x_0)\,|\vartheta_{n,k} - x_0| >$$

$$> \frac{1}{\sqrt{n-2}} \sum_{I_n} m_{n-1,k}(x_0) - \frac{1}{n-2} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n-2}} \left\{1 - \sum_{\left|\frac{k}{k+n} - x_0\right| \leqslant \delta_n} m_{nk}(x_0) \left[1 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{(1-x_0)\sqrt{n-2}}\right]\right\} - \frac{1}{n-2} = \frac{1}{\sqrt{n-2}}\left[1 - S_{\delta_n}(x_0) - \frac{2 - x_0}{(1 - x_0)\sqrt{n-2}}\right] \cong$$

$$\cong \frac{1}{\sqrt{n}}\left[1 - C - \frac{2 - x_0}{(1 - x_0)\sqrt{n}}\right] = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad (n \to \infty).$$

Bei Satz 4.3 schliessen wir ganz analog mit der Funktion $f(x) = \frac{1}{6}(x - x_0)^2\,|x - x_0| \in C^{(2)}[0, 1]$, $(0 < x_0 < 1)$. Zum Beweis von Teil (b) betrachten wir eine Folge $\{g_n\}$, $(n = 3, 4, \ldots)$, von Funktionen aus $C^{(1)}[0, 1]$, deren erste Ableitungen g_n' mit den Funktionen f_n im Beweis von Satz 1.1 (Abb. 1) übereinstimmen. Von einem genügend grossen n ab ist $\omega(g_n', (n-2)^{-1/2}) = 1$ und $[x_0 - 2(n-2)^{-1}, x_0 + 2(n-2)^{-1}] \subset [0, 1]$. Für alle

$$k \in I_n := \left\{k : k = 0, 1, \ldots, \left|\frac{k}{k+n} - x_0\right| \geqslant \frac{2}{n-2}\right\}$$

gilt offensichtlich $|\vartheta_{n,k} - x_0| \geqslant (n-2)^{-1}$, und wir erhalten dann unter Verwendung von (13)

$$\|M_n' g_n - g_n'\| \geqslant (M_n' g_n) = \sum_{k=0}^{\infty} m_{n-1,k}(x_0) f_n(\vartheta_{n,k}) =$$

$$= \sum_{I_n} m_{n-1,k}(x_0) \geqslant 1 - \sum_{\left|\frac{k}{k+n} - x_0\right| \leqslant \frac{2}{n-2}} m_{nk}(x_0) \left[1 - \frac{2}{(1-x_0)(n-2)}\right] \geqslant$$

$$\geqslant 1 - S_{\frac{2}{n-2}}(x_0) - \frac{2}{(1-x_0)(n-2)} \longrightarrow 1, \quad (n \to \infty),$$

wegen Folgerung (8). Für jede Konstante $C < 1$ existiert also eine Funktion $g_n \in C^{(1)}[0, 1]$, für welche dann (12) nicht erfüllt ist.

Eingegangen am 17. IV 1968

Universität Stuttgart,
Bundesrepublik Deutschland

LITERATURVERZEICHNIS

1. Leviatan D., *Tauberian Constants for Quasi-Hausdorff and $(S^{\star}, \mu)$ Transformations.* Quart. J. Math., (unter Druck).
2. — *Some Tauberian Theorems for Quasi-Hausdorff Transforms.* Math. Ztschr., (unter Druck).
3. Lorentz G. G., *Bernstein Polynomials.* University of Toronto Press, Toronto, 1953.
4. Lupaş A., *Some Properties of the Linear Positive Operators* (I). Mathematica (Cluj), 1967, **9** (**32**), pp. 77–83.
5. Lupaş A., Müller M., *Approximation Properties of the Meyer-König and Zeller Operators.* Arch. for rat. Mech. Analysis, (unter Druck).
6. Meyer-König W., Zeller K., *Bernsteinsche Potenzreihen.* Studia Mathematica, 1960, **19**, S. 89–94.
7. Müller M., *Von links schräge Approximation durch Bernsteinsche Potenzreihen.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1968, **14** (**18**), *1–2*, pp. 89–92.
8. — *Gleichmässige Approximation durch die Folge der ersten Ableitungen der Operatoren von Meyer-König und Zeller.* Mathem. Ztschr., (unter Druck).
9. Stancu D. D., *Sur l'approximation des dérivées des fonctions par les dérivées correspondantes de certains polynômes du type Bernstein.* Mathematica (Cluj), 1960, **2** (**25**), pp. 335–348,
10. — *Generalizations of an Inequality of G. G. Lorentz.* An. şt. Univ, „Al. I. Cuza", Iaşi, s. I, 1963, **9**, pp. 49–58

ASUPRA APROXIMĂRII PRIN ŞIRUL DE OPERATORI AL LUI MEYER-KÖNIG ŞI ZELLER ŞI PRIN ŞIRUL DERIVATELOR LOR DE PRIMUL ORDIN

(Rezumat)

Se stabilesc cîteva teoreme referitoare la aproximarea prin şirul de operatori al lui Meyer-König şi Zeller şi prin şirul derivatelor lor de primul ordin.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

C.D. 513.821

SURFACES ET VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES TRANSFORMÉES RATIONNELLES DE LA SURFACE DE STEINER

PAR

LUCIEN GODEAUX

1. La surface de Steiner, du quatrième ordre, d'équation

$$x_0 x_1 x_2 x_3 = x_2^2 x_3^2 + x_3^2 x_4^2 + x_1^2 x_2^2,$$

passe doublement par les droites $x_2 = x_3 = 0$, $x_3 = x_1 = 0$, $x_1 x_2 = 0$, et triplement par le point (1, 0, 0, 0). Nous avons montré que si l'on remplace dans cette équation les coordonnées courantes par des formes du second degré en x_0, x_1, x_2, x_3, on obtient une surface d'ordre huit, de genres $p_a = p_g = 3$, $p^{(1)} = 9$ [1]. Si l'on remplace les coordonnées courantes par des formes du second degré en x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, on obtient, dans l'espace à quatre dimensions, une variété algébrique d'ordre huit, dépourvue de surface canonique mais possédant une surface bicanonique d'ordre zéro [2], [3]. Il s'agit en somme de transformées rationnelles de la surface de Steiner.

Le procédé pour étudier ces variétés est simple ; elles représentent des involutions du second ordre appartenant à l'intersection complète de quatre hyperquadriques d'un espace à six ou à sept dimensions.

La surface de Steiner a comme cas particuliers la surface où deux des droites doubles sont infiniment voisines et la surface où les trois droites doubles sont infiniment voisines successives de l'une d'entre elles[1]). Ces surfaces ont respectivement comme équations

$$x_0 x_1^2 x_3 = x_1^4 + x_2^2 x_3^2, \quad x_0 x_3^3 = (x_2^2 - x_1 x_3)^2.$$

Le but de cette Note est d'étudier les transformées rationnelles des surfaces précédentes. Il est à prévoir que les caractères resteront les mêmes

---

[1]) Nous avons signalé l'existence de ces surfaces dans [4] et nous les avons étudié dans [5].

que dans le cas général, mais il nous a semblé nécessaire d'en donner une démonstration.

2. Nous aurons à utiliser au cours du travail des propriétés des invos lutions cycliques appartenant à une surface algébrique. Nous renverron- pour ces propriétés à notre ouvrage sur ces questions [6].

3. Considérons dans un espace S_6 à six dimensions un plan (y) et un espace (x) à trois dimensions ne se rencontrant pas et une homographie H d'équations

$$\frac{x_0'}{x_0} = \frac{x_1'}{x_1} = \frac{x_2'}{x_2} = \frac{x_3'}{x_3} = \frac{y_0'}{-y_0} = \frac{y_1'}{-y_1} = \frac{y_2'}{-y_2}.$$

La surface F, d'équations

$$y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 = \varphi_0, \quad y_1 y_2 = \varphi_1, \quad y_2 y_0 = \varphi_2, \quad y_0 y_1 = \varphi_3,$$

où φ_0, φ_1, φ_2, φ_3 sont des formes quadratiques linéairement indépendantes en x_0, x_1, x_2, x_3, est d'ordre 16 et transformée en elle-même par l'homographie H. Sur cette surface l'homographie ci-dessus engendre une involution I du second ordre, privée de points unis. Rappelons que le système canonique de F coïncide avec le système de ses sections hyperplanes. Une image de cette involution s'obtient en projetant F de l'espace (y) sur l'espace (x). On obtient l'équation

$$\varphi_0 \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 = \varphi_2^2 \varphi_3^2 + \varphi_3^2 \varphi_1^2 + \varphi_1^2 \varphi_2^2,$$

transformée rationnelle de la surface de Steiner.

4. Envisageons quelques cas particuliers.

Supposons que la surface F ait pour équations

$$y_1^2 + y_2^2 = \varphi_0, \quad y_0 y_2 = \varphi_1, \quad y_1 y_2 = \varphi_2, \quad y_0^2 = \varphi_3.$$

L'image de l'involution engendrée sur cette surface par l'homographie H est

$$\varphi_0 \varphi_1^2 \varphi_3 = \varphi_1^4 + \varphi_2^2 \varphi_3^2. \tag{1}$$

Appelons Γ_1, Γ_2, Γ_3 les biquadratiques d'équations respectivement

$$\varphi_2 = \varphi_3 = 0, \quad \varphi_3 = \varphi_1 = 0, \quad \varphi_1 = \varphi_2 = 0.$$

Elles ont en commun huit points A $(A_1, A_2, \ldots, A_8)$.

La surface (1) passe doublement par les biquadratiques $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$, et triplement par les points A. De plus, elles coupent la quadrique $\varphi_3 = 0$ suivant une biquadratique infiniment voisine de Γ_2, que nous désignerons par Γ_2'.

La surface (1) est d'ordre huit et ses adjointes, d'ordre quatre, doivent passer par les biquadratiques Γ_2, Γ_3, Γ_2'. D'après la théorie des involutions,

les courbes canoniques de la surface (1) correspondent aux sections de F par les hyperplans passant par l'espace (x). Ces sections sont de genre 17 et par conséquent les courbes canoniques de la surface (1) sont de genre 9.

Les adjointes à la surface (1) ont pour équation

$$\lambda_0 \varphi_1 \varphi_3 + \lambda_1 \varphi_2 \varphi_3 + \lambda_2 \varphi_1^2 = 0 ;$$

elles passent doublement par les points A.

La surface (1) a le genre géométrique $p_g = 3$. Elle est régulière comme la surface F et ses genres sont donc $p_a = p_g = 3$, $p^{(1)} = 9$.

Comme cette surface représente une involution d'ordre 2 privée de points unis, le diviseur de Severi est $\sigma = 2$.

5. Supposons maintenant que la surface F ait pour équations

$$y_1^2 = \varphi_0 , \quad y_2^2 - y_0 y_1 = \varphi_1 , \quad y_0 y_2 = \varphi_2 , \quad y_0^2 = \varphi_3 .$$

Cette surface est transformée en elle-même par H et l'involution d'ordre deux engendrée par cette homographie est privée de points unis et a pour image la surface d'équation

$$\varphi_0 \varphi_3^3 = (\varphi_2^2 - \varphi_1 \varphi_3)^2 . \tag{2}$$

Cette surface passe deux fois par la biquadratique Γ_1 $(\varphi_2 = \varphi_3 = 0)$ et trois fois par les huit points A $(\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0)$.

La surface $\varphi_2^2 - \varphi_1 \varphi_3 = 0$ coupe la surface (2) suivant la biquadratique Γ_1 et suivant deux biquadratiques infiniment voisines successives de Γ_1, que nous désignerons par Γ_1', Γ_1''. Notons que la biquadratique Γ_1' est infiniment voisine de Γ_1 sur la quadrique $\varphi_2 = 0$.

Les adjointes à la surface (2) sont des surfaces du quatrième ordre qui doivent passer par les courbes Γ_1, Γ_1', Γ_1''. Elles ont pour équation

$$\lambda (\varphi_2^2 - \varphi_1 \varphi_3) + \lambda_1 \varphi_2 \varphi_3 + \lambda_2 \varphi_3^2 = 0 ;$$

elles passent doublement par les huit points A.

On en conclut, comme plus haut, que la surface (2) a les genres $p_a = p_g = 3$, $p^{(1)} = 9$, et que son diviseur de Severi est $\sigma = 2$.

6. Passons maintenant aux variétés à trois dimensions. Considérons, dans un espace S_7 à sept dimensions, un plan (y) et un espace (x) à quatre dimensions ne se rencontrant pas. L'homographie H est maintenant

$$\frac{x_0'}{x_0} = \frac{x_1'}{x_1} = \frac{x_2'}{x_2} = \frac{x_3'}{x_3} = \frac{x_4'}{x_4} = \frac{y_0'}{-y_0} = \frac{y_1'}{-y_1} = \frac{y_2'}{-y_2} .$$

La variété V à trois dimensions, d'équations

$$y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 = \varphi_0 , \; y_1 y_2 = \varphi_1 , \; y_2 y_0 = \varphi_2 , \; y_0 y_1 = \varphi_3 ,$$

où les φ sont des formes quadratiques en $x_0 , x_1 , x_2 , x_3 , x_4$, est transformée en elle-même par H et cette homographie engendre sur la surface une involution du second ordre, I, possédant seize points unis, intersections de la variété V avec l'espace (x).

Observons que les sections hyperplanes F de V sont des surfaces dont le système canonique est le système des sections hyperplanes. On en conclut que le système $|F|$ est son propre adjoint et que la variété V possède donc une surface canonique et des surfaces pluricanoniques d'ordre zéro.

L'involution I a pour image la variété du huitième ordre

$$\varphi_0 \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 = \varphi_2^2 \varphi_3^2 + \varphi_3^2 \varphi_1^2 + \varphi_1^2 \varphi_2^2 ,$$

qui est dépourvue de surface canonique et possède une surface bicanonique d'ordre zéro.

7. Examinons les cas particuliers ci-dessous.

Supposons en premier lieu que la variété V ait pour équations

$$y_1^2 + y_2^2 = \varphi_0 , \; y_0 y_2 = \varphi_1 , \; y_1 y_2 = \varphi_2 , \; y_0^2 = \varphi_3 .$$

Elle est transformée en elle-même par H et l'involution déterminée a pour image la variété du huitième ordre de S_4 d'équation

$$\varphi_0 \varphi_1^2 \varphi_3 = \varphi_1^4 + \varphi_2^2 \varphi_3^2 . \tag{3}$$

Le système canonique éventuel de cette variété est découpé par les hypersurfaces cubiques adjointes. Observons que la variété (3) possède : a) deux surfaces doubles du quatrième ordre $\Phi_2 (\varphi_3 = \varphi_1 = 0)$ et $\Phi_3 (\varphi_1 = \varphi_2 = 0)$; b) une surface double du quatrième ordre infiniment voisine de Φ_2 sur $\varphi_3 = 0$ (nous la désignerons par Φ_2') ; c) une courbe triple du huitième ordre $\Gamma (\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0)$; d) seize points quadruples $\varphi_0 = \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$.

Une hypersurface cubique adjointe doit passer par les surfaces Φ_2, Φ_2' qui sont du quatrième ordre. On en conclut que la surface $\varphi_3 = 0$ est une composante fixe du système adjoint. Mais alors, la surface Φ_3 devrait appartenir à un hyperplan, ce qui est impossible. La variété (3) est donc dépourvue de surface canonique.

Une biadjointe à la surface (3) est une hypersurface du sixième ordre qui doit passer deux fois par les surfaces Φ_2, Φ_2', Φ_3. Cette hypersurface coupe $\varphi_3 = 0$ suivant Φ_2 et Φ_2' d'ordre quatre, donc $\varphi_3 = 0$ fait partie des

hypersurfaces biadjointes. Le complément est une surface du quatrième ordre qui doit passer deux fois par Φ_2 et une fois par Φ_2'. On en conclut que la variété (3) possède une unique variété biadjointe $\varphi_1^2 \varphi_3 = 0$. On vérifie aisément que la corbe bicanonique, qui est unique, est d'ordre zéro.

Observons que la variété $\varphi_1^2 \varphi_3 = 0$ passe trois fois par la courbe Γ et par les points quadruples de la variété (3).

Les 16 points quadruples de la variété (3) proviennent des 16 points unis de l'involution I sur V. Ce sont les points de diramation pour la correspondance [1], [2] existant entre les variétés (3) et V.

La variété (3) a les caractères $P_g = 0$, $P_2 = 1$.

8. Supposons enfin que la variété V ait pour équations

$$y_1^2 = \varphi_0\,,\ y_2^2 - y_0 y_1 = \varphi_1\,,\ y_0 y_2 = \varphi_2\,,\ y_0^2 = \varphi_3\,.$$

L'involution engendrée par H sur cette variété a pour image dans S_4 la variété d'équation

$$\varphi_1 \varphi_3^3 = (\varphi_2^2 - \varphi_1 \varphi_3)^2. \tag{4}$$

La variété (4) possède: a) une surface double du quatrième ordre $\Phi\,(\varphi_2 = \varphi_3 = 0)$ à laquelle sont infiniment voisines successives deux surfaces du quatrième ordre Φ', Φ'' situées sur l'hypersurface $\varphi_2^2 - \varphi_1 \varphi_3 = 0$ (observons que Φ' est infiniment voisine de Φ sur l'hyperquadrique $\varphi_2 = 0$); b) une courbe triple $\Gamma\,(\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0)$; c) seize points quadruples $\varphi_0 = \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$.

L'hypersurface cubique adjointe doit passer par les surfaces Φ, Φ', Φ'', c'est-à-dire osculer l'hypersurface $\varphi_2^2 - \varphi_1 \varphi_3 = 0$ le long de la surface Φ', et toucher l'hyperquadrique $\varphi_2 = 0$ le long de Φ. Il en résulte que $\varphi_2 = 0$ fait partie de l'hypersurface adjointe. Celle-ci est complétée par un hyperplan qui doit contenir Φ, ce qui est impossible. La variété (4) est donc dépourvue de surface canonique.

L'hypersurface (4) possède une biadjointe $\varphi_2^2 \varphi_3 = 0$ et par conséquent une seule surface bicanonique que l'on vérifie être d'ordre zéro.

L'hypersurface (4) a donc les caractères $P_g = 0$, $P_2 = 1$.

Reçue le 24 I 1968

Académie Royale des Sciences,
Liège, Belgique

BIBLIOGRAPHIE

1. Godeaux L., *Sur une surface algébrique du huitième ordre.* The Tôhoku Math. J., 1933, pp. 122–126.
2. — *Une variété algébrique à trois dimensions de bigenre un.* C. R. Ac. Sci., Paris, 1965.
3. — *Sur les variétés algébriques à trois dimensions de genre géométrique zéro et de bigenre un.* Rend. del Circolo Matem. di Palermo, 1965, pp. 237–246.

4. Godeaux L., *Géométrie algébrique*. T. I, Liége et Paris, 1948.
5. — *Sur deux surfaces limités d'une surface de Steiner*. Periodico di Matematiche, (sous presse).
6. — *Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications*. Rome, Cremonese, 1963.

SUPRAFEŢE ŞI VARIETĂŢI ALGEBRICE TRANSFORMATE RAŢIONALE ALE SUPRAFEŢEI LUI STEINER

(Rezumat)

Se studiază transformatele raţionale ale suprafeţei lui Steiner.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

D. K. 513.572

INVARIANTEN ISOMETRISCHEN FLÄCHEN IN RÄUMEN KONSTANTER KRÜMMUNG (I)

VON

HERBERT FRANK

Es seien Φ und $\widetilde{\Phi}$ zwei isometrische Flächen der Klasse $C^{(3)}$ eines dreidimensionalen Raumes konstanter Krümmung [1]) k, wobei die Parameternetze auf ihnen so gewählt seinen, dass sie einander durch die Isometrie zugeordnet sind. Wir können dann ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass in entsprechenden Punkten der Flächen Φ und $\widetilde{\Phi}$ die Beziehungen

$$\widetilde{\sigma}_1 = \sigma_1, \quad \widetilde{\sigma}_2 = \sigma_2, \quad \widetilde{\omega}_3 = \omega_3 \tag{1}$$

gelten [2]).

Das Hauptanliegen Ausführungen ist es, die in den Herglotzschen Integralformeln auftretende Invariante

$$\delta = \frac{[\omega_1 - \widetilde{\omega}_1,\ \omega_2 - \widetilde{\omega}_2]}{[\sigma_1, \sigma_2]} = (c_{11} - \widetilde{c}_{11})(c_{22} - \widetilde{c}_{22}) - (c_{12} - \widetilde{c}_{12})^2 = \tag{2}$$

$$= 2(K - k) - (c_{11}\widetilde{c}_{22} + \widetilde{c}_{11}c_{22} - 2c_{12}\widetilde{c}_{12})$$

---

[1]) Gemeint sind die klassischen Räume konstanter Krümmung, also der hyperbolische Raum ${}^1S_3$, der euklidi che Raum R_3 und der elliptische Raum S_3. Sämtliche Ausführungen stützen sich auf die bekannte Darlegung der Flächentheorie im R_3 von W. Blaschke [1] sowie auf eine Darstellung der Flächentheorie im ${}^1S_3$ und im S_3 mit gleicher Methode durch den Verfasser [3].

[2]) σ_1, σ_2 und ω_1, ω_2, ω_3 sind die in den Ableitungsgleichungen (Darbouxschen Formeln) auftretenden Pfaffschen Formen. Insbesondere bezeichnen σ_1, σ_2 die linear unabhängigen metrischen Pfaffschen Formen ($\mathbf{dx} = \sigma_1 \mathbf{a}_2 + \sigma_2 \mathbf{a}_2$), nach denen die ω_j wie folgt zerlegt werden können:

$$-\omega_1 = c_{12}\sigma_1 + c_{22}\sigma_2, \quad \omega_2 = c_{11}\sigma_1 + c_{12}\sigma_2, \quad \omega_3 = g_1\sigma_1 + g_2\sigma_2,$$

wobei gilt

$$g_1 = \frac{D\sigma_1}{[\sigma_1, \sigma_2]}, \quad g_2 = \frac{D\sigma_2}{[\sigma_1, \sigma_2]}.$$

der isometrischen Flächen Φ und $\tilde{\Phi}$ für den Fall negativer relativer Krümmung $K-k$ zu untersuchen, und zwar hinsichtlich ihres Vorzeichens und der Schlussfolgerungen, die sich aus ihrem Verschwinden ergeben. Im Hinblick auf Behandlung von Fragen der Flächenverbiegung im Grossen mittels der Herglotzschen Integralformeln besteht ein besonderes Interesse, Aussagen dieser Art über die Invariante δ zu gewinnen.

Als Hilfsmittel werden wir in unseren Ausführungen die nachstehenden Invarianten isometrischer Flächen heranziehen:

$$\text{(3)} \qquad \varepsilon = \frac{1}{4}[(c_{11}-\tilde{c}_{11})-(c_{22}-\tilde{c}_{22})]^2+(c_{12}-\tilde{c}_{12})^2 = (H-\tilde{H})^2-\delta \geqslant 0,$$

$$\text{(4)} \qquad \bar{\delta} = \frac{[\omega_1+\tilde{\omega}_1,\ \omega_2+\tilde{\omega}_2]}{[\sigma_1,\ \sigma_2]} = (c_{11}+\tilde{c}_{11})(c_{22}+\tilde{c}_{22})-(c_{12}+\tilde{c}_{12})^2 = 2(K-k)+(c_{11}\tilde{c}_{22}+\tilde{c}_{11}c_{22}-2c_{12}\tilde{c}_{12}),$$

$$\text{(5)} \qquad \bar{\varepsilon} = \frac{1}{4}[(c_{11}+\tilde{c}_{11})-(c_{22}+\tilde{c}_{22})]^2+(c_{12}+\tilde{c}_{12})^2 = (H+\tilde{H})^2-\bar{\delta} \geqslant 0,$$

$$\text{(6)} \qquad \begin{aligned} \mathfrak{d} &= \frac{[H\omega_1-\tilde{H}\tilde{\omega}_1,\ H\omega_2-\tilde{H}\tilde{\omega}_2]}{[\sigma_1,\ \sigma_2]} = \\ &= (Hc_{11}-\tilde{H}\tilde{c}_{11})(Hc_{22}-\tilde{H}\tilde{c}_{22})-(Hc_{12}-\tilde{H}\tilde{c}_{12})^2 = \\ &= \frac{[H\omega_1-H\tilde{\omega}_1,\ \tilde{H}\omega_2-H\tilde{\omega}_2]}{[\sigma_1,\ \sigma_2]} = \\ &= (\tilde{H}c_{11}-H\tilde{c}_{11})(\tilde{H}c_{22}-H\tilde{c}_{22})-(\tilde{H}c_{12}-H\tilde{c}_{12})^2 = \\ &= (K-k)(H^2+\tilde{H}^2)-HH(c_{11}\tilde{c}_{22}+\tilde{c}_{11}c_{22}-2c_{12}\tilde{c}_{12}), \end{aligned}$$

$$\text{(7)} \qquad \mathfrak{n} = \frac{1}{4}[(Hc_{11}-\tilde{H}\tilde{c}_{11})-(Hc_{22}-\tilde{H}\tilde{c}_{22})]^2+(Hc_{12}-\tilde{H}\tilde{c}_{12})^2 = (H^2-\tilde{H}^2)^2-\mathfrak{d} \geqslant 0,$$

$$\text{(8)} \qquad \mathfrak{n}^* = \frac{1}{4}[(\tilde{H}c_{11}-H\tilde{c}_{11})-(\tilde{H}c_{22}-H\tilde{c}_{22})]^2+(\tilde{H}c_{12}-H\tilde{c}_{12})^2 = -\mathfrak{d} \geqslant 0,$$

$$\text{(9)} \qquad \begin{aligned} \bar{\mathfrak{d}} &= \frac{[H\omega_1+\tilde{H}\tilde{\omega}_1,\ H\omega_2+\tilde{H}\tilde{\omega}_2]}{[\sigma_1,\ \sigma_2]} = \\ &= (Hc_{11}+\tilde{H}\tilde{c}_{11})(Hc_{22}+\tilde{H}\tilde{c}_{22})-(Hc_{12}+\tilde{H}\tilde{c}_{12})^2 = \\ &= \frac{[\tilde{H}\omega_1+H\tilde{\omega}_1,\ \tilde{H}\omega_2+H\tilde{\omega}_2]}{[\sigma_1,\sigma_2]} = \end{aligned}$$

$$(9)\qquad \begin{aligned} &= (\tilde{H}c_{11}+H\tilde{c}_{11})(\tilde{H}c_{22}+H\tilde{c}_{22})-(\tilde{H}c_{12}+H\tilde{c}_{12})^2= \\ &= (K-k)(H^2+\tilde{H}^2)+H\tilde{H}(c_{11}\tilde{c}_{22}+\tilde{c}_{11}c_{22}-2c_{12}\tilde{c}_{12}), \end{aligned}$$

$$(10)\qquad \begin{aligned} \overline{\mathfrak{n}} &= \frac{1}{4}[(Hc_{11}+\tilde{H}\tilde{c}_{11})-(Hc_{22}+\tilde{H}\tilde{c}_{22})]^2+(Hc_{12}+\tilde{H}\tilde{c}_{12})^2= \\ &= (H^2+\tilde{H}^2)^2-\overline{\mathfrak{d}}\geqq 0, \end{aligned}$$

$$(11)\qquad \begin{aligned} \overline{\mathfrak{n}^*} &= \frac{1}{4}[(\tilde{H}c_{11}+H\tilde{c}_{11})-(\tilde{H}c_{22}+H\tilde{c}_{22})]^2+(\tilde{H}c_{12}+H\tilde{c}_{12})^2= \\ &= 4H^2\tilde{H}^2-\overline{\mathfrak{d}}\geqq 0. \end{aligned}$$

Wie man sofort sieht, bestehen zwischen den Invarianten δ, $\overline{\delta}$, $\mathfrak{d}$ und $\overline{\mathfrak{d}}$ die folgenden Beziehungen, von denen wir im weiteren noch Gebrauch machen werden:

$$(12)\quad \delta+\overline{\delta}=4(K-k), \qquad (13)\quad \mathfrak{d}+\overline{\mathfrak{d}}=2(K-k)(H^2+\tilde{H}^2),$$

$$(14)\quad \mathfrak{d}-H\tilde{H}\delta=(K-k)(H-\tilde{H})^2, \qquad (15)\quad \mathfrak{d}+H\tilde{H}\overline{\delta}=(K-k)(H+\tilde{H})^2,$$

$$(16)\quad \overline{\mathfrak{d}}+H\tilde{H}\delta=(K-k)(H+\tilde{H})^2, \qquad (17)\quad \overline{\mathfrak{d}}-H\tilde{H}\overline{\delta}=(K-k)(H-\tilde{H})^2,$$

$$(18)\qquad H^2\tilde{H}^2\delta\overline{\delta}=\mathfrak{d}\overline{\mathfrak{d}}-(K-k)^2(H^2-\tilde{H}^2)^2.$$

Es sei zunächst bemerkt, dass sich der bekannte Satz über die Invariante δ für isometrische Flächen positiver relativer Krümmung nunmehr sehr einfach ergibt:

Satz 1. *Für zwei isometrische Flächen Φ und $\tilde{\Phi}$, positiver relativer Krümmung der Klasse $C^{(3)}$, ist stets $\delta\overline{\delta}\leqq 0$, wobei δ überall ein und dasselbe Vorzeichen besitzt oder verschwindet. Insbesondere gilt $\delta\leqq 0$ für $H\tilde{H}>0$ und $\delta\geqq 0$ für $H\tilde{H}<0$ ($H\tilde{H}=0$ kann nicht eintreten), wobei δ dann und nur dann verschwindet, wenn die Beziehungen $\tilde{c}_{11}=c_{11}$, $\tilde{c}_{22}=c_{22}$, $c_{12}=\tilde{c}_{12}$ Gültigkeit haben.*

Beweis. Da nach (8) stets $\mathfrak{d}\leqq 0$ ist, folgt aus (14) und (15) für $K-k>0$, $H\tilde{H}\delta\leqq 0$, $H\tilde{H}\overline{\delta}\leqq 0$, woraus man bereits alle genannten Aussagen hinsichtlich der Vorzeichen von δ und $\overline{\delta}$ ablesen kann. Wegen $E=H^2-(K-k)\geqq 0$ kann nämlich im Falle $K-k>0$ die mittlere Krümmung nirgends verschwinden. Somit ergibt sich aus diesen Ungleichungen, dass δ und $\overline{\delta}$ — sofern sie nicht verschwinden — verschiedene Vorzeichen haben, d.h., es ist stets $\delta\overline{\delta}\leqq 0$. Ferner, wegen $H\tilde{H}\neq 0$ muss δ überall dasselbe Vorzeichen besitzen oder verschwinden, wobei die angeführten Aussagen über das Vorzeichen von δ in Abhängigkeit von Vorzeichen der mittleren Krümmungen von Φ und $\tilde{\Phi}$ gelten.

Verschwindet δ in einem Punkt, so verschwindet nach (14) in diesem Punkt wegen $\mathfrak{d} \leqslant 0$ und $K - k > 0$ auch die Differenz $H - \tilde{H}$ und damit ebenfalls die Invariante ε. Aus (2) und (3) folgen dann sofort die Beziehungen $\tilde{c}_{ij} = c_{ij}$, $(i, j = 1, 2)$. Die ungekehrte Aussage ist trivial.

Bemerkung. Für die Invariante $\bar{\mathfrak{d}}$ zweier isometrischer Flächen Φ und $\tilde{\Phi}$ positiver relativer Krümmung der Klasse $C^{(3)}$ gilt stets $\bar{\mathfrak{d}} > 0$. Dies folgt unmittelbar aus der Beziehung (13) wegen $\mathfrak{d} \leqslant 0$ und $H^2 + \tilde{H}^2 > 0$ für $K - k > 0$.

Satz 2. *Die Invariante δ zweier isometrischer Flächen Φ und $\tilde{\Phi}$ negativer relativer Krümmung der Klasse $C^{(3)}$ besitzt hinsichtlich ihres Vorzeichens folgende Eigenschaften:*

1°. *In den Punkten, in denen die Ungleichung $\delta\bar{\delta} > 0$ gilt, ist δ stets negativ.*

2°. *In den Punkten, in denen die Gleicheit $\delta\bar{\delta} = 0$ gilt, ist δ stets nichtpositiv; ändert man aber die Orientierung einer Flächen Φ oder $\tilde{\Phi}$, indem man die Richtung ihres Normalvektors wechselt, so verschwindet δ, falls es negativ war, und es wird negativ, falls es verschwand.*

3°. *In den Punkten, in denen die Ungleichung $\delta\bar{\delta} < 0$ gilt, wechselt δ sein Vorzeichen, wenn man die Orientierung einer der Flächen Φ oder $\tilde{\Phi}$ ändert, indem man die Richtung ihres Normalvektors wechselt.*

4°. *In jeder zusammenhängenden Komponente der Punktmenge mit $\delta\bar{\delta} = 0$, ist δ entweder überall negativ oder überall identisch Null.*

5°. *In jeder zusammenhangenden Komponente der Punktmenge mit $\delta\bar{\delta} \leqslant 0$ besitzt δ überall ein und dasselbe Vorzeichen oder verschwindet.*

Beweis. Im Falle $\delta\bar{\delta} > 0$ besitzen δ und $\bar{\delta}$ desselbe Vorzeichen. Da aber nach (12) wegen $K - k < 0$ ihre Summe negativ ist, muss folglich $\delta < 0$ sein. Die Abschätzung $\delta \leqslant 0$ (ebenso $\bar{\delta} \leqslant 0$) im Falle $\delta\bar{\delta} = 0$ folgt für $K - k < 0$ unmittelbar aus (12).

Ändert man auf einer der Flächen Φ oder $\tilde{\Phi}$ die Orientierung, indem man die Richtung ihres Normalvektors wechselt, so ändern alle Koeffizienten der zweiten quadratischen Grundform dieser Fläche das Vorzeichen. Die Invariante δ ist deshalb nach Änderung der Orientierung einer der Flächen Φ oder $\tilde{\Phi}$ gleich der Invariante $\bar{\delta}$ vor dieser Orientierungsänderung. Da im Falle $\delta\bar{\delta} = 0$ gilt $\bar{\delta} = 0$ für $\delta < 0$ und $\bar{\delta} < 0$ für $\delta = 0$, muss also δ bei der genannten Änderung der Orientierung einer der Flächen Φ oder $\tilde{\Phi}$ verschwinden, falls es negativ ist, und negativ werden, falls es verschwindet. Im Falle $\delta\bar{\delta} < 0$ muss bei einer derartigen Orientierungsänderung δ das Vorzeichen wechseln, da δ und $\bar{\delta}$ verschiedene Vorzeichen besitzen.

Die Aussage 4° beweisen wir indirekt. Wir nehmen an, in einer zusammenhängenden Komponente der Punktmenge mit $\delta\bar{\delta} = 0$ gäbe es einen Punkt P_1 mit $\delta = 0$ und einen Punkt P_2 mit $\delta < 0$. In P_1 wäre dann nach (2)

$$c_{11}\tilde{c}_{22} + \tilde{c}_{11}c_{22} - 2c_{12}\tilde{c}_{12} = 2(K-k) < 0, \tag{19}$$

während im Punkte P_2 wegen $\delta\bar{\delta} = 0$ die Invariante $\bar{\delta} = 0$ wäre und deshalb nach (4) gelten würde

$$c_{11}\tilde{c}_{22} + \tilde{c}_{11}c_{22} - 2c_{12}\tilde{c}_{12} = -2(K-k) > 0. \tag{20}$$

Aus Gründen der Stetigkeit müsste also ein Punkt existieren, in dem der rechtsseitige Ausdruck verschwinden würde und folglich

$$\delta = \bar{\delta} = 2(K-k) < 0 \tag{21}$$

wäre, was jedoch der Gleichheit $\delta\bar{\delta} = 0$ widerspräche.

Die Aussage 5° beweist man ganz analog. Würde nämlich δ in einer zusammenhängenden Komponente der Punktmenge mit $\delta\bar{\delta} \leqslant 0$ das Vorzeichen wechseln, so gäbe es einen Punkt P_1 mit $\delta > 0$ und einen Punkt P_2 mit $\delta < 0$, also $\bar{\delta} \geqslant 0$ wegen $\delta\bar{\delta} \leqslant 0$. Nach (2) und (4) besässe somit der Ausdruck $c_{11}\tilde{c}_{22} + \tilde{c}_{11}c_{22} - 2c_{12}\tilde{c}_{12}$ in den Punkten P_1 und P_2 wiederum verschiedene Vorzeichen — in (19) und (20) stände anstelle des Gleichheitszeichens das Zeichen „$<$“ bzw. „$>$“ —, so dass aus Stetigkeitsgründen wieder ein Punkt existieren müsste, in dem dieser Ausdruck verschwände und folglich (21) gelten würde, was der Ungleichung $\delta\bar{\delta} \leqslant 0$ widerspräche.

Bemerkung. Für die Invariate $\bar{\mathfrak{d}}$ zweier isometrischer Flächen Φ und $\tilde{\Phi}$ negativer relativer Krümmung der Klasse $C^{(3)}$ gilt im Falle $\delta\bar{\delta} \geqslant 0$ stets $\bar{\mathfrak{d}} \leqslant 0$.

In der Tat, für $\delta\bar{\delta} \geqslant 0$, folgt aus (18) die Ungleichung

$$\mathfrak{d}\bar{\mathfrak{d}} \geqslant (K-k)^2(H^2 - \tilde{H}^2)^2 \geqslant 0.$$

Hieraus und aus (13) ergibt sich wegen $\mathfrak{d} \leqslant 0$ und $K - k < 0$ die Abschätzung $\bar{\mathfrak{d}} \leqslant 0$.

Weitere Sätze werden folgen.

Eingegangen am 17. V 1965

Mathematisches Institut der Humboldschen Universität, Berlin, DDR

LITERATURVERZEICHNIS

1. Blaschke W., Reichhardt H., *Einführung in die Differentialgeometrie*. 2. Aufl., Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1960.

2. Efimow N. W., *Flächenverbiegung im Grossen.* Mit einem Nachtrag von E. Rembs und K. P. Grotenmeyer. Akad.-Verlag, Berlin, 1957, (aus Russisch übersetzt).
3. Франк Г., Сиб. мат. ж., 1961, **II**, *4*, стр. 600–621.

INVARIANŢI AI SUPRAFEŢELOR IZOMETRICE ÎN SPAŢII CU CURBURĂ CONSTANTĂ (I)

(Rezumat)

Autorul, folosind unele rezultate proprii [3], stabileşte, ţinînd seama de rezultatele clasice [1], [2], un şir de invarianţi ai suprafeţelor izometrice în spaţii cu curbură constantă.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

C. D. 513.814

SUR LE PROLONGEMENT DES APPLICATIONS CONFORMES DANS LES ESPACES L_n

PAR

VIOREL MURGESCU

Note présentée dans la session scientifique de l'Institut Polytechnique de Jassy, 28—30 septembre 1967

1. Introduction

Par un *espace de Weyl général* (*à torsion*), noté $W_n(L_{ij}^k, g_{ij}, \omega_k)$, on entend un espace L_n, à connexion affine L_{ij}^k, doué d'un champ tensoriel symétrique g_{ij}, de rang n, et d'un champ vectoriel ω_k, qui satisfont les relations de récurrence

$$g_{ij|k} = 2\omega_k g_{ij}, \tag{1.1}$$

où $g_{ij|k}$ représente la dérivée covariante de g_{ij} par rapport aux coefficients L_{ij}^k [2].

On sait que la plus générale connection, pour laquelle les relations (1.1) ont lieu, a la forme

$$L_{ij}^k = \left\{ \begin{matrix} k \\ i\ j \end{matrix} \right\} - (\omega_i \delta_j^k + \omega_j \delta_i^k - \omega_m g_{ij} g^{mk}) + (g_{ih}\, \Omega_{jm}^h + g_{hj}\, \Omega_{im}^h + g_{hm}\, \Omega_{ij}^h) g^{mk}, \tag{1.2}$$

où $\left\{ \begin{matrix} k \\ i\ j \end{matrix} \right\}$ sont les symbols de Christoffel construits avec le tenseur g_{ij} et $\Omega_{ij}^k \overset{\text{déf}}{=} L_{[ij]}^k$ est le tenseur de torsion de l'espace L_n.

La connection (1.2) sera nommée *connection de Weyl générale*.

Les conditions d'intégrabilité des équations (1.1),

$$L_{ikl}^h g_{hj} + L_{jkl}^h g_{jh} = \frac{2}{n} \Lambda_{kl} g_{ij}, \quad (\Lambda_{kl} \overset{\text{déf}}{=} L_{hkl}^h), \tag{1.3}$$

et leurs conséquences différentielles sont formellement semblables aux conditions correspondantes, du cadre de la théorie des espaces de Weyl [3].

De plus, il faut que le vecteur ω_k vérifie les équations

$$\partial_l \omega_k - \partial_k \omega_e = \frac{1}{n} \Lambda_{kl}. \tag{1.4}$$

Le problème concernant les applications conformes des espaces de Weyl généraux fut posé pour la première fois en [1], où l'on a défini le tenseur conforme de courbure pour les espaces W_n qui ont le même tenseur de torsion.

On a montré encore que le plus général changement de connection qui permet le passage d'une connection de Weyl générale, L^k_{ij}, à une autre, ${}^*L^k_{ij}$, est donné par les relations

$$ {}^*L^k_{ij} = L^k_{ij} + (\delta^k_j s_i + \delta^k_i s_j - s_m g_{ij} g^{mk}) + (g_{im} \sigma^m_{jn} + g_{jm} \sigma^m_{in} + g_{mn} \sigma^m_{ij}) g^{nk} , \tag{1.5}$$

où s_k est un vecteur arbitraire et σ^k_{ij} un tenseur arbitraire, antisymétrique dans ses indices inférieurs [2].

Si l'on considère maintenant deux espaces de Weyl généraux, $W_n(L^k_{ij}, g_{ij}, \omega_k)$ et ${}^*W_n({}^*L^k_{ij}, g_{ij}, {}^*\omega_k)$, qui sont mis en correspondance conforme, compte tenu des expressions de leurs connections de la forme (1.2), on obtient pour *le tenseur de déformation* $\tau^k_{ij} \overset{\text{déf}}{=} {}^*L^k_{ij} - L^k_{ij}$ qui leur correspond, l'expression

$$\tau^k_{ij} = p_i \delta^k_j + p_j \delta^k_i - p_m g_{ij} g^{mk} + (g_{im} \underset{\smile}{\tau^m_{jn}} + g_{mj} \underset{\smile}{\tau^m_{in}} + g_{mn} \underset{\smile}{\tau^m_{ij}}) g^{nk}, \tag{1.6}$$

où p_i est *le vecteur de la représentation conforme,*

$$p_i \overset{\text{déf}}{=} \omega_i - {}^*\omega_i , \tag{1.7}$$

et $\underset{\smile}{\tau^k_{ij}} \overset{\text{déf}}{=} {}^*\Omega^k_{ij} - \Omega^k_{ij}$ représente la partie antisymétrique de τ^k_{ij}. Il résulte alors de (1.6), en faisant $k = i$,

$$p_k = \frac{1}{n} \tau_k, \quad (\tau_k \overset{\text{déf}}{=} \tau^i_{ik}). \tag{1.8}$$

Vu ces résultats, dans ce qui suit on se propose d'établir quelques propriétés conformes des espaces de Weyl à torsion, mais qui ont leurs connexions coparallèles. Ils représentent un deuxième cas lorsqu'on peut déterminer leur tenseur conforme de courbure ; par surcroît ce cas nous permet à établir la plus proche liaison entre un espace de Weyl et un espace de Weyl à torsion, conformément correspondants.

2. Connexions de Weyl générales et coparallèles

Soient ${}^*W_n({}^*L^k_{ij}, {}^*g_{ij}, {}^*\omega_k)$ et $W_n(L^k_{ij}, g_{ij}, \omega_k)$ deux espaces de Weyl généraux, mis en correspondance conforme $({}^*g_{ij} = g_{ij})$.

Alors, en posant

$$\sigma_{ij}^{k} = \frac{1}{2}(\delta_i^k s_j - \delta_j^k s_i) \tag{2.1}$$

dans les relations (1.5), ces dernières deviennent

$$^*L_{ij}^{k} = L_{ij}^{k} + \delta_i^k s_j, \tag{2.2}$$

où s_j est un vecteur arbitraire. Mais, il est bien connu que cette transformation a une signification géométrique, à savoir elle représente la plus générale transformation de connexion qui conserve le parallélisme de toutes les directions, quelque soit le chemin de transport.

Le vecteur s_k s'appele alors *vecteur de coparallélisme.*

En séparant en (2.2) les parties symétrique et antisymétrique, on obtient pour les connexions considérées les relations

$$^*\Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{ij}^{k} + \frac{1}{2}(\delta_i^k s_j + \delta_j^k s_i), \qquad ^*\Omega_{ij}^{k} = \Omega_{ij}^{k} + \frac{1}{2}(\delta_i^k s_j - \delta_j^k s_i). \tag{2.3}$$

En faisant dans les dernières égalités, $k = j$, on trouve

$$s_i = \frac{2}{n-1}(\Omega_i - {}^*\Omega_i), \tag{2.4}$$

$^*\Omega_i$ et Ω_i étant les vecteurs de torsion des espaces considérés.

Puis, en notant

$$s_{jk} \overset{\text{déf}}{=} \partial_k s_j - \partial_j s_k, \tag{2.5}$$

on constate que les tenseurs de courbure des espaces $^*W_n$ et W_n sont liés par les relations

$$^*L_{ijk}^{h} = L_{ijk}^{h} - \delta_i^h s_{jk}. \tag{2.6}$$

Alors, en contractant h et i en (2.6), il résulte

$$s_{jk} = \frac{1}{n}(\Lambda_{jk} - {}^*\Lambda_{jk}), \tag{2.7}$$

et encore, en contractant h et k dans les mêmes égalités, on obtient

$$s_{ij} = {}^*L_{ij} - L_{ij}. \tag{2.8}$$

Maintenant, en éliminat successivement s_{ij} de (2.6) et (2.7), de (2.7) et (2.8) et encore de (2.6) et (2.8), on obtient les tenseurs bien connus

$$V_{ijk}^{h} \overset{\text{déf}}{=} L_{ijk}^{h} - \frac{1}{n}\delta_i^h \Lambda_{jk}, \quad U_{jk} \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{n}\Lambda_{jk} - L_{jk}, \quad L_{(ij)} = \frac{1}{2}(L_{ij} + L_{ji}), \tag{2.9}$$

qui sont invariants aux transformations de connexions coparallèles et certainement, ils prennent les mêmes valeurs dans les points correspondants

des espaces $^*W_n$ et W_n. Ils seront utilisés dans ce qui suit pour construire le tenseur conforme de courbure des espaces $^*W_n$ et W_n.

Mais, d'abord on se propose d'établir le théorème d'existence de l'application conforme des espaces $^*W_n$ et W_n. Dans ce but, on commence par effecteur la différence des équations (1.4) écrites pour $^*\omega_k$ et ω_k, d'où résultent les relations

$$\partial_k p_j - \partial_j p_k = \frac{1}{n}(\Lambda_{jk} - {}^*\Lambda_{jk}), \tag{2.10}$$

p_j étant défini par (1.7). Compte tenu encore de (1.8) et de

$$\tau_j = n s_j, \tag{2.11}$$

qui s'obtient de (2.2) par la contraction $k = i$, il résulte, avec nécessité, qu'il faut avoir

$$s_i = p_i. \tag{2.12}$$

De plus, cette condition est suffisante pour que l'application conforme se réalise, parce qu'elle assure encore la compatibilité des équations (2.7) et (2.10). Alors, en l'attachant aux hypothèses faites ci-dessus on aboutit au théorème suivant:

Deux espaces de Weyl généraux, rapportés au même tenseur métrique g_{ij} et ayant leurs connexions coparallèles, s'appliquent conformément l'un sur l'autre si et seulement si leur vecteur de représentation conforme est égal au vecteur de coparallélisme.

Par conséquent, en substituant le vecteur s_j de (2.12) dans les égalités (2.2) et (2.4), il résulte que la connexion

$$C_{ij}^k \overset{\text{déf}}{=} L_{ij}^k + \delta_i^k \omega_j \tag{2.13}$$

et le vecteur

$$v_i \overset{\text{déf}}{=} \omega_i - \frac{2}{n-1}\Omega_i, \tag{2.14}$$

ont les mêmes valeurs dans les espaces $^*W_n$ et W_n qui sont conformément correspondants et ont leurs connexions coparallèles.

En particulier, si l'espace $W_n\,(W_{ij}^k, g_{ij}, \omega_k)$ est un espace de Weyl, alors, tous les espaces de Weyl à torsion qui lui sont conformément correspondants et ont leurs connexions coparallèles, sont les espaces $^*W_n\,(^*L_{ij}^k, g_{ij}, {}^*\omega_k)$, ou

$$^*L_{ij}^k = W_{ij}^k + \delta_i^k(\omega_j - {}^*\omega_j). \tag{2.15}$$

3. Le tenseur conforme de courbure

Soient encore ${}^*W_n({}^*L_{ij}^k, g_{ij}, {}^*\omega_k)$ et $W_n(L_{ij}^k, g_{ij}, \omega_k)$ deux espaces de Weyl généraux, qui ont leurs connexions coparallèles. Alors, à l'aide des tenseurs (2.9), on peut construire le tenseur invariant (qui ne dépend pas du vecteur s_i),

$$W_{ijk}^h \overset{\text{déf}}{=} V_{ijk}^h + \frac{1}{n-2}(\delta_j^h U_{ik} - \delta_k^h U_{ij}) -$$

$$(3.1) \qquad - \frac{1}{n-2} g^{hm}(g_{ij} U_{mk} - g_{ik} U_{mj}) + \frac{L}{(n-1)(n-2)}(\delta_j^h g_{ik} - \delta_k^h g_{ij}),$$

où

$$(3.2) \qquad L \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{2}(L_{mn} + L_{nm}) g^{mn}.$$

Le tenseur (3.1) est indépendant encore de ω_k. Pour démontrer cette affirmation, on prend, dans la correspondance établie, comme espace W_n, l'espace de Weyl $W_n(W_{ij}^k, g_{ij}, \omega_k)$. Par conséquent, il résulte que le tenseur L_{ij} devient Γ_{ij}, qui est un tenseur symétrique, et alors on a

$$(3.3) \qquad L = \Gamma_{mn} g^{mn} \overset{\text{déf}}{=} 2\Gamma.$$

D'autre part, les tenseurs (2.9) deviennent

$$(3.4) \qquad V_{ijk}^h = B_{ijk}^h - \frac{1}{n}\delta_i^h S_{jk}, \quad U_{jk} = \frac{1}{n} S_{jk} - \Gamma_{jk}, \quad L_{(ij)} = \Gamma_{ij};$$

donc, en faisant les substitutions de rigueur dans (3.1), on obtient l'expression même du tenseur conforme de courbure de Weyl,

$$W_{ijk}^h = B_{ijk}^h - \frac{1}{n}\delta_i^h S_{jk} + \frac{1}{n(n-2)}[\delta_j^h S_{ik} - \delta_k^h S_{ij} - g^{hm} g_{ij} S_{mk} + g^{hm} g_{ik} S_{mj}] -$$

$$- \frac{1}{n-2}[\delta_j^h \Gamma_{ik} - \delta_k^h \Gamma_{ij} - g^{hm} g_{ij} \Gamma_{mk} + g^{hm} g_{ik} \Gamma_{mj}] +$$

$$+ \frac{2\Gamma}{(n-1)(n-2)}(\delta_j^h g_{ik} - \delta_k^h g_{ij}),$$

qu'on sait qu'il ne dépend pas de ω_k.

Par conséquent, le tenseur (3.1) est un invariant conforme pour la classe des espaces considérés ci-dessus; on peut le nommer *tenseur conforme de courbure dec espaces de Weyl à connexions coparallèles.*

On voit aisément qu'il vérifie les relations

$$W_{ijk}^h + W_{ikj}^h = 0, \quad W_{hjk}^h = 0, \quad W_{ijk}^h + W_{jki}^h + W_{kij}^h = 0.$$

On remarque encore qu'on peut construire le tenseur conforme de courbure (3.1) d'une façon tout à fait naturelle, à l'aide de la conexion (2.13).

Institut Polytechnique de Jassy,
Chaire de Mathématiques II

BIBLIOGRAPHIE

1. Murgescu V., *Sur les espaces à connexion affine à tenseur récurrent.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1962, **VIII (XII)**, *1–2*, pp. 65–70.
2. — *Espaces de Weyl à torsion et leurs représentations conformes.* An. Univ. Timişoara, 1968, (sous presse)
3. Schouten J. A., *Ricci-Calculus.* Springer, Berlin, 1954.

ASUPRA PRELUNGIRII REPREZENTĂRILOR CONFORME ÎN SPAŢII L_n

(Rezumat)

Se rezolvă problema reprezentărilor conforme ale spaţiilor Weyl cu torsiune şi cu conexiunile coparalele.

În această ordine de idei, se demonstrează teorema:

Două spaţii Weyl generale, raportate la acelaşi tensor metric g_{ij} şi avînd conexiunile coparalele, se reprezintă conform unul pe altul, dacă şi numai dacă vectorul reprezentării conforme este egal cu vectorul de coparalelism.

Se determină tensorul conform de curbură al lui Weyl, care are expresia (3.1), pentru spaţiile Weyl generale şi cu conexiunile coparalele.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

C. D. 513.597.4

SUR CERTAINES VARIÉTÉS RÉGLÉES AVEC LIGNES ASYMPTOTIQUES DOUBLES EN E_5

PAR

ȘTEFANIA RUSCIOR

Communication présentée dans la session scientifique de l'Institut Polytechnique de Jassy, 28—30 septembre 1968

1. Dans deux Notes récentes [1], [2], M. L. Godeaux a déterminé les surfaces asymptotiques telles que les surfaces réglées gauches, lieu des tangentes d'une courbe, appartiennent à des complèxes linéaires.

Nous nous proposons de déterminer les variétés réglées à trois dimensions qui contiennent dans un E_5 des lignes asymptotiques doubles. Dans certains cas ces variétés appartiennent à des complexes linéaires similaires.

Les variétés à trois dimensions dans E_5, dont les tangentes principales présentent des coïncidences, ont été étudiées par M. E. Togliatti [3], [4]. Nous utiliserons les résultats de ces travaux pour développer notre problème.

2. Une variété réglée à trois dimensions (V_3), conçue comme lieu des points dépendant de trois paramètres u, v, w, a pour équation

$$\bar{r} = \bar{\rho}(u,v) + w\bar{\alpha}(u,v), \tag{1}$$

où $\bar{\rho} = \bar{\rho}(u,v)$ représente la variété directrice et $\bar{\alpha}(u,v)$ est le verseur d'une génératrice générique (g).

Supposons remplies les conditions de régularité necessaires dans ce que suit. En chaque point M non singulier de la génératrice (g), déterminé par la coordonnée projective w, on trouve un espace linéaire à trois dimensions (Π_3) tangent à (V_3), déterminé par les vecteurs $\bar{\rho}_u + w\bar{\alpha}_u$, $\bar{\rho}_v + w\bar{\alpha}_v$, $\bar{\alpha}$. Chaque hyperplan passant par (Π_3) est tangent à (V_3) et il y en a ∞^1 hyperplans.

Parmi les ∞^2 droites tangentes à (V_3) passant par M, on trouve quatre droites qui ont un contact du deuxième ordre. Celles-ci sont les tangentes principales et elles enveloppent les lignes asymptotiques de (V_3). On aura une asymptotique double lorsque deux tangentes principales coïncident.

Pour les variétés réglées (1) la génératrice (g) devient une ligne asymptotique double (w) si les variétés tangentes (Π_3) menées le long de la génératrice, enveloppent une variété développable (V_3^2) [5], [6]. Alors les systèmes différentiels (I) et (II), définis par M. Togliatti dans [3], sont vérifiés et les vecteurs $\bar{\alpha}_u$ et $\bar{\alpha}_v$ sont situés dans le plan tangent à la variété $\bar{\rho}$, au point ou elle rencontre la génératrice. Donc la matrice des vecteurs $\bar{\rho}_u$, $\bar{\rho}_v$, $\bar{\alpha}_u$, $\bar{\alpha}_v$ a le rang 2.

Maintenant nous nous proposons de trouver les variétés réglées (V_3) qui contiennent deux lignes asymptotiques doubles, c'est-à-dire qui possèdent une ligne asymptotique double (u) (caractérisée par $v = \text{const.}$ et $w = \text{const.}$), à côté de la ligne (w) (caractérisée par $u = \text{const.}$ et $v = \text{const.}$). Cette condition est remplie par la relation

$$\bar{r}_{uu} = m\bar{r} + a\bar{r}_u + b\bar{r}_v + c\bar{\alpha}, \tag{2}$$

qui montre que le vecteur $\bar{r}_{uu}$ se trouve dans l'espace (Π_3), $(m, a, b, c$ dépendent seulement des paramètres $u, v, w)$.

L'hyperplan tangent mené par (Π_3) le long d'une asymptotique double a un contact du deuxième ordre avec la variété (V_3) et il est donné par l'équation

$$[\bar{R} - \bar{r},\ \bar{r}_u,\ \bar{r}_v,\ \bar{\alpha},\ \bar{r}_{uv}\,dv + \bar{\alpha}_v\,dw] = 0. \tag{3}$$

Le vecteur $\bar{r}_{uv}\,dv + \bar{\alpha}_v\,dw$ est contenu dans (Π_3) et donc on aura

$$t\bar{r}_{uv} + s\bar{\alpha}_v = m'\bar{r} + a'\bar{r}_u + b'\bar{r}_v + c'\bar{\alpha}, \tag{4}$$

où s et t sont deux scalaires qui dépendent de u, v, w.

Si l'on choisit convenablement les lignes paramétriques sur la variété, les equations (3) et (5) peuvent être écrites sous la forme

$$\bar{r}_{uu} = B\bar{r}_v + C\bar{\alpha}_v, \quad t\bar{r}_{uv} + s\bar{\alpha}_v = B'\bar{r} + C'\bar{\alpha}. \tag{5}$$

En dérivant (5_2) par rapport à u et introduisant dans (5_1) on obtient

$$\begin{aligned} &B(t\bar{r}_{vv} + s\bar{\alpha}_v) + Ct\bar{\alpha}_v + (t - B')\bar{r}_{uv} + (s_u - C')\bar{\alpha}_u = \\ &= (B' - tB_v - sB_w)\bar{r}_v + (C'_u - tC_v - sC_w)\bar{\alpha}. \end{aligned} \tag{6}$$

Si l'on dérive encore une fois ce système par rapport à u, v, w, on obtient quatre equations différentielles en $\bar{r}_{vvv}$ et $\bar{\alpha}_{vv}$ qui en général ne sont pas intégrables.

On obtient des solutions dans plusieurs cas particuliers, par exemple:

a) $B=0$, $C\neq 0$, $\bar{\alpha}_v=0$; alors on a $\bar{\alpha}=\bar{\alpha}(u)$, $\bar{r}_{uu}=C\bar{\alpha}$, donc α est contenu dans le plan osculateur de la ligne (u). La surface directrice est, dans ce cas, une surface focale et la variété (V_3) est développable.

b) $B\neq 0$, $C=0$, $t=0$; on obtient

$$\bar{\alpha}_v=0,\quad \bar{\alpha}_u=\frac{B'}{s}\bar{r}_v+\frac{C'}{s}\bar{\alpha},$$

donc

$$\bar{\alpha}=l_1\bar{\alpha}_u+l_2\bar{\alpha}_v=m_1\bar{\rho}_u+m_2\bar{\rho}_v,$$

où les scalaires dépendent seulement de u, v et w. On est conduit ainsi aux mêmes conclusions, à savoir:

Une variété réglée à trois dimensions admet dans un espace à cinq dimensions deux systèmes de lignes asymptotiques doubles si elle est développable et si les génératrices se trouvent dans les plans osculateurs menés le long d'une ligne asymptotique double.

Institut Polytechnique de Jassy,
Chaire de Mathématiques I

BIBLIOGRAPHIE

1. Godeaux L., *Surfaces dont les réglées gauches asymptotiques d'un mode appartiennent à des complèxes linéaires.* Acad. Roy. Belg., Bull. Cl. Sci. (5), 1963, **49**, pp. 278–285.
2. — *Addition à la note „Surfaces...".* Acad. Roy. Belg., Bull. Cl. Sci. (5), 1963, **49**, pp. 527–528.
3. Togliatti E., *Sur les variétés à trois dimensions dans l'espace à cinq dimensions, dont les tangentes principales présentent des coïncidenses.* Publ. Inst. Mat. Univ. Genova, 1962, *97—98*, pp. 65—76.
4. — *Varietá a tre dimensioni particolari.* Rend. Sem. Mat. Univ. Torino, 1962, **21**, pp. 77—85.
5. Ruscior Şt., *Sur quelques classifications des hypersurfaces réglées en* E_5. Bul. Inst. polit. **Iaşi**, 1965, **XI (XV)**, *1—2*, pp. 31–37.
6. — *Quelques théorèmes sur les propriétés des hypersurfaces réglées dans* E_5. Bull. Acad. Pol. Sci., sér. math., 1965, **XIII**, pp. 201–203.

ASUPRA UNOR VARIETĂŢI RIGLATE CU LINII ASIMPTOTICE DUBLE ÎN E_5

(Rezumat)

Se studiază în E_5 varietăţile riglate cu trei dimensiuni care conţin două linii asimptotice duble. Cu ajutorul unui spaţiu liniar tangent acestor varietăţi se stabileşte că problema este posibilă pentru anumite varietăţi desfăşurabile.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

C. D. 515.2

PROIECȚIA CENTROAFINĂ ÎN REPREZENTAREA PLANĂ A SUPRAFEȚELOR CILINDRO-CONICE

DE

I. RUSU

Comunicare prezentată în sesiunea științifică a Institutului de construcții din București, din 9-11 decembrie 1965

1. Introducere

În lucrarea de față se vor considera suprafețele de revoluție cilindrul și conul. Reprezentarea acestora necesită în primul rînd reprezentarea proiecțiilor cercurilor directoare, care sînt elipse. Construcția acestora s-a efectuat în sistemul de referință plan axial, considerîndu-se că elipsele, ca proiecții ale cercurilor directoare, sînt curbe afine ale acestor cercuri date.

2. Proiecția cercului situat în planul π al reprezentării

Pentru găsirea proiecției unui cerc pe planul $P(P_0, P_z)$, (fig. 1), s-a considerat cercul $\Omega(\omega, \overline{\omega})$, situat în planul π al reprezentării. De oarece proiectînd un cerc pe un plan se obține o elipsă este suficient să se găsească proiecțiile a doi diametri principali pe planul P considerat, proiecții care sînt diametri conjugați în elipsa proiecție, curbă afină a cercului.

Elipsa $\Omega_1(\omega_1, \overline{\omega_1})$, este proiecția ortogonală pe planul π al elipsei Ω_{10}, ca proiecție ortogonală a cercului Ω dat din punctul P.

Se consideră prin centrul $\Omega(\omega_1, \overline{\omega})$ planul Q_1 perpendicular pe planele π și P, deci urma Q_{10} este o perpendiculară pe P_0. Se rabate acest plan în planul reprezentării, împreună cu intersecția sa cu planul P, notată cu Δ_{10} (fig. 1).

Se proiectează ortogonal în poziția rabătută centrul $\Omega(\omega, \overline{\omega})$ pe Δ_{10}, deci pe planul P, obținîndu-se Ω_{10}, care este proiecția centrului cercului dat. Apoi din Ω_{10} se duce o perpendiculară la urma $Q_{10} \equiv \delta_1$, piciorul acesteia fiind punctul ω_1. Segmentul $\omega_1\Omega_{10}$ reprezintă cota proiecției centrului cercului Ω cu ajutorul căreia se găsește proiecția axială. Același punct Ω_{10} este rabătut în planul π, obținîndu-se pe Q_{10} centrul Ω_1, una din soluțiile rabaterii.

Prin urmare punctul ω_1 este centrul elipsei din planul π iar $\overline{\Omega_1}$ este centrul elipsei rabătute în același plan π. Deoarece diametrul AB ($ab, \overline{ab}$) este paralel cu urma P_0 rezultă că proiecția sa ortogonală în planul P este o orizontală a acestui plan și deci și proiecția sa în planul π va fi o paralelă la urma P_0. Ducîndu-se din A și B perpendiculare pe P_0 se obțin la intersecția cu orizontala ($\overline{\Omega_1}$) punctele $\overline{A_1}$ și $\overline{B_1}$, și cu proiecția acesteia (ω_1), punctele a_1 și b_1. Segmentele $\overline{A_1}\,\overline{B_1}$ și $a_1 b_1$, paralele, fiind cuprinse între drepte paralele sînt egale și ele reprezintă axele

mari ale elipselor ω_1 şi $\overline{\Omega}$. Elipsa $\Omega_1(\omega_1, \overline{\omega_1})$ este apoi rabătută în planul π, obţinîndu-se elipsa $\overline{\Omega_1}$ ca proiecţie reală a cercului Ω dat.

Axele mici ale acestor elipse se găsesc cu ajutorul corenspondenţei afine ce există între cercul dat şi elipsele indicate.

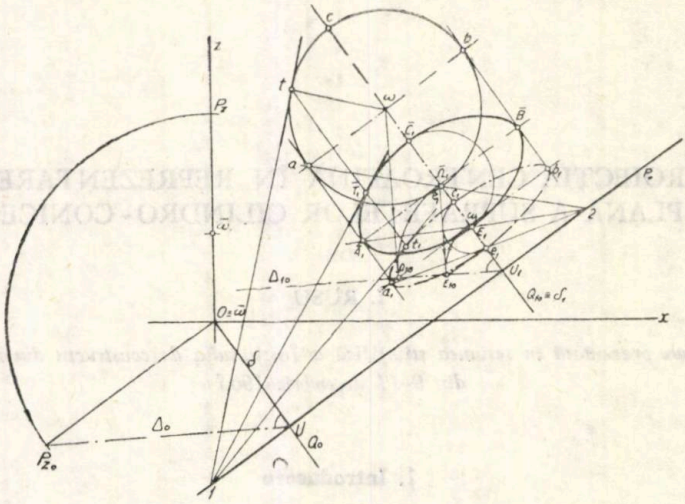


Fig. 1

În acest sens s-a considerat în cercul $\Omega(\omega, \overline{\omega})$ dreapta $AE\,(ae, \overline{ae})$, care intersectează axa P_0 în punctul *2*. Punctele afine $\overline{A_1}$ şi a_1 ale punctului $A(a, \overline{a})$ se unesc prin drepte cu punctul *2* de pe axa de afinitate P_0 şi la intersecţia cu $Q_{10} \equiv \delta_1$ se găsesc punctele $\overline{E_1}$ şi e_1, ca afine ale punctului $E(e, \overline{e})$. În acest mod s-au găsit şi semaxiale mici ale elipselor proiecţie ω_1 şi Ω_1 rabătută, ceea ce dă posibilitatea trasării acestora. Tangenta într-un punct $T(t, \overline{t})$ la cerc conduce la construcţia tangentelor în punctele afine T_1 şi t_1 la elipsele trasate.

3. Proiecţia cercului situat într-un plan vertical

Dacă cercul $\Omega(\omega, \overline{\omega})$ este situat într-un plan Q_0, proiectant faţă de planul reprezentării, π (fig. 2), atunci, ca şi în cazul precedent, se proiectează ortogonal pe planul P centrul cercului dat. Deci se duce prin ω o perpendiculară pe dreapta Δ_{10}, care este dreapta Δ_1 ca intersecţie a planului Q_1 cu planul P, rabătută în planul π şi pe care se obţine proiecţia Ω_{10}. Acest punct proiectat ortogonal pe planul π are ca proiecţie pe ω_1, iar rabătut în acelaşi plan π conduce la obţinerea soluţiei $\overline{\Omega_1}$. Primul punct, ω_1, reprezintă centrul elipsei proiecţie ortogonală a proiecţiei cercului Ω pe planul P. Al doilea punct, $\overline{\Omega_1}$, este centrul elipsei ca proiecţie a cercului Ω în planul P, dar rabătut în planul π al reprezentării. Cum cele două elipse ω_1 şi $\overline{\Omega_1}$ sînt curbe afine ale cercului Ω dat, rezultă că diametrului $AB\,(ab, \overline{ab})$ îi vor corespunde cel doi diametri afini $a_1 b_1$ şi $\overline{A_1}\,\overline{B_1}$.

În acest scop se consideră punctul *1* de intersecţie a urmei Q_{20} a planului Q_2 în care se află cercul dat şi deci şi diametrul $AB\,(ab, \overline{a}\,\overline{b})$, cu urma P_0 ca o axă de afinitate. Intersectînd aceste drepte cu urmele planelor în care se află traiectoriile rabaterii punctelor de

pe elipsă se obțin punctele a_1, b_1, $\overline{A_1}$ și $\overline{B_1}$. În acest mod $a_1 b_1$ este un diametru conjugat în elipsa ω_1 și $\overline{A_1}\,\overline{B_1}$ este de asemenea diametru conjugat în elipsa $\overline{\Omega_1}$. Diametrii $CE\,(ce, \overline{ce})$ și $AB\,(ab, \overline{ab})$ sînt principali în cercul Ω dat. Pentru a găsi proiecția extremității C se rabate acest punct în planul π, axă de rabatare fiind urma Q_{10}. Pentru aceasta se reduce prin perpendiculara la Q_{10} pe care se măsoară segmentul $\overline{Oc}$ a cărui lungime este egală cu raza cercului. Deci $\omega C_0 = Oc = Z_c$.

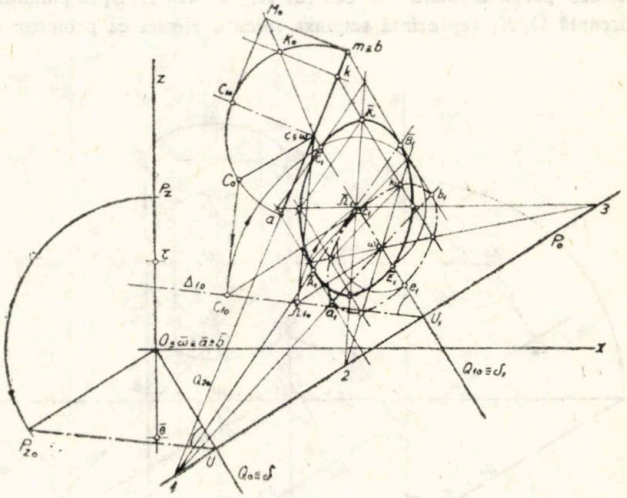


Fig. 2

În rabatere se proiectează ortogonal C_0 pe Δ_{10} găsindu-se proiecția C_{10}. Proiectînd acest punct în planul π pe $Q_{10} \equiv \delta_1$ se obține proiecția c_1. Același punct se rabate pe planul π prin trasarea arcului de cerc cu centrul în U_1 și de rază $U_1 C_{10}$ și care intersectează urma Q_{10} în $\overline{C_1}$, furnizînd astfel una din soluții.

În acest mod s-au determinat diametrii conjugați, care permit trasarea elipselor. În epură (fig. 2) s-au considerat și punctele în care diagonalele pătratului circumscris cercului îl intersectează. S-a rabătut pe planul π sfertul de cerc BC pe care diagonala ΩM îl intersectează în K; în rabatere este notat cu K_0. Se observă că în epură diagonalele proiectate și rabătute sînt afin corespondente, ele intersectîndu-se în punctele *2* și *3* de pe urma P_0. Punctul K_0 este proiectat ortogonal pe *ab*, obținîndu-se astfel proiecția *k*. Ducînd perpendiculara pe urma P_0 aceasta intersectează diagonalele în k_1 și $\overline{K_1}$. Prin simetrie în raport cu centrele ω_1 și $\overline{\Omega_1}$ se găsesc și celelalte puncte ale elipselor de pe diagonale.

4. Aplicații ale proiecției centroafine în reprezentarea plană a suprafețelor cilindro-conice

Pentru reprezentarea cilindrului circular drept este necesar ca în prealabil să se construiască elipsa ca proiecție a cercului director. Fie cercul $\Omega\,(\omega, \overline{\omega})$ curba directoare a cilindrului drept considerat (fig. 3). Se proiectează acest cerc pe planul (P_0, P_z) în sistemul de referință plan axial. În rabatere proiecția cercului are centrul în Ω_{10}. Rabătînd planul P pe planul reprezentării, se rabate și acest centru obținîndu-se soluția $\overline{\Omega_1}$. Prin centrul rabătut se duce

o paralelă la diametrul $AB\,(ab, \overline{ab})$, care intersectează în punctele $\overline{A}_1$ şi $\overline{B}_1$ proiectantele duse prin extremităţile diametrului indicat în raport cu planul de proiecţie P. Segmentul $\overline{A}_1\overline{B}_1$ constituie axa mare a elipsei proiecţie a cercului director. Considerînd această elipsă curbă afină a cercului Ω se poate găsi şi lungimea axei mici folosind procedeul indicat mai jos.

Se consideră în cercul proiecţie exrremităţile a şi k ale diametrilor principali indicaţi în epură (fig. 3). Coarda arcului ce are ca extremităţi aceste puncte se prelungeşte pînă la urma P_0 considerată axă de afinitate. Apoi se unesc printr-o dreaptă punctele 1 şi $\overline{A}_1$, dreaptă care intersectează perpendiculara în centrul $\overline{\Omega}_1$ la axa $\overline{A}_1\overline{B}_1$ în punctul $\overline{K}_1$. Prin urmare segmentul de dreaptă $\overline{\Omega}_1\overline{K}_1$ reprezintă semiaxa mică a elipsei ca proiecţie a cercului Ω.

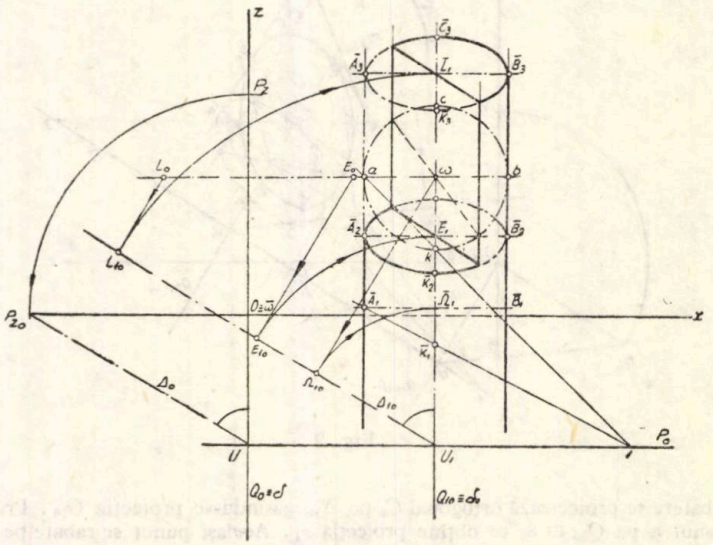


Fig. 3

Ca aplicaţie a reprezentării cilindrului s-a considerat îmbinarea în jumătatea lemnului (în cazul materialului de lemn neecarisat). În acest sens s-a considerat planul proiectant Q_1 dus prin axa cilindrului, faţă de planul π şi faţă de planul P, care apoi se rabate pe planul reprezentării, împreună cu $\Delta_1\,(\delta_1, \Delta_{10})$. Pe axa rabătută a cilindrului se consideră punctele E_0 şi L_0 corespunzătoare planelor de nivel în intervalul cărora se înscrie îmbinarea. Se proiectează ortogonal aceste puncte pe Δ_{10}, iar apoi se rabat pe axa cilindrului. Această operaţie se reduce la a trasa arce de cerc cu centrul în U_1 şi de lungime U_1L_{10}, U_1E_{10}, analog ca în cazul obţinerii centrului $\overline{\Omega}_1$ al elipsei ca proiecţie al cercului de bază al cilindrului.

În acest mod se obţin centrele $\overline{E}_1$ şi L_1 ale celor două elipse ce se consideră proiecţiile cercurilor de secţiune dreaptă în cilindrul dat. Prin aceste centre se duc axele mari $\overline{A}_2\overline{B}_2$ şi $\overline{A}_3\overline{B}_3$, iar pe axa cilindrului (perpendiculara la aceste axe în centrele E_1 şi L_1) se măsoară de o parte şi de alta a centrelor menţionate semiaxiale mici atfel încît $\overline{\Omega}_1\overline{K}_1 = \overline{E}_1\overline{K}_2 = \overline{L}_1\overline{K}_3$.

Cunoscînd axele acestor elipse ele se pot trasa, construindu-se în acest scop un număr suficient de puncte.

Apoi s-a considerat în cercul $\Omega(\omega, \overline{\omega})$ diametrul prin ale cărui extremități se duc generatoarele de secțiune longitudinală necesare reprezentării îmbinării menționate. S-a trasat cu linie continuă groasă conturul văzut al îmbinării, cu linie punct conturul părții ce se detașează din cilindru, astfel încît proiecția obținută reprezintă îmbinarea în jumătatea lemnului.

5. Proiecția centroafină a bolții

În reprezentarea elementelor de construcții și de arhitectură se vor considera corpurile geometrice ce alcătuiesc forma obiectului dat. În fig. 4 s-a considerat o boltă, constituită din două coloane de secțiune pătrată, care sînt racordate la partea superioară printr-o pînză semicilindrică. Planul de nivel al punctului $K(k, \overline{k})$ reprezintă planul de naștere. Proiecția semicilindrului de racordare se reduce de fapt la construcția arcelor de elipsă (anterior și posterior) ca proiecții ale celor două semicercuri, curbe directoare ale cercului bolții.

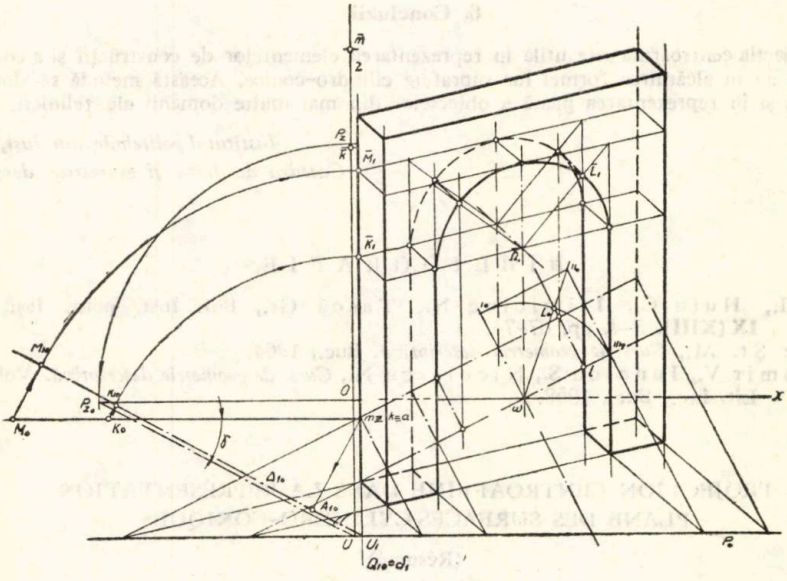


Fig. 4

S-a considerat proiecția ortogonală a asestui element pe planul π. Planul Q_1 dus prin muchia AM este rabătut în planul reprezentării. Pe dreapta Δ_{10} din rabatere se proiectează ortogonal muchia indicată astfel încît $A_{10} M_{10} = A_0 M_0 \cos \gamma = AM \cos \gamma$.

Se construiesc în modul arătat proiecțiile coloanelor pînă la planul de nivel M tangent la pînza semicilindrică a arcului după generatoarea punctului I. Distanța de la acest punct I (numit cheie) pînă la planul de nivel ce limitează înălțimea este egală cu latura pătratului ca secțiune dreaptă în coloane. Planul de nivel al punctului K reprezintă planul nașterii arcului. Pentru cele două semicercuri proiectate pe planul P se cunosc punctele de naștere și punctul cheie. Pentru trasarea semielipselor ca proiecție a semicercurilor menționate s-au considerat și punctele de intersecție dintre cercul din care face arcul bolții și diagonalele pătratului circumscris. Astfel s-a considerat rabătut în planul reprezentării sfertul de cerc cu centrul în Ω, unul din vîrfurile pătratului $\Omega - I - II - III$. Punctul $L(l, L_0)$ este rezultat din intersecția sfertului de cerc $\Omega(\omega, \overline{\omega})$ cu diagonala $\Omega \pi_0$.

BUDAPEST MŰSZAKI KÖZPONTI KÖNYVTÁR 1948

Prin proiecția l se duce perpendiculara la urma P_0, care intersectează diagonala proiecției $\overline{\Omega}_1 \overline{II}_1$ în punctul $\overline{L}_1$. Acesta este apoi găsit și pe diagonala doua, precum și pe diagonalele pătratului circumscris arcului posterior.

Punctele găsite permit trasarea proiecției bolții considerate ținîndu-se seama de vizibililitate.

Proiecția centroafină adaptată la reprezentarea suprafețor cilindroconice de revoluție, necesită construcția proiecției curbelor directoare.

Elipsa ca proiecție a cercului fiind curba afină a acestuia poate fi construită cu ajutorul axelor sale, a diametrilor conjugați sau prin puncte, elemente care se găsesc cu ajutorul proiecției menționate în sistemul de referință planaxial.

Construcția proiecției centroafine a suprafețelor cilindro-conice se completează prin trasarea generatoarelor de contur aparent precum și acelea corespunzătoare punctelor curbelor directoare cu ajutorul cărora acestea au fost trasate.

6. Concluzii

Proiecția centroafină este utilă în reprezentarea elementelor de construcții și a construcțiilor, care au în alcătuirea formei lor suprafețe cilindro-conice. Această metodă se dovedește avantajoasă și în reprezentarea plană a obiectelor din mai multe domenii ale tehnicii.

Institutul politehnic din Iași,
Catedra de desen și geometrie descriptivă

BIBLIOGRAFIE

1. Rusu I., Huiu C., Irimiciuc N., Taşcă Gr., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1963, **IX (XIII)**, *3-4*, pp. 67-74.
2. Botez Şt. M., *Curs de geometrie descriptivă*. Buc., 1964.
3. Dragomir V., Ionescu S., Nicolescu N., *Curs de geometrie descriptivă*. Vol. **I, II**, Lit. inv., Buc., 1958.

PROJECTION CENTROAFFINE DANS LA REPRÉSENTATION PLANE DES SURFACES CYLINDRO-CONIQUES

(Résumé)

Dans cette Note on a représenté les surfaces cylindro-coniques dans le système de références plan axial en utilisant la projection centroaffine.

On a considéré comme courbes directrices de ces surfaces des cercles, qui, dans une projection parallèle se transforment en ellipses directrices. En considérant ensuite les génératrices de contur apparent et certaines positions instantanées eu correspondance avec les points, à l'aide des quelles on a tracé ces courbes projections, le contour apparent de l'objet est complété avec les projections des côtés ou des génératrices qui caractérisent la forme et la grandeur de celui-ci.

La méthode préconisée n'utilise pas des coefficients ou des échelles de déformation, celles-ci en résultant des constructions effectuées, compte tenu de la correspondance d'homologie affine, adaptée au systèmes de références plan axial.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

D. K. 517.946.81 ; 538.56

ÜBER DIE EINDEUTIGE FORTSETZBARKEIT DER LÖSUNGEN DER MAXWELLSCHEN GLEICHUNGEN IN ANISOTROPEN INHOMOGENEN MEDIEN

VON

ROLF LEIS

1. Vorwort

Es sei G ein Gebiet im R^n und $u \in C_1(G)$ in G zweimal stückweise stetig differenzierbar. Es sei L ein linearer elliptischer Differentialoperator zweiter Ordnung mit Koeffzienten aus $C_2(G)$, und es gelte $Lu = F(x, u, \nabla u)$ mit $|F| \leqslant K(|u| + |\nabla u|)$. Dann gilt folgender Satz: *u verschwinde in der Umgebung eines Punktes* $x_0 \in G$. *Dann verschwindet u in G identisch.* D. h. u ist in G eindeutig fortsetzbar.

Sätze dieser Art wurden für partiellle Differentialgleichungen mit nichtanalytischen Koeffizienten zuerst von Carleman [2] für den R^2 und von Müller [5] für den R^n bewiesen. Sie wurden u. a. von Calderon [1] und Hörmander [3] auf Differentialgleichungen und Systeme höherer Ordnung mit einfachen Charakteristiken übertragen. Im Falle mehrfacher Charakteristik ist die Frage nach der Fortsetzbarkeit nicht geklärt. Es gibt sowohl Beispiele dafür, dass die eindeutige Fortsetzbarkeit gilt (z. B. $L = \Delta^k$), als auch Gegenbeispiele (Plis̆ [7]).

Für das System der Maxwellschen Gleichungen im R^3

$$\text{(1)} \qquad \text{rot}\,\mathbf{H} + i\omega\varepsilon\mathbf{E} = 0, \qquad \text{rot}\,\mathbf{E} - i\omega\mu\mathbf{H} = 0,$$

in isotropen inhomogenen Medien (ε, μ sind skalarwertige positive Funktionen) wurde die eindeutige Fortsetzbarkeit der Lösungen von Müller [6] bewiesen.

Wir wollen in dieser Note den allgemeinen Fall anisotroper inhomogener Medien behandeln (ε, μ sind positiv definite Matrizen mit variablen Koeffizienten). Da die Charakteristiken der Maxwellschen Gleichungen i. a. mehrfach sind, lässt sich die Fragestellung nicht direkt auf bekannte Fälle zurückführen.

Zum Beweis der eindeutigen Fortsetzbarkeit der Lösungen der Maxwellschen Gleichungen gehen wir von einer Abschätzung aus, die Protter [8] für elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung angegeben hat, und aus der die eindeutige Fortsetzbarkeit unmittelbar folgt. Wir werden zeigen, dass eine ähnliche Abschätzung für die Lösungen der Maxwellschen

Gleichungen gilt. Im ersten Teil der Note leiten wir die Prottersche Abschätzung kurz her und beweisen anschliessend im zweiten Teil die eindeutige Fortsetzbarkeit der Lösungen der Maxwellschen Gleichungen.

2. Elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Es sei[1] $Lu = a_{ik}\partial_i\partial_k u$ mit $a_{ik} \in C_2(G)$ und

$$c_0|\xi|^2 \leqslant a_{ik}\xi_i\xi_k \leqslant C_0|\xi|^2 \tag{2}$$

ein elliptischer Differentialoperator. O. B. d. A. sei $a_{ik} = a_{ki}$. Es sei x_0 Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems und $r = |x - x_0|$. Zum Beweis der eindeutigen Fortsetzbarkeit für L gehen wir davon aus, dass für jedes positive β und $r \to 0$, $e^{r^{-\beta}}u(x) \to 0$ gilt. Es sei $K(R) = \{x \,||\, x| < R\}$ mit $R < 1$ und $K(R) \subset G$. Wir werden eine Abschätzung für u herleiten, aus der $u(x) = 0$ für $|x| \leqslant R/2$ folgt. Daraus erhält man durch Ausschöpfen des Gebietes G durch Kugelketten, dass u in G verschwindet.

Um diese Abschätzung herzuleiten, glätten wir u ausserhalb $K(R/2)$ zu Null ab. Dann entstehen bei partiellen Integrationen keine Randterme. Es sei also etwa $\psi \in C_\infty$ eine Testfunktion von $K(R)$ mit

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| \leqslant \dfrac{R}{2}, \\ 0 & \text{für } |x| \geqslant R. \end{cases}$$

Dann bezeichnen wir das Produkt einer Funktion f mit ψ durch $\hat{f}$, $(\hat{f} = f\psi)$. Es sei $\varphi = e^{r^{-\beta}}$ und $v = \varphi u$. Dann gilt

$$\varphi^2(L\hat{u})^2 = [L\hat{v} + 2a_{ij}\varphi(\partial_i\varphi^{-1})\partial_j\hat{v} + \varphi\hat{v}L\varphi^{-1}]^2.$$

Wegen $(a + b + c)^2 \geqslant 2b(a + c)$ folgt daraus

$$\varphi^2(L\hat{u})^2 \geqslant 4a_{ij}\varphi(\partial_i\varphi^{-1})(\partial_j\hat{v})(L\hat{v} + \varphi\hat{v}L\varphi^{-1}).$$

Durch elementare Rechnung erhalten wir

$$\varphi\partial_i e^{-r^{-\beta}} = \beta x_i r^{-(\beta+2)},$$

$$\varphi L e^{-r^{-\beta}} = a_{ij}\left[\frac{\beta^2 x_i x_j}{r^{2\beta+4}} - \frac{\beta(\beta+2)x_i x_j}{r^{\beta+4}} + \frac{\beta\delta_{ij}}{r^{\beta+2}}\right].$$

Durch Integration über den R^n folgt daher

$$\int \varphi^2 r^{\beta+2}(L\hat{u})^2 \mathrm{d}x \geqslant 4\beta \int a_{ij}x_i(\partial_j\hat{v})(L\hat{v} + \varphi\hat{v}L\varphi^{-1})\mathrm{d}x. \tag{3}$$

[1] über doppelt vorkommende Indizes wird summiert

Wir schätzen nun die beiden auf der rechten Seite von Gl. (3) auftretenden Integrale einzeln ab. Es ist

$$4\beta\int a_{ij}x_i(\partial_j\hat{v})L\hat{v}\,dx = 4\beta\int\partial_l[a_{ij}x_i(\partial_j\hat{v})a_{kl}\partial_k\hat{v}]\,dx -$$

$$-2\beta\int\partial_j[a_{ij}x_i(\partial_k\hat{v})a_{kl}\partial_l\hat{v}]\,dx + R_1,$$

mit

$$|R_1| \leqq k_1\beta\int(\nabla\hat{v})^2\,dx.$$

Wegen $\nabla\hat{v} = \varphi[\nabla\hat{u} - \beta\hat{u}xr^{-(\beta+2)}]$ folgt

$$(\nabla\hat{v})^2 \leqq 2\varphi^2[(\nabla\hat{u})^2 + \beta^2\hat{u}^2r^{-(2\beta+2)}];$$

wir erhalten daher

$$(4)\qquad 4\beta\left|\int a_{ij}x_i(\partial_j\hat{v})L\hat{v}\,dx\right| \leqq k_2\beta\int\varphi^2\left[(\nabla\hat{u})^2 + \frac{\beta^2\hat{u}^2}{r^{2\beta+2}}\right]dx.$$

Dabei hängen die auftretenden Konstanten nicht von β ab.

Im zweiten Integral der rechten Seite von Gl. (3) dominiert in $L\varphi^{-1}$ wegen $R<1$ und Gl. (2) der Term $\beta^2a_{ij}x_ix_jr^{-(2\beta+4)}$, und wir erhalten mit $k_i>0$

$$4\beta^3\int a_{ij}x_i(\partial_j\hat{v})\hat{v}a_{kl}\frac{x_kx_l}{r^{2\beta+4}}\,dx = -2\beta^3\int\hat{v}^2\partial_j\left(a_{ij}x_ia_{kl}\frac{x_kx_l}{r^{2\beta+4}}\right)dx \geqslant$$

$$\geqslant k_3\beta^3(2\beta+4)\int\hat{v}^2a_{ij}a_{kl}\frac{x_ix_kx_jx_l}{r^{2\beta+6}}\lambda\,dv \geqslant k_4\beta^4\int\frac{\hat{v}^2}{r^{2\beta+2}}dx.$$

Zusammen mit Gl. (4) folgt daher aus Gl. (3) für genügend gross β

$$(5)\qquad k_5\beta^4\int\frac{\hat{v}^2}{r^{2\beta+2}}dx \leqq \int\varphi^2r^{\beta+2}(L\hat{u})^2dx + k_2\beta\int\varphi^2(\nabla\hat{u})^2dx.$$

Nun gilt

$$\int\varphi^2(\nabla\hat{u})^2\,dx \leqq \frac{1}{c_0}\int\varphi^2(\partial_i\hat{u})a_{ik}\partial_k\hat{u}\,dx = -\frac{1}{c_0}\int\hat{u}\partial_i(\varphi^2a_{ik}\partial_k\hat{u})dx =$$

$$= -\frac{1}{c_0}\int\hat{u}\varphi^2L\hat{u}\,dx + R_2,$$

mit

$$|R_2| = \left|\frac{1}{c_0}\int\hat{u}(\partial_i\varphi^2a_{ik})\partial_k\hat{u}\,dx\right| \leqq k_6\beta^2\int\frac{\hat{u}_2\varphi^2}{r^{2\beta+2}}dx.$$

Wegen

$$2\int \hat{v}\varphi L\hat{u}\,dx = 2\int\left[\hat{v}\left(\frac{\beta}{r^{\beta+2}}\right)^{1/2}\right]\left[\varphi L\hat{u}\left(\frac{r^{\beta+2}}{\beta}\right)^{1/2}\right]dx \leqslant$$

$$\leqslant \beta\int\frac{\hat{v}^2}{r^{\beta+2}}\,dx + \frac{1}{\beta}\int\varphi^2 r^{\beta+2}(L\hat{u})^2\,dx,$$

folgt daraus

$$\beta\int\varphi^2(\nabla\hat{u})^2\,dx \leqslant k_7\beta^3\int\frac{\hat{v}^2}{r^{2\beta+2}}\,dx + \int\varphi^2 r^{\beta+2}(L\hat{u})^2\,dx.$$

Zusammen mit Gl. (5) erhalten wir daher mit $c_i > 0$ für alle $\beta \geqslant \beta_0 > 0$

$$\beta^4\int\frac{\varphi^2\hat{u}^2}{r^{2\beta+2}}\,dx + c_1\beta\int\varphi^2(\nabla\hat{u})^2\,dx \leqslant c_2\int\varphi^2 r^{\beta+2}(L\hat{u})^2\,dx. \tag{6}$$

Gl. (6) ist die gewünschte Abschätzung. Genügt u einer Differentialgleichung $Lu = F(x, u, \nabla u)$ mit $|F| \leqslant K(|u| + |\nabla u|)$, dann folgt aus Gl. (6), dass u in $K(R/2)$ verschwindet. Wir führen den Schluss in nächsten Abschnitt durch.

3. Die Maxwellschen Gleichungen

Es seien nun $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ Lösungen der Maxwellschen Gleichungen (1). $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ seien aus $C_1(G)$ und zweimal stückweise stetig differezierbar. Es gelte $\varepsilon, \mu \in C_2(G)$. Dann folgt aus Gl. (1)

$$\operatorname{div}\varepsilon\mathbf{E} = \operatorname{div}\mu\mathbf{H} = 0. \tag{7}$$

Insbesondere gilt also

$$0 = \partial_i(\varepsilon_{ij}E_j) = \varepsilon_{ij}\partial_i E_j + E_j\partial_i\varepsilon_{ij}.$$

Daraus folgt

$$\varepsilon_{ij}\partial_i\partial_1 E_j = -(\partial_1\varepsilon_{ij})\partial_i\mathbf{E}_j - \partial_1(E_j\partial_i\varepsilon_{ij}).$$

Wegen $\operatorname{rot}\mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}$ gilt

$$\partial_1 E_j = \partial_j E_1 + f(x, \mathbf{H}),$$

wobei f linear von $\mathbf{H}$ abhängt. Wir erhalten daher

$$\varepsilon_{ij}\partial_i\partial_j E_1 = F_1(x, \mathbf{E}, \mathbf{H}, \partial\mathbf{E}, \partial\mathbf{H}), \tag{8}$$

wobei F_1 linear von $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \partial\mathbf{E}$ und $\partial\mathbf{H}$ abhängt. Gl. (8) ist eine elliptische Differentialgleichung zweiter Ordnung für E_1, deren Hauptteil symmetrisch geschrieben werden kann. Analoge Gleichungen gelten für die übrigen Komponenten von $\mathbf{E}$ und $\mathbf{H}$

(9) $$L_1 E_j = F_j(x, \mathbf{E}, \mathbf{H}, \partial\mathbf{E}, \partial\mathbf{H}), \quad L_2 H_j = G_j(x, \mathrm{E}, \mathbf{H}, \partial\mathbf{E}, \partial\mathbf{H})$$

mit $L_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ji})\partial_i\partial_j$, $L_2 = \frac{1}{2}(\mu_{ij} + \mu_{ji})\partial_i\partial_j$. Durch Addition entsteht daher aus Gl. (6) mit $g = |\hat{\mathbf{E}}|^2 + |\hat{\mathbf{H}}|^2$ und $g_1 = \sum_{i=1}^{3}(|\nabla\hat{E}_i|^2 + |\nabla\hat{H}_i|^2)$

(10) $$\beta^4 \int \frac{\varphi^2 g}{r^{2\beta+2}}\,\mathrm{d}x + c_1\beta\int \varphi^2 g_1\,\mathrm{d}x \leqslant c_2 \int \varphi^2 r^{\beta+2} \sum_{j=1}^{3}(|L_1\hat{E}_j|^2 + |L_2\hat{H}_j|^2)\mathrm{d}x.$$

Aus Gl. (10) folgt, dass $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ in $K(R/2)$ verschwinden. Das sieht man folgendermassen: Wegen $|F_j|^2$, $|G_j|^2 \leqslant K(g + g_1)$ und $r \leqslant R < 1$ gilt

$$c_2 \sum_{j=1}^{3}(|L_1\hat{E}_j|^2 + |L_2\hat{H}_j|^2) \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} c_2 \sum_{j=1}^{3}(|F_j|^2 + |G_j|^2) \leqslant c_3[g r^{-(3\beta+4)} + g_1 r^{-(\beta+2)}] \text{ für } |x| \leqslant \dfrac{R}{2}, \\ c_4' \leqslant c_4 r^{-(3\beta+4)} \text{ für } |x| \geqslant \dfrac{R}{2}. \end{cases}$$

Wir verkleinern nun die linke Seite von Gl. (10), indem wir die Integrale nur über $|x| \leqslant R/2$ erstrecken. Dann folgt

$$(\beta^4 - c_3)\int_{|x|\leqslant R/2} \frac{\varphi^2 g}{r^{2\beta+2}}\,\mathrm{d}x + (c_1\beta - c_3)\int_{|x|\leqslant R/2} \varphi^2 g_1\,\mathrm{d}x \leqslant c_4 \int_{R/2 \leqslant |x| \leqslant R} \frac{\varphi^2}{r^{2\beta+2}}\,\mathrm{d}x.$$

Wählen wir nun β so gross, dass $c_1\beta - c_3 > 0$ wird, dann können wir den Term mit $c_1\beta - c_3$ fortlassen und erhalten aus der Monotonie der Exponentialfunktion

$$(\beta^4 - c_3)\frac{\mathrm{e}^{2(R/2)^{-\beta}}}{(R/2)^{2\beta+2}} \int_{|x|\leqslant R/2} g\,\mathrm{d}x \leqslant c_4 \frac{\mathrm{e}^{2(R/2)^{-\beta}}}{(R/2)^{2\beta+2}},$$

also

(11) $$\int_{|x|\leqslant R/2} (|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{H}|^2)\mathrm{d}x \leqslant \frac{c_4}{\beta^4 - c_3}.$$

Für $\beta \to \infty$ erhalten wir daher $\mathbf{E} = \mathbf{H} = 0$ in $K(R/2)$, das war zu beweisen.

Zum Abschluss zeigen wir noch, dass die eindeutige Fortsetzbarkeit auch für die Lösungen des folgenden Gleichungssystems gilt

(12) $$B\mathbf{E} = -\operatorname{rot}\alpha \operatorname{rot}\mathbf{E} + \varepsilon \operatorname{grad}\operatorname{div}\varepsilon\mathbf{E} + \omega^2\varepsilon\mathbf{E} = 0.$$

mit $\alpha = \mu^{-1}$. Der Operator B entsteht aus den Maxwellschen Gleichungen und wird in [4] zum Beweis von Existenzsätzen benutzt.

Aus Gl. (12) folgt durch Differenzieren

$$\operatorname{div} \varepsilon \operatorname{grad} U + \omega^2 U = 0, \tag{13}$$

mit $U = \operatorname{div} \varepsilon \mathbf{E}$. Der Operator $\operatorname{div} \varepsilon \operatorname{grad}$ ist elliptisch, mithin gilt für Gl. (13) die eindeutige Fortsetzbarkeit. Setzen wir voraus, dass $\mathbf{E}$ in der Umgebung des Punktes $x_0 \in G$ verschwindet, dann verschwindet U also in G identisch. Mit

$$\mathbf{H} = -i\omega^{-1} \alpha \operatorname{rot} \mathbf{E}$$

folgen daher aus Gl. (12) die Maxwellschen Gleichungen. Mithin gilt auch für $\mathbf{E}$ selbst die eindeutige Fortsetzbarkeit.

Eingegangen am 22 II 1963

Universität Bonn,
Bundesrepublik Deutschland

LITERATURVERZEICHNIS

1. Calderón A. P., *Uniqueness in the Cauchy Problem for Partial Differential Equations.* Am. J. Math., 1958, **80**, pp. 16—36.
2. Carleman T., *Sur les systèmes linéaires aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables.* C. R. Acad. Sci. Paris, 1933, **197**, pp. 471—474.
3. Hörmander L., *Linear Partial Differential Operators.* Berlin, 1964.
4. Leis R., *Zur Theorie elektromagnetischer Schwingungen in anisotropen inhomogenen Medien.* Math. Z., 1968, (ins Druck).
5. Müller C., *On the Behaviour of Solutions of the Differential Equation* $\Delta u = F(x, u)$ *in the Neighborhood of a Point.* Comm. Pure Appl. Math., 1954, **7**, pp. 505—551.
6. Müller C., *Grundprobleme der mathematischen Theorie elektromagnetischer Schwingungen.* Berlin, 1957.
7. Plíš A., *A Smooth Linear Elliptic Differential Operator without any Solution in a Sphere.* Comm. Pure Appl. Math., 1961, **14**, pp. 599—617.
8. Protter M. H., *Unique Continuation for Elliptic Equations.* Trans. Am. Math. Soc., 1960, **95**, pp. 81—91.

ASUPRA PRELUNGIRII UNIVOCE A SOLUȚIILOR ECUAȚIILOR LUI MAXWELL ÎN MEDII ANIZOTROPE NEOMOGENE

(Rezumat)

Folosind o evaluare dată de Protter [8] referitoare la ecuații diferențiale cu derivate parțiale de ordinul al doilea da tip eliptic, se demonstrează prelungirea univocă a soluțiilor ecuațiilor lui Maxwell în medii anizotrope neomogene.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

D. C. 532.51

ON ONE DIMENSIONAL VISCOUS COMPRESSIBLE FLOW

BY

S. GHOSHAL

Consider the motion of a viscous, compressible heat-conducting fluid from $-\infty$ to ∞. The flow is assumed to be steady and entirely in the direction of x-axis; the equations governing the motion are :

$$\frac{d}{dx}(\rho u) = 0, \tag{1}$$

$$\rho u \frac{du}{dx} = -\frac{dp}{dx} + \frac{4}{3}\cdot\frac{d}{dx}\left(\mu \frac{du}{dx}\right), \tag{2}$$

$$\rho u C_p \frac{dT}{dx} = u\frac{dp}{dx} + \frac{d}{dx}\left(K\frac{dT}{dx}\right) + \frac{4}{3}\mu\left(\frac{du}{dx}\right)^2, \tag{3}$$

$$p = R\rho T. \tag{4}$$

Here we have assumed $C_p = \text{const.}$

We further assume

$$T = T(u). \tag{5}$$

Equation (3) becomes

$$\rho u C_p T' \frac{du}{dx} = u\frac{dp}{dx} + \frac{d}{dx}\left(K\frac{dT}{dx}\right) + \frac{4}{3}\mu\left(\frac{du}{dx}\right)^2, \tag{6}$$

where $dT/du = T'$, $d^2T/du^2 = T''$ etc.

From (2) and (6)

$$C_p T'\left[-\frac{dp}{dx} + \frac{4}{3}\cdot\frac{d}{dx}\left(\mu\frac{du}{dx}\right)\right] = u\frac{dp}{dx} + \frac{d}{dx}\left(K\frac{dT}{dx}\right) + \frac{4}{3}\mu\left(\frac{du}{dx}\right)^2,$$

$$-\frac{dp}{dx}(C_p T' + u) + \frac{3}{4}\left[C_p T'\frac{d}{dx}\left(\mu\frac{du}{dx}\right) - \frac{3}{4}T'\frac{d}{dx}\left(K\frac{du}{dx}\right)\right] =$$

$$= \left(KT'' + \frac{4}{3}\mu\right)\left(\frac{du}{dx}\right)\Bigg]^2,$$

whence

$$-\frac{dp}{dx}(C_p T' + u) + \frac{4}{3} T' C_p \frac{\mathcal{P}r - 3/4}{\mathcal{P}r} \cdot \frac{d}{dx}\left(\mu \frac{du}{dx}\right) = \left(KT'' + \frac{4}{3}\mu\right)\left(\frac{du}{dx}\right)^2 .$$

If $\mathcal{P}r = 3/4 = C_p \mu/K$ and

$$T'' = -\frac{4}{3} \cdot \frac{\mu}{K} = -\frac{1}{C_p} , \tag{8}$$

a solution of (7) is

$$C_p T' + u = 0 \tag{9}$$

i. e.

$$C_p T + \frac{u^2}{2} = C_1 = C_p T_0 + \frac{u_0^2}{2}, \quad (C_1 = \text{const.}),$$

and finally

$$\frac{T}{T_0} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2 (1 - v^2), \tag{10}$$

which is identical with the energy integral deduced by M. Morduchow and P. A. Libby [1]

Abbreviations

T — Absolute temperature,
C_p — Specific heat at constant pressure,
C_v — Specific heat at constant volume,
K — Coefficient of heat conductivity,
$\mathcal{P}r$ — Prandtl's number,
R — $C_p - C_v$,
p — Density of the fluid.
Subscripts 0 denotes the condition at $-\infty$ and subscripts ∞ denotes the condition at ∞.

Recived the 1 V 1967

Jadavpur University,
Calcutta, India

REFERENCES

1. Morduchow M., Libby P. A., J. Aeronaut. Sci., 1946, **16**, pp. 674–694.

ASUPRA CURGERII VÎSCOASE, UNIDIMENSIONALE, A UNUI FLUID

(Rezumat)

Se obține soluția în problema curgerii vîscoase, unidimensionale, a unui fluid, în ipoteza cînd numărul lui Prandtl este $\mathcal{P}r = 3/4$. Rezultatele obținute sînt comparate cu alte soluții [1].

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

УДК 517.933

МЕТОД АСИМПТОТИЧЕСКОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ СО МНОГИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Д. Д. БАЙНОВ

1. Рассматривается квазилинейная неавтономная система, уравнения движения которой имеют вид

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i + \mu F_s(t, x_1, \ldots, x_n, \mu), \quad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

где α_{si} — постоянные.

В работе [1] Н. Н. Боголюбов и Ю. А. Митропольский разработали метод асимптотического интегрирования уравнений (1), позволяющий изучать не только стационарные периодические состояния системы, но и переходные процессы. Они однако ограничились рассмотрением того частного случая, когда фундаментальное уравнение порождающей системы имеет пару критических (чисто мнимых) корней.

В настоящей работе результаты, полученные в [1], обобщаются на случай произвольного числа критических корней. При этом дается иной способ вычисления периодических решений.

2. Предположим, что величины $F_s(t, x_1, \ldots, x_n, \mu)$ в уравнениях (1) суть аналитические функции переменных $x_1, \ldots, x_n$ и параметра μ при достаточно малых его значениях, в некоторой области G. По отношению к t, F_s является периодической функцией периода 2π.

Допустим, что фундаментальное уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \rho & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} - \rho \end{vmatrix} = 0 \tag{2}$$

порождающей системы ($\mu = 0$) имеет нулевой корень кратности l_0 и r пар чисто мнимых корней вида $\pm p_j \mathrm{i}$, $(j = 1,..., r)$, где p_j — целые числа и что кратности этих корней равны соответственно $l_1,..., l_r$.

Обозначим число групп решений линейных уравнений (3), которые соответствуют этим критическим корням соответственно через $k_0, k_1,..., k_r$.

Пусть $k_0 + 2k_1 + ... + 2k_r = m$. Тогда, как известно, порождающая система (3) допускает m линейно независимых периодических периода 2π решений $\varphi_{s1},..., \varphi_{sm}$. А именно, нулевому корню отвечают k_0 решений вида $x_s = A_s^{(l)}$, $(l = 1, 2,..., k_0)$, в которых все величины $A_s^{(l)}$ являются постоянными, а каждой паре чисто мнимых корней $\pm p_j \mathrm{i}$ отвечают $2k_j$ решений вида

$$\begin{cases} x_s = B_{sj}^{(l)} \cos p_j t + C_{sj}^{(l)} \sin p_j t, \\ x_s = B_{sj}^{(l)} \sin p_j t - C_{sj}^{(l)} \cos p_j t, \quad (l = 1,..., k_j), \end{cases}$$

где B_{sj}, C_{sj} — постоянные. Таким образом, порождающая система (3) допускает семейство периодических периода 2π решений, зависящее от m произвольных постоянных $M_1,..., M_m$

$$x_s = M_1^* \varphi_{s1}(t) + ... + M_m^* \varphi_{sm}(t). \tag{4}$$

Будем искать решение системы (1) в виде

$$x_s(t, \mu) = \sum_{k=1}^{m} M_k \varphi_{sk}(t) + \mu u_s^{(1)}(t, M_1,..., M_m) + \mu^2 u_s^{(2)}(t, M_1,..., M_m) + ..., \tag{5}$$

где $u_s^{(\nu)}$, $(\nu = 1, 2,...)$, периодические периода 2π функции по отношению к t, подлежащие определению, а $M_1,..., M_m$ являются решениями уравнений

$$\frac{\mathrm{d}M_k}{\mathrm{d}t} = \sum_{l=1}^{\infty} \mu^l E_k^{(l)}(M_1,..., M_m), \quad (k = 1, 2,..., m), \tag{6}$$

где функции $E_k^{(l)}(M_1,..., M_m)$ также подлежат определению.

Дифференцируя (5) по времени и учитывая при этом (6), находим

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x_s}{\mathrm{d}t} &= \sum_{k=1}^{m} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\partial u_s^{(\nu)}}{\partial M_k} \mu^\nu \sum_{i=1}^{\infty} E_k^i \mu^i + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\partial u_s^{(\nu)}}{\partial t} \mu^\nu = \\ &= \frac{\partial u_s^{(0)}}{\partial t} + \mu \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u_s^{(0)}}{\partial M_k} E_k^{(1)} + \frac{\partial u_s^{(1)}}{\partial t} \right) + \\ &+ \mu^2 \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u_s^{(0)}}{\partial M_k} E_k^{(2)} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u_s^{(1)}}{\partial M_k} E_k^{(1)} + \frac{\partial u_s^{(2)}}{\partial t} \right) + \mu^3 [...]. \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь обозначено $u_s^{(0)} = \sum_{k=1}^{m} M_k \varphi_{sk}(t)$.

3. Подставляя разложения (5) в правые части уравнений (1), можем их записать следующим образом, разложив по степеням μ:

$$\mu F_s(t, x_1, \ldots, x_n, \mu) = \mu F_s(t, u_1^{(0)}, \ldots, u_n^{(0)}, 0) + \tag{8}$$
$$+ \mu^2 + \left[\left(\frac{\partial F_s}{\partial \mu}\right)_0 + \sum_{q=1}^{n}\left(\frac{\partial F_s}{\partial x_q}\right)_0 u_q^{(1)}\right] + \mu^3[\ldots].$$

Подставляем выражения (7), (5) и (8) в уравнение (1).

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, получим последовательно

$$\frac{du_s^{(0)}}{dt} = \sum_{q=1}^{n} a_{sq} u_q^{(0)}, \tag{9}$$

$$\frac{du_s^{(1)}}{dt} = \sum_{q=1}^{n} a_{sq} u_q^{(1)} - \sum_{k=1}^{m} E_k^{(1)} \varphi_{sk} + F_s(t, u_1^{(0)}, \ldots, u_n^{(0)}, 0), \tag{10}$$

$$\frac{du_s^{(2)}}{dt} = \sum_{q=1}^{n} a_{sq} u_q^{(2)} - \sum_{k=1}^{m} E_k^{(2)} \varphi_{sk} - \sum_{k=1}^{m} \frac{du_s^{(1)}}{dM_k} E_k^{(1)} + \sum_{q=1}^{n}\left(\frac{\partial F_s}{\partial x_q}\right)_0 u_q^{(1)} + \left(\frac{\partial F_s}{\partial \mu}\right)_0, \tag{11}$$

$$\frac{du_s^{(p)}}{dt} = \sum_{q=1}^{n} a_{sq} u_q^{(p)} - \sum_{k=1}^{m} E_k^{(p)} \varphi_{sk} + R_s^{(p)}, \quad (p = 3, 4, \ldots), \tag{12}$$

где функции $R_s^{(p)}$ зависят только от $u_s^{(0)}, \ldots, u_s^{(p-1)}$, $E_k^{(1)}, \ldots, E_k^{(p-1)}$.

Для того, чтобы система (10) допускала периодические решения необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_0^{2\pi} \sum_{\alpha=1}^{n} F_\alpha(t, u_1^{(0)}, \ldots, u_n^{(0)}, 0)\, \psi_{\alpha i}(t)\, dt - \int_0^{2\pi} \sum_{\alpha=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{m} E_k^{(1)} \varphi_{\alpha k}(t)\right] \psi_{\alpha i}(t)\, dt = 0. \tag{13}$$

$\psi_{\alpha i}$ — периодические решения системы, сопряженной с системой (3). Периодические решения ψ_{si} можно выбрать так, чтобы выполнялись соотношения $\sum_{\alpha=1}^{n} \varphi_{\alpha k} \psi_{\alpha i} = \delta_{ik}$, где δ_{ik} — символ Кронекера. Принимая это во внимание, уравнения (12) окончательно можно представить в виде:

$$\int_0^{2\pi} \sum_{\alpha=1}^{n} F_\alpha(t, u_1^{(0)}, \ldots u_n^{(0)}, 0)\, \psi_{\alpha i}(t)\, dt - \int_0^{2\pi} E_i^{(1)}(M_1, \ldots, M_m)\, dt = 0. \tag{14}$$

Далее, так как за период $M_1, \ldots, M_m$ меняются мало, считаем их постоянными при интегрировании. Поэтому из (14) находим:

$$E_i^{(1)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{\alpha=1}^{n} F_\alpha(t, u_1^{(0)},..., u_n^{(0)}, 0)\psi_{\alpha i}(t)\,dt. \tag{15}$$

Таким образом, функции $E_i^{(1)}$ могут быть всегда однозначно определены.

4. Подставляя (15) в (10), получим линейные неоднородные уравнения, из которых найдем

$$u_s^{(1)}(t, M_1,..., M_m) = C_1^{(1)}\varphi_{s1} + ... + C_m^{(1)}\varphi_{sm}(t) + \omega_s^{(1)}(t), \tag{16}$$

где $C_k^{(1)}$ — произвольные функции от $M_1,..., M_m$, не зависящие от t, $\omega_s^{(1)}$ — частное периодическое решение.

Предположим, что $u_s^{(1)},..., u_s^{(p-1)}$, $E_k^{(1)},..., E_k^{(p-1)}$ уже определены.

Рассмотрим уравнение (12). Для того, чтобы эти уравнения допускали периодические решения, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_0^{2\pi}\sum_{\alpha=1}^{n} R_\alpha^{(p)}\psi_{\alpha i}(t)\,dt - \int_0^{2\pi}\sum_{\alpha=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{m} E_k^{(p)}\varphi_{\alpha k}(t)\right]\psi_{\alpha i}(t)\,dt = 0. \tag{17}$$

Аналогично предыдущему из уравнений (17) найдем $E_k^{(p)}$ подставим в (12) и найдем из последних $u_s^{(p)}$, каждая из которых содержит m произвольных функций от $M_1,..., M_m$ и т. д.

Таким образом в первом приближении имеем:

$$x_s(t) = M_1\varphi_{s1}(t) + ... + M_m\varphi_{sm}(t), \tag{18}$$

где $M_1,..., M_m$ функции времени, определяемые уравнениями

$$\frac{dM_k}{dt} = \mu E_k^{(1)}(M_1,..., M_m), \tag{19}$$

в которых $E_k^{(1)}$ находится из уравнений (15).

В p-ом приближении будем иметь

$$x_s(t) = \sum_{k=1}^{m} M_k\varphi_{sk} + \mu u_s^{(1)} + ... + \mu^{p-1}u_s^{(p-1)}, \tag{20}$$

$$\frac{dM_h}{dt} = \mu E_k^{(1)} + ... + \mu^p E_k^{(p)}. \tag{21}$$

5. Для нахождения периодических решений уравнений (1) необходимо, очевидно, найти квазистатическое решение $M_k = M_k(\mu)$, $M_k(0) = M_k^*$, уравнений (6). Приравнивая к нулю правые части уравнений (6), получим следующую систему уравнений для определения искомого квазистатического решения

$$E_k^{(1)}(M_1,\ldots,M_m)+\mu E_k^{(2)}(M_1,\ldots,M_m)+\ldots=0. \tag{22}$$

Для того, чтобы эти уравнения имели решение вида $M_k=\overline{M}_k(\mu)$, $\overline{M}_k(0)=M_k^*$, необходимо, прежде всего, чтобы постоянные M_k^* были корнями уравнений

$$E_k^{(1)}(M_1^*,\ldots,M_m^*)=0. \tag{23}$$

Мы получили, таким образом, новый способ нахождения периодических решений уравнений (1) для случая, когда функции F_s являются аналитическими.

Поступила 16 XI 1966 г.

Институт механики и электротехники,
София, Н. Р. Болгария

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.* Физматгиз, М., 1963.

METODĂ DE INTEGRARE ASIMPTOTICĂ A ECUAŢIEI DE MIŞCARE A UNUI SISTEM NEAUTONOM CU MAI MULTE GRADE DE LIBERTATE

(Rezumat)

Se indică o metodă de integrare asimptotică a ecuaţiilor de tipul (1) corespunzătoare cazului unui număr arbitrar de rădăcini critice. Se furnizează un nou procedeu de obţinere a soluţiilor periodice ale ecuaţiei (1) atunci cînd funcţia F_s este analitică.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

C. D. 513.73; 532.521

ÉCOULEMENTS BAROTROPES NONSTATIONNAIRES SPÉCIAUX SUR UNE FAMILLE DE PLANS PARALLÈLES DE L'ESPACE E_3

PAR

C. ACKER

Communication présentée dans la sesion scientifique de l'Institut Polytechnique de Jassy, 28—30 septembre 1967

1. Considérons l'équation de l'état de la forme $F(\widetilde{p}, \widetilde{\rho}) = 0$, soumise seulement à la condition locale $\partial F/\partial \widetilde{p} \neq 0$. Nous allons étudier l'écoulement sur une famille (W^*) de plans parallèles de l'espace E_3, en utilisant un répère local triorthogonal $T(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3)$ ayant l'origine M et dont $\mathcal{J}_2$ est normal au plan de la famille (W^*).

À un déplacement quelconque $\mathrm{d}M = \widetilde{\omega}^i \mathcal{J}_i$ de l'origine M, T garde la direction de ses vecteurs unités : $\mathrm{d}\mathcal{J}_i = 0$, $(i = 1, 2, 3)$; cela revient à ce que les formes π, $\varkappa$, ρ, qui définissent le vecteur Darboux respectif, soient nulles, c'est à dire si $\pi = \pi_i \widetilde{\omega}^i$, $\varkappa = \varkappa_i \widetilde{\omega}^i$, $\rho = \rho_i \widetilde{\omega}^i$, alors $\pi_i = \varkappa_i = \rho_i = 0$, $(i = 1, 2, 3)$.

Un autre répère local triorthogonal $T_1(I_1, I_2, I_3)$, ayant la même origine M, sera attaché à l'écoulement tel que $I_2 = \mathcal{J}_2$ et $I_3 = \overline{v}/|\overline{v}|$, ($\overline{v}$ est le vecteur vitesse).

Si $\theta(\overline{M}, t)$ est l'angle entre I_3 et $\mathcal{J}_3$, alors les relations entre les coefficients des formes $p = p_i \omega^i + p_t \mathrm{d}t$, $q = q_i \omega^i + q_t \mathrm{d}t$, $r = r_i \omega^i + r_t \mathrm{d}t$, qui définissent le vecteur Darboux du répère T_1 à un même déplacement de l'origine M: $\mathrm{d}\overline{M} = \omega^i I_i \, (= \widetilde{\omega}_i \mathcal{J}_i)$, et les coefficients π_i, $\varkappa_i$, ρ_i [1]), ont pour conséquence les relations

$$r_i = p_i = 0, \; q_i = \theta_i, \; r_t = p_t = 0, \; q_t = \theta_t, \; (i = 1, 2, 3).$$

---

[1]) Les relations entre les coefficients p_i, q_i, r_i, p_t, q_t, r_t et π_i, $\varkappa_i$, ρ_i sont données dans [3, p. 52].

En éliminant tout d'abord la pression $\tilde{p}$ des équations hydrodynamiques :

$$\bar{a} = \bar{\Phi} - \frac{1}{\tilde{\rho}} \operatorname{grad} \tilde{p}, \quad \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \bar{v}.\operatorname{grad} \tilde{\rho} + \tilde{\rho} \operatorname{div} \bar{v} = 0, \quad \tilde{p} = f(\tilde{\rho}),$$

nous allons rassembler les conditions géométriques et mécaniques sous les quelles se développe l'écoulement, pour obtenir le système (S) de l'écoulement barotrope nonstationnaire sur la famille (W^*). Toutes ces conditions géométriques et mécaniques seront exprimées en rapportant l'écoulement au répère T_1 et pour cela nous allons utiliser la forme différentielle vectorielle des opérateurs „$(\bar{v}.\nabla)$", „grad", „div", donnée par S. S. Buchgueens [1] et Gh. Gheorghiev[2]).

Le système (S) est constitué par les équations ci-dessous :

(1) $$r_t = 0,\ p_t = 0,\ q_t = \theta_t,\ r_i = 0,\ p_i = 0,\ q_i = \theta_i,\ (i = 1, 2, 3),$$

(2) $$p = p_i\,\omega^i + p_t\,dt,\ q = q_i\,\omega^i + q_t\,dt,\ r = r_i\,\omega^i + r_t\,dt,$$

(3) $$v\,(q_t + vq_3) - \Phi_1 = -f'\frac{\tilde{\rho}_1}{\tilde{\rho}},\ (v = |\bar{v}|),$$

(4) $$v\,(p_t + vp_3) + \Phi_2 = f'\frac{\tilde{\rho}_2}{\tilde{\rho}},\quad (5)\ v_t + vv_3 - \Phi_3 = -f'\frac{\tilde{\rho}_3}{\tilde{\rho}},$$

(6) $$\tilde{\rho}_t + v\tilde{\rho}_3 + \tilde{\rho}\,[v_3 + v\,(q_1 - p_2)] = 0,$$

(7) $$dv = v_i\,\omega^i + v_t\,dt,\quad d\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_i\,\omega^i + \tilde{\rho}_t\,dt,\quad d\theta = \theta_i\,\omega^i + \theta_t\,dt.$$

Cas particuliesr. I. Si l'on étudie l'écoulement pour le quel $|\bar{v}| = \text{const.}$, on doit ajouter au système (S) les équations $v_i,\ v_t = 0$, $(i = 1, 2, 3)$.

II. Si l'on étudie l'écoulement pour le quel grad $|\bar{v}| = 0$, on doit ajouter au système (S) les équations $v_i = 0$, $(i = 1, 2, 3)$.

III. Si l'on étudie l'écoulement pour le quel grad $\theta = 0$, on doit ajouter au système (S) les équations $\theta_i = 0$, $(i = 1, 2, 3)$.

2. Si nous allons éliminer les fonctions $r_t,\ p_t,\ q_t,\ r_i,\ p_i,\ q_i$ et encore : a) v_i, v_t si $|\bar{v}| = \text{const.}$, b) v_i si grad $|\bar{v}| = 0$, ou c) θ_i si grad $\theta = 0$, si nous allons différencier ensuite les relations finies de (S), si nous allons rendre fermé le système Pfaff obtenu et enfin si nous allons éliminer les formes p, q, r, nous allons obtenir le système différentiel fermé (S') de l'écoulement barotrope nonstationnaire tridimensionel sur une famille de plans parallèles de l'espace E_3 (l'écoulement appartenant à un des cas particuliers I, II, III signalés ci-dessus). Le système (S') pour le cas général de l'écoulement sur une famille de plans parallèles de l'espace E_3 est donné par :

---

[2]) L'expression restreinte de ces opérateurs est donnée dans [3].

$$(1^*) \qquad (\theta_t + 2v\theta_3)\,dv + v\,d\theta_t + v^2 d\theta_3 - d\Phi_1 = \left(-f''\frac{\tilde{\rho}_1}{\tilde{\rho}} + f'\frac{\tilde{\rho}_1}{\tilde{\rho}^2}\right)d\tilde{\rho} - f'\frac{d\tilde{\rho}_1}{\tilde{\rho}},$$

$$(2^*) \qquad -d\Phi_2 = \left(-f''\frac{\tilde{\rho}_2}{\tilde{\rho}} + f'\frac{\tilde{\rho}_2}{\tilde{\rho}^2}\right)d\tilde{\rho} - f'\frac{d\tilde{\rho}_2}{\tilde{\rho}},$$

$$(3^*) \qquad dv_t + v_3\,dv + v\,dv_3 - d\Phi_3 = \left(-f''\frac{\tilde{\rho}_3}{\tilde{\rho}} + f'\frac{\tilde{\rho}_3}{\tilde{\rho}^2}\right)d\tilde{\rho} - f'\frac{d\tilde{\rho}_3}{\tilde{\rho}},$$

$$(4^*) \qquad d\tilde{\rho}_t + [\tilde{\rho}_3 + \rho\theta_1]\,dv + [v_3 + v\theta_1]\,v\,d\tilde{\rho} + v\,d\tilde{\rho}_3 + \tilde{\rho}\,dv + v_3\tilde{\rho}\,d\theta_1 = 0,$$

$$(5^*) \quad dv = v_i\omega^i + v_t\,dt, \quad (6^*) \quad d\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_i\omega^i + \tilde{\rho}_t dt, \quad (7^*) \quad d\theta = \theta_i\omega^i + \theta_t dt,$$

$$(8^*) \qquad [dv_i,\ \omega^i] + [dv_t,\ dt] + v_1[\omega^3,\ d\theta] - v_3[\omega_1,\ d\theta] = 0,$$

$$(9^*) \qquad [d\tilde{\rho}_i,\ \omega^i] + [d\tilde{\rho}_t,\ dt] + \tilde{\rho}_1[\omega^3,\ d\theta] - \tilde{\rho}_3[\omega^1,\ d\theta] = 0,$$

$$(10^*) \qquad [d\theta_i,\ \omega^i] + [d\theta_t,\ dt] + \theta_1[\omega^3,\ d\theta] - \theta_3[\omega^1,\ d\theta] = 0.$$

Dans le cas particulier I, l'équation (8) ne fera pas part du système (S') et les termes qui contiennent v_i, v_t ou dv_i, dv_t seront absents. Dans le cas particulier II ils vont manquer les termes qui contiennent v ou dv_i. Enfin dans le cas particulier III les termes qui contiennent θ ou $d\theta_i$ n'interviennent pas.

En considérant des écoulements nonstationnaires tridimensionels les formes ω^i, dt, de (S'), seront indépendentes, tandis que les autres formes Pfaff appartiendront à l'anneau grassmannien $R(\omega^i, dt)$.

Les variétés intégralles à quatre dimensions du systeme (S') correspondant à chacun des cas particuliers I, II ou III, sur les quellse $[\omega^1, \omega^2, \omega^3, dt] \neq 0$, seront interprétées comme des écoulements barotropes nonstationnaires tridimensionels appartenant aux cas particuliers (I, II, III) que nous avons considéré plus haut. Alors le problème de l'existence de tels écoulements pourra être résolu en étudiant l'involution du systéme (S').

3. Pour les écoulements du type I, II et III, que nous envisageons dans cette Note, on peut facilement observer la possibilité de construire les suivantes chaînes des éléments intégraux du systéme (S') :

$$(\alpha) \qquad \varepsilon_1(\omega^2 = \omega^3 = dt = 0,\ldots),\ \varepsilon_2(\omega^3 = dt = 0,\ldots),\ \varepsilon_3(dt = 0,\ldots),\ \varepsilon_4(\ldots),$$

pour l'écoulement du type I, et

$$(\beta) \qquad \varepsilon_1(\omega^1 = \omega^2 = \omega^3 = 0,\ldots),\ \varepsilon_2(\omega^2 = \omega^3 = 0,\ldots),\ \varepsilon_3(\omega^3 = 0,\ldots),\ \varepsilon_4(\ldots),$$

pour les écoulements du type II et III.

Pour l'écoulement du type I le systéme (S') contient 14 formes dépendentes

$$dv,\ d\tilde{\rho},\ d\tilde{\rho}_i,\ d\tilde{\rho}_t,\ d\theta,\ d\theta_i,\ d\theta_t,\ d\Phi_i,\ (i = 1, 2, 3),$$

appartenant à l'anneau $R(\omega^i, dt)$; le système (S') comprend 7 équations Pfaff et 2 équations différentielles extérieures du deuxieme degré. Les nombres caractéristiques qu'on a obtenu sont $r_0 = 14$, $r_1 = 7$, $r_2 = 5$, $r_3 = 3$, $r_4 = 1$ et les caractères réduits respectifs sont $s_0 = r_0 - r_1 = 7$, $s_1 = r_1 - r_2 = 2$, $s_2 = r_2 - r_3 = 2$, $s_3 = r_3 - r_4 = 2$, $s_4 = r_4 = 1$.

Pour les écoulements du type II ou III le système (S') contient 15 formes dépendentes appartenant à l'anneau $R(\omega^i, dt)$:

$$dv,\ dv_t,\ d\tilde{\rho},\ d\tilde{\rho}_i,\ d\tilde{\rho}_t,\ d\theta,\ d\theta_i,\ d\theta_t,\ d\Phi_i,\ (i = 1, 2, 3),$$

ou

$$dv,\ dv_i,\ dv_t,\ d\tilde{\rho},\ d\tilde{\rho}_i,\ d\tilde{\rho}_t,\ d\theta,\ d\theta_t,\ d\Phi_i,\ (i = 1, 2, 3),$$

respectivement ; pour ces deux cas particuliers le systéme (S') comprend 7 équations Pfaff et 3 équations différentielles extérieures du deuxième degré. Les nombres caractéristiques qu'on a obtenu pour les écoulements du type II et III sont $r_0 = 15$, $r_1 = 8$, $r_2 = s$, $r_3 = 3$, $r_4 = 1$ et les caractères réduits respectifs sont $s_0 = 7$, $s_1 = 3$, $s_2 = 2$, $s_3 = 2$, $s_4 = 1$.

Pour les trois cas particuliers de l'écoulement barotrope nonstationnaire tridimensionel sur une famille de plans parallèles de l'espace E_3 qu'on a considéré ci-dessus, le nombre des relations indépendentes entre les paramètres de la famille des éléments intégraux mise en évidence, est égal au nombre de Cartan $4s_0 + 3s_1 + 2s_2 + s_3$; il s'ensuit que la condition suffisante d'involution donnée par E. Cartan [2, p. 96] est satisfaite. Il existe donc des variétés intégralles à quatre dimensions du système (S'), sur les quelles $[\omega^1, \omega^2, \omega^3, dt] \neq 0$, c'est-à-dire il existe des écoulements barotropes nonstationnaires tridimensionels sur une famille de plans parallèles de l'espace E_3, appartenant aux classes I, II et III.

4. Les écoulements du type I mis en évidence dépendent d'une seule fonction (θ_t) de 4 arguments, les écoulements du type II dépendent d'une seule fonction (θ_3) de 4 arguments, et les écoulements du type III dépendent aussi d'une seule fonction (v_3 ou ρ_3) de 4 arguments.

Pour les écoulements barotropes nonstationnaires tridimensionels sur une famille de plans parallèles de l'espace E_3, soumis simultanément aux conditions I et III ou aux conditions II et III, on a obtenu aussi l'involutivité du système (S') à l'aide de la chaîne des éléments intégraux (β). On a mis en évidence de cette façon l'existence des écoulements (I, III) et (II, III) qui dépendent d'une fonction arbitraire de 3 arguments.

Signalons, ci-dessous quelques propriétés de l'écoulement du type I :

a) $$\pm \frac{v^2}{R_{(l.c_3)}} = vI_2 \,.\, \mathrm{rot}\, \bar{v} = I_1 \,.\, (\bar{\Phi} - \frac{v_2}{\mathcal{M}} \mathrm{grad} \ln \tilde{\rho}) - v\theta_t ,$$

où $1/R_{(l.c_3)}$ est la courbure de la ligne du courant dont les équations sont $\omega^1 = \omega^2 = dt = 0$, $\mathcal{M}$ est le nombre local de Mach et θ_t — la vitesse de rotation du vecteur vitesse à un point donné.

a') Nous ajoutons aussi

$$R_{(l.c_3)}\, I_2 \,.\, \mathrm{rot}\, \bar{v} = \pm\, v = \mathrm{const.}$$

b) $$\mathrm{div}\, \bar{v} = \pm \frac{v}{R_{(l.\,c_1)}} = v\theta_1 ,$$

où $1/R_{(l.c_1)}$ est la courbure de la ligne $(l.\,c_1)$ analogue à la ligne du courant mais correspondante au champ (I_1), (les équations de cette ligne sont $\omega^2 = \omega^3 = \mathrm{d}t = 0$) ; θ_1 est la dérivée de θ le long de la ligne $(l.\,c_1)$, ce qui signifie encore $I_1 \,.\, \mathrm{grad}\, \theta$.

b') Signalons aussi

$$R_{(l.c_1)}\, \mathrm{div}\, \bar{v} = \pm\, v = \mathrm{const.}, \text{ ou } \frac{\mathrm{div}\, \bar{v}}{\theta_1} = v = \mathrm{const.}\ (> 0)\ .$$

c) $$\mathrm{rot}\, \bar{v} = v\,(\pm \frac{1}{R_{(l.\,c_3)}} I_2 - \theta_2\, I_3),$$

c'est-à-dire le vecteur $\mathrm{rot}\, \bar{v}$ est situé dans le plan rectifiant de la ligne du courant ; par conséquent le plan rectifiant de la ligne du courant est le plan de Lamb ; donc les plans de Lamb sont orthogonaux aux plans de la famille (W^*) sur les quels se produit l'écoulement et la famille des plans de Lamb qui correspond à un plan (P) de la famille (W^*) enveloppe à un moment donné la famille des cylindres dont les sections droites sont les lignes du courant situées dans le plan (P).

d) La courbure de la ligne $(l.\,c_1)$ et la densité sont liées par la relation remarquable

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s_{tr}} \ln \tilde{\rho} \pm \frac{1}{R_{(l.\,c_1)}} = 0,$$

où $\mathrm{d}/\mathrm{d}s_{tr}$ indique la dérivée le long de la trajectoire de la particule.

e) $$\bar{\Phi}_L = c^2\, (\mathrm{grad} \ln \tilde{\rho})_L ,$$

où L indique la composante du plan de Lamb et c est la vitesse locale du son.

Pour les écoulements du type II observons que dans les relations a') et b'), v n'est pas constant et la composante $\bar{\Phi}_L$ de la force massique a une expression un peu plus compliquée à savoir

$$\bar{\Phi}_L = c^2\, (\mathrm{grad} \ln \tilde{\rho})_L + \bar{v}\, \frac{\partial}{\partial t} \ln v\ ;$$

observons aussi pour les écoulements du type II, (v. (8*)), que la vitesse de la variation de $|\bar{v}|$ à un point quelconque donné est la même à tous les points des plans de la famille (W^*), à un moment donné :

$$\mathrm{grad}\, (v_t) = 0.$$

Pour les écoulements du type III signalons les propriétés suivantes :

a_1) les lignes du courant et les lignes $(I.\, c_1)$ sont des lignes droites qui forment un réseau orthogonal ; ce réseau tourne à une vitesse θ_t égale à

$$\frac{1}{v} I_1 \,.\, (\bar{\Phi} - c^2 \operatorname{grad} \ln \bar{\rho}),$$

(observons de (10*) que grad $(\theta_t) = 0$, ou $\mathrm{d}\theta_t \,|_{\mathrm{d}t=0} = 0$) .

a_1') Observons aussi que pour $\mathrm{d}t = 0$

$$\mathrm{d}\left[I_1 \,.\, \left(\frac{\bar{\Phi}}{v} - \frac{c}{\mathscr{M}} \operatorname{grad} \ln \tilde{\rho} \right) \right] = 0 \,.$$

b_1) $$\operatorname{div} \bar{v} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s_{(I.\, c_3)}} = \bar{v} .\, \operatorname{grad} \ln v,$$

où $\mathrm{d}/\mathrm{d}s_{(I.\, c_3)}$ indique la dérivée le long de la ligne du courant .

c_1) $$\operatorname{rot} \bar{v} = \bar{v}_2 I_1 - \bar{v}_1 I_2 ,$$

donc l'écoulement est transversal $(\bar{v} \,.\, \operatorname{rot} \bar{v} = 0)$; à un point quelconque, le plan de Lamb est défini par son vecteur normal $I_3 \times \operatorname{rot} \bar{v} = (\operatorname{grad} v)_n$, ($n$ indique la composante du plan normal de la ligne du courant) ; par conséquence

$$\operatorname{grad} v = I_3 \times \operatorname{rot} \bar{v} + I_3 \operatorname{div} \bar{v} .$$

d_1) La relation remarquable

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s_{tr}} \ln \tilde{\rho} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s_{(I.\, c_3)}} = 0,$$

est une conséquence de l'équation de la continuité.

Enfin on peut aisément constater que pour les écoulements du type (I, III) ou bien du type (II, III) le fluide doit être incompressible et le mouvement doit être irotationel.

Institut Polytechnique de Jassy,
Chaire de Mécanique théorique

BIBLIOGRAPHIE

1. Бюшгенс С. С., *Геометрия неустановившегося потока совершенной несжимаемой жидкости.* ИАН СССР, с. мат., 1960, **24**, стр. 170—202.
2. Cartan E., *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques.* Paris, 1945.
3. Gheorghiev Gh., *Нестационарные движения идеальной жидкости вдоль линейной неголономной поверхности.* An. şt. Univ. „Al. I. Cuza", s. I, 1959, V, pp. 51—65

CURGERI BAROTROPE NESTAŢIONARE SPECIALE PE O FAMILIE DE PLANE PARALELE DIN E_3

(Rezumat)

Se stabileşte existenţa, arbitrarietatea şi unele proprietăţi locale ale unor clase de curgeri nestaţionare cu $|\bar{v}| = \text{const}$, cu $\operatorname{grad} |\bar{v}| = 0$ sau cu $\operatorname{grad} \theta = 0$, pe o familie ($W^*$) de plane paralele din spaţiul euclidian tridimensional ($\bar{v}$ este vectorul viteză, iar θ este unghiul între $\bar{v}$ şi o direcţie fixă dintr-un plan oarecare al familiei (W^*)).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

D. C. 539.37; 538.56

NOTE ON MAGNETO-ELASTIC DISTURBANCES IN A CONDUCTING PLATE

BY

D. K. SINHA

1. Introduction

The studies on the disturbances in elastic plates and shells — both anisotropic and isotropic —, with the help of their conventional theories have been undertaken largely because of their importance in various branches of engineering and technology. In this connexion among the large number of references, the treaties by Timoshenko [1], Volmir [2], Lekhnitsky [3] and the articles by Nowinski [4], [5], Berger [6], Mangeron a. Shestopal [7], [8], be cited. These problems on plates and shells become more interesting from the utilaritarian point of view, if the plates or shells happen to be conducting and one situated in a flow of a ionized gas and in contact with another body in vacuum, vide, Kaliski [9], [10].

The present Note is a similar attempt and is concerned with the disturbances when in a perfectly conducting infinite plate, which is subjected to a magnetic field and placed in a vacuum, disturbances are set in by applying a step mechanical load.

2. Problem and Fundamental Equations

We consider here a thin, perfectly conducting plate in contact with vacuum on both sides and in a uniform original magnetic field. We assume that the magneto-elastic disturbances in the plate arise from the interaction of two fields — mechanical and electromagnetic. The fundamental equations of the problem are evidently those which describe the fields i. e. Maxwell's electromagnetic equations and the conventional theory of elastic plates.

The non-deformed middle surface of the plate is taken to be the xy-plane and the primary magnetic field intensity H is in the direction of z-axis. The equations have been derived in forms suitable for the solution of the problem neglecting the rotational inertia of plate elements, the equation of motion of the plate, as in Kaliski (*op. cit.*), is given by

$$D^* \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = q(x, t) + T_{33}^{*II} - T_{33}^{*I} + \frac{\partial}{\partial x}(T_{31}^{*I} + T_{31}^{*II})_d ,$$

where

$$D^* = D + \frac{\mathcal{J}}{4\pi} H^2 .$$

In the above equations, ω is the normal deflection of the plate, $\mathcal{J}$ the axial moment of inertia per unit lenght, D the flexural rigidity, A the cross-sectional area per unit lenght, ρ the volume density of the plate material, starred quantities represent the values of the corresponding quantities in the vacuum, superscripts I and II represent the quantities in the regions $z < 0$ and $z > 0$ of the vacuum respectively; T_{ik} is the Maxwell electromagnetic stress-tensor, d is the thickness of the plate, $q(x, t)$ is the mechanical load. The Maxwell's equations will be taken up in the second section.

3. Solution of the Problem

To facilitate the solution of the problem, we introduce the method of Laplace trasform. The Laplace transform $\bar{f}(p)$ of a function $f(t)$ is given by

$$\bar{f}(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt, \quad (p > 0). \tag{2}$$

We take $q(x, t)$, in accordance with our assumption, in the form given by

$$q(x, t) = P_0 H(t) \sin \alpha x, \tag{3}$$

where $P_0 = \text{const.}$, $H(t)$ is the Heaviside's unit step function and α, a constant.

Taking the Laplace transform of equation (1) we have, on using (3),

$$D^* \frac{d^4 \bar{\omega}}{dx^4} + \rho A p^2 \bar{\omega} = \frac{P_0}{p} \sin \alpha x + \bar{T}(x), \tag{4}$$

where

$$\bar{T}(x) = \bar{T}_{33}^{*II} - \bar{T}_{33}^{*I} + \frac{d}{dx}(\bar{T}_{31}^{*I} + \bar{T}_{31}^{*II})\, \alpha . \tag{5}$$

We now set

$$\bar{\omega}(x) = R \sin \alpha x, \quad \bar{T}(x) = T_0 \sin \alpha x .$$

Hence (4) gives,

$$(D^* \alpha^4 + \rho A p^2) R = \frac{P_0}{\varphi} + T_0 . \tag{6}$$

Now, the electromagnetic equations of Maxwell in vacuum are given by

$$\left[c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] h_i^{*I, II} = 0, \tag{7}$$

$$(8) \qquad \left[c^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]E_i^{*\mathrm{I,\,II}}=0, \quad (i=1,2,3),$$

where h_i are the components intensity of the perturbed magnetic field, E_i those of the electric field. Also,

$$E_1^{*\mathrm{I,\,II}}=E_3^{*\mathrm{I,\,II}}=h_2^{*\mathrm{I,\,II}}=0,$$

$$(9) \qquad T_{33}^{*}=\frac{H}{4\pi}h_3^{*}, \quad T_{31}^{*}=\frac{H}{4\pi}h_1^{*}, \quad T_{32}^{*}=0,$$

$$(10) \qquad h_3=H_z\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}, \quad E_2=-\frac{H_z}{c}\cdot\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial t}, \qquad (11) \qquad \frac{\partial h_1^{*}}{\partial t}=c\frac{\partial E_2^{*}}{\partial z}.$$

The boundary conditions are provided by the continuity of the tangential components of the electric and magnetic field on the boundaries $z=-d$ and $z=d$, and these are given by

$$(12) \qquad h_3^{*\mathrm{I}}=h_3,\ E_2^{*\mathrm{I}}=E_2 \text{ on } z=-d, \qquad (13) \qquad h_3^{*\mathrm{II}}=h_3,\ E_2^{*\mathrm{II}}=E_2 \text{ on } z=d.$$

Taking the Laplace transforms of equations (7) and (8) and setting

$$(14) \qquad \bar{h}_3^{*\mathrm{I,II}}=\Phi^{\mathrm{I,\,II}}(z)\sin\alpha x, \quad \bar{E}_2^{*\mathrm{I,\,II}}=\Psi^{\mathrm{I,\,II}}(z)\sin\alpha x,$$

we find that $\Phi(z)^{\mathrm{I,\,II}}$, $\Psi(z)^{\mathrm{I,\,II}}$ satisfy the equations

$$(15) \qquad \frac{\mathrm{d}^2\Phi^{\mathrm{I,II}}}{\mathrm{d}z^2}-\left(\alpha^2+\frac{p^2}{c^2}\right)\Phi^{\mathrm{I,\,II}}=0, \qquad (16) \qquad \frac{\mathrm{d}^2\Psi^{\mathrm{I,\,II}}}{\mathrm{d}z^2}-\left(\alpha^2+\frac{p^2}{c^2}\right)\Psi^{\mathrm{I,\,II}}=0.$$

The solutions of equations (15) and (16), appropriate to their physical conditions, are given by

$$(17) \qquad \Phi^{\mathrm{I}}=C^{\mathrm{I}}\mathrm{e}^{\alpha_1 z}, \ \Phi^{\mathrm{II}}=C^{\mathrm{II}}\mathrm{e}^{-\alpha_1 z}; \qquad (18) \qquad \Psi^{\mathrm{I}}=D^{\mathrm{I}}\mathrm{e}^{\alpha_1 z}, \ \Psi^{\mathrm{II}}=D^{\mathrm{II}}\mathrm{e}^{-\alpha_1 z}.$$

where $\alpha_1=\alpha^2+p^2/c^2$, C^{I}, C^{II}, D^{I}, D^{II}, are constants to be evaluated from the boundary conditions (12) and (13). These are given by

$$(19) \qquad \begin{cases} C^{\mathrm{I}}=RHd\,\alpha^2\mathrm{e}^{\alpha_1 d}, & C^{\mathrm{II}}=-RHd\alpha^2\mathrm{e}^{\alpha_1 d}, \\ D^{\mathrm{I}}=\dfrac{RHdp\alpha}{c}\mathrm{e}^{\alpha_1 d}, & D^{\mathrm{II}}=-\dfrac{RHdp\,\alpha}{c}\mathrm{e}^{\alpha_1 d}. \end{cases}$$

Thus forms (11), $\bar{h}_1^{*\mathrm{I}}$, $\bar{h}_1^{*\mathrm{II}}$ are determined and hence $\bar{T}_{33}^{*}$, $\bar{T}_{31}^{*}$ in the regions I, II can be calculated. Using their values, we find

$$T_0=-\frac{RH^2d\alpha}{4\pi}[2\alpha_1+\alpha(1+\mathrm{e}^{-2\alpha_1 d})].$$

Hence, from (6),

$$R = \frac{P_0/p}{D^* \alpha^4 + hAp^2 + (H^2 d\alpha/4\pi)[2\alpha_1 + \alpha(1 + e^{-2\alpha_1 d})]}$$

so that

$$\bar{\omega}(x,p) = \frac{(P_0/p)\sin \alpha x}{D^* \alpha^4 + hAp^2 + (H^2 d\alpha/4\pi)[2\alpha_1 + \alpha(1 + e^{-2\alpha_1 d})]}. \tag{20}$$

This expression, when tranformed, gives $\omega(x, t)$ for any value of x and t. This inversion is to complicated to be obtained in a closed form. Yet its value can be ascertained for small values of time i.e. p is large so that $1/p$ is small. Expanding in powers of $1/p$ and retaining first few terms, we have from (20),

$$\bar{\omega}(x,p) = \frac{P_0}{hAp^3}\left[1 + \frac{H^2 d\alpha^2}{2\pi pAc}\left(\frac{1}{p} + \frac{c}{2}\cdot\frac{1}{p^2}\right) + \ldots\right].$$

Taking the inverse transform and assuming that H is so small that its powers higher than the second may be neglected, we have

$$\omega(x,t) = \frac{P_0}{hA}\left[\frac{t^2}{2} + \frac{H^2 d\alpha^2}{4\pi hA}\left(\frac{t^3}{3} + \frac{1}{2}ct^2\right)\right].$$

Thus, the deflection is partly a quadratic function of time and partly a cubic function of time. The cubic variation of the deflection with respect to time occurs only when the plate is acted upon by a transverse magnetic field.

Received the 10 X 1967

Jadavpur University,
Calcutta, India

REFERENCES

1. Timoshenko S., *Theory of Plates and Shells*. Mc Graw Hill Book Co.
2. Волмр А. С., *Гибкие пластинки и оболочки*. ГИТТЛ, М., 1964.
3. Lekhnitsky S. G., *Anisotropic plates*. Acad. Press, (transl. from Russian).
4. Nowinski J. L., Iwinski T., Arch. Mech. Stos., 1957, **IX**, p. 593.
5. Nowinski J. L., Appl. Sci. Res. 1962, Ser. A, **II**, p. 85.
6. Berger H. M., J. Appl. Mech., 1955, **22**, p. 455.
7. Mangeron D., Shestopal A. F., Proc. Ninth Congress Theor. Appl. Mechs. Kanpur, 1964.
8. — Bul. Inst. polit. Iaşi, 1964, **X (XIV)**, *1-2*, p. 53.
9. Kaliski S., Proc. Vibr. Probls., 1962, 3, p. 225.
10. — Arch. Mech. Stos., 1963, **XV**, p. 197.

ASUPRA PERTURBAŢIILOR MAGNETO-ELASTICE ÎN PLĂCI CONDUCTOARE

(Rezumat)

Autorul, luînd ca punct de plecare unele rezultate recente datorite lui D. Mangeron şi A. F. Şestopal [7], [8], aduce contribuţii în studiul problemei perturbaţiilor magneto-elastice în plăci conductoare.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

УДК 539.15; 512.865

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ НЕПРЕРЫВНОЙ ГРУППЫ

С. С. САННИКОВ

Известно, что коммутационные соотношения

$$[L_\alpha, L_\beta] = C^\gamma_{\alpha\beta} L_\gamma, \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, n), \tag{1}$$

где L_α — образующие алгебры Ли n-параметрической группы Ли G, а $C^\gamma_{\alpha\beta}$ — структурные константы, имеют в качестве решений неприводимые (по Шуру) бесконечные матрицы. Если G — компактная группа, то матрицы L_α, очевидно, неэрмитовы, и поэтому возникает вопрос, порождает ли такое представление алгебры Ли представление группы G в целом. Примеры, рассмотренные в [1] в случае группы вращений O_3, показывают, что такие представления существуют в некотором обобщенном смысле. Здесь мы разовьем глобальный подход к таким представлениям, основанный на построении полной континуальной системы функций в пространстве представления.

Пусть $L_\alpha(\sigma)$ — некоторая реализация коммутационных соотношений (1) операциями, действующими на функции $F(\sigma)$, заданными на некотором многообразии Σ, $(\sigma \in \Sigma)$. Мы хотим построить неприводимое представление $g \to T(g)$, $g \in G$, в некотором линейном пространстве $\mathfrak{S}$ функций на Σ. $\mathfrak{S}$ — инвариантное относительно представления пространство, то есть наряду с $F(\sigma) \in \mathfrak{S}$ также и $F(\sigma, g) = T(g)\, F(\sigma) \in \mathfrak{S}$; $\mathfrak{S}$ — топологическое пространство. Слабейшую топологию зададим семейством полунорм $P_F(\Phi) = |(F, \Phi)|$ по скалярному произведению

$$(F, \Phi) = \int F(\sigma) \overline{\Phi(\sigma)}\, d\sigma, \tag{2}$$

где $\Phi \in \mathfrak{S}'$ (сопряженное к $\mathfrak{S}$ пространство), обладающему тем свойством, что $(T(g)F, T(g)\Phi) = (F, \Phi)$, если даже $T(g)\Phi(\sigma) \notin \mathfrak{S}'$. Таким образом, не требуется, чтобы $\mathfrak{S}'$ было инвариантно относительно представления.

Исходный пункт тот же, что и в теории Неймана [2]. Пусть $f(\sigma)\in\mathfrak{S}$. Построим орбиту

$$T(g)f(\sigma)=f(\sigma,g). \tag{3}$$

В нашем случае $f(\sigma,g)$ вообще говоря, некоторая обобщенная функция. Поэтому мы не строим по этой орбите линейное пространство, как в теории Неймана, а воспользуемся тем ее свойством, что всякая функция $F(\sigma)\in\mathfrak{S}$ может быть представлена в виде (интеграл в смысле Лебега)

$$F(\sigma)=\int f(\sigma,g)\widetilde{F}(g)\,\mathrm{d}g, \tag{4}$$

где $\widetilde{F}(g)\,(\in\widetilde{\mathfrak{S}})$ — функция на группе G, а $\mathrm{d}g$ — инвариантная на G мера. Обращением формулы (4) является

$$\widetilde{F}(g)=\int\overline{\varphi_g(\sigma)}F(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma, \tag{5}$$

причем

$$\int f(\sigma,g)\overline{\varphi_g(\sigma')}\,\mathrm{d}g=\delta(\sigma,\sigma'),\quad \int f(\sigma,g)\overline{\varphi_{g'}(\sigma)}\,\mathrm{d}\sigma=\delta(g,g'), \tag{6}$$

где правыми частями являются функционалы на $\mathfrak{S}$ и $\widetilde{\mathfrak{S}}$ со свойствами δ-функции

$$\int F(\sigma')\delta(\sigma',\sigma)\,\mathrm{d}\sigma'=F(\sigma),\quad \int\widetilde{F}(g')\delta(g',g)\,\mathrm{d}g'=\widetilde{F}(g). \tag{7}$$

Мы считаем, что, вообще говоря,

$$T(g)\varphi_{g'}(\sigma)=\varphi_{g'}(\sigma,g)\neq\varphi_{gg'}(\sigma). \tag{8}$$

Далее, всякую функцию $\Phi(\sigma)\in\mathfrak{S}'$ представим в виде

$$\Phi(\sigma)=\int\varphi_g(\sigma)\widetilde{\Phi}(g)\,\mathrm{d}g,\quad \widetilde{\Phi}(g)\in\widetilde{\mathfrak{S}}', \tag{9}$$

с обращением

$$\widetilde{\Phi}(g)=\int\overline{f(\sigma,g)}\Phi(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma. \tag{10}$$

Воспользовавшись свойством биортогональности системы функций $f(\sigma,g)$, $\varphi_g(\sigma)$ (6), получим

$$\int F(\sigma)\overline{\Phi(\sigma)}\,d\sigma = \int \widetilde{F}(g)\overline{\widetilde{\Phi}(g)}\,dg. \tag{11}$$

Равенство (11) устанавливает полноту системы функций $f(\sigma, g)$ в $\mathfrak{S}$. Матричными элементами назовем функции на группе

$$D_{g_1g_2}(g) = \int \overline{\varphi_{g_1}(\sigma)}\,T(g)f(\sigma, g_2)\,d\sigma = \delta(g_1, gg_2). \tag{12}$$

Правило умножения матричных элементов выражается формулой

$$\int D_{g_1g_2}(g)\,D_{g_2g_3}(g')\,dg_2 = D_{g_1g_3}(gg'). \tag{13}$$

При доказательстве важную роль играет функция

$$\Delta_{\sigma_1\sigma_2}(g) = \int \overline{\varphi_{g'}(\sigma_1)}\,T(g)f(\sigma_2, g')\,dg' = \int \overline{\varphi_{g'}(\sigma_1)}\,f(\sigma_2, gg')\,dg'. \tag{14}$$

Пусть теперь $f_\mu^{(\lambda)}(\sigma)$ — канонический базис представления алгебры Ли (1) в реализации на Σ. λ обозначает совокупность чисел, задающих неприводимое представление, а μ — нумерация базиса. $f_\lambda^{(\lambda)}(\sigma)$, $f_{-\lambda}^{(\lambda)}(\sigma)$ — векторы с наибольшим или с наименьшим весом (мы рассматриваем только те представления, у которых существуют такие векторы). Мы заведомо построим неприводимое представление веса λ, если в качестве исходной функции (3) возьмем функцию $f_\lambda^{(\lambda)}(\sigma)$ (или $f_{-\lambda}^{(\lambda)}(\sigma)$).

Пример 1. С этой точки зрения рассмотрим унитарные (конечномерные) представления компактной группы G. В этом случае в $\mathfrak{S}^{(l)}$ существует полная счетная система функций $f_m^{(l)}(\sigma)$ (канонический базис) и

$$f_l^{(l)}(\sigma, g) = \sum_m f_m^{(l)}(\sigma)D_{ml}^{(l)}(g). \tag{15}$$

Вместо (4) теперь имеем

$$F(\sigma) = \sum_m f_m^{(l)}(\sigma)c_m, \quad c_m = \int D_{ml}^{(l)}(g)\widetilde{F}(g)\,dg, \tag{16}$$

причем $\varphi(\sigma, g) = f_l^{(l)}(\sigma, g)$. Функционалы (6) принимают вид

$$\delta(\sigma_1, \sigma_2) = \sum_m f_m^{(l)}(\sigma_1)\overline{f_m^{(l)}(\sigma_2)}, \quad \delta(g_1, g_2) = D_{ll}^{(l)}(g_2^{-1}g_1). \tag{17}$$

Матричные элементы (12) выражаются через матрицы конечных вращений $D_{mn}^{(l)}$ по формулам

$$D_{g_1g_2}(g) = D_{ll}^{(l)}(g_1^{-1}gg_2), \tag{18}$$

а

$$\Delta_{\sigma_1\sigma_2}(g) = \sum_{m,n} \overline{f_m^{(l)}(\sigma_1)} D_{mn}^{(l)}(g) f_n^{(l)}(\sigma_2). \tag{19}$$

Аналогичное рассмотрение может быть проведено также в случае почти периодических представлений абелевой группы [2].

Пример 2. Рассмотрим теперь неунитарное бесконечномерное четырехзначное представление группы вращений O_3 с весом $\lambda = -1/4$, построенное в [3], [4]. Здесь $\mathfrak{H}$ — класс целых аналитических функций комплексного переменного $z = x + iy$ порядка $\rho \leqslant 2$ и типа $0 \leqslant K \leqslant \infty$, четных относительно замены $z \to -z$. Полная система в $\mathfrak{H}$ записывается в виде

$$f(z, g) = \frac{1}{\sqrt{\bar{\alpha}}} \exp\left(\frac{1}{2} z^2 \tau\right), \tag{20}$$

где $\tau = \beta/\bar{\alpha} = \tau_1 + i\tau_2$, $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Функции на группе в (4) имеют вид $\widetilde{F}(g) = \sqrt{\bar{\alpha}}(1 + \tau\bar{\tau})^2 e^{-\tau\bar{\tau}} \widetilde{F}(\bar{\tau})$, где, очевидно, $\widetilde{F}(\bar{\tau})$ — целая аналитическая функция комплексного переменного τ порядка $\rho \leqslant 1$ и типа $0 \leqslant K \leqslant \infty$. Тогда

$$F(z) = \int e^{z^2\tau/2} \widetilde{F}(\bar{\tau}) d\mu(\tau), \tag{21}$$

где $d\mu(\tau) = \frac{1}{\pi} e^{-\tau\bar{\tau}} d\tau$, $d\tau = d\tau_1 d\tau_2$. Система функций

$$\varphi_g(z) = \sqrt{\bar{\alpha}}(1 + \tau\bar{\tau})^2 e^{-\tau\bar{\tau}} \operatorname{ch}(z\sqrt{2}\bar{\tau}), \tag{22}$$

а

$$\delta(z, z') = \operatorname{ch}(z'\bar{z}), \quad \delta(g, g') = \sqrt{\frac{\bar{\alpha}'}{\bar{\alpha}}} (1 + \tau'\bar{\tau}')^2 e^{\tau\bar{\tau}'}. \tag{23}$$

Инвариантное скалярное произведение задается формулой

$$(F, \Phi) = \int F(z) \overline{I\Phi(z)} d\mu(z), \quad I\Phi(z) = \Phi(iz), \tag{24}$$

$F \in \mathfrak{H}$, $\Phi \in \mathfrak{H}'$ — класс целых аналитических функций порядка $\rho \leqslant 1$ и типа $0 \leqslant K \leqslant \infty$. Матричные элементы принимают вид

$$D_{g_2 g_1}(g) = \sqrt{\frac{\bar{\alpha}_2}{\bar{\alpha}_1(\bar{\alpha} - \bar{\beta}\tau_1)}} (1 + \tau_2\bar{\tau}_2)^2 \exp\left(\bar{\tau}_2 \frac{\alpha\tau_1 + \beta}{-\bar{\beta}\tau_1 + \bar{\alpha}}\right), \tag{25}$$

а функции

$$\Delta_{z'z}(g) = \frac{1}{\sqrt{\bar{\alpha}}} \exp\left[\frac{1}{2}(z^2 + \bar{z}'^2)\tau\right] \operatorname{ch} \frac{z\bar{z}'}{\bar{\alpha}}. \tag{26}$$

Весьма важным является вопрос о продолжении скалярного произведения (24) с неинвариантного пространства $\mathfrak{H}'$ на некоторое инвариантное относительно пред-

ставления пространство $[\mathfrak{H}'] = \mathfrak{H}$. Его можно доопределить по крайней мере на тех векторах $G \in \mathfrak{H}$, которые представимы в виде $G = \sum_i T(g_i)\Phi_i$, где $\Phi_i \in \mathfrak{H}'$, если воспользоваться свойством инвариантности (24)

$$(F, G) = \sum_i (F, T(g_i)\Phi_i) = \sum_i (T(g_i^{-1})F, \Phi_i) = \sum_i (F_i, \Phi_i).$$

Поступила 22 VI 1966 г.

Физико-технический институт АН УССР,
Харьков, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Санников С. С., ЯФ, **2**, 1965, стр. 570.
2. von Neuman J., Trans. Amer. Math. Soc., 1934, **36**, p. 445.
3. Санников С. С., УФЖ, 1965, **10**, стр. 684.
4. — Bul. Inst. polit. Iaşi, 1966, **X (XVI)**, *3—4*, pp. 121—125.

O EXTINDERE A REPREZENTĂRILOR LINIARE ALE UNUI GRUP CONTINUU

(Rezumat)

Folosind un sistem complet continual de funcţii în spaţiul reprezentativ, se expune o nouă abordare a construcţiei reprezentărilor liniare ale unui grup Lie compact. Această abordare permite să se considere din punct de vedere unitar atît reprezentările unitare (finitdimensionale), cît şi cele neunitare (infinitdimensionale) ale unui grup compact, corespunzătoare la ponderi arbitrare complexe ale reprezentărilor [1]. Abordarea considerată este deosebit de fructuoasă atunci cînd convergenţa dezvoltării fundamentale a teoriei reprezentărilor nu este satisfăcătoare. Drept exemplu se discută problema de reprezentare a grupului de rotaţii O_3, la care se reduce problema de extragere a rădăcinii pătrate dintr-un spinor [3].

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

УДК 538.4; 533.9

ВЛИЯНИЕ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ЛЮБОЙ СТРУКТУРЫ НА АЛЬФВЕНОВСКИЕ ВОЛНЫ РАСПРОСТРАНЯЮЩИЕСЯ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Р. В. ДОЙЧ

Сообщение представленное на научной сессии Ясского политехнического института, 28—30 сентября 1967 г.

1. *Введение*

В присутствии гравитационного поля магнитные поверхности деформируются. На этих поверхностях плотность плазмы и также ее давление не будут больше постоянными. Поэтому появляется естественный вопрос о том, будут ли обладать те волны, которые в отсутствии гравитационного поля распространяются вдоль магнитных силовых линий и не деформируют магнитные поверхности, этим свойством и в присутствии гравитационного поля или нет?

В настоящей работе дается ответ на этот вопрос. Доказано, что необходимое и достаточное условие для существования глобальных альфвеновских волн не остается тем же самым как и в отсутствии гравитационного поля. Оно дополняется условием относящимся к структуре гравитационного поля.

Чтобы решить поставленную задачу должно было прежде всего сформулировать выражения поверхностных величин в случае присутствия гравитационного поля любой структуры. После этого получилось уравнение малых альфвеновских возбуждений, а решение изучается в различных частных случаях.

2. *Поверхностные величины в присутствии гравитационного поля*

Как было доказано в предыдущей работе [1], в отсутствии гравитационного поля глобальные альфвеновские волны могут существовать в плоских системах и в системах с аксиальной симметрией. По этому мы будем искать выражения поверхностных величин в случае,

когда плазма находится в системе являющейся инвариантной по отношению к трансляцией вдоль оси перпендикулярной на плоскость в которой находятся силовые линии, и также в инвариантных по отношению с вращением вокруг одной оси системах. В первом случае уравнения магнетогидростатического равновесия будут следующие:

$$\frac{j}{c}\frac{\partial A}{\partial x} = \rho\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x}, \qquad (2.1)$$

$$\frac{j}{c}\frac{\partial A}{\partial y} = \rho\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y}, \qquad (2.2)$$

$$0 = \rho\frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z}. \qquad (2.3)$$

Здесь мы пользовались следующими обозначениями: A и j являются абсолютные величины векторного потенциала и плотности тока. Они зависят лишь от двух пространственных координат, которые мы выбрали как x и y. Векторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{j}$ имеют лишь компоненты $A_z = A$ и $j_z = j$. Функция ψ является потенциалом гравитационного поля. Если мы имеем в виду пропорциональность

$$p = \frac{1}{\alpha}\rho, \qquad (2.4)$$

которая всегда имеет место в изотермической плазме и приведем функцию

$$q = p\mathrm{e}^{\alpha\psi}, \qquad (2.5)$$

система (2.1)...(2.3) записывается в следующей форме:

$$\frac{j}{c}\mathrm{e}^{\alpha\psi}\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial x}, \qquad (2.6)$$

$$\frac{j}{c}\mathrm{e}^{\alpha\psi}\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial y}, \qquad (2.7)$$

$$0 = \frac{\partial q}{\partial z}. \qquad (2.8)$$

Отсюда находим

$$\frac{j}{c}\mathrm{e}^{\alpha\psi}\,\mathrm{d}A = \mathrm{d}q \qquad (23)$$

и

$$q = q(x, y). \qquad (2.10)$$

Так как магнитная поверхность характеризуется значениями $A = \mathrm{const}$, из (2.10) следует, что на магнитной поверхности

$$q(x, y) = \mathrm{const.} = q(A). \qquad (2.11)$$

Если мы пользуемся соотношением $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$, уравнения (2.6)...(2.8) переходят в

$$\frac{1}{c}[\mathbf{J}\times\mathbf{B}] = \mathrm{grad}\,q, \quad (\mathbf{J} = \mathbf{j}e^{\alpha\psi}). \tag{2.12}$$

Для плоской системы имеем

$$\mathrm{rot}\,[\mathbf{J}\times\mathbf{B}] = (\mathbf{B}\nabla)\,\mathbf{J} = 0. \tag{2.13}$$

Следовательно и вектор $\mathbf{J}$ является поверхностной величиной как и q. Подобным образом, как следует из (2.4) и (2.5), следующая функция является тоже поверхностной величиной:

$$\rho_0^0 = \rho e^{\alpha\psi}. \tag{2.14}$$

Пользуясь подобным методом можно показать, что в системах с аксиальной симметрией находящихся в стационарном равновесии, функция (2.14) может быть также рассмотрена, как поверхностная величина. Следовательно в обоих системах позволяющих существование глобальных альфвеновских волн в отсутствии гравитационного поля, величина (2.14) может быть рассмотрена как поверхностная величина при присутствии любого гравитационного поля.

3. *Дифференциальные уравнения малых возбуждений*

Влияние гравитационного поля приводит к появлению одного дополнительного члена в уравнение движения:

$$\rho_0\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} = -\,\mathrm{grad}\,\delta p - \delta\rho\,\mathrm{grad}\,\psi - \frac{1}{4\pi}(\mathbf{B}_0\times\mathrm{rot}\,\mathbf{b}) - \frac{1}{4\pi}(\mathbf{b}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{B}_0). \tag{3.1}$$

Так как в третьем члене этого уравнения появляется возмущение плотности ($\delta\rho$), из за этого члена система уравнений для альфвеновских волн будет связана системой уравнений для магнетоакустических волн и они распадаются только тогда, когда этот член становится равным нулю для таких колебаний, которые соответствуют альфвеновским волнам. Это имеет место в таких системах, в которых в каждой точке магнитные силовые линии являются перпендикулярными на линии пересечения магнитных поверхностей с эквипотенциальными поверхностями. Имеются плоские и аксиально-симметричные системы в которых это условие удовлетворено. В этом случае из системы уравнений малых возмущений в таких системах координат, которые соответствуют симметриям рассматриваемых проблем, находим следующие уравнения для глобальных альфвеновских волн:

$$Ce^{-\alpha\psi}\frac{\partial^2 b_z}{\partial t^2} = (\mathbf{B}\nabla)^2 b_z, \tag{3.2}$$

$$(3.3)\quad Ce^{-\alpha\psi}\frac{\partial^2 b_\varphi}{\partial t^2}=\left(B_z\frac{\partial}{\partial z}+B_r\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r}B_r\right)\left(B_z\frac{\partial}{\partial z}+B_r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}B_r\right)b_\varphi,$$

где

$$(3.4)\quad C=4\pi\rho_0^0.$$

4. *Свойства решений уравнений малых возмущений*

Уравнения (3.2) и (3.3) в ортогональных криволинейных системах координат, в которых одна координатная линия совпадает с силовой линией, записываются в следующей форме:

$$(4.1)\quad Ce^{-\alpha\psi}\frac{\partial^2 b_z}{\partial t^2}=\left(B\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^2 b_x,$$

$$(4.2)\quad Ce^{-\alpha\psi}\frac{\partial^2 b_\varphi}{\partial t^2}=\left(B\frac{\partial}{\partial\xi}-\frac{1}{r}B_r\right)\left(B\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{1}{r}B_r\right)b_\varphi.$$

Величина ξ измеряется вдоль силовой линии. Пользуясь аналогичным методом, как в работе [3], из уравнений (4.1), (4.2) следует также в присутствии гравитационного поля, что глобальные альфвеновские возмущения распространяются вдоль силовых линий.

Внутри гравитационного поля можно найти различные области:

а) Если силовые линии магнитного поля являются касательными эквипотенциальных поверхностей, тогда величина ψ не будет функцией ξ. В этом случае гравитационное поле не имеет никакого влияния на распространение глобальных альфвеновских волн.

б) Если силовые линии пересекают эквипотенциальные поверхности, решения первого уравнения могут быть даны в виде функций Бесселя, откуда следует, что профиль волн искажается особенно сильно в области где

$$(4.3)\quad \frac{dU}{d\xi}>\omega.$$

Здесь мы пользовались обозначением U для локальной скорости Альфвена и ω для частоты.

в) В таких областях, в которых гравитационное поле является однородным, можно пользоваться конформным отображением [6] и привести магнетогидростатические проблемы к обычным проблемам в отсутствии гравитационного поля. Пользуясь таким методом и в случае уравнений (4.1) и (4.2), находим, что в обоих случаях присутствие гравитационного поля приводит к деформации профилей возмущений. (Случай плоской системы подробно исследован нами в работе [7]). Строго говоря решения уравнений (4.1) и (4.2) могут соответ-

ствовать появлению неустойчивости лишь в таком случае, когда магнитные силовые линии не являются замкнутыми кривыми. Если они являются замкнутыми, кривыми апериодическое движение не появляется из за альфвеновских волн когда частота остальных гидродинамических флюктуаций меньше чем частота альфвеновских волн, а скорость Альфвена больше скорости звука.

Ясский политехнический институт,
Кафедра физики

ЛИТЕРАТУРА

1. Deutsch R. V., *Teoria magnetohidrodinamică în fizica plasmei.* Edit. Acad. R. S. R., Buc., 1966.
2. — Труды третьей конференции по исследованиям физики плазмы и управляемого ядерного синтеза, Новосибирск, 1—7 авг. 1968 г.
3. Deutsch R. V., Ciubotariu C., St. şi cerc. fizică, 1968, **20**, p. 791.
4. Deutsch R. V., Rev. Roum. Phys., 1968, **13**, p. 673.
5. — Rev. Roum. Phys., 1967, **12**, p. 433.
6. Dungey J. W., Month. Not. Roy. Astr. Soc., 1953, **113**, p. 180.
7. Deutsch R. V., Fornwald F., Rev. Roum. Phys., 1968, **13**, *9*.

INFLUENŢA CÎMPULUI GRAVITAŢIONAL DE STRUCTURĂ ARBITRARĂ ASUPRA PROPAGĂRII UNDELOR ALFVÉN ÎN MEDII NEOMOGENE

(Rezumat)

Se demonstrează că prezenţa cîmpului gravitaţional influenţează condiţiile în care pot să apară oscilaţii globale de tip Alfvén ale unui mediu magnetohidrodinamic. Ele sînt determinate de structura cîmpului magnetic şi gravitaţional neperturbat. Se dau expresiile generale ale mărimilor superficiale şi se formulează ecuaţiile diferenţiale ale micilor perturbaţii Alfvén globale. Pe baza acestor ecuaţii se studiază cele mai importante proprietăţi ale acestor unde.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

D. K. 538.082.74.03

EINFLUSS DER ABKÜHLUNGSBEDINGUNGEN NACH DER SINTERUNG AUF DIE ELEKTRISCHEN UND MAGNETISCHEN EIGENSCHAFTEN DER FERRITE VOM SPINELTYPUS

VON

N. REZLESCU und V. PETRESCU

1. Vorwort

Es ist bekannt, dass die Abkühlungsbedingungen nach der Sinterung die elektrischen und magnetischen Eigenschaften der Ferrite beträchtlich beienflussen. Bochirol [1] zeigt z. B., dass der spezifische Widerstand der schnell abgekühlten Ferritproben als Grössenordnung kleiner als der spezifische Widerstand der langsam abgekühlten Proben ist. Er führt diese Feststellung auf das „Erstarren" der chaotischen Verteilung der Kationen bei einer schnellen Abkühlung zurück.

In der vorliegenden Arbeit wird den Einfluss der Abkühlungsgeschwindigkeit nach der Sinterung auf den spezifischen Widerstand, auf die Anfangspermeabilität und auf den Curie-Punkt einiger Ferrite vom Spineltypus untersucht.

2. Proben und Arbeitsmethode

Die Ferrite vom Spineltypus, mit einer stoichiometrischen Zusammensetzung, wurden nach der üblichen Keramik-Technik, von Metalloxyde ausgehend, hergestellt. Die sehr reinen Oxyde wurden zwei Stunden lang in einer Kugelnmühle gemischt. Die Proben wurden dann in Torusform (27 mm Aussendurchmesser, 15 mm Innendurchmesser, 5 mm Dicke) und in Scheibenform (14 mm Durchmesser, 2...3 mm Dicke) pressiert. Die Sinterung erfolgte in Luft in einem Ofen mit Silitstäbe. Es wurden drei Abkühlungsarten benutzt: eine schnelle Abkühlung in Luft, eine schnelle Abkühlung im Wasser und eine langsame Abkühlung in Luft (gleichzeitig mit der Abkühlung des Ofens).

In der Tabelle 1 werden die Bezeichnungen der Ferrite, ihre chemische Zusammensetzung, die Temperatur und die Dauer der Sinterung angegeben.

Tabelle 1

Die Bezeichnung der Ferrite, ihre chemische Zusammensetzung, die Temperatur und die Dauer der Sinterung

Probe	Chemische Zusammensetzung	Temperatur der Sinterung °C	Dauer der Sinterung Stunden
1	$NiFe_2O_4$	1 250	5
2	$ZnFe_2O_4$	1 250	5
3	$NiO_{0,5}ZnO_{0,5}Fe_2O_3$	1 250	5
4	$CuFe_2O_4$	1 000*)	12
5	$CuO_{0,5}ZnO_{0,5}Fe_2O_3$	1 200	4
6	$CuO_{0,5}MnO_{0,5}Fe_2O_3$	1 200	4
7	$MnFe_2O_4$	1 250	4
8	$MnO_{0,5}ZnO_{0,5}Fe_2O_3$	1 250	4
9	$MgFe_2O_4$	1 350	5
10	$MgO_{0,5}ZnO_{0,5}Fe_2O_3$	1 300	4
11	$CoFe_2O_4$	1 100**)	8

*) 12 Stunden lange Sinterung bei 1 000°C und folgend eine Temperung bei 900°C, 28 Stunden lang.

**) 8 Stunden lange Sinterung bei 1 100°C und folgend eine Temperung bei 950°C, 20 Stunden lang.

Die Anfangspermeabilität der Ferrite wurde mit den Torusproben in einem Feld, das ungefähr 10 mOe betrug und eine Frequenz von 2 kHz hatte, gemessen. Der Curie-Punkt wurde aus der Kurve der Permeabilität als Funktion von der Temperatur bestimmt. Der spezifische Widerstand der Ferrite wurde mit den scheibenförmigen Proben im Gleichfeld durch eine Brücken-Methode gemessen. Da wir festgestellt haben, dass der spezifische Widerstand der Proben von der Brückenspannung abhängt, wurden Massnahmen getroffen, um diese Spannung während den Messungen konstant zu bleiben. Die Elektroden für die Stromzuführung an den Ferritscheiben sind mit Hilfe einer kolloidalen, an den Seitenflächen der Scheiben niedergeschlagenen Silberpaste erzeugt, nachdem eine dünne Schicht von der Probe entfernt wurde.

3. Experimentelle Ergebnisse und ihre Deutung

a) *Die Abhängigkeit des spezifischen Widerstands der Ferrite vom Spineltypus von der Abkühlugsgeschwindigkeit nach der Sinterung*

Die Tabelle 2 enthält den spezifischen Widerstand der langsam abgekühlten Proben und der im Wasser bzw. in Luft schnell abgekühlten Proben; die Messungen erfolgten bei der Zimmertemperatur.

Man erkennt sofort, dass der spezifische Widerstand der langsam abgekühlten Proben in allen Fällen grösser als der spezifische Widerstand der schnell abgekühlten Proben ist (sogar mit 3...4 Grössenordnungen).

Tabelle 2

Die spezifischen Widerstände der langsam in Luft abgekühlten Proben und der schnell in Luft und im Wasser abgekühlten Proben

Probe	ρ Ω cm		
	Langsame Abkühlung in Luft	Schnelle Abkühlung in Luft	Schnelle Abkühlung im Wasser
1	$5{,}01.10^6$	$2{,}32.10^3$	$1{,}82.10^3$
2	$1{,}20.10^3$	$3{,}44{,}10^2$	$3{,}43.10^2$
3	$3.43.10^4$	$5{,}84.10^2$	$2{,}63.10^2$
4	$4{,}52.10^3$	$3{,}10.10^2$	—
5	$9{,}22.10^3$	$1{,}24.10^2$	$1{,}43.10^2$
6	$2{,}18.10^6$	$2{,}21.10^2$	$2{,}06.10^2$
7	$4{,}07.10^6$	$5{,}17.10^2$	$2{,}66.10^2$
8	$6{,}07.10^6$	9,72.10	4,05.10
9	$1{,}15.10^6$	7,21.10	6,32.10
10	$5{,}47.10^2$	4,89.10	5,56.10
11	$3{,}91.10^3$	$2{,}97.10^2$	$2{,}73.10^2$

Wie schon oben erwähnt, kann dieses Verhalten nach Bochirol [1] folgende Erklärung haben: während bei der schnellen Abkühlung die chaotische Verteilung der Kationen „erstarrt" wird und etwa dieselbe wie bei der entsprechenden Sinterungstemperatur bleibt, findet bei der langsamen Abkühlung eine Umordnung der Kationen statt, die zur Ernidrigung der Leitfähigkeit, also eine Zunahme des spezifischen Widerstand, führt.

Wir glauben aber, dass das „Erstarren" der Kationen-Verteilung nur eine nebensächliche Ursache ist, die zur Erklärung des grossen Unterschieds zwischen den spezifischen Widerstände der schnnell und langsam abgekühlten Proben dienen kann; die Hauptursache ist die Anwesenheit der Fe^{2+}-Ionen neben den Fe^{3+}-Ionen in den Ferriten, oder, noch allgemeiner, die Anwesenheit der Metallionen verschiedener Wertigkeit in den Ferriten ($Fe^{2+} - Fe^{3+}$, $Mn^{2+} - Mn^{3+}$, $Ni^{2+} - Ni^{3+}$, $Cu^{1+} - Cu^{2+}$, $Co^{2+} - Co^{3+}$), in einer grösseren Menge bei der schnellen Abkühlung als bei der langsamen Abkühlung.

Über die Rechtfertigung dieser Vermutung sei im folgenden berichtet. Wir werden nur die Anwesenheit von Fe^{2+}-Ionen annehmen, da die Beweisdurchführung auch für die anderen Metallionen etwa dieselbe ist. Ausserdem spielen gerade die Fe^{2+}-Ionen die Hauptrolle im Leitungsvorgang der Ferrite.

Es ist bekannt, dass mit der Zunahme der Sinterungtemperatur der Ferrite eine Abnahme des spezifischen Widerstands stattfindet; dieser Sachverhalt erklärt sich dadurch, dass bei einer Zunahme der Sinterungtemperatur mit einer Zunahme der Fe^{2+}-Ionenzahl rechnen muss [2]...[4]. Bei der schnellen Abkühlung hat das Fe^{2+}-Ion keine Zeit zum Oxydieren, um zum Fe^{3+}-Ion überzugehen. Verwey u. a. [5], [6] und später van Uitert [7]...[9] und Jonker [10] haben aber gezeigt, dass das Leitfähigkeitsmechanismus in Ferriten eben durch den Übergang der Elektronen zwischen Fe^{2+}- und Fe^{3+}-Ionen erklärt werden kann. Eine grosse Anzahl von Fe^{2+}-Ionen, bedeutet eine grosse Zahl von Elektronen-Übergänge zwischen Fe^{2+}- und Fe^{3+}-Ionen, was zu einer vergrösserten Leitfähigkeit (erniedrigter spezifischer Widerstand) führt. Bei einer langsamen Abkühlung oxydieren sich die Fe^{2+}-Ionen zum grössten Teil zu Fe^{3+}-Ionen.

Da die Zahl der Fe^{2+}-Ionen abnimmt, nimmt auch die Zahl der $Fe^{2+} - Fe^{3+}$-Übergänge ab und die Leitfähigkeit ernidrigt sich (der spezifische Widerstand wächst).

Als Bestätigung dafür dient die Tatsache, dass einige Messergebnisse betreffs die Konzentration der Fe^{2+}-Ionen bei den Ni—Zn-Ferriten grössere Konzentrationen für die schnellabgekühlten Proben als für die langsamabgekühlten zeigten [11].

Der grosse spezifische Widerstand des langsamabgekühlten Ni-Ferrits (Probe *1*) erklärt sich nach van Uitert [7]...[9] durch eine, der Formel (1) entsprechende Dissoziation

$$(1) \qquad Ni^{2+} + Fe^{3+} \leftrightarrows Ni^{3+} + Fe^{2+},$$

die einerseits das Vorhanden eines Leitungsvorgangs zwischen $Fe^{2+} - Fe^{3+}$-Ionen und anderseits zwischen Ni^{2+}- und Ni^{3+}-Ionen gestattet.

Wir glauben, dass die von van Uitert vorgeschlagene Ionen-Dissoziation das Vorhanden von Ni-Ionen in den spinelischen Gitter zwischen Fe^{2+}- und Fe^{3+}-Ionen zur Folge hat; dadurch wird den Elektronen-Übergang zwischen Fe^{2+}- und Fe^{3+}-Ionen verhindert und die Leitfähigkeit verkleinert sich natürlich.

Man beobachtet, dass bei einer schnellen Abkühlung die Ni enthaltende Proben (Probe *1* und *3*) keine allzu grosse Leitfähigkeit bezitzen, so wie bei den anderen auch schnell abgekühlten Ferriten der Fall ist. Unser Meinung nach ist die Ursache dieselbe wie oben. Auch wenn die Zahl der Fe^{2+}-Ionen gross ist, wegen des Vorhandens von Ni-Ionen zwischen Fe^{2+}- und Fe^{3+}-Ionen wird den Elektronen-Übergang zwischen den letztgenannten erschwert, was zu einer Ernidrigung der Leitfähigkeit führt.

Die Zn-enthaltende Ferrite, gleich ob sie langsam oder schnell abgekühlt worden sind, weisen einen kleinen spezifischen Widerstand auf. Diese Tatsache ist in der Literatur schon bekannt. Es scheint, dass das Zink die Entstehung der Fe^{2+}-Ionen in einer grösseren Menge begünstigt. Zwei Ferrite weichen doch von dieser Regel ab: das langsam abgekühlte Ferrit der Zusammensetzung $NiO_{0,5}\,ZnO_{0,5}\,Fe_2O_3$ (Probe *3*) bei dem, wie schon oben gezeigt, den Elektronen-Übergang schwieriger erfolgt (wegen der

zwischen Fe^{2+}- und Fe^{3+}-Ionen befindlichen Ni-Ionen) und das langsam abgekühlte Ferrit der Zusammensetzung $CuO_{0,5}ZnO_{0,5}Fe_2O_3$ (Probe *8*), welches weiter unten diskutiert wird.

Da das $CuFe_2O_4$-Ferrit (Probe *4*) bei 1 000°C hergestellt worden ist, kann man annehmen, dass dieses Ferrit eine bestimmte Menge von Cu^{1+}-Ionen enthält [12]. In [12] wurde gezeigt, dass über eine Temperatur von 950°C in diesen Ferrit ein Teil von Cu^{2+}-Ionen in Cu^{1+}-Ionen übergeht. In diesem Fall ist das Leitungsvorgang nicht nur den $Fe^{2+} - Fe^{3+}$-Übergänge zu verdanken, sondern ist die Leitfähigkeit auch eine Folge des Elektronen-Übergangs von Cu^{1+}- zu Cu^{2+}-Ionen; es könnte auch vorkommen, dass einen „gemischten" Übergang [14] stattfindet: $Cu^{2+} - Fe^{2+}$, $Cu^{1+} - Fe^{3+}$. Bei einer schnellen Abkühlung haben die Cu^{1+}-Ionen keine Zeit mehr, sich wieder zu Cu^{2+}-Ionen zu reduzieren, und dadurch wird die Leitfähigkeit grösser als im Falle der langsamen Abkühlung, bei der die Reduktion von Cu^{1+} zu Cu^{2+} wohl stattfinden kann. Für eine langsame Abkühlung unter 360°C wird bekanntlich das $CuFe_2O_4$-Ferrit tetragonal [13].

Vielleicht für die anderen kupferenthaltenden Ferrite (Probe *5* und *6*), bei denen die Sinterungtemperatur 1 200°C betrug, ist die Anzahl von Cu^{1+}-Ionen noch grösser als für die Probe *4* ($CuFe_2O_4$), deren Sinterung bei 1 000° erfolgte. Da aber die Probe *5* genügend porös ist, oxydieren sich die Cu^{1+}-Ionen bei der langsamen Abkühlung und kehren zu Cu^{2+}-Ionen zurück, was mit einer ernidrigten Leitfähigkeit gleichbedeutend ist. Was die Probe *6* anbetrifft, spielen hier die Mn-Ionen die Hauptrolle.

Die Ferrite mit Mn-Gehalt ($MnO_{0,5}CuO_{0,5}Fe_2O_3$ — Probe *6*, $MnFe_2O_4$ — Probe *7* und $MnO_{0,5}ZnO_{0,5}Fe_2O_3$ — Probe *8*) weisen bei einer langsamen Abkühlung grosse spezifische Widerstände von etwa $10^6\ \Omega$ cm. Es ist in der Literatur bekannt [2], dass für die Mn-haltige Ferrite nur eine schnelle Abkühlung magnetische Eigenschaften versichert. Dagegen, bei einer langsamen Abkühlung haben die Mn-Ferrite und Mn—Zn-Ferrite überhaupt keine magnetische Eigenschaften.

In den Mn-haltigen Ferriten bilden sich ausser $Fe^{2+} - Fe^{3+}$-Ionenpaare auch $Mn^{2+} - Mn^{3+}$-Paare. Die Zahl der letzten ist kleiner, doch können sie am Leitungsvorgang teilnehmen. Diese Ferrite sind poröser als die anderen und bei einer langsamen Abkühlung dringt das Sauerstoff leichter ein und Fe^{2+}-Ionen oxydieren sich zu Fe^{3+}-Ionen, was eine Verkleinerung der Leitfähigkeit zur Folge hat. Ausserdem kann man bei der langsamen Abkühlung einen Sauerstoff-Überschuss annehmen und in diesem Fall bildet sich nach Gorter [15] die Verbindung Mn_2O_4:

$$(2) \qquad MnO + Fe_2O_3 + \frac{1}{3}O \xrightarrow{1\,000°C} \frac{1}{3}Mn_3O_4 + Fe_2O_3,$$

die einen grossen spezifischen Widerstand aufweist. Bei einer schnellen Abkühlung bleibt eine grosse Menge von $Fe^{2+} - Fe^{3+}$- und $Mn^{2+} - Mn^{3+}$-Paare erhalten (da sie keine Zeit zum Verschwinden haben) und diese nehmen am Leitungsvorgang teil. Darin liegt es, dass die spezifischen Widerstände

der beiden schnell abgekühlten Mn-Ferrit (Probe *7*) und Mn—Zn-Ferrit (Probe *8*) sehr klein sind.

Das langsam abgekühlte $CoFe_2O_4$-Ferrit (Probe *11*) bezitzt einen ziemlich kleinen spezifischen Widerstand, der sich nach Jonker [10] dadurch erklärt, dass hier der Fall einer fast stoichiometrischen Zusammensetzung, mit einer bestimmten Anzahl von $Fe^{2+}—Fe^{3+}$- Paare im Überschuss, vorliegt.

Wenn die $Co^{2+}—Co^{3+}$-Paare überwiegt hätten, wäre der spezifische Widerstand um 3...4 Grössenordnungen grösser gewesen, da das Elektronenwechsel zwischen Co^{2+}- und Co^{3+}-Ionen schwieriger erfolgt. Bei einer schnellen Abkühlung ernidrigt sich der spezifische Widerstand nur um etwa eine Grössenordnung. Das erklärt sich dadurch, dass die Dichte dieses Ferrits grösser ist und folglich erfolgt das Sauerstoffwechsel mit dem Äussere schwieriger.

Wie schon am Anfang gezeigt, findet die schnelle Abkühlung in Luft und Wasser statt. Wie aus der Tabelle 2 ersichtlich ist, liefert die schnelle Abkühlung im Wasser in den meisten Fällen etwa kleinere spezifische Widerstände als die Abkühlung in Luft. Die Erklärung liegt darin, dass die Abkühlung im Wasser plötzlicher als die Abkühlung in Luft erfolgt und dadurch wird das Sauerstoffwechsel mit dem Äussere noch mehr erschwert. Bei manchen Proben empfehlt sich die Abkühlung im Wasser überhaupt nicht, da eine solche sehr plötzlich verlaufende Abkühlung zur Zerstörung der Proben führen kann. Eben deshalb wurde den spezifischen Widerstand des schnell im Wasser abgekühlten $CuFe_2O_4$-Ferrits in Tabelle 2 nicht angegeben.

b) *Der Einfluss der Abkühlungsgeschwindigkeit auf die Anfangspermeabilität und auf den Curie-Punkt der Ferrite vom Spineltypus*

Das $ZnFe_2O_4$-Ferrit (Probe *2*) wird sich der Diskussion entziehen, da sie antiferromagnetisch ist.

Die Anfangspermeabilität wurde bei Zimmertemperatur für torusförmige Proben in einem Magnetfeld von ungefähr 10 mOe und 2 kHz gemessen. Die Tabelle 3 ergibt die Messergebnisse.

Nach dem Einfluss der Abkühlungsgeschwindigkeit nach der Sinterung auf die Anfangspermeabilität, kann man die untersuchten Ferrite vom Spineltypus in zwei Gruppen teilen:

1°. Zur ersten Gruppe gehören die Ferrite deren Anfangspermeabilität nicht besonders stark von der Abkühlungsgeschwindigkeit beeinflusst ist: $NiFe_2O_4$ (Probe *1*), $MgFe_2O_4$ (Probe *9*), $CoFe_2O_4$ (Probe *11*) und $MgO_{0,5}ZnO_{0,5}Fe_2O_3$ (Probe *10*). Die ersten drei sind Ferrite mit einer sehr kleinen Anfangspermeabilität; nur das letzte hat eine etwas grössere Anfangspermeabilität.

2°. Die zweite Gruppe enthält Ferrite, deren Anfangspermeabilität von der Abkühlungsgeschwindigkeit abhängt. Für das $MnFe_2O_4$-Ferrit (Probe *7*) und $MnO_{0,5}ZnO_{0,5}Fe_2O_3$-Ferrit (Probe *8*) könnte keine Anfangspermeabilität

Tabelle 3

Die Anfangspermeabilität und der Curie-Punkt der langsam und schnell abgekühlten Ferrite von Spineltypus

Probe	Langsame Abkühlung in Luft		Schnelle Abkühlung in Luft		Schnelle Abkühlung im Wasser	
	μ_0	T_c °C	μ_0	T_c °C	μ_0	T_c °C
1	16,3	520	15,8	515	15,5	520
3	229	275	139	300	113	305
4	5,2	480	56	430	—	—
5	286	75	103	103	76	105
6	30	415	64	345	66	345
7	—	—	97	295	108	290
8	—	—	232	86	376	87
9	12,2	460	12,1	460	12,0	460
10	209	138	199	138	196	137
11	1,9	485	1,9	485	—	—

für die langsame Abkühlung gemessen werden, da eine solche Abkühlung nichtmagnetische Ferrite liefert. Die Ferrite zweiter Gruppe können sich ihrerseits in zwei Kategorien unterteilen: eine Kategorie enthält Ferrite deren Anfangspermeabilität bei der schnellen Abkühlung eine Zunahme gegenüber der langsamen Abkühlung aufweist ($CuFe_1O_4$—Probe *4*, $CuO_{0,5}MnO_{0,5}Fe_2O_3$—Probe *6*, $MnFe_2O_4$—Probe *7*, $MnO_{0,5}ZnO_{0,5}Fe_2O_3$—Probe *8*). Die zweite Kategorie enthält Ferrite deren Anfangspermeabilität bei schnellen Abkühlung im Vergleich mit der langsamen Abkühlung sich verkleinert: $NiO_{0,5}ZnO_{0,5}Fe_2O_3$—Probe *3*, $CuO_{0,5}ZnO_{0,5}Fe_2O_3$—Probe *5*.

Die Ferrite, die ihre Anfangspermeabilität für verschiedene Abkühlungsbedingungen nicht modifizieren, sind Ferrite für denen die Gashülle bei der Sinterung keine wesentliche Rolle spielt. Sie können daher in Luft hergestellt werden, ohne dass besondere Massnahmen zur Kontrolle der Sinterungsatmosphäre notwendig sind.

Die Ferrite deren Anfangspermeabilität bei einer schnellen Abkühlung gegenüber einer langsamen Abkühlung sich verkleinert, benötigen während der Herstellung eine stark oxydierende Atmosphäre. Im Gegenteil, die Ferrite deren Anfangspermeabilität bei der schnellen Abkühlung gegenüber der langsamen Abkühlung zunimmt, benötigen während der Herstellung und besonders bei der Abkühlung eine nichtoxydierende, reaktionsträge Gashülle.

In der Tabelle 3 ist auch der Curie-Punkt der untersuchten Ferrite vom Spineltypus angegeben. Der Curie-Punkt wurde mit Hilfe der Kurven der Anfangspermeabilität als Funktion von der Temperatur bestimmt (Abb. 1...3). Ausser den Proben *5*, *8* und *10*, für denen der Curie-Punkt

mit einem Fehler von $\pm$ 1° C bestimmt wurde, betrug der Fehler für alle anderen Proben $\pm$ 5° C.

Abb. 1 zeigt die Abhängigkeit der Anfangspermeabilität von der Temperatur für das $NiFe_2O_4$-Ferrit (Probe *1*), für welches die unterschiedliche Abkühlungsgeschwindigkeit keine merkliche Verschiebung des Curie-Punktes hervorruft.

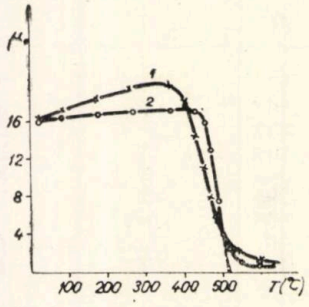


Abb. 1

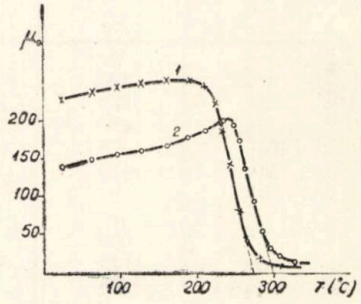


Abb. 2

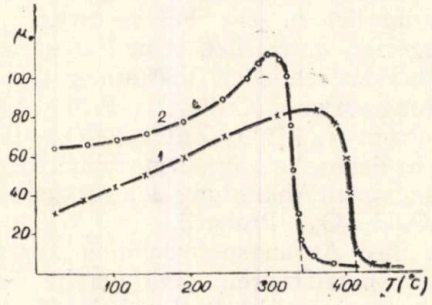


Abb. 3

Abb. 2 ergibt die Temperaturabhängigkeit der Anfangspermeabilität für das $NiO_{0,5}ZnO_{0,5}Fe_2O_3$-Ferrit (Probe *3*), bei dem die schnelle Abkühlung den Curie-Punkt zu grösseren Temperaturen als im Falle der langsamen Abkühlung verschiebt.

Abb. 3 ergibt auch die Abhängigkeit von der Temperatur für das Ferrit der Zusammensetzung $CuO_{0,5}MnO_{0,5}Fe_2O_3$ (Probe *6*), bei dem die schnelle Abkühlung den Curie-Punkt zu niedrigeren Temperaturen gegenüber der langsamen Abkühlung verschiebt.

Um die Abb. 1...3 nicht allzuviel zu komplizieren, wurde hier die temperaturabhängige Änderung der Anfangspermeabilität nur für die schnelle und langsame Abkühlung in Luft wiedergegeben.

Aus unseren Messungen (Tabelle 3) geht hervor, dass diejenige Proben, für welchen die Abkühlungsgeschwindigkeit keinen Einfluss auf die Anfangspermeabilität ausübt, keine Änderung des Curie-Punktes aufweisen, auch wenn diese Proben unter verschiedenen Bedingungen abgekühlt wurden.

Im Gegenteil, die Proben, deren Anfangspermeabilität von der Abkühlungsgeschwindigkeit abhängt, zeigen eine Verschiebung des Curie-Punktes: für die Proben deren Anfangspermeabilität bei der schnellen Abkühlung gegenüber der langsamen sich verringert, tritt eine Verschiebung des Curie-Punktes zu grösseren Temperaturen (Probe *3* und *5*) auf, und für die Proben deren Anfangspermeabilität bei der schnellen Abkühlung grösser als bei der langsamen Abkühlung wird, verschiebt sich der Curie-Punkt zur niedrigeren Temperaturen (Probe *4*, *6*, *7* und *8*).

Was die Verschiebung des Curie-Punktes des $CuFe_2O_4$-Ferrits (Probe *4*) von 480° C (langsame Abkühlung) bis 430° C (schnelle Abkühlung) anbetrifft, stimmt unser Ergebniss mit dem in [16] angegebenen Resultat überein.

Ausser [16], kennen wir keine andere Arbeiten, die sich mit der Verschiebung des Curie-Punktes der Ferrite in Abhängigkeit von der Abkühlungsgeschwindigkeit nach der Sinterung befassen.

Wir deuten diese von der Abkühlungsgeschwindigkeit abhängende Verschiebung des Curie-Punktes als eine Folge der unterschiedlichen Kationen-Verteilung im Falle einer langsamen bzw. schnellen Abkühlung; im letzten Fall wird bei niedrigen Temperaturen eine den höherer Temperaturen entsprechende Kationen-Verteilung „induziert".

4. Schlussfolgerungen

Es wurde den Einfluss der Abkühlungsgeschwindigkeit nach der Sinterung auf den spezifischen Widerstand, auf die Anfangspermeabilität und auf den Curie-Punkt der Ferrite vom Spineltypus untersucht.

Es wurde gezeigt, dass der grosse Unterschied zwischen den spezifischen Widerstände der langsam bzw. schnell abgekühlten Proben nicht nur als Folge der unterschiedlichen Kationen-Verteilung einzusehen ist, sondern grundsätzlich ist er eine Folge des unterschiedlichen Gehalt an Fe^{2+}-Ionen bei langsamen bzw. schnellen Abkühlung: bei einer schnellen Abkühlung ist die Anzahl von Fe^{2+}-Ionen grösser als bei einer langsamen Abkühlung; und da der Leitungsvorgang durch den Elektronen-Übergang von Fe^{2+}- zu Fe^{3+}-Ionen stattfindet, wird die Leitfähigkeit natürlich grösser im Falle der schnellen Abkühlung.

Betreffs des Einflusses der Abkühlungsgeschwindigkeit auf die magnetischen Eigenschaften der Ferrite vom Spineltypus (Anfangspermeabilität und Curie-Punkt), kann man diese Ferrite in zwei Gruppen abtrennen: zur ersten Gruppe gehören die Ferrite deren magnetischen Eigenschaften unabhängig von der Abkühlungsgeschwindigkeit sind; die zweite Gruppe enthält die Ferrite deren magnetischen Eigenschaften eine Abhängigkeit von der Abkühlungsgeschwindigkeit aufweisen.

Der Curie-Punkt der Ferrite, deren Anfangspermeabilität bei der schnelle Abkühlung gegenüber der langsamen Abkühlung wächst, verschiebt sich zur niedrigeren Temperaturen. Umgekehrt, wenn die Anfangspermeabilität bei der schnellen Abkühlung kleiner als bei der langsamen Abkühlung ist, verschiebt sich der Curie-Punkt dieser Ferrite zur grösseren Temperaturen.

Eingegangen am 8. IV 1968

Akademie der Rumänischen Sazialistischen Republik,
Physikalisches Forschungszentrum, Jassy

LITERATURVERZEICHNIS

1. Bochirol L., C. R. Acad. Sci. Paris, 1951, **233**, p. 736.
2. Smit J., Wijn H. P. J., *Les Ferrites.* Bibliothèque Technique Philips, Dunod, Paris, 1961.
3. Рабкин Л. И., Соскин С. А., Эпштейн Б. Ш., *Технология ферритов.* ГЭИ, М., 1962.
4. Verwey E. J. W., de Boer J. H., Rec. Trav. Chim. Pays Bas, 1936, **55**, p. 531.
5. Verwey E. J. W., Haaijman P. W., Romeyn F. C., J. Chem. Phys., 1947, **15**, p. 181.
6. Verwey E. J. W., Haaijman P. W., Romeyn F. C., van Oosterhout G. W., Philips Res. Rep., 1950, **5**, p. 173.
7. van Uitert L. G., J. Chem. Phys., 1955, **23**, p. 1883.
8. — J. Chem. Phys., 1956, **24**, p. 306.
9. — Proc. IRE, 1956, **44**, p. 1294.
10. Jonker G. H., J. Phys. Chem. Solids, 1959, **9**, p. 165.
11. Koops C. G., Phys. Rev., 1951, **83**, p. 121.
12. Stierstadt K., Z. Phys., 1956, **146**, S. 169.
13. Ohnishi H., Teranishi T., J. Phys. Soc. Japan, 1961, **16**, p. 33.
14. Rosenberg M., Nicolau P., Bunget I., Phys. stat. sol., 1966, **15**, p. 521.
15. Gorter E. W., Proc. IRE, 1955, **43**, p. 1945.
16. Stierstadt K., Benz H., Rechenberg H., Proc. Intern. Conf. Magnetism, Nottingham, 1964, p. 609.

INFLUENŢA CONDIŢIILOR DE RĂCIRE DUPĂ SINTERIZARE ASUPRA UNOR PROPRIETĂŢI ELECTRICE ŞI MAGNETICE ALE FERITELOR DE TIP SPINEL

(Rezumat)

Se studiază influenţa vitezei de răcire după sinterizare asupra rezistivităţii, permeabilităţii iniţiale şi punctului Curie al feritelor de tip spinel.

Se arată că diferenţa mare între rezistivităţile probelor răcte lent şi răcite rapid nu se datoreşte numai distribuţiei cationice diferite ci, mai ales, prezenţei ionilor Fe^{2+} în cantitate diferită la răcirea lentă faţă de răcirea rapidă şi anume: la răcirea rapidă cantitatea ionilor Fe^{2+} în ferite este mai mare decît la răcirea lentă, şi prin urmare conductibilitatea este mai mare dat fiind că procesul de conducţie în ferite are loc tocmai prin trecerea electronilor între ionii Fe^{2+} şi Fe^{3+}.

Din punctul de vedere al influenţei vitezei de răcire asupra proprietăţilor magnetice ale feritelor de tip spinel (permeabilitate iniţială şi punct Curie), aceste ferite pot fi împărţite în două grupe: o grupă din care fac parte feritele ale căror proprietăţi magnetice sînt insensibile faţă de viteza de răcire şi o grupă în care intră feritele ale căror proprietăţi magnetice depind de viteza de răcire. La feritele a căror permeabilitate iniţială creşte la răcirea rapidă faţă de răcirea lentă, punctul Curie se deplasează către temperaturi mai joase, iar la feritele la care permeabilitatea iniţială scade la răcirea rapidă faţă de răcirea lentă, punctul Curie se deplasează către temperaturi mai ridicate.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

C. D. 537.525

ÉTUDE DE LA DÉPENDANCE ENTRE LA PRESSION ET LA DISTANCE POUR UNE DÉCHARGE ÉLECTRIQUE SUR UN ÉLECTROLYTE

PAR

N. CALINICENCO et N. A. MATEESCU

Communication présentée dans la session scientifique de l'Institut Polytechnique de Jassy, 28—30 septembre 1967

1. Introduction

La décharge électrique entre un électrode métallique et un électrolyte a été étudiée du point de vue chimique.

Ainsi, F. Haber et A. Klémenc (1914) [1] ont étudié les réactions électrochimiques [2] au passage du courant par la limite espace de gaz-électrolyte, A. Güntherschulze (1925) conclut que les dépôts à une cathode en gaz sont différents par rapport aux ceux à une cathode métallique habituelle immersée en électrolyte et M. Thon a montré (1933) [3] que lors de cette décharge on n'observe pas l'apparition d'un dépôt metallique, mais il se dégage de l'hydrogène exception faisant les trois métaux nobles: Ag, Pt et Au. Les phénomènes d'oxydation et de réduction qui ont lieu ici ont été étudiés par P. Jolibois (1938) [4]. L. H. Collet (1956) [5] a considéré que dans cette décharge ont lieu deux phénomènes d'électrolyse de nature très différente: l'un de la solution et l'autre de l'atmosphère au dessus de la solution dans la quelle a lieu la décharge et ces deux „électrolytes", qui sont liés en série, possèdent un „électrode" commun, la surface libre de la solution.

Nous nous sommes proposés d'étudier la dépendance entre la pression et la distance anode-cathode.

2. Méthode de mesure

L'instalation utilisée a été celle représentée dans la fig. 1 où: A — l'anode (l'électrolyte), B—ballon de verre, C—la cathode (Al), D—bouchon de caoutchouc.

L'électrolyte était mis dans un ballon de verre et toujours à une certaine distance au dessus de l'électrolyte il y avait un électrode plan en

aluminium, fixé de telle manière qu'il pouvait rester toujours parallèle à la surface libre de l'électrolyte lorsque le balion était basculé pour modifier la distance anode-cathode.

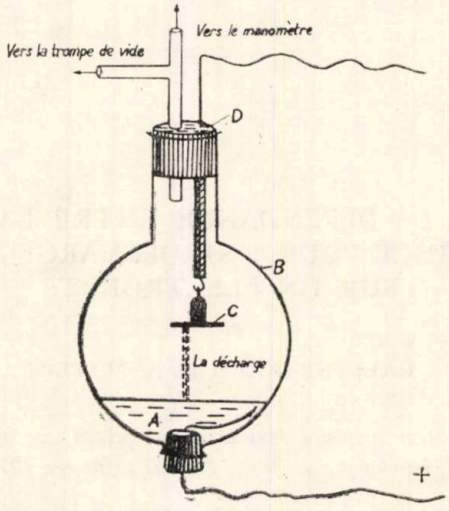
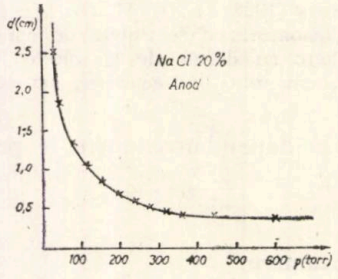


Fig. 1

3. Résultats et interprétation

La décharge étudiée a été produite sous une tension continue et constante, égale à 3,6 kV. La pression a été variée de 14 ou 17 torr jusqu' à la pression atmosphérique et lorsque la pression augmentait, pour se produire la décharge il fallait diminuer la distance entre les électrodes.



Flg. 2 a

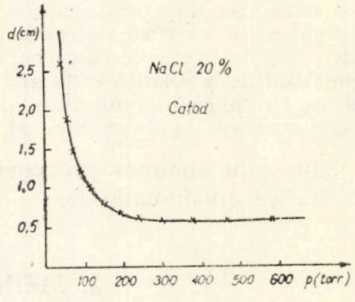


Fig. 2 b

Les solutions électrolytiques analysées ont été: NaCl 20%, $CuSO_4$ 10% et $Pb(CH_3COO)_2$ 5%. L'électrolyte était tantôt anode, tantôt cathode et lorsqu'il était anode, la dépendance entre la pression et la distance respecte la loi de P a s c h e n dans le domaine des pressions de 160 torr à

360 torr (fig. 2 a, 3 a, 4 a). Si l'électrolyte était cathode la loi n'était pas verifiée (fig. 2 b, 3 b, 4 b). On observe que la nature et la concentration de l'électrolyte n'exercent aucune influence sur le phénomène étudié.

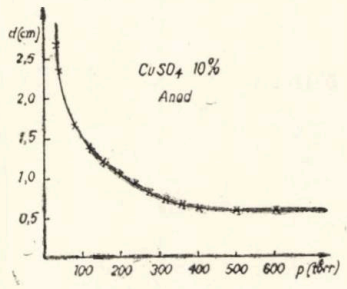


Fig. 3 a

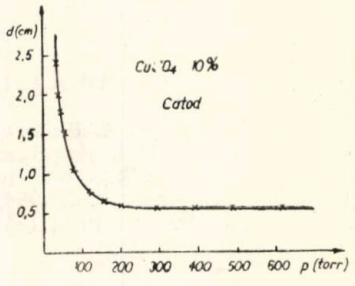


Fig. 3 b

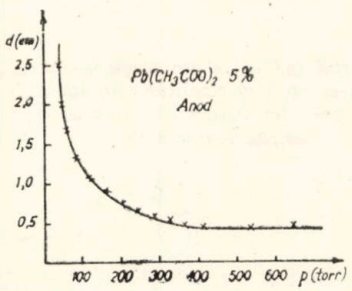


Fig. 4 a

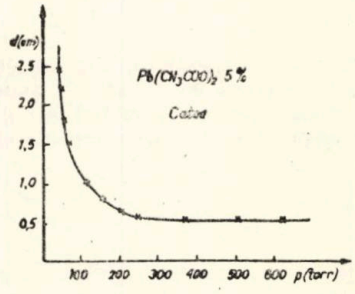


Fig. 4 b

La vérification de la loi de Paschen, seulement lorsque l'électrolyte est anode, s'explique par l'analogie plus grande dans ce cas avec la décharge produite entre des électrodes métalliques. Pour des pressions moindres que 160 torr la loi n'est plus respectée parce que dans l'espace de la décharge il y a beaucoup de vapeurs d'eau. De même, la loi n'est plus respectée lorsque la pression dépasse 360 torr. Dans ce dernier cas les coefficients α et β, introduits par Townsend, ont des valeurs appréciables et les émissions thermo-électronique, photo-électrique et auto-électronique sont considérables.

4. Conclusions

1. La loi de Paschen est vérifiée lors de la décharge électrique entre un électrode métallique et un électrolyte dans le domaine des pressions de 160 torr à 360 torr, seulement lorsque l'électrolyte est anode.

2. La nature et la concentration de l'électrolyte n'exercent aucune influence sur le phénomène étudié.

Institut Polytechnique de Jassy,
Chaire de Physique

BIBLIOGRAPHIE

1. Haber F., Klémenc A., Z. Electrochemie, 1914, **20**, S. 485.
2. Güntherschulze A., Z. Electrochemie, 1925, **31**, S. 187.
3. Thon M. N., C. R. Ac. Sci. Paris, 1933, **197**, p. 1114.
4. Jolibois P., Bull. Soc. Chim., 1938, **5**, p. 1429.
5. Collet L. H., J. Physique Rad., 1956, **17**, p. 309.

DEPENDENȚA ÎNTRE PRESIUNE ȘI DISTANȚĂ LA DESCĂRCAREA ELECTRICĂ PE UN ELECTROLIT

(Rezumat)

Se studiază descărcarea electrică între un electrod metalic și un electrolit la o tensiune continuă și constantă de 3,6 kV. Se constată că atunci cînd electrolitul este anod, în domeniul presiunilor cuprinse între 160 torr și 360 torr, legea lui Paschen este respectată. Natura i concentrația electrolitului nu exercită nici o influență asupra fenomenului.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

C.D.538.245

PROPRIÉTÉS MAGNÉTIQUES DES COUCHES DE NICKEL-PHOSPHORE ET COBALT-PHOSPHORE

PAR

C. RUSCIOR, MARIA SUCIU, GH. GĂLUGĂRU et PAMFILIA PETRARIU

1. Introduction

La préparation des couches de Ni-P et de Co-P, due à Brenner et Riddell [1], est bien connue [2]...[8]. Elle représente une méthode chimique, qui consiste dans la réduction des sels de nickel ou de cobalt à l'aide de l'hypophosphite de sodium. Le support de la couche doit être constitué par un métal actif, tel que le Ni, Co, Pd, Fe ou Al. Pour obtenir des dépôts sur d'autres métaux (par exemple sur le cuivre), il est nécessaire d'amorcer la réaction, en mettant la surface métallique en contact avec un métal actif. Un autre procédé est de rendre la surface active, en la plongeant dans des solutions de $SnCl_2$ et $PdCl_2$. Ce dernier procédé, largement utilisé, permet la réalisation des couches de Ni-P et de Co-P aussi sur des supports diélectriques.

Les couches ainsi obtenues contiennent du nickel, respectivement du cobalt, avec une certaine teneur en phosphore (5 à 15% pour les couches de Ni-P et 2 à 10% pour celles de Co-P, selon les conditions de l'expérience). Elles sont constituées vraisemblablement par des phosphures métalliques et des solutions solides du phosphore dans le réseau du métal. La présence du phosphore leur confère des propriétés qui diffèrent de celles du métal pur. Par exemple le point de fusion d'une couche de Ni-P (contenant 8 à 10% P) est de 900°C, tandis que celle du nickel pur est de 1 452°C. L'abaissement du point de fusion rend ces couches utiles pour le brasage [9]. Les couches de Ni-P et de Co-P présentent un intérêt particulier du à leurs propriétés magnétiques, pouvant être utilisées (Co-P) comme éléments de mémoire [4].

Dans le présent travail nous avons étudié les propriétés magnétiques des couches de Ni-P et Co-P, d'une épaisseur de 3...20 micromètres (Ni-P) et 1...5 micromètres (Co-P), plus particulièrement en fonction de la température du bain de réduction.

Les couches ont été déposées sur des fils de cuivre (1,6 mm diamètre, 5 cm longueur), préalablement soumis à un polissage et puis à un nettoyage à l'aide de l'alcool et de l'eau distillée. La composition des bains de réduction était la suivante : a) pour les couches de Co-P : 50 g/l $CoSO_4$, 100 g/l NaH_2PO_2 et 80 g/l citrate de sodium ($Na_3C_6H_5O_7$) en solution aqueuse (le pH de la solution était maintenu entre les limites de 9,4 à 9,7 par correction à l'aide de l'ammoniac) ; b) pour les couches de Ni-P : 30 g/l $NiSO_4$ 10 g/l NaH_2PO_2 et 10 g/l acétate de sodium. La valeur du pH, de 6 à 6,2,

restait pratiquement inchangée pendant la réaction, sans correction supplémentaire. L'amorçage de la réaction a été réalisé par le contact de la surface de cuivre avec un fil de nickel. La température des bains de réduction, variant entre 50°C et 95°C, était contrôlée avec une précision de 0,5°C.

Les couches de Ni-P et Co-P ainsi obtenues sont uniformes, ayant un éclat métallique et présentent une bonne adhérence. Leur épaisseur a été déterminée par pesée et la teneur en phosphore par une méthode photocolorimétrique [10]. Les mesures magnétiques ont été effectuées en courant alternatif, à la fréquence de 50 Hz, par la méthode d'induction de Colombani, à l'aide du dispositif décrit dans deux Notes antérieures [11], [12].

2. Résultats

a) L'épaisseur des couches de Ni-P et Co-P croît à peu prés d'une façon linéaire avec le temps de déposition pour une température constante du bain de réduction. Dans la fig. 1 on a représenté la variation de l'épaisseur des couches déposées pendant 10 à 60 min, pour une température du bain de 95°C. Les couches de Ni-P, dont l'épaisseur est comprise entre 3 et 20 μm, présentent une vitesse de déposition approximativement quatre fois plus grande que celles de Co-P, dont l'épaisseur varie entre 1 et 5 μm pendant le temps indiqué.

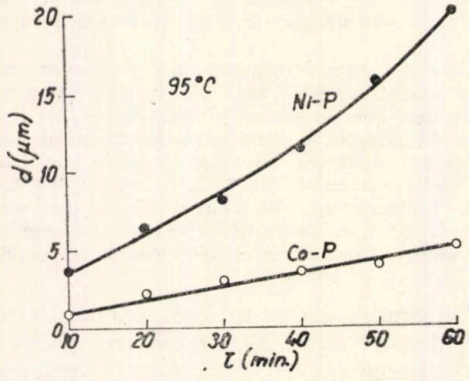


Fig. 1. — Épaisseur des couches de Ni-P et Co-P en fonction du temps de déposition.

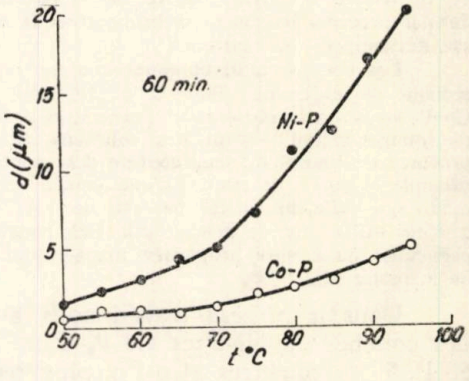


Fig. 2. — Épaisseur des couches de Ni-P et Co-P en fonction de la température du bain de réduction.

b) On n'obtient pas de dépôt si la température du bain de réduction reste inférieure à celle d'approximatif 50°C. Pour des températures supérieures à 50°C, le procesussus se développe d'autant mieux que la température est plus élevée. Dans la fig. 2 on a représenté la variation de l'épaisseur des couches de Ni-P et Co-P en fonction de la température du bain, entre

50°C et 95°C, pour la même durée du processus de réduction (60 min). Pour les deux couches on remarque un accroissement sensible de la vitesse de déposition à partir de 70°C.

c) La teneur en phosphore des couches de Ni-P et Co-P est une fonction de l'épaisseur du dépôt. Elle en est d'autant plus grande que les couches sont plus minces. On doit donc conclure que le phosphore est déposé en plus grande quantité dans les phases initiales de la réaction. La variation de la teneur en phosphore avec l'épaisseur, pour les couches de Ni-P obtenues à 95°C, est donnée dans la fig. 3. On constate que les couches ayant une épaisseur de 3 μm contiennent 12 % P, tandis que celles de 20 μm en ont 7 %. Une évolution analogue est à signaler pour les couches de Co-P, dont la teneur en phosphore est plus faible (5 à 10 %).

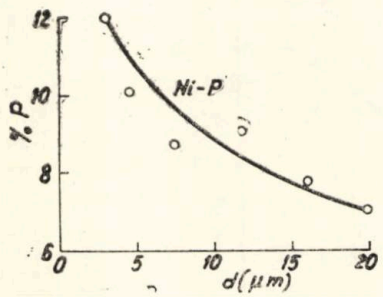


Fig. 3. — Teneur en phosphore des couches de Ni-P en fonction de l'épaisseur de la couche.

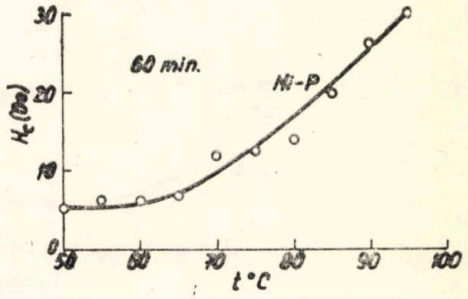


Fig. 4. — Champ coercitif des couches de Ni-P en fonction de la température du bain.

d) La présence du phosphore dans les couches de Ni-P modifie leurs paramètres magnétiques, par rapport aux ceux d'une couche de nickel pur. Le tableau 1 présente les dates comparatives pour une couche de 20 μm déposée à 95°C et une couche électrolytique d'une même épaisseur.

On remarque les valeurs accrues du champ coercitif H_c et du rapport $\mathcal{J}_r/\mathcal{J}_m$ pour les couches contenant du phosphore. Au contraire les magnétisations $\mathcal{J}_r$ et $\mathcal{J}_m$ de ces couches sont beaucoup plus faibles (champ magnétisant 250 Oe). Un tableau comparatif pour les couches de Co-P et Co pur, d'une épaisseur de 1 μm, a été donnée dans [11].

Tableau 1

	Ni-P	Ni
H_c [Oe]	30	18
$\mathcal{J}_r$ [Gs]	56	112
$\mathcal{J}_m$ [Gs]	68	425
$\mathcal{J}_x/\mathcal{J}_m$	0,8	0,25

e) La valeur du champ coercitif croît avec la température du baie de réduction. Dans la fig. 4 on a représenté la variation de H_c pour les couches de Ni-P déposées pendant 60 min, à des températures du bain comprises entre 50°C et 95°C. On constate un accroissement sensible du champ coercitif à partir de 70°C.

f) Si l'on représente, toujours pour une couche de Ni-P, la variation du champ coercitif pendant la formation de la couche, on constate que H_c présente deux maxima dans l'interval de 3 à 20 μm d'épaisseur. Dans la fig. 5 on a représenté H_c en fonction du temps de déposition de la couche, à la température du bain de 95°C. Les deux maxima correspondent aux épaisseurs de 6 et 12 μm. Sur la même figure on a représenté la variation du rapport $\mathcal{J}_r/\mathcal{J}_m$ pendant le même temps. On constate que celui-ci passe par un minimum pour $t = 30$ min, correspondant à une épaisseur de la couche de 9 μm.

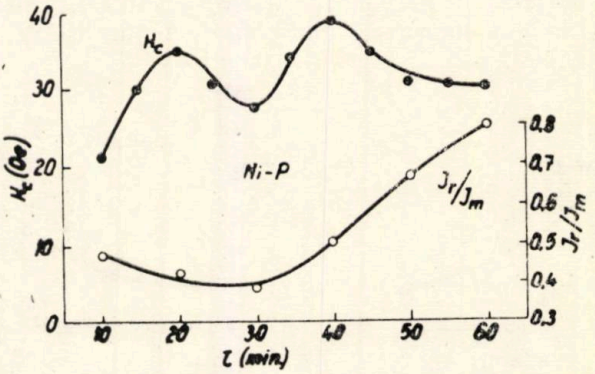


Fig. 5. — Variation de H_c et $\mathcal{J}_r/\mathcal{J}_m$ pendant la formation de la couche (Ni-P).

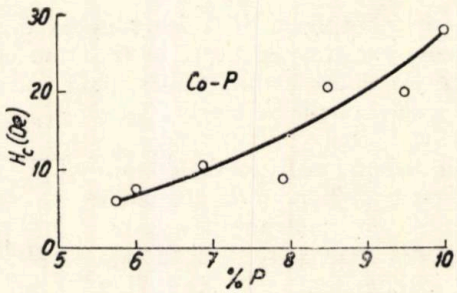


Fig. 6. — Champ coercitif des couches de Co-P en fonction de la teneur en phosphore.

g) Pour les couches de Co-P obtenues dans les conditions de nos expériences, la teneur en phosphore est de 5 à 10 %. Leur champ coercitif est compris entre 6 et 30 Oe et on a pu mettre en évidence une dépendence à peu près linéaire entre la teneur en phosphore et la valeur de H_c (fig. 6). Le champ coercitif croît avec le contenu en phosphore de la couche.

En ce qui concerne les magnétisations remanente et de saturation, J_r et J_m, elles présentent des valeurs beaucoup plus grandes que celles qui caractérisent les couches de Ni-P. En même temps ces paramètres dépendent de la température du bain de réduction.

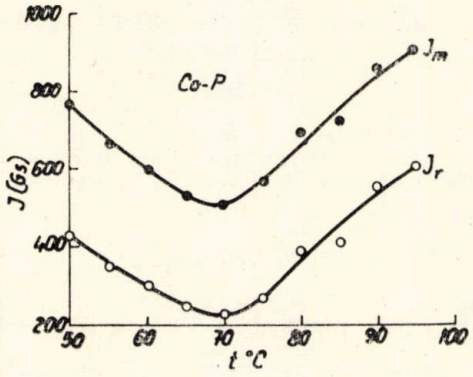


Fig. 7. — Variation de J_r et J_m avec la température du bain, pour les couches de Co-P.

Dans la fig. 7 on a représenté la variation des magnétisations remanente et de saturation entre 50°C et 95°C pour les couches de Co-P déposées pendant 60 min. On constate que J_r et J_m passent par un minimum à la température de 70°C et que les valeurs de J_r sont comprises entre 200 et 600 Gs, tandis que celles de J_m se situent entre 500 et 900 Gs.

Reçue le 20 IX 1968

Académie de la République Socialiste de Roumanie, Jassy, Centre de Recherches Physiques

BIBLIOGRAPHIE

1. Brenner A., Riddell G.E., J. Research Natl. Bur. Standards, 1946, **37**, p.31; Ibid., 1947, **39**, p. 385.
2. Brenner A., Metal Finishing, 1954, **52**, p. 68.
3. Gutzeit G., Plating, 1959, **46**, pp. 1158, 1378.
4. Fisher R.D., Chilton W. H., J. Electrochem. Soc., 1962, **109**, p. 485.
5. Котельников Н. В., Коренев Н. А., Ермолина Т. Д., ДАН СССР, 1962, **143**, стр. 908.
6. Moradzadeh Y., J. Electrochem. Soc., 1965, **112**, p. 890.
7. Alberts G. S., Wright R. H., Parker C. C., J. Electrochem. Soc., 1966, **113**, p. 687.
8. Speliotis D. E., Judge J. S., Morrison J. R., J. Appl. Phys., 1966, **37**, p. 1158.
9. * * * Danish Atomic Energy Comission. Risö Report No. 110, 1965, p. 17.
10. Furman N.N., *Standard Methods of Chemical Analysis*. D. Van Nostrand Comp., New York, 1962.

11. Ruscior C., Suciu M., Călugăru G., An.şt. Univ. „Al. I. Cuza" Iaşi, I, Fiz., 1966, **XII**, p. 51.
12. Ruscior C., Călugăru G., Suciu M., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1967, **XIII** (**XVII**), *1-2*, p. 167.

PROPRIETĂŢI MAGNETICE LA PĂTURI DE NICHEL-FOSFOR ŞI COBALT-FOSFOR

(Rezumat)

Au fost studiate păturile feromagnetice de Ni-P şi Co-P, de grosime 3...20 μm (Ni-P) şi 1...5 μm (Co-P), obţinute prin reducere chimică pe fire de cupru. S-a constatat că prezenţa fosforului modifică parametrii magnetici ai păturii în comparaţie cu cei ai unei păturii de metal pur.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Grosimea păturilor de Ni-P şi Co-P în funcţie de timpul de depunere.
Fig. 2. — Grosimea păturilor de Ni-P şi Co-P în funcţie de temperatura băii de reducere.
Fig. 3. — Procentul de fosfor în păturile de Ni-P în funcţie de grosimea păturii.
Fig. 4. — Cîmpul coercitiv al păturilor de Ni-P în funcţie de temperatura băii.
Fig. 5. — Variaţia lui H_c şi $\mathcal{J}_r/\mathcal{J}_m$ în timpul formării păturii.
Fig. 6. — Cîmpul coercitiv al păturilor de Co-P în funcţie de conţinutul în fosfor.
Fig. 7. — Variaţia lui $\mathcal{J}_r$ şi $\mathcal{J}_m$ cu temperatura băii, pentru păturile de Co-P.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

C. D. 544.6 ; 446.681

DOSAGE SPECTROSCOPIQUE DU GALLIUM DANS UNE ATMOSPHÈRE DE CO_2

PAR

GH. TACU et MARCEL MOISE

Communication présentée dans la session scientifique de l'Institut Polytechnique de Jassy, 28—30 septembre 1967

1. Introduction

Le gallium est un des éléments les plus répandus dans la nature, dans le groupe des élémentes disperses. On le trouve dans diverses roches et minéraux, en très faibles quantités, associé surtout avec l'aluminium dans la bauxite, le contenu variant entre 1.10^{-2}% et 1.10^{-4} %. On le rencontre quelques fois dans le minéraux sulfuriques de zinc, en concentration de 2.10^{-3} %.

L'analyse spectroscopique du gallium a été effectuée autant dans le domaine de l'ultraviolet que dans le domaine visible du spectre. Parmi les auteurs qui se sont occupés de l'étude spectrochimique du gallium Morris [1] emploie comme raie analytique la ligne Ga–2 943,6 Å, Lovering [2] travaillant dans le domaine visible du spectre, emploie la raie Ga–4 033,0 Å, tandis que Shaw [3] détermine la concentration du gallium dans les minéraux en utilisant les raies Ga–2 943,6 Å et Ga–4 172,1 Å.

La raie Ga–2 943,6 Å possède une faible intensité spectrale et étant située dans le domaine ultraviolet du spectre, elle nécessite une optique en quartz. Les deux autres raies, respectivement Ga–4 033,1 Å et Ga–4 172,1 Å, malgré leur intensité assez forte, sont utilisées avec précaution, car dans l'arc entre électrodes de carbone elles se superposent sur les bandes du cyanogène. De plus, la raie Ga–4 033,0 Å interfère avec Mn–4 033,1 Å, tandis que Ga–4172,1 Å interfère avec Fe–4 172,1 Å. En tenant compte du fait que la majorité des minéraux contiennent du mangane et que la raie Mn–4 033,0 Å est très intense, l'utilisation de la raie Ga–4 033,1 Å paraît très difficile, malgré qu'elle soit située dans le domaine le moins intense des bandes du cyane. La raie la plus utilisée du domaine visible du spectre est Ga–4 172,1 Å.

L'élimination totale ou partielle des bandes de CN peut être réalisée par plusieurs procédés. Ainsi Russanov [4] utilise la flamme oxyacétylénique, Bronstein [5] utilise la décharge entre des électrodes de laiton. L'arc entre des électrodes métalliques s'amorce à une température plus basse, ce qui a pour effet une diminution de l'intensité des raies spectrales. Un autre procédé qui permet à atténuer l'intensité des bandes de CN est basé sur l'introduction des sels des métaux alcalins dans l'échantillon à analyser [5], [7].

Enfin il est possible à obtenir une réduction substantielle des bandes de CN, en employant la décharge entre électrodes de carbone dans une atmosphère d'argon, de hélium, d'argon-oxygène ou de bioxyde de carbon [8]...[11].

Dans cette Note nous nous sommes proposés de chercher la limite de décèlement du Ga dans les minéraux, en utilisant comme raie analytique Ga-4 172,1 Å.

Dans ce but nous avons employé deux méthodes d'analyse spectroscopique à savoir : a) l'arc électrique entre électrodes de carbone dans une atmosphère de CO_2 ; b) l'arc électrique entre électrodes de carbone en air libre, en introduisant de l'azotate de caesium dans l'échantillon afin de diminuer l'intensité des bandes CN.

Compte tenu qu'il ne se produit pas du cyanogène dans l'arc maintenu dans une atmosphère de CO_2, ses bandes disparaissent du spectre. L'arc dans une atmosphère de CO_2 a été très peu utilisé pour le dosage spectrochimique des éléments et pas du tout dans le cas du gallium.

2. Dispositif expérimental et méthode de travail

On a utilisé un spectrographe à trois prismes en verre FD-S (Row-Rathenow, R.D.G.). Cet appareil fournit le domaine spectral compris entre 3 850 Å et 5 900 Å, sur une plaque 9×24 cm, avec une dispersion de 4,8 Å/mm pour $\lambda = 4170$ Å. La chambre du support des électrodes a été adaptée pour pouvoir entretenir à l'intérieur une atmosphère de CO_2. Le gaz était obtenu d'une bouteille de bioxyde de carbone liquide, avec un débit d'environ 5 l/min. Dans ces conditions les bandes du cyane disparaissent du spectre de l'arc de carbone.

Comme électrodes on a utilisé le carbone spectral du type T_1 (R.D.G.), l'arc étant alimenté en courant continu à une intensité de 7 A et on a utilisé les plaques spectrales ORWO-Rot-Rapid WP 1.

a) Lorsqu'on a utilisé l'arc électrique entre électrodes de carbone en atmosphère de CO_2 nous avons procédé de la façon suivante. Après avoir choisi un minerai complexe dans lequel il aurait été possible l'existence du gallium (minerai de galène, blende, pirite, calcopirite et quartz), on a effectué son analyse qualitative en utilisant un spectroprojecteur SP-2. En constatant l'absence du gallium nous avons introduit celui-ci sous forme de Ga_2O_3. Les concentrations de gallium dans le mélange ont été de 1 %, 1.10^{-1} %, 1.10^{-2} %, 1.10^{-3} %, 1.10^{-4} % et 1.10^{-5} %.

Après avoir réalisé le mélange, on a établi la durée d'évaporation du gallium en employant l'arc électrique en atmosphère de CO_2. Cette durée a été de 2,5 min et la raie spectrale a présenté le maximum de l'intensité après 40 sec. Les échantillons, bien broyés, en quantité de 25 g chacun, ont été introduits dans les électrodes de carbone. L'anode, ayant un diamètre de 5 mm, était percé à une profondeur de 2 mm avec un diamètre de 3 mm. La cathode, à bout tronconique, avait aussi un diamètre de 5 mm. La largeur de la fente du spectrographe a était de 10 μ et la fente intermediaire de 3,2 mm.

Le temps d'exposition a été de 10 sec après avoir brûlé l'échantillon au préalable pendant 30 sec.

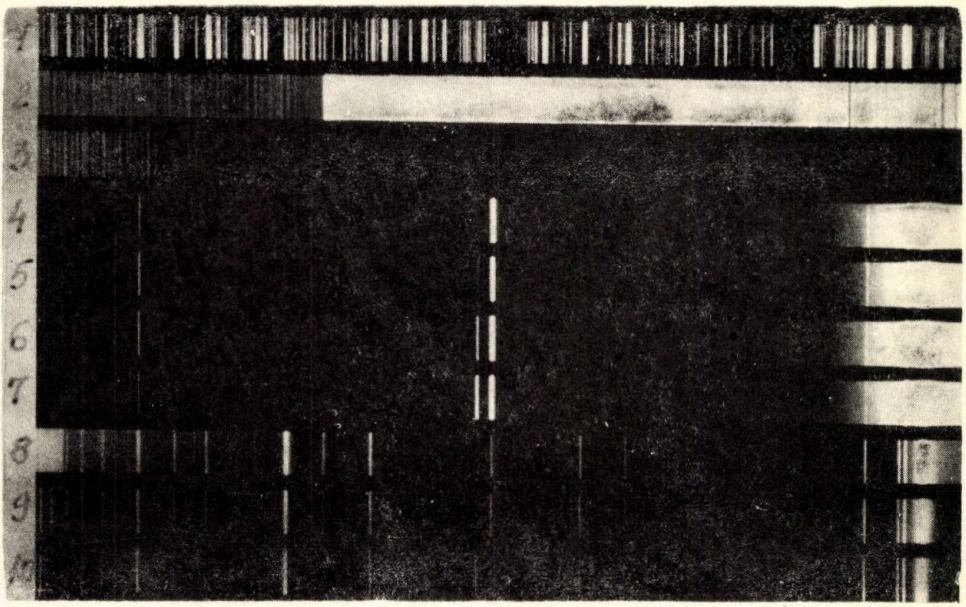


Fig. 1. — *1* — spèctre du Fe dans l'air, 2 — spèctre du carbone dans l'air, *3* — spèctre du carbone dans CO_2, *4*...*7* — spèctres des échantillons (minerai + gallium) entre électrodes de carbone, dans une atmosphère de CO_2 (les concentrations du gallium : $1.10^{-4}\%$ ... $1.10^{-1}\%$), *8*...*10* — spèctres des échantillons (minerai + gallium + $CsNO_3$), entre électrodes de carbone, en air libre (les concentrations du gallium $1.10^{-3}\%$ ... $1.10^{-1}\%$).

b) La seconde méthode utilisée consiste dans l'introduction de l'azotate de caesium dans un mélange de minerai et Ga_2O_3, en concentration de 1:1 (mélange de minerai et Ga_2O_3 vis-à-vis de $CsNO_3$). Les concentrations de gallium ont été les mêmes que celles utilisées dans la première méthode. La temps d'évaporation du gallium a été de 2,5 min et l'intensité maximum de la raie utilisée apparaît après 40 sec. Les conditions de travail, la forme et les dimensions des électrodes ont été les mêmes que dans la première méthode. La différence entre les deux méthodes utilisées c'est que dans la deuxième l'arc était produit en air libre.

3. Résultats obtenus

L'analyse qualitative du minerai a indiqué la présence des éléments suivants : Al, Ca, Cd, Cu, Fe, Mn, Na, Pb et Zn.

Puisqu'on a trouvé du fer dans le minerai, on s'est demandé si la raie Fe-4 172,1 Å, qui se superpose sur la ligne analytique du gallium, n'apparaît pas dans le spectre. À la suite de l'analyse qualitative on a constaté que cette ligne n'apparaît pas dans le spectre, ayant une très faible intensité.

De même le sodium contenu dans le minerai étant en très petite quantité (les dernières lignes apparaissent), n'a pas exercé une influence appréciable sur l'intensité de la ligne analytique ou sur les bandes du cyane.

La limite du décèlement obtenue dans le cas de l'emploi de l'arc électrique à courant continu entre électrodes de charbon et dans une atmosphère de bioxyde de carbone a été de 1.10^{-4} % Ga. Pour la deuxième méthode la limite du décèlement a été de 1.10^{-3} % Ga.

4. Conclusions

En comparant les deux méthodes de travail utilisées on peut aboutir aux conclusions suivantes :

1. Les deux méthodes fournissent un bon nettoyage du domaine des bandes de CN (fig. 1).
2. Dans l'atmosphère de bioxyde de carbone la limite de décèlement du gallium est dix fois plus grande que dans le cas du mélange de minerai avec l'azotate de caesium.
3. La stabilité de l'arc électrique croît au fur et à mesure que la concentration de l'azotate de caesium dans le minerai est plus grande.

Institut Polytechnique de Jassy,
Chaire de Physique

BIBLIOGRAPHIE

1. Morris D. F. C., Brewer F. M., Spectrochim Acta, 1955, **7**, p. 88.
2. Lovering J. F., Nichiporuk W., Chodes A., Brown Harrison, Geochim. Cosmochim. Acta, 1957, **11**, p. 263.

3. Shaw D. M., Wickremasinghe, Yip C., Spectrochim. Acta, 1958, **13**, p. 197.
4. Русанов А. К., Алексеева В. М., Зав. Лаб., 1940, **9**, стр. 66.
5. Бронштейн А. Н., Изв. АН СССР, сер. физ., 1955, **19**, стр. 169.
6. Minczewski J., Maleszewska H., Steciak T., Acta Chim. Hung., 1961, **28**, p. 91.
7. Rigault G., Periodica Mineral., 1956, **25**, p. 43.
8. Зайдель А. Н., *Основы спектрального анализа*. Изд. Наука, М., 1965, стр. 40.
9. Ahrens L. H., Taylor S. R., *Spectrochemical Analysis*. Addison-Wesley Publ. Comp., London, 1961, p. 233.
10. Moenke H., *Spektralanalyse von Mineralien und Gesteinen*. Geest et Portig, Leipzig, 1962.
11. Ruscior C., Tacu Gh., Moise M., Ciobanu C., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1966, **XII** (**XVI**), *1–2*, p. 135.
12. Борисенок Л. А., ЖАХ, 1957, **12**, стр. 704.
13. Боровик-Романова Т. Ф., Беляев Ю. И., Куценко Ю. И., Павленко Л. И., Савинова Е. Н., Фарафонов М. М., *Спектральное определение редких и рассеяных элементов*. Изд. АН СССР, М., 1962, стр. 107.

DOZAJUL SPECTROSCOPIC AL GALIULUI ÎN ATMOSFERĂ DE CO_2

(Rezumat)

Utilizînd descărcarea electrică între electrozi de cărbune în atmosferă de CO_2, cu ajutorul căreia se atenuează benzile cianului, s-a determinat limita de dozare a galiului în condiţiile metodei. S-a folosit drept linie analitică Ga-4 172 Å.

Concentraţia limită obţinută a fost de 1.10^{-4} % Ga.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — *1*—spectrul Fe în aer, *2*—spectrul C în aer, *3*—spectrul C în atmosferă de CO_2, *4...7*—spectre ale eşantioanelor (minereu+galiu) între electrozi de C, în atmosferă de CO_2 (concentraţiile galiului 1.10^{-4} %...1.10^{-1} %), *8...10*—spectre ale eşantioanelor (minereu+galiu+$CsNO_3$) între electrozi de C, în aer liber (concentraţiile galiului 1.10^{-3}%.. ...1.10^{-1} %).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

Chimie

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том XIV (XVIII), вып. 3—4, 1968

Химия

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

Chemistry

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

C. Z. 621.35

ASUPRA DENSITĂŢII DE CURENT LA FORMAREA ELECTROCHIMICĂ A AMALGAMULUI DE SODIU

DE

RADU VASILIU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 28–30 septembrie 1967

1. Introducere

Formarea amalgamului de sodiu în instalaţiile industriale pentru fabricarea electrolitică a hidroxidului de sodiu, se realizează în momentul de faţă la densităţi de curent variind între circa 6 000 şi 12 000 A/m^2.

Utilizarea unor densităţi de curent mai ridicate, adică a unei viteze mai mari a procesului de formare, implică unele dificultăţi în privinţa materialelor utilizate pentru anod şi ridică probleme în privinţa construirii şi regimului de funcţionare a celulelor de electroliză.

Mărirea vitezei de reacţie ar reduce cantitatea de mercur necesară instalaţiilor industriale precum şi volumul acestor instalaţii dacă şi viteza de descompunere ar putea creşte corespunzător.

Literatura [1] indică încercări de laborator [2] care merg pînă la densităţi de curent de 100 000 A/m^2.

Este posibilă ridicarea densităţii de curent la valori şi mai mari cu formare de amalgam, fără ca descompunerea amalgamului să aibă loc în baia de formare.

2. Partea experimentală

S-a experimentat formarea amalgamului de sodiu prin electroliza unei soluţii de clorură de sodiu saturată, pînă la densităţi de curent de circa 500 000 A/m^2. Dispozitivul experimental, indicat în fig. 1, este alcătuit din vasul *M* în care se găseşte soluţia de clorură de sodiu, catodul de mercur format dintr-un tub în formă de J în care se introduce mercurul şi o anodă de platină *Pt*.

Tensiunea la borne este măsurată cu voltmetrul *V* iar curentul cu ampermetrul *A*, fiind înregistrat în funcţie de timp cu ampermetrul înregistrator *I*. Suprafaţa catodului de mercur este de 10 mm^2 astfel că unui

curent de 1 A îi corespunde o densitate de curent de 100 000 A/m². Distanţa între electrozi este de circa 2 mm.

Formarea amalgamului s-a realizat la tensiuni şi intensităţi indicate în tabelul 1.

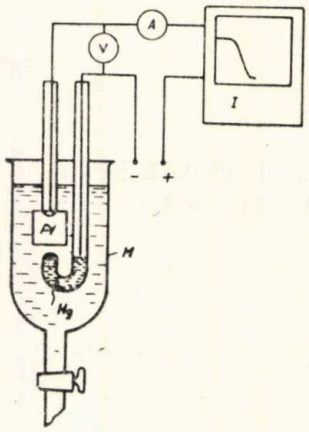


Fig. 1

Tabelul 1

U V	*I* A	*Dc* A/m²
4,7	0,06	6 000
5,7	0,60	60 000
9,0	1,50	150 000
13,0	3,00	300 000

3. Rezultate şi discuţii

La densităţi de curent ridicate şi fără agitarea catodului de mercur, deci fără a modifica difuzia sodiului în mercur, saturaţia suprafeţei mercurului cu sodiu devine rapidă astfel încît curentul de ionizare a sodiului din amalgam capătă valori importante ; amalgamul începe să se descompună spontan cu degajare puternică de hidrogen pe suprafaţa catodului de mercur.

Aplicînd densităţi de curent crescătoare şi măsurînd timpul de la începutul electrolizei şi pînă în momentul începerii descompunerii amalgamului, se constată depedenţa indicată în fig. 2.

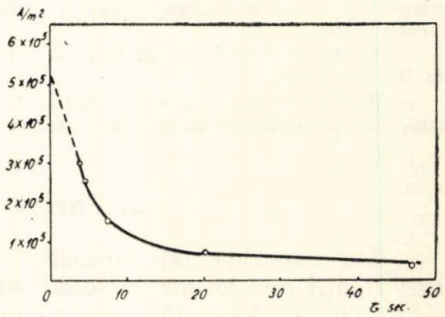


Fig. 2

Pînă la densităţi de curent de ordinul 20 000...50 000 A/m² stratul superficial al amalgamului se saturează destul de greu cu sodiu în circa 30...40 sec; la densităţi de curent mai mari (200 000...300 000 A/m²) saturaţia se produce în timp de cîteva secunde. Încercările întreprinse pînă la densităţi de curent de 300 000 A/m² arătau că extrapolînd curba (partea punctată din fig. 2), rezultă că la densităţi de curent de circa 500 000 A/m² descompunerea s-ar produce instantaneu. Experimental se confirmă această concluzie astfel că mărind tensiunea aplicată pînă cînd densitatea de curent atinge această valoare descompunerea spontană a amalgamului format începe la o durată de timp sub 1 sec de la stabilirea curentului.

Măsurîndu-se potenţialul catodic în raport cu un electrod de calomel saturat, în timpul formării amalgamului şi apoi în timpul descompunerii în pilă scurtcircuitată, se obţin curbele reprezentate în fig. 3, în care porţiunea $A - B$ reprezintă variaţia potenţialului catodic în timpul (τ_f) de formare a amalgamului. Cînd amalgamul este saturat superficial cu sodiu şi începe să se descompună, spontan, potenţialul creşte brusc (porţiunea $B - C$). Întrerupînd circuitul, potenţialul scade (punctul D) şi se menţine în soluţia de

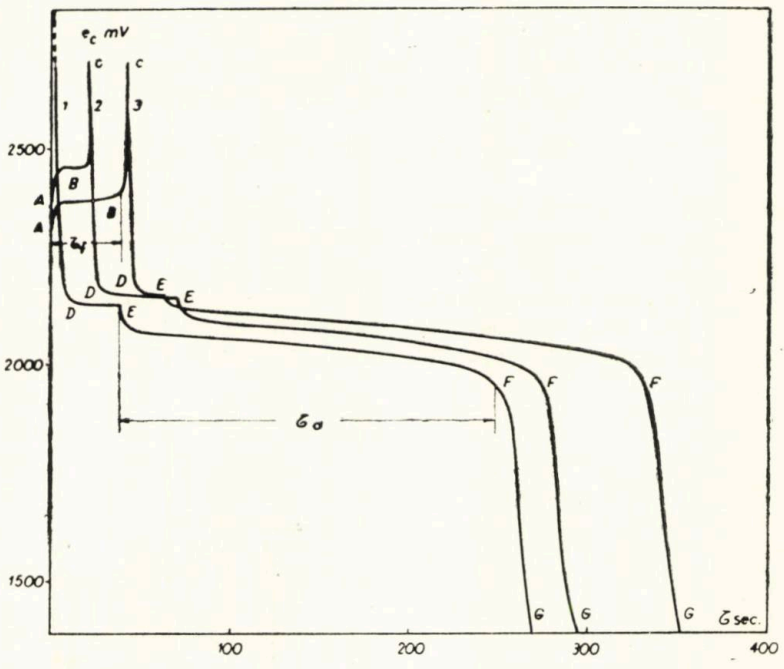


Fig. 3

clorură de sodiu la o valoare constantă (porţiunea $D - E$). Dacă se scurtcircuitează electrozii, amalgamul se descompune într-o pilă în scurt circuit şi potenţialul variază după curba $E - F$ pe cea mai mare durată a descompunerii (timpul de descompunere τ_d) şi scade brusc la sfîrşitul descompunerii (porţiunea de curbă $E - F$). În fig. 3 curbele *1*, *2*, *3* corespund formării amalgamului cu densităţi de curent respectiv de: 250 000, 130 000 şi 55 000 A/m².

Forma curbei $e = f(\tau)$ pe porţiunea $E - G$, este similară cu aceea a curbei $i = f(\tau)$ de la descompunerea amalgamului de sodiu în pilă.

Se poate afirma că variaţia curentului şi a potenţialului în funcţie de timp are loc după aceeaşi lege. Se constată o bună concordanţă cu datele indicate de K. Aoki [3]. Detaliile asupra acestui proces formează însă obiectul unei alte lucrări.

Considerînd formarea amalgamului fără agitarea catodului de mercur, se constată că este posibilă aplicarea unor densităţi de curent mari fără ca amalgamul să se descompună sensibil. Aceasta este posibil datorită difuziei sodiului în mercur care se produce cu o viteză suficient de mare astfel ca:

$$i_{desc.} < i_{dif.}$$

Deoarece curentul de difuzie depinde de gradientul de concentraţie rezultă că atunci cînd concentraţia în sodiu creşte în volumul amalgamului difuzia scade şi stratul superficial al amalgamului devine atît de concentrat în sodiu încît amalgamul devine instabil şi începe să se descompună cu degajare de hidrogen pe suprafaţa mercurului datorită reacţiei

$$Na^+ + OH^- \rightarrow NaOH, \quad H^+ + \varepsilon \rightarrow H \rightarrow \frac{1}{2} H_2.$$

Electrodul de mercur se comportă în acest caz ca orice electrod metalic pe care s-ar produce descărcarea ionilor de Na^+. Deoarece depolarizarea electrodului încetează brusc şi densitatea de curent este mare, se produce un salt al potenţialului catodic. Experimental se constată ca la densităţi de curent de circa 500 000 A/m^2, fenomenul se produce aproape instantaneu, viteza de descărcare depăşind viteza de difuzie ($i_{desc.} > i_{dif.}$)

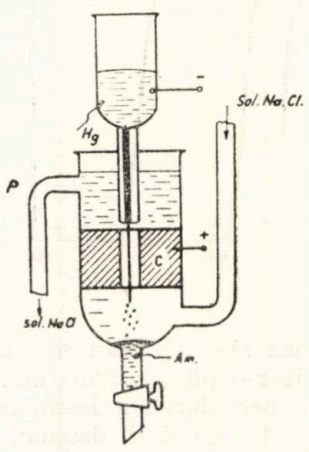


Fig. 4

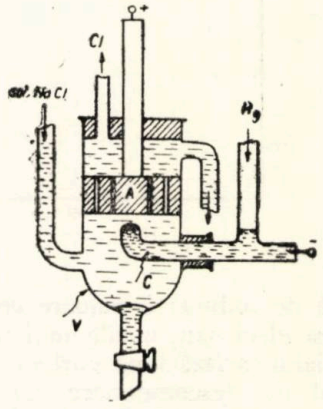


Fig. 5

Pe baza acestor constatări s-a experimentat formarea amalgamului de sodiu într-un dispozitiv folosind un catod cu jet de mercur (fig. 4), astfel ca suprafaţa mercurului să fie reîmprospătată mereu şi să se împiedice descompunerea amalgamului în baia de formare. Jetul de mercur, cu diametrul de 0,4 mm, curge prin interiorul anodei de grafit, printr-un canal cu diametrul de 5 mm şi cu lungimea de 12 mm. Deoarece jetul de mercur

nu poate funcţiona ca electrod decît pe porţiunea pe care este omogen şi nu se dispersează în bule s-au experimentat diferite condiţii geometrice ale capilarei şi de presiune a mercurului pînă s-a ajuns la un jet cu cea mai mare lungime, de la capătul capilarei pînă la punctul unde mercurul se dispersează în bule; această lungime este aproximativ egală cu cea a canalului anodic. Pentru înlăturarea clorului care se degajă la anod, soluţia de clorură de sodiu curge contra jetului de mercur astfel că eliminarea clorului se face mai rapid, pe la partea superioară a anodului. Soluţia de clorură de sodiu este menţinută la nivel constant prin preaplinul *P*. Rezultatele obţinute cu acest dispozitiv sînt indicate în tabelul 2.

Tabelul 2

Suprafaţa jetului de mercur m^2	*I* A	*Dc* A/m^2	Debitul de mercur l/min	Concentraţia amalgamului %
$1{,}09.10^{-5}$	1,2	$1{,}1.10^5$	81.10^{-4}	0,02
$1{,}09.10^{-5}$	3,0	$2{,}7.10^5$	81.10^{-4}	0,05
$1{,}09.10^{-5}$	3,5	$3{,}2.10^5$	81.10^{-4}	0,07

Dispozitivul permite obţinerea rapidă a amalgamului de sodiu dar din cauza vitezei mari cu care jetul de mercur trece prin faţa anodului timpul în care este posibilă formarea amalgamului fiind scurt se obţine un amalgam diluat.

Tabelul 3

U V	*I* A	*Dc* A/m^2	Debitul de mercur l/min	Concentraţia amalgamului %
5	0,6	circa 17 000	2.10^{-4}	0,24
5,5	0,9	28 000	5.10^{-4}	0,22
4,5	0,5	15 000	20.10^{-4}	0,053
5,0	0,6	17 000	20.10^{-4}	0,100
5,5	0,9	28 000	20.10^{-4}	0,128
7,0	1,5	46 000	20.10^{-4}	0,14
8,0	2,5	62 000	$41{,}5.10^{-4}$	0,07
12,0	4,0	120 000	$41{,}5.10^{-4}$	0,09
15,0	6,0	180 000	$41{,}5.10^{-4}$	0,14
19,0	8,0	250 000	$41{,}5.10^{-4}$	0,17
20,0	10,0	300 000	$41{,}5.10^{-4}$	0,21

Acest inconveniment a impus studierea unui alt dispozitiv, de tipul indicat în fig. 5, care permite menţinerea mercurului sub curent un timp mai îndelungat şi obţinerea unor amalgame mai concentrate la debite de mercur destul de mari.

Instalaţia este constituită dintr-un vas V, în care are loc electroliza. Anodul A este un disc de cărbune cu găuri verticale pentru a se elimina clorul format pe suprafaţa inferioară. Mercurul, cu un debit reglat, se scurge prin tubul C şi formează la capătul acestuia catodul sub forma unui menisc. Meniscul creşte pînă ce picătura de amalgam format se desprinde şi cade la partea inferioară a vasului V de unde este trecut în coloana de descompunere. Rezultatele obţinute într-o astfel de instalaţie sînt indicate în tabelul 3.

4. Concluzii

1. S-a experimentat formarea amalgamului de sodiu pînă la densităţi de curent de circa 500 000 A/m^2, la care, simultan cu descărcarea sodiului pe electrod, se produce şi descompunerea amalgamului, electrodul comportîndu-se ca un electrod metalic solid.

2. S-au experimentat două variante de electrolizoare cu catod de mercur pentru formarea amalgamului de sodiu pînă la densităţi de curent de circa 300 000 A/m^2.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de chimie fizică

BIBLIOGRAFIE

1. Tsukada H., Hanzawa K., Sugino T., Aoki K., Okaya T., Fukunaga T. Ando T., *Electrolytic Chlorine and Caustic Soda Industry in Japan. I.* J. Electrochem. Soc. Jap., 1964, **32**, *1*, p. 12.
2. Mizuno S. ş. a., Electrochem. of Japan, 1959, **27**, p. 391.
3. Aoki K. ş. a., Electrochem. of Japan, 1962, **31**, p. 817.

SUR LA DENSITÉ DE COURANT DANS LA FORMATION ÉLECTROLYTIQUE DE L'AMALGAME DE SODIUM

(Résumé)

On étudie la possibilité de la formation électrolytique de l'amalgame de sodium, pour des densités de courant élevées. Par l'accroissement de la densité du courant, en régime nonstationnaire, l'amalgame devient instable, après une durée de temps, qui est d'autant plus petite que la densité du courant est plus grande. Ce temps, qui est de l'ordre des dizaines de secondes pour $Dc \approx 10^5$ A/m^2, prend des valeurs de fractions de seconde pour $Dc \approx 5.10^5$ A/m^2. À cette densité de courant le mercure se comporte comme un électrode métallique solide de sorte que l'ionisation de sodium est simultanée à sa décharge sur l'électrode.

On a expérimenté la formation de l'amalgame dans deux dispositif à cathode de mercure en régime d'écoulement jusqu' à $Dc \approx 3{,}10^5$ A/m^2.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

УДК 541.123.3; 535.3; 531.756

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ И ПЛОТНОСТИ В ТРОЙНОЙ СИСТЕМЕ: ЕДКИЙ НАТРИЙ — ГЛИНОЗЕМ — ВОДА

Г. ИОНЕСКУ и ОВИДИУ РОМАН

Сообщение представленное на научной сессии Ясского политехнического института, 28—30 сентября 1967 г.

1. *Введение*

Познание физико-химических свойств щелочных алюминатных растворов, представляет особенный интерес, потому что, растворы этих алюминатов составляют промежуточный продукт в производстве глинозема по щелочным способам.

Одним из важных параметров технологического процесса производства глинозема, является концентрация щелочи и глинозема в растворах, полученных в разных фазах этого процесса.

С целью управления технологического процесса в оптимальных условиях, необходимо выполнять частый и как можно быстрейший контроль содержания щелочи и глинозема.

Принципиально, определение содержания алюминия осуществляется двумя способами:

а) гравиметрическим методом, осаждением алюминия гидроокисью аммония, в присутствии хлористого аммония и его дозирование в форме глинозема;

б) объемными методами, используя комплексоны [1], или методом нейтрализации. Получение эквивалентной точки осуществляется цветными индикаторами, или инструментальными методами, как амперометрическим методом [15], потенциометрическим методом [2], методом определения pH [3], и. д.

Методы анализа с одним параметром как плотность, удельная проводимость, показатель преломления [4] и д., дают информацию только по одному компоненту, и притом, очень трудно исполнимы.

Одним из объемных методов, часто использованых в индустрии для определения содержания щелочно-алюминатных растворов, состоит в нейтрализации соляной кислотой, в разных значениях pH. Получение эквивалентной точки осуществляется с помощью индикаторов фенолфталеин, метилоранж или метиловый желтый на голубом фоне, осуществленном метиленовой синей. Для каждого компонента исполняется отдельное титрование, которое обусловливает подготовку образцов, их нагревание и титрование, обсуждение результатов анализа, все эти операции требуют много времени которое не соответствует частым моментам анализа.

Целью настоящей работы явился вопрос одновременного определения содержания общих щелочей и глинозема, используя два физических параметра: плотность и показатель преломления.

Использование показателя преломления как параметр для определения содержания глинозема, цитировано в литературе [4], но обусловливает определение содержания щелочей другими методами.

Для расчета плотности алюминатных растворов натрия находятся в литературе [5]...[8] разные эмпирические формулы, более или менее сложные, в зависимости от того, как имелось в виду отклонение этой величины от свойства аддитивности.

Потому что, по ограниченных областях концентрации, свойство аддитивности выполнено по практическим целям, мы поставили себе целью проверить формулу по виду [8]:

$$\rho = Ac_1 + Bc_2 + C, \tag{1}$$

где: A, B, C — экспериментальные коэффициенты, зависящие от температуры и приема выражения концентрации, c_1 и c_2 — концентрации окиси натрия и глинозема, выраженные в весовых процентах.

Область концентрации была в пределах: 13...22 % Na_2O, 2...21 % Al_2O_3, а общещелочный модуль в пределах 1,7...5,5.

Замечаем, что для концентрированных растворов, действительная область свойства аддитивности плотности алюминатных растворов более широка чем в области разбавленных растворов.

В работе принята температура 30°C, с целью использования литературных данных [9]...[11] об устойчивости алюминатных растворов. Имея в виду, что одним из важных свойств этих растворов является их метастабильность [6], [10], [11], в продолжение от часов до нескольких дней, примечаем что это свойство дает возможность использовать и растворы, составы которых не соответствуют равновесному составу при данной температуре.

Экспериментально, плотность была определена гидростатическими весами, со средней абсолютной погрешностью $\pm 5.10^{-4}$. С целью употребления быстрых инструментов для определения плотности, как денсиметры и крутильные весы, точность которых не превышает значение 1.10^{-3}, мы использовали экспериментальные значения плотности с 4-мя значущими цифрами.

Указатель преломления был определен рефрактометром Аббе, со средней абсолютной погрешностью $\pm 1.10^{-4}...2.10^{-4}$.

2. *Экспериментальная часть*

Алюминатные растворы натрия, в растворах едкого натрия, были и получены из растворы едкого натрия, в которых растворяли определенные количества металлического алюминия. Концентрация этих растворов варьировала в пределах 130...350 г $NaOH$ $л^{-1}$ и 45...250 г Al_2O_3 $л^{-1}$,

а общещелочный модуль в пределах 1,5... 5,5. В этих растворах были определены экспериментально показатель преломления и плотность при 30°С.

Таблица 1

№	$\alpha = 1{,}7$					$\alpha = 2{,}4$				
	Na_2O %	Al_2O_3 %	ρ^{30} эксп.	ρ^{30} рассч.	n_D^{30}	Na_2O %	Al_2O_3 %	ρ^{30} эксп.	ρ^{30} рассч.	n_D^{30}
1	13,00	12,58	1,296	1,297	1,3892	13,00	8,908	1,263	1,264	1,3848
2	14,20	13,74	1,324	1,324	1,3944	14,10	9,663	1,286	1,285	1,3892
3	15,40	14,90	1,352	1,352	1,4000	15,20	10,42	1,308	1,309	1,3936
4	16,60	16,06	1,379	1,380	1,4055	16,30	11,17	1,331	1,332	1,3978
5	17,80	17,22	1,407	1,408	1,4107	17,40	11,93	1,354	1,354	1,4023
6	19,08	18,46	1,436	1,437	1,4167	18,50	12,68	1,376	1,377	1,4066
7	—	—	—	—	—	19,62	13,45	1,399	1,400	1,4110
	$\alpha = 3{,}3$					$\alpha = 4{,}3$				
1	13,00	6,481	1,240	1,242	1,3821	13,00	4,973	1,228	1,229	1,3800
2	14,20	7,080	1,264	1,263	1,3864	14,20	5,433	1,248	1,248	1,3841
3	15,40	7,678	1,286	1,287	1,3906	15,40	5,892	1,271	1,271	1,3884
4	16,60	8,276	1,309	1,310	1,3950	16,60	6,351	1,292	1,292	1,3925
5	17,80	8,874	1,331	1,333	1,3992	17,80	6,810	1,315	1,315	1,3965
6	19,00	9,472	1,355	1,356	1,4037	19,00	7,269	1,336	1,336	1,4010
7	20,01	9,976	1,375	1,375	1,4073	20,26	7,751	1,357	1,358	1,4050
	$\alpha = 5{,}5$									
1	13,00	3,939	1,218	1,219	1,3785					
2	14,20	4,302	1,238	1,238	1,3824					
3	15,40	4,660	1,259	1,260	1,3864					
4	16,60	5,030	1,280	1,281	1,3905					
5	17,80	5,393	1,301	1,302	1,3943					

Данные эксперимента приведены в таблице 1, и изображены графически на рис. 1 и 2. На основе этих данных построена диаграмма в координатах: % Na_2O - % Al_2O_3, (рис. 3), в которой внесены кривые постоянного показателя преломления и постоянной плотности.

Использование диаграммы рис. 3, позволяет определять содержание глинозема и общих щелочей, с абсолютной погрешностью в пределах 0,05... 0,2. Эта погрешность сравнима с объемными методами, хотя пересечение кривых не так отчетливо. Если в определении плотности мы сделали бы погрешность 2.10^{-3} г $см^{-3}$, она не привела бы

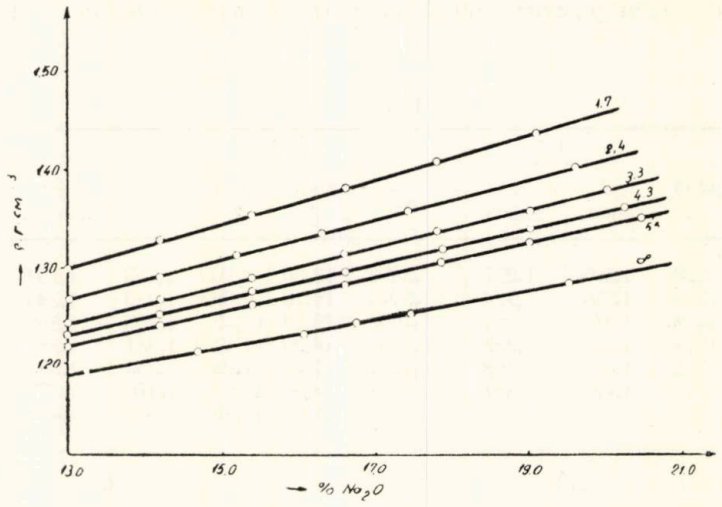


Рис. 1. — Кривые зависимости показателя преломления алюминатных растворов от % Na_2O, при постоянном каустическом модуле.

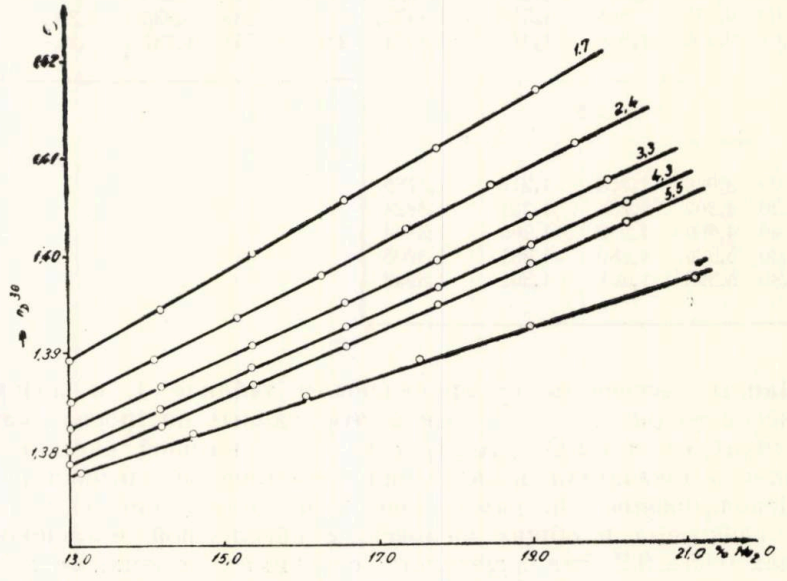


Рис. 2. — Кривые зависимости плотности алюминатных растворов от % Na_2O, при постоянном каустическом модуле.

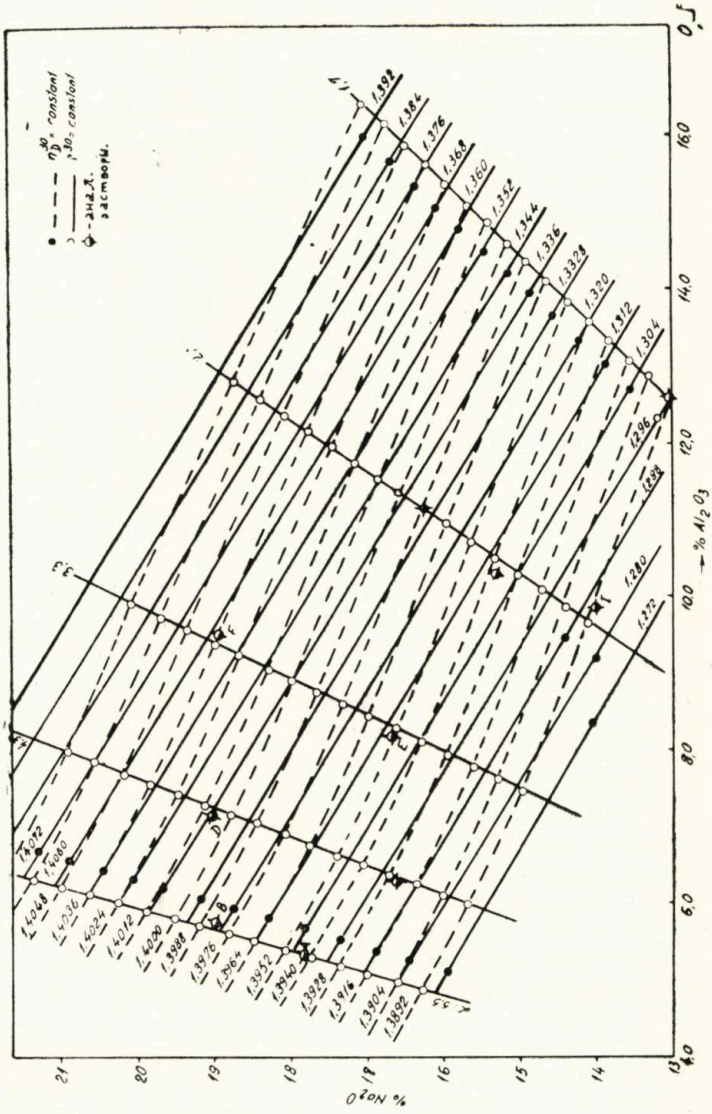


Рис. 3. — Кривые постоянного показателя преломления и постоянной плотности.

к более обширной погрешности в определении содержания общих щелочей иглинозема, которую мы показали раньше и с которой было определено содержание этих веществ.

В таблице 2 приведены результаты анализа, используя рис. 3, десяти алюминатных растворов.

Таблица 2

%	% Na_2O C^*)	% Al_2O_3 C^*)	$\varkappa$	ρ при 30°C г. см$^{-3}$	n_D при 30° C	% Na_2O A^*)	% Al_2O_3 A^*)	Относительная погрешность	
								% Na_2O	% Al_2O_3
1	17,80	5,393	5,5	1,301	1,3943	17,56	5,35	1,3	1,0
2	19,00	5,737	5,5	1,322	1,3983	18,93	5,75	0,1	0,2
3	16,60	6,351	4,3	1,292	1,3925	16,60	6,30	0,0	0,9
4	19,00	7,269	4,3	1,336	1,4010	19,08	7,18	0,4	1,4
5	16,60	8,276	3,3	1,391	1,3952	16,65	8,20	0,2	0,8
6	19,00	9,472	3,3	1,358	1,4037	18,95	9,50	0,2	1,0
7	15,20	10,42	2,4	1,308	1,3936	15,30	10,20	0,8	2,0
8	16,30	11,17	2,4	1,331	1,3978	16,30	11,17	0,0	0,0
9	14,10	9,660	2,4	1,286	1,3892	14,03	9,88	0,0	2,0
10	13,00	12,58	1,7	1,296	1,3892	13,00	12,58	0,0	0,0

C^*) — по синтезу; A^*) — по анализу.

В анализе растворов в промышленности, возникают вопросы увеличения содержания углекислого натрия, по сравнению с начальным раствором едкого натрия. Этот процесс карбонатации может влиять на точность определений.

Для пояснения вопроса изменения указателя преломления и плотность растворов алюмината натрия, при преобразовании определенного количества едкого натрия в эквивалентное количества углекислого натрия, были использованы данные в таблицах [12]...[14] на плотность и указатель преломления растворов едкого натрия и углекислого натрия. Это привело к выводу, что полное превращение количества едкого натрия в растворе, концентрация которого была 15,0 % $NaOH$, в Na_2CO_3, повлияло бы на значение показателя преломления на 2.10^{-3}, а на плотность, на 1.10^{-3}. Для превращения количества 1 % Na_2O в Na_2CO_3, показатель преломления разнообразит на 1.10^{-4}, а плотность на 1.10^{-3}. Эти значения сравнимы с неуверенностью допустимой в определении соответствующих величин.

Имея в виду малую потребность времени для анализа, возможность одновременного определения двух компонентов и точность, сравнимую с объемными методами, считаем что можно ввести такую диаграмму в промышленные анализы.

Также возможно, на основе свойства аддитивности удельного преломления [14], построить такую диаграмму, в которой пересечение кривых было бы отчетливее, и которая увеличила бы точность анализа.

С целью определения коэффициента A в формуле (1), мы экспериментировали плотность водного раствора едкого натрия в области концентраций 13...21 % Na_2O, при температуре 25°С. Значения плотности этих растворов приведены в таблице 3, около значеней извлеченных из таблицы [13] и внесенных на диаграмме рис. 4.

Таблица 3

№	% Na O эксп.	ρ^{25} эксп.	% Na_2O табл.	ρ^{30} табл.
1	13,42	1,192	13,35	1,189
2	14,97	1,215	14,70	1,210
3	16,51	1,238	16,08	1,230
4	18,06	1,261	16,77	1,240
5	19,62	1,283	17,47	1,250
6	22,38	1,323	19,53	1,281

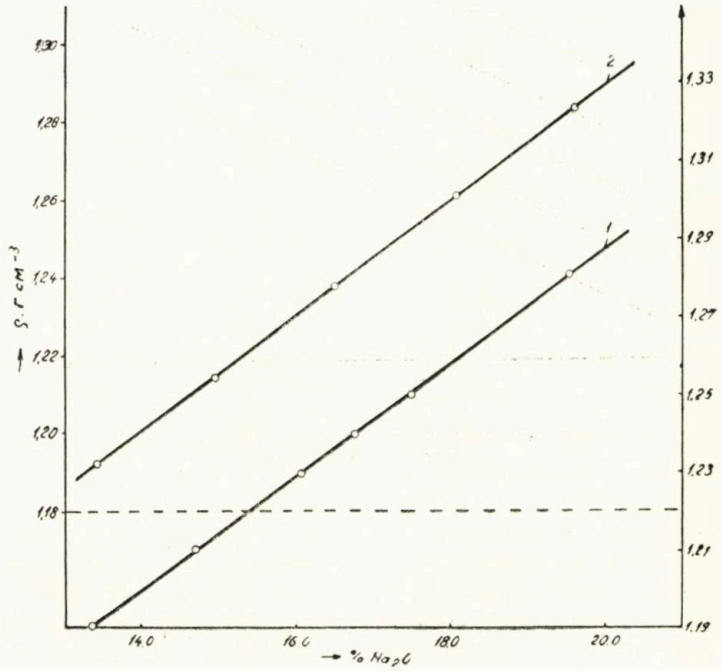


Рис. 4. — Кривые зависимости плотности водного раствора едкого натрия от % Na_2O: *1* — по эксперименту; *2* — по таблицам.

Полученное значение 1,449.10^{-2} г см$^{-3}$ при 25°С и 1,443 г см$^{-3}$ при 30°С, вполне соответствует литературным источникам [8]. Ее изменение с температурой в пределах 25°...30°С, равно 1.10^{-5} для одного градуса.

Для определения коеффициента B, использованы диаграммы *1* и *2*, из которых извлечены значения плотности в отношении % Al_2O_3, при постоянном содержании окиси натрия, значение которого варьировало поочередно: 13%, 15,0%, 17,0%, 19,0%, 21,0%. На основе этих значений построена диаграмма (рис. 5).

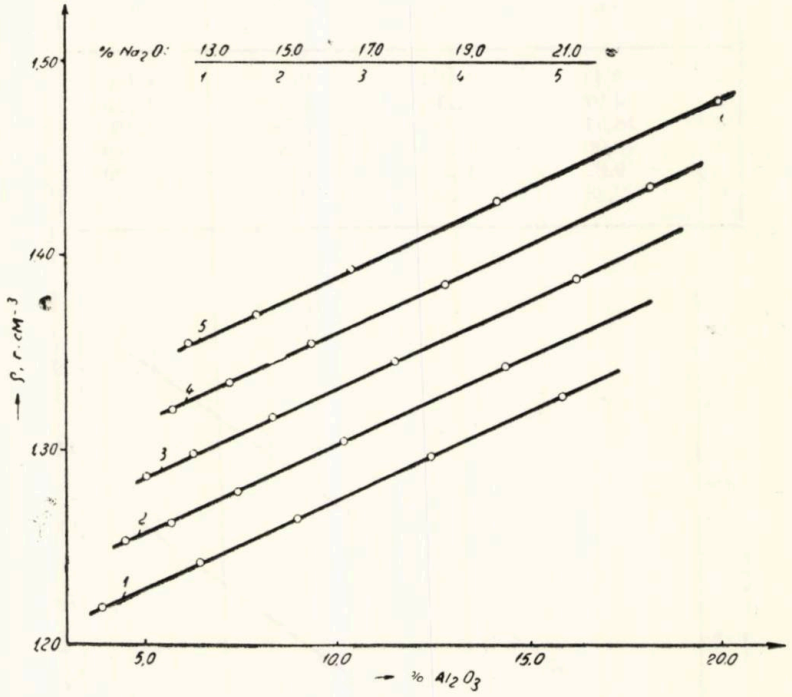


Рис. 5. — Кривые зависимости плотности от % Al_2O_3, при постоянном содержании окиси натрия.

Из диаграммы видно, что плотность растворов алюмината натрия линейная функция от концентрации глинозема и вполне соответствует литературным источникам [6], [7]. Среднее значение (8,95.10^{-3} г см$^{-3}$) тоже вполне соответствует литературным данным, для формул этого типа [8]. Больше того, литература уточняет что скорость увеличения плотности растворов алюмината натрия, в соотношении концентрацией глинозема, постоянна, в широкой области концентрации глинозема [6], [7].

Коэффициент C, в некоторых формулах считается равным единице [8], а в других равен с плотностью воды [7], при рабочей температуре, без того чтобы делать уточнение об его изменении в соотношении с температурой.

Мы того мнения что эти расчеты не правильны, потому что функция плотность-концентрация, может быть рассчитана как линейная, только в ограниченных областях концентрации.

Правильное значение коэффициента C получается при экстраполяции экспериментальных данных к значению концентрации равным нулю, или по расчету. Для выбранной области концентрации $C = 0{,}998$ г $см^{-3}$.

Формула (1) записывается:

$$\rho = 0{,}998 + 1{,}443.10^{-2}c_1 + 8{,}95.10^{-3}c_2.$$

В таблице 4 приведены данные, которые сравнивают экспериментальные значения плотности семи растворов алюмината натрия, в растворе едкого натрия, с теми, которые рассчитаны формулой (1) и с литературными данными. Установленно полное соответствие между экспериментальными данными и данными рассчитанными формулой. А также, со средней неуверенностью 2.10^{-2}, проверяются серия экспериментальных данных из литературы [6], [7], [9].

Таблица 4

№	% Na_2O	% Al_2O	ρ^{30} по форм. (1) г $см^{-3}$	ρ^{30} г $см^{-3}$ [6]	ρ^{30} г $см^{-3}$ [7]	ρ^{30} эксп. г $см^{-3}$
1	13,00	3,939	1,219	1,216	1,217	1,218
2	14,20	4,302	1,239	1,237	1,239	1,238
3	15,40	4,666	1,259	1,256	1,257	1,259
4	16,60	5,030	1,281	1,279	1,280	1,280
5	17,80	5,393	1,301	1,298	1,299	1,301
6	19,00	5,757	1,322	1,323	1,319	1,321
7	20,45	6,119	1,347	1,345	1,349	1,347

3. *Выводы*

Была проверена и исправлена формула, весьма не сложная, для расчета плотности растворов алюмината натрия, с хорошими результатами для практических целей.

Были определены показатели преломления и плотности для растворов алюмината натрия, концентрация и общещелочный модуль которых занимают широкую область, употребляемую в производстве глинозема по способу Байера. С помощью этих данных построена изотермическая

диаграмма на координатах $\%Na_2O$-$\%Al_2O_3$, на которой внесены кривые постоянных плотностей и постоянных показателей преломления, и была комментирована возможность ее использования для одновременного определения содержания глинозема и общещелочей, с удовлетворительными результатами в промышленном анализе.

Ясский политехнический институт,
Кафедра физико-химии

ЛИТЕРАТУРА

1. * * * S. N. W. Dep. Mines, Chem. Lab. Rep., 1962, *10*, pp. 12—16.
2. Бабеньшев В. М. и сотрудн., ЖАХ, 1960, **15**, стр. 567.
3. Петрова И. Л., Снееров С. М., Цветные металлы, 1965, *1*, стр. 48.
4. Чистякова А. А., Кавина В. А., Цветные металлы, 1961, *3*, стр. 67.
5. Russel A., Edward J., Metalls, 1962, **X**, p. 1123.
6. Takuo Iekatai, Noberu Okata, *Extractive Metallurgy of Aluminum.* Vol. **1**, *Alumina.* 1962, pp. 159—161.
7. Барон Н. Н., Баранова А. Т., ЖНХ, 1965, **28**, стр. 185.
8. Панаско Г. А., Яшунин Н. В., ЖПХ, 1964, **37**, стр. 285.
9. Вольф Ф. Ф., Кузнецов С. И., ЖПХ, 1955, **28**, стр. 597.
10. Сушков А. И., *Металлургия легких металлов.* М., 1957.
11. Мазель В. А., *Производство глинозема.* М., 1950.
12. * * * *Wagners Tabellen zum Eintrauchrefraktometer.* IV. Aufl., 1955.
13. * * * *Manualul Inginerului Chimist.* Vol. **II**, Ed. Tehn., Buc., 1952.
14. Ioffe B. F., *Refractometrie pentru chimişti.* Ed. Tehn., Buc., 1958, (пер. с русск. яз.)
15 Пршибил Р., *Комплексоны в химическом анализе.* М., 1960, (пер. с ческ. яз.).

DETERMINAREA INDICELUI DE REFRACŢIE ŞI A DENSITĂŢII ÎN SISTEMUL TERNAR: $NaOH-Al_2O_3-H_2O$

(Rezumat)

S-a verificat şi corectat o formulă relativ simplă, pentru determinarea densităţii soluţiilor de aluminat de sodiu, cu rezultate utile pentru scopuri practice.

S-au determinat indicii de refracţie şi densitatea pentru soluţii de aluminat de sodiu, de concentraţii şi modul de causticitate total, care acoperă un larg domeniu utilizat în fabricarea aluminei prin procedeul Bayer.

Cu aceste date s-a construit o diagramă izotermă, în coordonate $\%Na_2O-\%Al_2O_3$, în care s-au înscris curbe de densitate constantă şi de indice de refracţie constant şi s-a discutat posibilitatea utilizării acesteia, în scopul determinării simultane a conţinutului în alcalii totale şi oxid de aluminiu. Rezultatele obţinute sînt satisfăcătoare pentru determinări în scopuri practice.

Bxplicaţia figurilor

Fig. 1. — Variaţia indicelui de refracţie a soluţiilor de aluminat de sodiu cu conţinutul procentual de Na_2O, la un modul de causticitate constant.

Fig. 2. — Variaţia densităţii soluţiilor de aluminat de sodiu cu conţinutul procentual de Na_2O, la un modul de causticitate constant.

Fig. 3 — Curbe de densităţi constante şi indici de refracţie constanţi, în sistemul de coordonate $\%Na_2O-\%Al_2O_3$.

Fig. 4. — Variaţia densităţii soluţiilor apoase de hidroxid de sodiu cu conţinutul procentual de Na_2O: *1*—experimental; *2*—conform tabelelor.

Fig. 5. — Variaţia densităţii soluţiilor de aluminat cu conţinutul procentual de Al_2O_3, la un conţinut constant de hidroxid de sodiu.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

C. Z. 631.41 ; 537.226.2

CONSIDERAŢII ASUPRA PROPRIETĂŢILOR DIELECTRICE ALE UNOR SOLURI

DE

ANGELA LUCA

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. Consideraţii generale

Într-o lucrare anterioară [1] ocupîndu-ne cu studiul acţiunii corozive a unor soluri din regiunea Iaşi, am întocmit o clasificare a acestora în ceea ce priveşte agresivitatea lor după A. Bibillo [2].

În cele ce urmează se vor studia proprietăţile dielectrice ale unor soluri din această regiune, în scopul de a stabili modul în care variază permitivitatea şi pierderile dielectrice (exprimate prin tg δ) funcţie de natura şi gradul de tasare al solului şi de a trage unele concluzii referitoare la modul de polarizare al acestor soluri.

Cercetările experimentale au fost efectuate asupra următoarelor soluri: 1° sol de pădure (podzol) — adîncime 20 cm; 2° sol de pădure (podzol) — adîncime 190 cm; 3° cernoziom; 4° sărătură; 5° lut loessoid.

Solurile uscate în aer şi măcinate într-o moară cu bile, cernute printr-o sită de 0,25 mm şi apoi prin una de 0,15 mm, deci cu o granulaţie cuprinsă între 0,25 şi 0,15 mm, au caracteristicile indicate în tabelul 1.

Tabelul 1

Solul	pH	La 100 g sol uscat			Densit. sol. uscat în aer	Densit. sol. uscat în etuvă
		solubile	umiditate	humus		
1	6,6	0,22	3,34	2,30	2,49	2,60
2	6,0	0,123	4,51	0,63	2,51	2,66
3	6,45	0,40	5,58	3,56	2,41	2,58
4	7,1	0,31	3,01	2,42	2,52	2,62
5	7,4	0,143	3,06	1,123	2,49	2,69

S-au determinat:

a) pH-ul în laborator la suspensii de sol la raportul sol-apă de 1: 2,5, prin metoda potenţiometrică cu electrod de lucru de sticlă prin citire directă [3] la un pH-metru Lampowy LBS-3A; solurile 1°, 2°, 3° sînt slab acide, solul 4° — neutru iar solul 5° — slab alcalin (clasificare după Obrejanu [4]);

b) solubilele în extractul apos cu raportul sol-apă de 1:5, după trei zile, direct prin cîntărirea reziduului uscat [5];

c) densitatea, prin metoda picnometrică, folosind ca mediu de determinare un lichid inert (benzenul [6]) atît la solurile uscate în aer cît şi la cele uscate în etuvă;

d) humusul, prin metoda titrimetrică a lui Tiurin [3];

e) umiditatea absolută a solurilor uscate în aer prin uscare în etuvă la 125° C [5].

Proprietăţile dielectrice. Solurile cercetate nefiind izolatoare perfecte, deci fiind medii absorbante, s-a impus utilizarea noţiunii de permitivitate complexă $\underline{\varepsilon}$, a cărei expresie este [7]:

$$\underline{\varepsilon} = \varepsilon' - j\varepsilon'', \tag{1}$$

unde: ε' — permitivitatea conservativă, fiind partea reală a permitivităţii complexe, iar ε'' — permitivitatea de atenuare sau de absorbţie fiind partea imaginară a permitivităţii complexe. Pierderile în dielectric se exprimă deobicei prin relaţia

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}. \tag{2}$$

Aparatele de măsură permiţînd măsurarea permitivităţii conservative ε' şi a lui tg δ, proprietăţile dielectrice ale unui mediu se exprimă în funcţie de aceste mărimi.

2. Proprietăţile dielectrice ale amestecurilor de pulberi de sol şi aer

Iniţial, utilizînd pulberi ale solurilor respective cu o granulaţie cuprinsă între 0,15 şi 0,25 mm, s-a determinat, în gama de frecvenţe 500...20 000 Hz, permitivitatea ε'_{12} şi pierderile dielectrice (exprimate prin tg δ) pentru pulberile de sol uscate în aer, tasate şi netasate, în condiţiile în care de fapt avem de a face cu un amestec de pulbere de sol şi aer, urmărind variaţia lor cu frecvenţa.

a) *Partea experimentală*

În vederea obţinerii datelor experimentale s-a utilizat un montaj în punte de capacităţi [8] (fig. 1) unde: G — un generator de ton Tesla, tip BM 269 B cu frecvenţă variabilă din Hz în Hz în gama 20 Hz ... 20 000 Hz;

Os.C—oscilograf catodic Tesla utilizat drept aparat de zero; C_1 şi C_2 — condensatoare fixe de cîte 4 000 pF; C — condensator etalon variabil Ulrich utilizat în punte pentru măsurarea atît a capacităţii celulei goale cît şi a celulei umplute cu solul de cercetat (celula goală utilizată avînd o capacitate de 10 pF iar scala condensatorului etalon variabil permiţînd lectura variaţiilor de 0,5 pF, rezultă că eroarea maximă făcută este de 5%); R — rezistenţă etalon variabilă realizată cu ajutorul unor cutii de rezistenţă Metra; C_x, R_x— parametrii condensatorului cilindric în care se introduce solul cercetat; T_1, T_2 — transformatoare cu raport de transformare 1/3 pentru cuplajul generatorului de ton cu oscilograful catodic în circuitul punţii. Întregul sistem a fost ecranat şi pus la pământ.

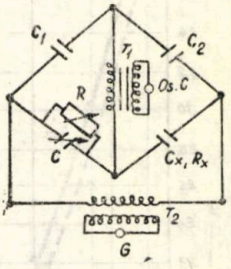


Fig. 1

Valoarea permitivităţii conservative a solului, notată cu ε'_{12}, a rezultat ca raport dintre capacitatea condensatorului cilindric cu solul respectiv (C_x) şi capacitatea condensatorului gol (C_0), adică,

$$\varepsilon'_{12} = \frac{C_x}{C_0}, \tag{3}$$

iar pierderile dielectrice, exprimate prin tg δ, au fost calculate cu relaţia

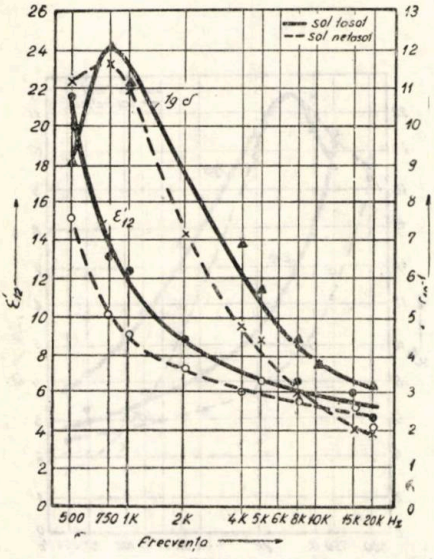


Fig. 2

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{1}{C_x R_x \omega}, \tag{4}$$

unde: C_x — capacitatea condensatorului conţinînd solul de studiat, R_x — rezistenţa de pierderi introdusă de sol, $\omega = 2\pi\nu$, ν — frecvenţa (în Hz a) cîmpului electric de măsură, dată de generatorul de ton.

Rezultatele experimentale obţinute sînt redate în curbele din fig. 2...6 (fig. 2—sol 1°, fig. 3—sol 2°, fig. 4—sol 3°, fig. 5 — sol 4°, fig. 6—sol 5°).

Din analiza acestor curbe rezultă următoarele constatări:

a) Solurile analizate prezintă o scădere accentuată a permitivităţii şi un maxim al pierderilor dielectrice, exprimate prin tg δ, în intervalul de

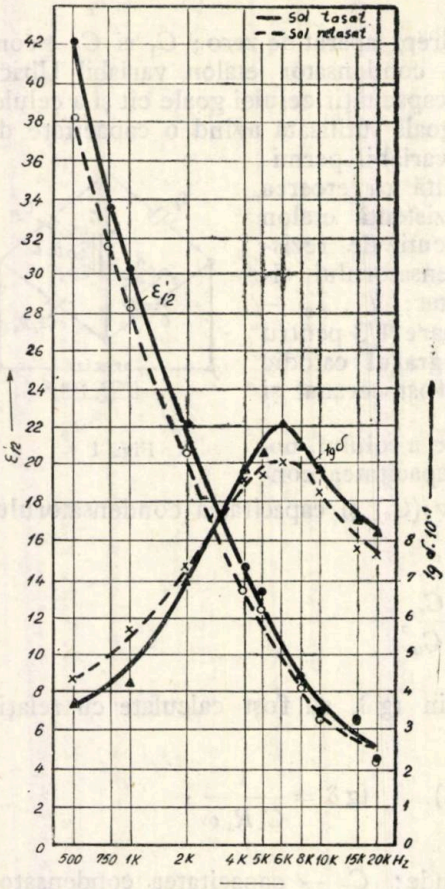


Fig. 3

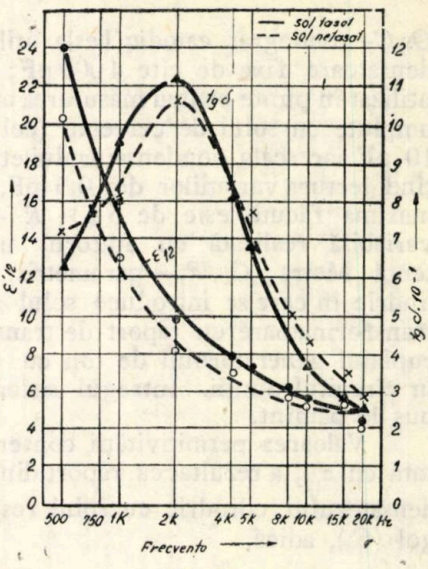


Fig. 4

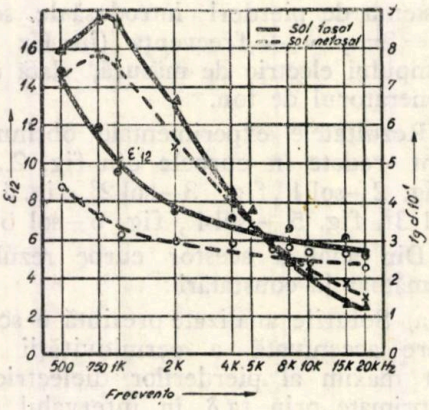


Fig. 5

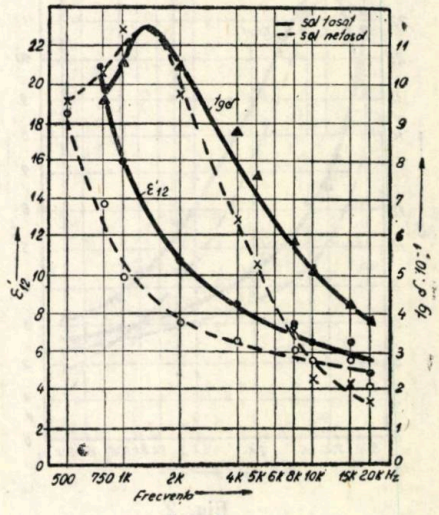


Fig. 6

frecvenţă 750...5 000 Hz. Această zonă, de intensă variaţie a lui ε' şi tg δ, care indică un proces de dispersie, corespunde unei polarizări dipolare şi eventual interfaciale. Deoarece şi după această zonă de dispersie permitivitatea are o valoare încă suficient de mare (în jur de 4) este de aşteptat ca solul să prezinte pentru frecvenţe mai înalte şi alte zone de dispersie corespunzătoare fie încă unei polarizări dipolare cît şi uneia ionice şi electronice [9], [10].

b) Solurile tasate au o permitivitate şi o valoare tg δ mai mare decît cele netasate datorită faptului că prin tasare se elimină aerul care are o permitivitate ε'_2 în jurul valorii 1.

3. Proprietăţile dielectrice ale pulberilor de sol

Din curbele trasate în fig. 2...6 constatîndu-se o variaţie sensibilă a lui ε'_{12} cu gradul de tasare a solului, rezultă că permitivitatea măsurată este o permitivitate aparentă a unui amestec de pulbere de sol şi aer şi deci se pune problema ca din cunoaşterea permitivităţii amestecului de pulbere şi aer să se determine permitivitatea numai a pulberii de sol.

Solurile cercetate avînd densităţi apropiate, studiile anterioare au fost efectuate comparativ, măsurînd pe volume egale de sol, la o tasare pe cît posibil uniformă, permitivitatea aparentă a amestecului de pulbere de sol şi aer.

Permitivităţile reale (ε'_1) ale pulberilor de sol le-am calculat la frecvenţele de 1 000 şi 10 000 Hz din permitivităţile aparente ale amestecurilor de sol şi aer, utilizînd o formulă a amestecurilor dată de Wiener, cercetată de Bruggemann [11], [12] şi modificată de Oehme [13]...[15] de forma

$$(5) \qquad 2\bar{v}_1 x_3 + (1 - \varepsilon'_{12} + \bar{v}_1 \varepsilon'_{12})x^2 + (2 - 2\bar{v}_1 - 2\varepsilon'_{12})x - \bar{v}_1 \varepsilon'_{12} = 0,$$

unde: ε'_{12} — permitivitatea amestecului pulbere-aer, ε'_1 — permitivitatea pulberii, ε'_2 — permitivitatea aerului ($\simeq 1$), $\bar{v}_1$ = volumul pulberii / volumul util al celulei umplut cu pulbere.

Volumul pulberii a rezultat din raportul dintre masa (în g a) cantităţii de pulbere introdusă în volumul util al celulei şi densitatea pulberii, adică volumul pulberii = masa în grame a pulberii / densitatea pulberii; x reprezintă necunoscuta din ecuaţie, funcţie de care se determină permitivitatea reală a pulberii (ε'_1).

Ecuaţia poate furniza trei soluţii reale, iar după Oehme, pătratul celei mai mici rădăcini pozitive, indică valoarea permitivităţii reale a pulberii, adică

$$\varepsilon'_1 = x^2.$$

Ecuaţia (5) are rădăcini utile numai atunci cînd pulberea este suficient de fin măcinată deoarece ε' creşte odată cu fineţea pulberii, ajungîndu-se cu o fineţe progresivă la o valoare limită, constantă. De aceea am lucrat cu pulberi a căror granulaţie a fost cuprinsă între 0,15...0,25 mm pentru

care condiția de valoare constantă a lui ε' este satisfăcută. De asemenea v_1 nu trebuie să fie ales mai mic ca 0,1 deoarece numai peste această valoare ε' se menține constant. De aceea în experiențele efectuate s-a lucrat cu $\bar{v}_1 \cong 0{,}40$. În toate măsurătorile s-a utilizat o celulă de măsură argintată (fabricație Franz Küstner Nachf. Wissenschaftliche Apparate, Dresden) al cărei volum total este de 35 cm^3 iar volumul util de 18 cm^3.

Măsurătorile permitivității ε'_{12} au fost efectuate la frecvențele de 1 000 și 10 000 Hz cu o punte Tesla și deduse cu relația (3).

Valorile ε'_{12} și $\bar{v}_1$ introduse în ecuația (5) au furnizat pentru permitivitatea pulberii de sol valorile cuprinse în tabelul 2.

Tabelul 2

Solul	$v_{sol}=\frac{m}{d}$	$\bar{v}_1=\frac{v_{sol.}}{v_{cel.}}$	$\nu=1\,000$ Hz		$\nu=10\,000$ Hz	
			ε'_{12}	$\varepsilon'_1=x^2$	ε'_{12}	$\varepsilon'_1=x^2$
1	14,37	0,41	23,02	336	5,18	24
2	14,41	0,41	25,88	422	8,62	53
3	14,51	0,41	18,13	218	4,51	20,25
4	13,32	0,38	13,11	104	4,11	14
5	14,41	0,41	12,07	106	4,08	16

Din datele obținute cu ajutorul formulei (5) se observă că permitivitățile reale ale pulberilor uscate în aer sînt mult mai mari decît cele aparente ale amestecurilor de sol și aer.

Se știe că permitivitatea materialelor pulverulente depinde de umiditatea acestora, existînd metode și aparate [14], [16] care din măsurarea permitivității materialului umed permit determinarea umidității materialului pulverulent respectiv. Asemenea metode au fost utilizate și în cazul solurilor, dar rezultatele obținute [17], [3] n-au soluționat încă deplin problema determinării umidității unui sol prin măsurarea permitivității acestuia, deoarece aceste metode sînt afectate de erori datorită efectului concentrației soluției de sol, o aceeași valoare a umidității putînd avea o semnificație cu totul diferită în raport cu proprietățile fizice și hidrofizice ale solului.

Ținînd seama de faptul că apa existentă în sol influențează valoarea permitivității acestuia, am întreprins o nouă serie de măsurători referitoare la solurile uscate în etuvă, ale căror rezultate, calculate cu ajutorul ecuației (5), sînt indicate în tabelul 3.

Se constată că valorile permitivității obținute în cazul solurilor uscate în etuvă, la aceeași frecvență, sînt mult mai mici decît în cazul solurilor uscate în aer (în jurul valorii de 2). În acest caz se poate considera că polarizarea dipolară și deci existența zonelor de dispersie ce apar la solurile neuscate în etuvă se datorau în cea mai mare parte prezenței apei reținute de sol.

Tabelul 3

Solul	$v_{sol}=\frac{m}{d}$	$\overline{v_1}=\frac{v_{sol.}}{v_{cel.}}$	$\nu=1000$ Hz		$\nu=10000$ Hz	
			ε'_{12}	$\varepsilon'_1=x^2$	ε'_{12}	$\varepsilon'_1=x^2$
1	14,1	0,40	1,37	2	1,33	1,96
2	13,71	0,39	1,44	2,5	1,36	2,2
3	13,49	0,38	1,37	2,16	1,33	2,10
4	14,64	0,42	1,40	2,1	1,33	1,99
5	14,04	0,40	1,41	2,37	1,37	2,13

4. Concluzii

1° În cazul solurilor uscate în aer, la temperatura de circa 20°C, se pot face următoarele constatări:

a) Solurile uscate în aer prezintă între 750...5 000 Hz o zonă de dispersie accentuată caracterizată printr-o scădere pronunțată a permitivității și un maxim al lui tg δ, care corespunde polarizării dipolare, datorită în cea mai mare parte apei din sol.

b) Prin eliminarea aerului din sol permitivitatea acestuia crește ajungînd la valori de ordinul 10^2 pentru frecvența de 1 000 Hz și de ordinul 10 la frecvența 10 000 Hz.

c) Nu totdeauna solul cu umiditatea cea mai mare are și valoarea cea mai mare a permitivității.

2° La solurile uscate în etuvă se pot face următoarele observații:

a) Eliminînd aerul (și apa) dintre granulele de sol permitivitatea solului se reduce la valori cuprinse, la 1 000 Hz, între 2...2,5, ceea ce indică că în această situație solurile respective prezintă pronunțate proprietăți izolatoare.

b) De asemenea, în aceleași condiții, din faptul că valoarea permitivității continuă să se mențină, peste frecvența de 1 000 Hz, în jurul valorii 2, rezultă că solurile respective continuă să mai aibă încă o polarizare ionică și electronică.

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de chimie anorganică

BIBLIOGRAFIE

1. Savencu S., Golgoțiu T., Luca A., Linde J., Bucur A., Hîncu I., Bul. Inst. polit. Iași, 1956, **II(VI)**, *3—4*, p. 101—104.
2. Bibillo Al., *Metode de determinare a gradului de coroziune la conductele subterane.* Probleme de coroziune a rețelelor metalice subterane, I. D. T., Buc., 1955, (trad. din l. rusă).

3. Obrejanu Gh., *Metode de cercetare a solului.* Ed. Acad. R S. R., 1964, pp. 253–257, 136–146.
4. — *Curs de pedologie.* P. 1, Inst. Agron., Buc., 1961.
5. Macarovici Gh., *Manual de Chimie Analitică Cantitativă.* Ed. Tehn., Buc., 1956.
6. Zunker F., *Das Verhalten des Bodens zum Wasser. Handb. der Bodenlehre.* Bd. 6, Springer Berlin, 1930.
7. Freymann R., Soutif M., *La spectroscopie hertzienne appliquée à la chimie.* Dunod, Paris, 1960.
8. Lebrun A., Archives des sciences, 1960, **9**, *21–22–23.*
9. Bogoroditchi N. P. ş. a., *Materiale folosite în industria electrotehnică.* EES, Buc., 1952, (trad. din l. rusă).
10. Popescu Cr., *Curs de materiale electrotehnice.* ESDP, Buc., 1960.
11. Bruggemann G., Naturwissenschaft, 1935, **21**, S. 577.
12. — Phys. Ztschr., 1936, **37**, S. 906.
13 Oehme F., Chemische Technik, 1950, **2**, S. 349.
14. — *Dielektrische Messmethoden zur quantitativen Analyse und für Chemische Strukturbestimmungen.* 1962.
15. — Z. Naturforschung, 1955, **10 b**, S. 725; Ibid., 1959, **14 b**, S. 779.
16. Kulakov M. V., Scepkin S. I., *Aparate automate de măsurat şi control în industria chimică.* Ed. Tehn., Buc., 1963, pp. 418–419, (trad. din l. rusă).
17. Chiriţă C., *Pedologie Generală.* Ed. Agrosilvică de stat, Buc., 1955, pp. 856–857.

CONSIDÉRATIONS SUR LES PROPRIÉTÉS DIÉLECTRIQUES DE QUELQUES SOLS

(Résumé)

On a étudié, chez quelques sortes de sols, la variation de la permittivité et des pertes diélectriques en fonction de la fréquence aux poudres de sol séchées dans l'air, en déterminant les zones de dispersion, ce qui a permis de tirer quelques conclusions quant à la nature de la polarisation.

En utilisant une formule des mélanges on a calculé la permittivité des poudres de sol séchées dans l'air et dans l'étuve, à l'aide de la valeur mesurée de la permittivité des poudres sol–air.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

C. Z. 66.028; 546.87

DOZAREA OSCILOMETRICĂ A IONULUI DE Bi^{+3}

DE

I. ANTONESCU, MARIA CARAMLĂU şi FLORICICA MATEI

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 28—30 septembrie 1967

1. Introducere

Diversele metode gravimetrice pentru dozarea bismutului, existente în literatură şi care se folosesc în mod practic, sînt destul de laborioase şi necesită un timp relativ îndelung pentru efectuarea lor. Spre exemplu metoda rapidă a profesorului J. Dick [1], de dozare a bismutului sub formă de fosfat, necesită cel puţin o jumătate de oră pentru o determinare.

De asemenea literatura indică cîteva metode conductometrice de dozare a bismutului, printre care citǎm următoarele:

a) Precipitarea ionului de bismut sub formă de bismut metalic cu o soluţie de hidrogen sulfurat de titru cunoscut şi stabilirea conductometrică a punctului de echivalenţă (H. Imming şi G. Jander [2]).

b) Precipitarea sub formă de pirogalat de bismut (C. Drăgulescu şi D. Lazăr-Juncu [3]) etc.

Şi aceste metode prezintă o serie de dezavantaje în general cunoscute ca fiind caracteristice metodelor conductometrice, cum ar fi:

a) impurificarea electrozilor în timpul titrării ca urmare a precipitării, corespunzător diferitelor fenomene ce pot interveni ca: polarizare, adsorbţie, reacţii catalitice etc. şi care pot influenţa asupra poziţiei punctului de echivalenţă;

b) necesitatea curăţirii după fiecare determinare a electrozilor vasului conductometric;

c) necesitatea existenţei unor vase de forme şi mărimi diferite, adecvate scopului urmărit etc.

Spre deosebire de metoda conductometrică titrarea în curenţi de înaltă frecvenţă exclude toate aceste neajunsuri.

În lucrarea de faţă se propune o metodă de dozare a ionului de bismut sub formă de $BiPO_4$, folosind în acest scop tehnica titrării în înaltă frecvenţă.

2. Aparatură şi reactivi

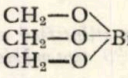
Pentru trasarea curbelor de titrare în înaltă frecvenţă, s-a folosit un oscilotitrator tip dr. Pungor cu frecvenţa de lucru de 130 MHz, cu traductoare capacitive.

Determinările comparative conductometrice s-au efectuat cu o instalaţie realizată în cadrul laboratorului de chimie analitică folosind ca sursă de oscilaţii un generator *RC* tip BM 344 care a permis să se lucreze la diferite frecvenţe. Ca reactivi s-au folosit NaH_2PO_4 şi săruri de bismut chimic pure (Merck), din care s-au preparat soluţii de titru cunoscut.

3. Modul de lucru

Sarea de bismut, cîntărită exact, cu precizie de 0,1 mg, se aduce cantitativ într-un flacon cotat cu puţină apă distilată. Se adaugă apoi acid azotic concentrat pînă soluţia devine limpede şi cîţiva (3...4) ml de glicerină chimic pură. Se agită conţinutul flaconului şi se aduce la cotă.

Cu glicerina, sărurile de bismut formează o combinaţie de forma:



care nu este hidrolizabilă [4], [5].

În vasul de titrare se introduce soluţia de analizat, avînd un volum astfel ales, încît nivelul lichidului să depăşească marginea superioară a armăturii de sus a traductorului capacitiv.

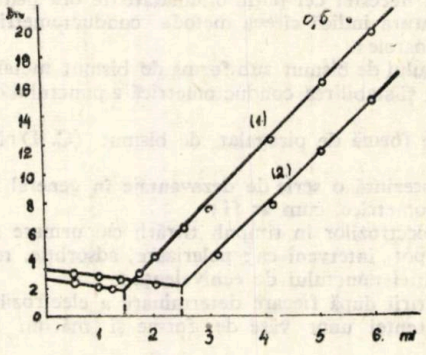


Fig. 1

După aducerea aparatului în condiţii de lucru, se începe titrarea adăugînd reactivul în porţiuni mici şi citind după fiecare adăugare indicaţiile aparatului.

În tot timpul titrării se agită conţinutul vasului de titrare cu ajutorul dispozitivului electromagnetic, cu care este prevăzut aparatul.

Curbele de titrare obţinute au forma celor prezentate în fig. 1.

După cum se observă din fig. 1, curba prezintă două porţiuni: una uşor înclinată spre abscisă şi care corespunde formării precipitatului de

$BiPO_4$, proces care nu influenţează în mod sensibil conductivitatea electrică a soluţiei (cu atît mai puţin cu cît concentraţia în acid azotic este mai mare) şi o a doua porţiune care pune în evidenţă o creştere sensibilă a conductivităţii ca urmare a adăugirii excesului de reactiv după punctul de echivalenţă.

Rezultatele determinărilor efectuate pentru cantităţi diferite de ioni de bismut, sînt redate în tabelul 1.

Tabelul 1

Verificarea metodei asupra reproductibilităţii

Nr. probei	Conţinutul de Bi^{3+} în proba de analizat mg		Diferenţa	
	luat	găsit	mg	%
1	20,9	21,1	+0,2	+0,95
2	20,9	21,1	+0,2	+0,95
3	20,9	21,2	+0,3	+1,43
4	20,9	21,0	+0,1	+0,49
5	20,9	20,7	−0,2	−0,95
6	31,3	31,5	+0,2	+0,64
7	31,3	31,5	+0,2	+0,64
8	31,3	31,4	+0,1	+0,32
9	31,3	31,0	−0,3	−0,95
10	31,3	31,1	−0,2	−0,64
11	52,2	52,5	+0,3	+0,57
12	52,2	52,6	+0,4	+0,76
13	52,2	52,4	+0,2	+0,38
14	52,2	51,9	−0,3	−0,57
15	52,2	52,6	+0,4	+0,76

4. Influenţa aciditătii

În general creşterea concentraţiei ionilor de hidrogen are drept efect o scădere a sensibilităţii metodei. Pentru a determina concentraţia optimă în acid azotic, avînd în vedere faptul că în general ionul de bismut se aduce mai uşor în soluţie din combinaţiile sale cu ajutorul acestui acid, s-au făcut determinări referitoare la variaţia curbelor de titrare funcţie de concentraţia în acid azotic. Rezultatele obţinute sînt redate în fig. 2.

Din analiza acestor curbe se observă că odată cu creşterea concentraţiei în acid azotic are loc o micşorare a înclinaţiei pantei porţiunii a doua a curbelor de titrare, precum şi o uşoară deplasare a punctului de echivalenţă spre valori mai mari.

Aceste aspecte sînt explicabile dacă se ţine seama de fenomenele ce au loc în soluţie în timpul titrării ca urmare a creşterii concentraţiei ionilor de hidrogen.

Noi am ales concentraţia de 0,075 *m* ca fiind optimă, punctul de echivalenţă fiind în acest caz cel mai apropiat de valoarea reală.

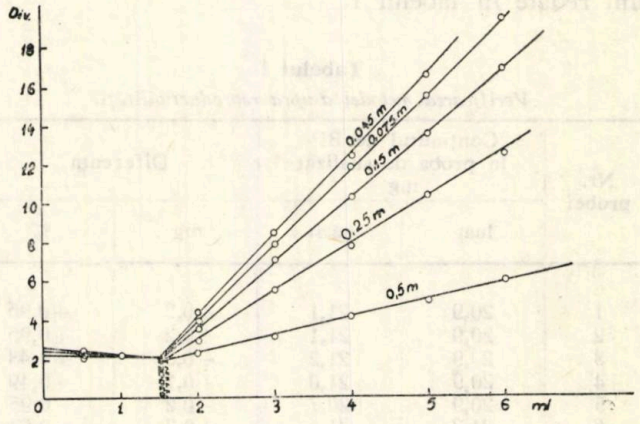


Fig. 2

5. Metode comparative

Pentru o verificare mai amănunţită a metodei propuse în această Notă am comparat unele rezultate cu cele obţinute prin metoda gravimetrică rapidă (J. Dick).

Cîteva rezultate comparative sînt redate în tabelul 2.

Tabelul 2

Rezultate comparative

Nr. probei	Conţinutul în Bi în proba de analizat mg			Diferenţa	
	Luat	Găsit metoda I	Găsit metoda II	Metoda I mg	Metoda II mg
1	52,2	51,8	52,5	−0,4	+0,3
2	52,2	51,9	52,6	−0,3	+0,4
3	52,2	51,7	51,8	−0,5	−0,4
4	52,2	52,5	52,6	+0,3	+0,4
5	52,2	52,6	51,8	+0,4	−0,4

În continuare s-au efectuat determinări comparative folosind metoda conductometrică clasică. Formele curbelor de titrare obţinute prin această metodă sînt asemănătoare celor rezultate prin titrare în înaltă frecvenţă (fig. 3).

Acest aspect dovedeşte faptul că şi în cazul titrării în înaltă frecvenţă, factorul predominant care variază în cursul titrării îl constituie de asemenea conductibilitatea electrică a soluţiei. În ceea ce priveşte rezultatele, ele concordă cu cele obţinute prin metoda propusă.

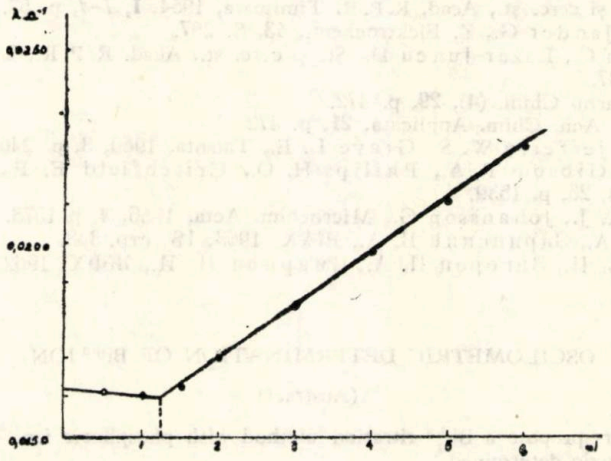


Fig. 3

Ionii jenanţi sînt în număr redus, determinările nefiind afectate decît de acei ioni care în condiţiile indicate pot precipita şi ei cu ionul fosforic cum ar fi: Zr, Hf, Th şi care în acest caz trebuie îndepărtaţi.

5. Concluzii

S-a propus o metodă de dozare a ionului bismut prin titrare în curenţi de înaltă frecvenţă, care se bucură de următoarele avantaje:

1. Se foloseşte un reactiv ieftin, uşor de procurat şi din care se pot prepara cu uşurinţă soluţii de titru cunoscut.
2. Se obţine o variaţie apreciabilă a conductibilităţii electrice în jurul punctului de echivalenţă.
3. Metoda este rapidă, o determinare durînd maximum 10 min.

S-a analizat influenţa unor factori asupra preciziei şi reproductibilităţii metodei.

Limitele de concentraţie între care se poate aplica metoda cu rezultate satisfăcătoare sînt cuprinse între 10 şi 200 μg/ml.

Precizia metodei se încadrează în limitele metodelor de acest gen şi nu depăşeşte $\pm$ 1 %.

Metoda poate fi aplicată cu succes la analiza diferitelor combinaţii cu bismut precum şi a unor medicamente.

Aplicată în mod corespunzător, metoda poate fi folosită şi pentru dozarea inversă a ionului PO_4^{3-} cu săruri de bismut.

BIBLIOGRAFIE

1. Dick J., St. şi cerc. şt., Acad. R.P.R. Timişoara, 1954, **I**, *1-4*, p. 57.
2. Immig H., Jander G., Z. Elektrochem., **43**, S. 207.
3. Drăgulescu C., Lazăr-Juncu D., St. şi cerc. şt., Acad. R.P.R., Timişoara, **I**, *1-4*, p. 37.
4. Yvon, J. Pharm. Chim. (4), **29**, p. 472.
5. de Carli F., Ann. Chim. Applicata, **21**, p. 472.
6. Ting S. F., Jefferry W. S., Grave L. E., Talanta, 1960, **3**, p. 240.
7. Hall T. U., Gibson T. A., Philips H. O., Critehfield E. E., Analyt. Chem. 1954, **26**, p. 1539.
8. Karrman K. J., Johansson G., Microchim. Acta, 1956, *4*, p. 1573.
9. Гурьев И. А., Заринский В. А., ЖАХ, 1963, **18**, стр. 348.
10. Ермаков В. И., Загорец П. А., Смирнов Н. И., ЖФХ, 1962, **XXXVI**, *6*.

OSCILOMETRIC DETERMINATION OF Bi^{+3} ION

(Abstract)

The authors propose a Bi^{+3} titration method with phosphoric ion. The equivalence point is oscillometric determined.

Working method is indicated, acidity influence, precision and concentration limits in bismuth ions, in wich the method may be carried out.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

D.C. 66.096

MACROKINETICS OF $NaHCO_3$ THERMICAL DECOMPOSITION (I)

BY

C. CALISTRU and LIVIA IFRIM

Paper presented at the scientific session of the Polytechnic Institute of Jassy, September the 26—30 st 1967

1. Introduction

The research of the macrokinetic laws that allow the quantitative description of the decomposition processes of different solid substances, present a special practical importance, since such processes are part and parcel of numerous and important tehnologies of inorganic products.

Although kinetics of such processes was researched by numerous authors, the possibilities to use the obtained results in the industrial practice are still restricted enough. As result there are still necessary researches with the view of the mathematical description oa these processes.

With the view of finding the ways for the mathematical description of these processes, in this paper we research the chemical process met in the fabrication of Na_2CO_3 under the name of thermical decomposition of $NaHCO_3$.

On the basis of data published in reference materials [1]...[5] we may consider that the existing informations with regard to the kinetics of this product are still insufficiently.

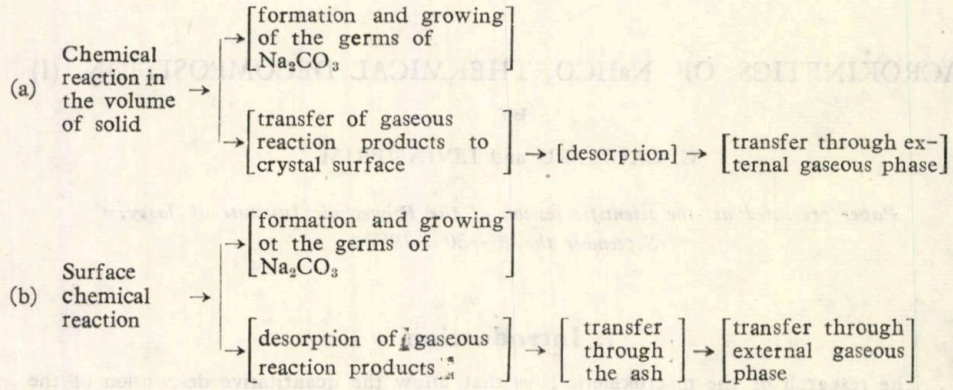
2. Mechanisms and Models in the Case of $NaHCO_3$ Thermical Decomposition Process

In a previous paper [6] was shown that, the first necessary stage for the mathematical description of a chemical process is the macrokinetic modelling of this. The characteristic equation of the researched process has the form:

$$[NaHCO_3]_s \rightarrow [Na_2CO_3]_s + [CO_2 + H_2O]_g.$$

The reactant phase may be composed of monocrystals or of granules, these, on their turn, including an ensemble of monocrystals.

All the process is composed, in the case when is considered the decomposition only of a monocrystal or only of a granule, of transforming processes and heat and mass transfer. The structure of the process, in the case of a monocrystal decomposition, may be represented by the indicated scheme (a) or (b) from Fig. 1.



Fig, 1. — Possible structures in the case of the thermical decomposition process of a $NaHCO_3$ crystal.

As we remark, the scheme (a) is possible in the case when reaction takes plase in every macroscopic point of the monocrystal an the scheme (b), when reaction takes place on the part still unreacted of the crystal.

The elementary macroscopic processes represented in Fig. 1 are the following: chemical reaction in the volume or on the surface of solid, formation and growing of the germs of the new solid phase, transfer of the gaseous reaction products through the solid and the transfer of these through the external gaseous phase. The chemical reaction mentioned above (see Fig. 1) is the irreversible reaction:

$$2\,NaHCO_3 \rightarrow Na_2CO_3 + H_2O + CO_2\,.$$

The heat transforming and transfer process is formed by the heat consumption and the heat transfer to the place of reaction.

In the case of a $NaHCO_3$ granule decomposition, the structure of the process is complicated: now, there is the possibility when reaction takes place or in each macroscopic point of the compound monocrystals of the granule, or at the separation surface between the crystals, or at the surface of the unreacted core of granule.

May be supposed that even in this case the structure of process may be represented in similar schemes to those from Fig. 1.

Fig. 2 illustrates a simplified scheme corresponding to the structure of thermical decomposition process, both in the case of the decomposition of a monocrystal and of a $NaHCO_3$ granule.

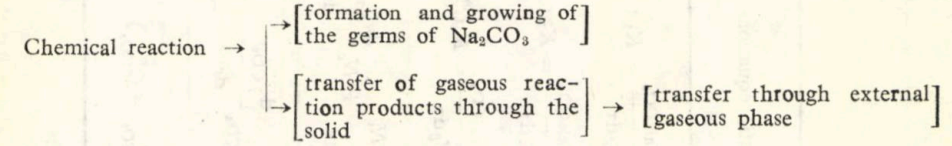


Fig. 2. — Possible structures in the case of thermical decomposition process of $NaHCO_3$.

On the basis of the possible relationships betwen the rates of the elementary processes, we have established, as possible, the macrokinetic models (exposed in Table 1).

For the mathematical description of the process we may be taken into consideration the consumption and heat transfer process.

In this paper we have in view especially to establish the macrokinetic model (as those from Table 1) as rate controlling, using a certain experimental method.

3. Experiments

The experimental researches were effectuated in the installation schematically represented in fig. 3.

Reactant phase, $NaHCO_3$ of purity p. a. is placed on the porous plate of the reactor (*1*) as is achieved in apparatus the working temperature by means of thermostat (*2*). The gaseous reaction products are removed from system by the help of the air brought in reactor on the high side of the granules bed, after a previous purification of CO_2 and H_2O (*5*), and a preheating in the preheater (*3*) too. The air flow is measured by the rotameter (*4*). In the development of the process the temperature is measured both in the granules bed and at the entering of the air over the solid material, the deviation from the regim temperature being $\pm$ 0.5°C. The measure of the decomposition degree of $NaHCO_3$ granules was done by the way of CO_2 absorption in alcaline solution (*6*) and by the analysis of samples of solid material from reactor; the analysis were effectuated according to the well-known methods from literature [7], [8].

The first group of experimental researches achieved at low temperature (85°...95°C) had in view, as was mentioned formerly, to establish the role played by the chemical reaction in the development of the process, and also if this develops as a surface reaction or as a reaction in the volume of solid.

On the basis of experimental data were traced the kinetic curves: the conversion η [%] - τ [min.] (fig. 6) at the temperatures 85°, 90° and 95°C.

Table 1

Makrokinetic models

Nr.	Macrokinetic models	The place where the reaction begins	The characteristic equations
1	Chemical reaction is the controlling resistance	a) on the external surface of the granule;	a) $r_{NaHCO_3} = -\frac{dn_{NaHCO_3}}{S_g d\tau} = K_1$;
		b) on the external surface of each crystal;	b) $r_{NaHCO_3} = -\frac{dn_{NaHCO_3}}{S_c d\tau} = K_2$;
		c) on each macroscopic point of the granule	c) $r_{NaHCO_3} = -\frac{dn_{NaHCO_3}}{V_g d\tau} = K_3 C^m_{NaHCO_3}$
2	The formation and the growing of Na_2CO_3 germs are the controlling resistance	—	$\frac{dn_{Na_2CO_3}}{d\tau} = n^c_{Na_2CO_3}\frac{dN_c}{d\tau} + N_c\frac{dn^c_{Na_2CO_3}}{d\tau}$
3	The diffusion through solid of the gaseous reaction products is the controlling resistance	—	$\frac{dn_{CO_2}}{S d\tau} = D_{CO_2}\frac{dC_{CO_2}}{dr}$
4	The transfer of gaseous reaction products through the external gaseous phase is the controlling resistance	—	$\frac{dn_{CO_2}}{S d\tau} = K_t(C^s_{CO_2} - C^v_{CO_2})$

The experiments were effectuated using not only a $NaHCO_3$ granule but an ensemble of granules, with approximately the same dimensions, obtained in a previous separation with sieves ($0.20 < \varnothing < 0.10$ mm). The reactant phase was placed in the reactor under the form of a fixed bed; through the bed, the air is passed continually to removal the gaseous products of reaction and to bring the necessary heat for the development of the process. The arrangement of the reactant phase was effectuated in such a way so that may be supposed the uniform spacial distribution of the granules is achieved, the removement of the reaction products by means of the air permiting to neglect the concentration of these in gaseous phase and, as a result, to consider the reaction as irreversible.

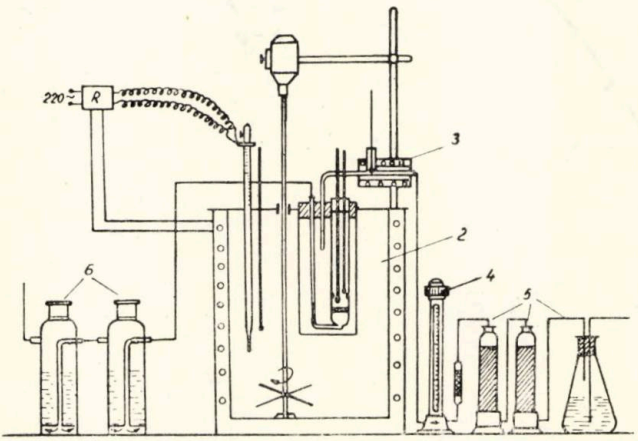


Fig. 3. — Experimental installation.

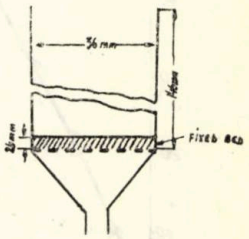


Fig. 4. — Experimental reactor and geometry of mass reaction.

The characteristics of reactor and the geometry of mass reaction are indicated in Fig. 4.

The height of material and the velocity of air was established by preliminary experiments. In Fig. 5 are indicated the obtained results with regard to the influence of the air's velocity through the material bed upon the transforming degree of $NaHCO_3$.

4. Analysis

The development of experiments in the above mentioned conditions, allows us to consider that at one time the changes from one granule are identical with those of any granule, indiferent of place. In addition, the fact that don't appear modifications on the transforming degree - time

curve (Fig. 5) allows us to detach the conclusion that in the selected experimental conditions, upon the thermical decomposition process don't influence the heat transfer.

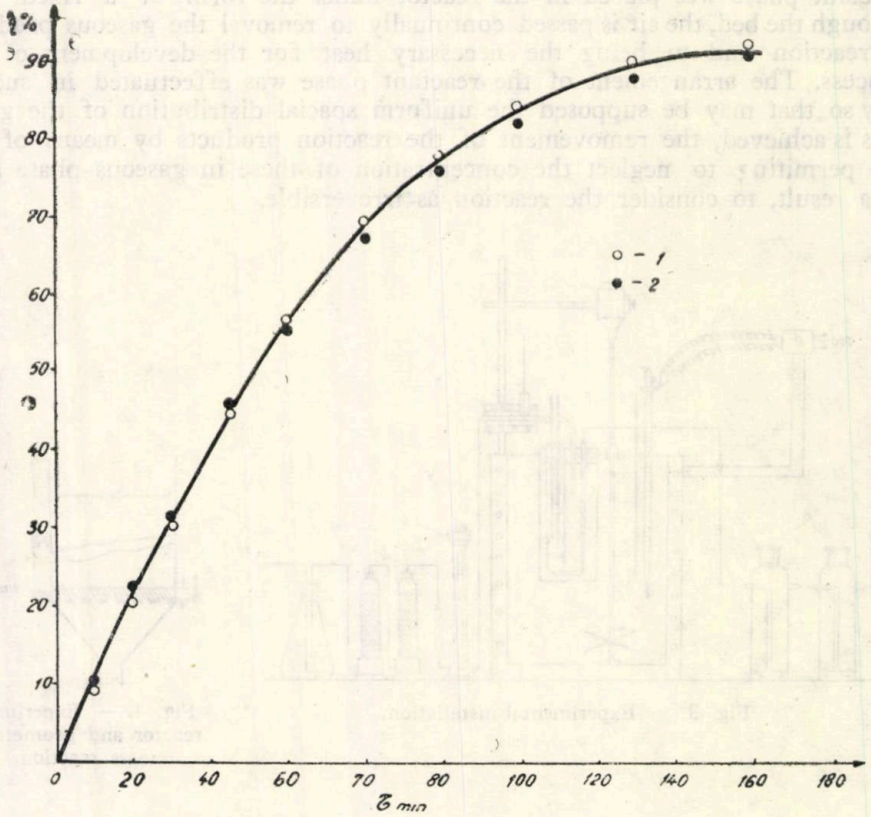


Fig. 5. — Diagramm: transforming degree (η [%])—time (τ [min.]) for two velocities of air: $1-v$ =0,39cm/s, $2-v$=1,95 cm/s.

Using the experimental data from Fig. 6 and the adequate equations we passed to the verification of the macrokinetic model, chemical reaction resistance important (Table 1).

The integration of differential equations to those two different situations was made in the following simplified conditions: were supposed $NaHCO_3$ spherical granules and the development of the volume reaction according to a monomolecular mechanism. The last hypothesis was formulated taking the indications in the litterature into account with regard to the possibility of the development of thermical decomposition reaction, according this mechanism [9].

In the specified conditions, the following integrated equations are obtained:

$$1-(1-\eta_{NaHCO_3})^{1/3}=\frac{K_1}{\rho^* R}\tau \quad (1)$$

for the development of reaction on surface and

$$-\ln\ (1-\eta)=k_2\tau \quad (2)$$

for the development of reaction in the volume of granule.

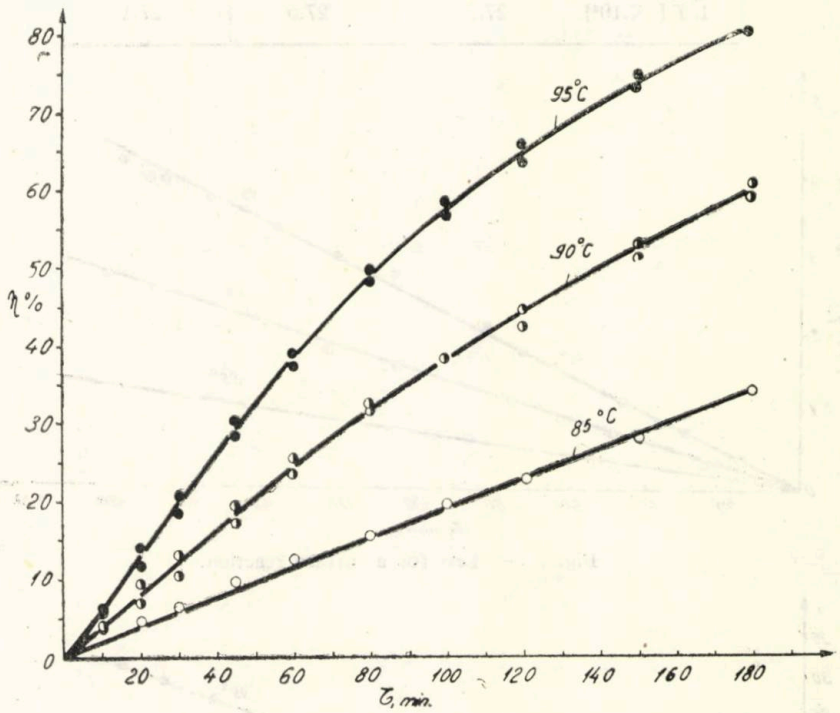


Fig. 6. — Diagramm: transforming degree (η [%]) – time (τ [min]).

The verification of the supposed model was made using the integral method of analysis [10]; the results are shown in Figs. 7 and 8.

From Figs. 7 and 8 we remark that the experimental data are described with sufficient exactity by the equation (1) of macrokinetic model surface reaction resistance important, and aren't described by equation of the model with reaction in volume.

Carring on, from the slopes of the straight-lines from the diagramm of Fig. 6 and using the equation (1) were calculated K_1 values for the three temperatures at which the decomposition was achieved. With these values the diagramm $\lg K_1 - 1/T$ was drawn; the obtained results are indicated in Table 2 and Fig. 9.

Table 2

T °C	85	90	95
K_1	$1{,}348.10^{-7}$	$2{,}697.10^{-7}$	$4{,}70.10^{-7}$
$\lg K_1$	−6,870	−6,569	−6,327
$1/T$ [°K.10⁴]	27,9	27,5	27,1

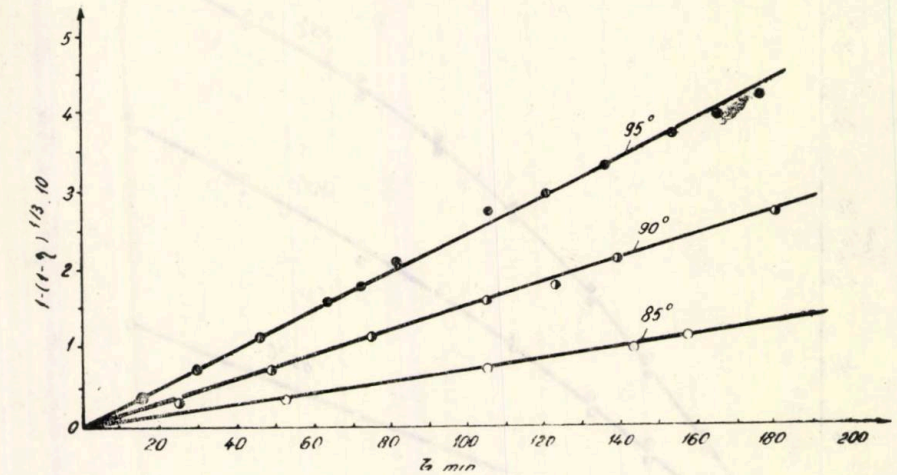


Fig. 7. — Test for a surface reaction.

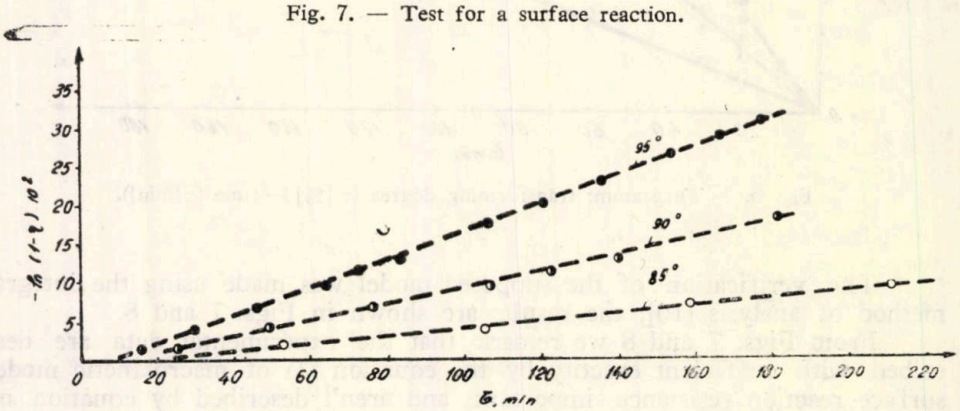


Fig. 8. — Test for a reaction in volume of granule.

The activation energy calculated on the basis of these values is 15500 cal/mole.

Using the above obtained data we may detach the conclusion that decomposition process develops according to one kinetic law corresponding to the macrokinetic model — surface chemical reaction controls — in

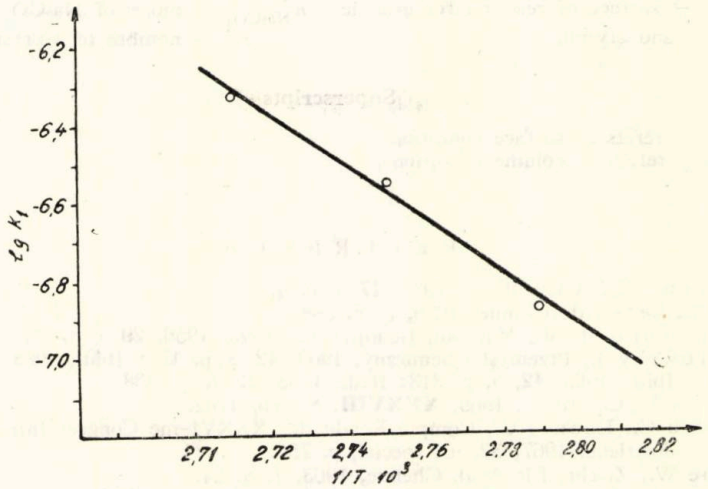


Fig. 9 — Diagramm $\lg K_1 - 1/T$ [°K].

temperature, granulation and transforming degree — researched conditions. In subsequent researches the limits with regard to the size of $NaHCO_3$ granules, the temperature and final transforming degree will be extended to establish the extent of this step.

5. Conclusions

1. In this paper are researched theoretically the principal macrokinetical and mathematical models which can describe the development of $NaHCO_3$ thermical decomposition process.

2. The experimental installation is conceived and in a domain with limited temperature, size of $NaHCO_3$ granules and transforming degree, the macrokinetic model — surface chemical reaction controls — is researched and verified.

3. In the researched conditions, is established that the reaction develops as a surface reaction.

Polytehnic Institute, Jassy,
Dept. of Anorganic Chemical Technology

RUDAPESTI MUSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

Notations

K_1, K_2, K_3 — reaction rate,
K_t — mass transfer rate,
ρ^* — molar density,
τ — time,
n — moles,
S_g, S_c — surface of reaction for granule and crystal,
V_g — volume of granule,
D_{CO_2} — diffusion coefficient of CO_2,
C — concentration,
R — initial radius of granule,
r — radius at any instant,
$n^c_{Na_2CO_3}$ — moles of Na_2CO_3 from a cristal,
N_c — nombre of separated crystals.

Superscripts

s — refers to surface conditions,
v — refers to volume conditions.

REFERENCES

1. Юшкевич Х., Хим. пром., 1931, **17**, стр. 4.
2. Buda I., Revista de Chimie, 1956, *7*, p. 598.
3. Павлюченко М. М., Уч. зап. Белорусск. ун-та, 1956, **29**, стр. 95.
4. Ciborowsky J., Przemysl Chemiczny, 1963, **42**, *3*, p. 150; Ibid., 1963, **42**, *5*, p. 238; Ibid., 1963, **42**, *6*, p. 313; Ibid., 1963, **42**, *8*, p. 438.
5. Дубиль Е. С., ЖПХ, 1965, **XXXVIII**, *8*, стр. 1702.
6. Calistru C., Leonte C., Compte Rendu du XXXVI-me Congrès Intern. de Ch. Industrielle, 1967, **32**, nr. special, p. 756.
7. Leithe W., Ztschr. für Anal. Chemie, 1963, *1*, S. 24.
8; Liteanu C., *Chimie analitică cantitativă volumetrică*. Buc., 1964.
9. Павлюченко М. М., *Гетерогенные химические реакции*. Минск, 1965.
10. Levenspiel O., *Chemical Reaction Engineering*. New York, London, Sydney, 1962.

MACROCINETICA DESCOMPUNERII TEHNICE A $NaHCO_3$

(Rezumat)

Se cercetează teoretic principalele modele macrocinetice şi matematice care pot descrie desfăşurarea procesului de descompunere termică a $NaHCO_3$.

Determinările experimentale efectuate în strat fix, în anumite condiţii de temperatură, granulaţie a materialului iniţial şi grade de transformare, arată că stadiul limitativ îl constituie reacţia chimică care se desfăşoară ca o reacţie pe suprafaţă.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Structuri posibile în cazul descompunerii termice a unui cristal de $NaHCO_3$.
Fig. 2. — Structuri posibile în cazul procesului de descompunere termică a $NaHCO_3$.
Fig. 3. — Instalaţia experimentală.
Fig. 4. — Reactorul şi geometria masei de reacţie.
Fig. 5. — Diagrama grad de transformare (η [%]) — durată (τ [min]) pentru două viteze ale aerului: *1* — v=0,39 cm/s; *2* — v=1,95 cm/s.
Fig. 6. — Diagrama grad de transformare (η [%]) — durată (τ [min]).
Fig. 7. — Verificarea modelului macrocinetic: reacţia pe suprafaţă — stadiul limitativ.
Fig. 8. — Verificarea modelului macrocinetic: reacţia în volum — stadiul limitativ.
Fig. 9. — Diagrama $\lg K - 1/T$ [°K].

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

D.K. 66.048

ÜBER DIE INTENSIVIERUNG DER RIESELFILMDESTILLATION

VON

TH. SĂVEANU, MARIANA VASILIU und AL. STANCU

Mitteilung an der wissenschaftlichen Tagung der Technischen Hochschule Jassy, 28—30. September 1967

1. Vorwort

Die Untersuchung des Destillationsprozesses im abfallenden Rieselfilm ist, wegen der Koexistenz und des gegenseitigen Einflusses der drei Transportphänomen: Moment, Wärme und Stoff, schwierig.

Studien in der Rektifikation bei kleinen [1], [2] oder bei normalen Drücke für verschiedenen Geometrieformen der Apparate [3], [4] haben bewiesen, dass es die Möglichkeit zur Beeinflussung der Hydrodynamik der zwei Phasen und indirekt der Trenneffizienz des Destillationsprozesses gibt.

Unsere früheren Arbeiten [5]...[7] im Absorbtionsbereich haben gezeigt, dass die Änderung der Geometrie der Wand, auf der ein Rieselfilm strömt, massgebend und günstig den Stoffaustausch beeinflusst.

Die Änderung der Geometrie der Wand kann man durch künstliche Rauhigkeit erzielen.

Die experimentellen Daten mit einer Laboratoriumsversuchsanlage für Rieselfilmdestillation haben uns die Wirkung der Änderung der hydrodynamischen Bedingungen auf die Intensivierung der Rieselfilmdestillation zu verfolgen gestattet.

In Folgenden wird studiert das Verhalten bei der Rieselfilmdestillation von zwei binären Gemischen auf einer glatten Wand im Vergleich mit einer Wand auf der eine künstliche Rauhigkeit, durch Spiraleinwickeln eines Drahtes mit einem gewissen Durchmesser, geschaffen ist.

2. Versuchsanlage

Die Versuchsanlage ist in Abb. 1 dargestellt. Sie besteht aus einem Kochkolben (*1*) in welchem das binäre Gemisch eingeführt wird. Die Zusammensetzung des Gemisches im Kochkolben bleibt konstant während der ganzen Bestimmungsdauer. Die erzielten Dämpfe durchströmen die Rektifikationssäule (*2*), den Dampfrohr (*6*) und gelangen in den Kondensator (*4*) wo sie vollständig kondensieren.

Der Rücklauf kehrt in die Säule bei fast gleicher Temperatur wie diejenige der Dämpfe zurück. Es wurde mit totalem Rücklauf gearbeitet. Der Rücklauf strömte auf dem zentralen Rohr (3), welchem die Geometrie durch Einwickeln eines metallischen Drahtes von verschiedenen Durchmessern geändert wurde. Die Säule wurde aussen mit einem Luftmantel thermisch isoliert und einem elektrischen Widerstand mit veränderlichen Schritt thermostatiert, so dass kein Kondensieren auf der Säulenwand stattfindet.

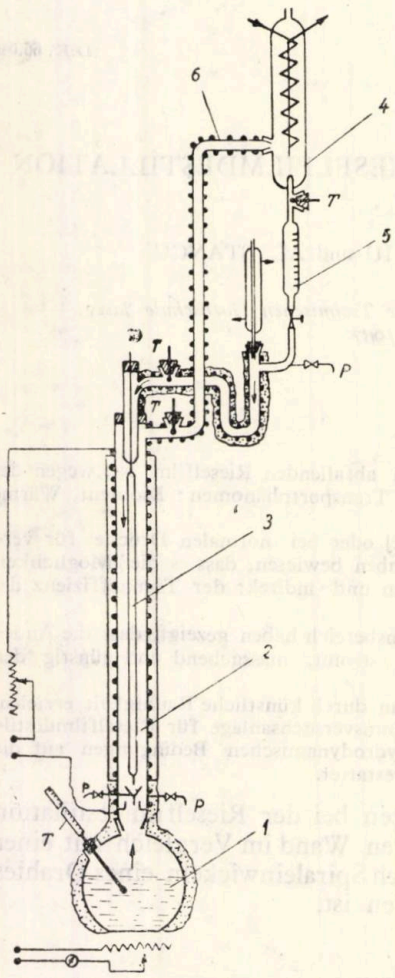


Abb. 1. — Schema der Versuchsanlage für die Rieselfilmdestillation.

Längs der Säule wurde kein Druckabfall beobachtet.

Das Rohr (3) war 810 mm lang und hatte einen Durchmesser von 9,6 mm. Die Oberfläche dieses Rohres hat für die Berechnung der Stoffdurchgangskoeffizienten gedient.

Die Durchflussmengen wurden volumetrisch an der Stelle (5) gemessen. Sie änderten zwischen 0,2 und 2,18 Kg/h. Die Arbeitsbedingungen wurden im stationären Zustand betrachtet, seit dem Augenblick von welchem vier nacheinander genommene Proben fast gleiche Ergebnisse gaben und die Temperaturen, bei allen Kontrollstellen der Säule, bis zu 0,2°C konstant blieben.

Die Proben wurden an den Stellen p entnommen und refraktometrisch untersucht. Um die etwaigen Abweichungen von den Litteraturwerten, wegen der Verunreinigungen zu vermaiden, wurden die Kurven Brechungsindex-Zusammensetzung aufgestellt.

3. Versuchsergebnisse

Bei der Untersuchnung für verschiedene Dampfdurchflussmengen längs der ganzen Säulenlänge, wurde die Zusammensetzung der zwei binären Gemische und zwar: Äthanol-Wasser und Benzol-Essigsäure verfolgt.

Die experimentellen Ergebnisse für das Gemisch Äthanol-Wasser sind in Abb. 2 dargestellt. Die Durchmesser des entwickelten Drahtes waren $\varepsilon = 0{,}20$; 0,36 und 0,60 mm. Die experimentellen Bestimmungen für $\varepsilon = 0{,}60$ mm konnten bis zu Werte $\mathcal{R}e_D \approx 1\,000$ (entsprechend $\mathcal{R}e_F \approx 100$), bei dem die

Filmdicke $\delta = 0{,}172$ mm war, gemacht werden. Bei Werten des Rauhigkeitsverhältnis $\delta/\varepsilon \leqslant 0{,}285$ bricht der Rieselfilm.

Aus Abb. 2 geht hervor dass bei unseren Versuchen die Geschwindigkeit des Dampfes im Rahmen der üblichen industriellen Werte ($w_D = 0{,}1 \ldots 1$ m/s, entsprechend $\mathcal{R}e_D = 200 \ldots 2\,000$) war. Man beobachtet auch dass bei gleicher Dampfgeschwindigkeit der Einfluss der Wandgeometrie zu grösseren Trenneffizienzen mit der Vergrösserung von ε führt.

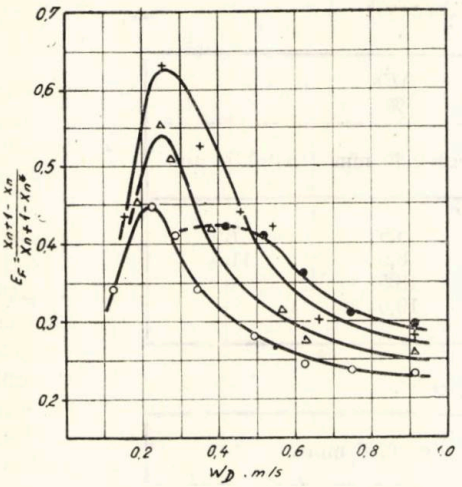


Abb. 2. — Die Trenneffizienz E_F als Funktion der Dampfgeschwindigkeit w_D, bei verschiedenen Rauhigkeitswerten (für das Gemisch Äthanol-Wasser); o — $\varepsilon = 0{,}00$ mm; Δ — $\varepsilon = 0{,}20$ mm; + — $\varepsilon = 0{,}36$ mm; • — $\varepsilon = 0{,}60$ mm.

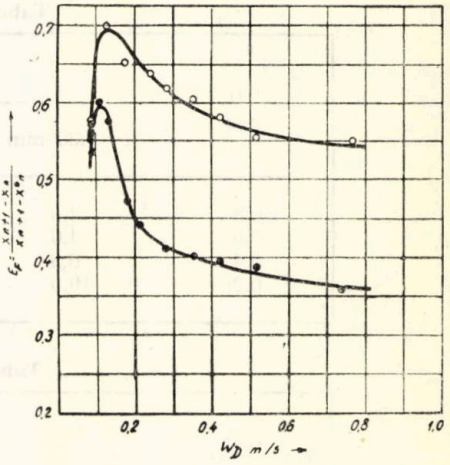


Abb. 3. — Die Trenneffizienz E_F als Funktion der Dampfgeschwindigkeit w_D bei verschiedenen Rauhigkeitswerten (für das Gemisch Benzol-Essigsäure); • — $\varepsilon = 0{,}00$ mm, o — $\varepsilon = 0{,}36$ mm.

In Tabelle 1 sind die Vergrösserungen der Trenneffizienz ΔE_F [%], im Vergleich mit der glatten Wand gegeben.

In Fortsetzung wurde der Effekt desselben Phänomens bei dem Gemisch Benzol-Essigsäure verfolgt. Bezüglich des Destillationsprozesses hat dieses Gemisch unterschiedliche Eigenschaften im Vergleich mit dem Gemisch Äthanol-Wasser.

Zum Beispiel ist das Verhältnis der Oberflächenspannungen der reinen Komponenten:

a) für das Gemisch *I*: $\dfrac{\sigma_{\text{Äthanol}}}{\sigma_{\text{Wasser}}} = 0{,}302$;

b) für das Gemisch *II*: $\dfrac{\sigma_{\text{Benzol}}}{\sigma_{\text{Essigsäure}}} = 1{,}22.$

Die mittleren relativen Volatilitäten, berechnet mit den Aktivitätskoeffizienten bei den mittleren Bedingungen sind:

a) für das Gemisch Äthanol-Wasser: $\alpha_I = 1{,}21$;

b) für das Gemisch Benzol-Essigsäure: $\alpha_{II} = 2{,}79$.

Die Abb. 3 zeigt die Abhängigkeit der Trenneffizienz für das Gemisch Benzol-Essigsäure woraus ersichtlich ist dass das Phänomen ähnlich dem System Äthanol-Wasser, aber die Trenneffizienz bei gleicher Geschwindigkeit grösser ist.

Tabelle 1

w_D m/s	ΔE_F %		
	ε=0,20 mm	ε=0,36 mm	ε=0,60 mm
0,8	3,0	5,5	7,0
0,6	4,0	8,5	11,5
0,4	6,5	18,5	—
0,25	10,0	19,0	—

Tabelle 2

w_D m/s	ε=0,36 mm	
	ΔE_F [%] für Äthanol-Wasser	ΔE_F [%] für Benzol-Essigsäure
0,8	5,5	18,0
0,6	8,5	18,0
0,4	18,5	18,5
0,2	19,5	21,0

Die prozentuellen Werte der Trenneffizienz $\Delta E[\%]$ sind in der Tabelle 2 gegeben. Die grössere Trenneffizienz des Systems Benzol-Essigsäure ist auf die relative Volatilität zurückzuführen, welche 2,3 mal grösser ist als die des Gemisches Äthanol-Wasser.

Aus den experimentellen Daten wurden die Stoffdurchgangszahlen berechnet. Die Stoffdurchgangszhal bezogen auf die flüssige Phase und für die leichtvolatile Komponente, gerechnet, wurde aus der allgemeinen Gleichung das Stoffaustausches:

$$K_F = \frac{L\,(x_D - x_W)}{\Delta x_m\, A}$$

berechnet.

Die Ergebnisse für das Gemisch Äthanol-Wasser wurden in Abb. 4 dargestellt. Es ist zu bemerken der positive Einfluss der Steigerung des Drahtdurchmessers auf die Vergrösserung des Stoffaustausches.

Die Stoffdurchgangzahl K_F für eine bestimmte Geschwindigkeit ist viel vergrössert. Im Höchstgebiet ist die Vergrösserung 108% für eine Dampfgeschwindigkeit von 0,25 m/s (entsprechend $Re_D = 530$).

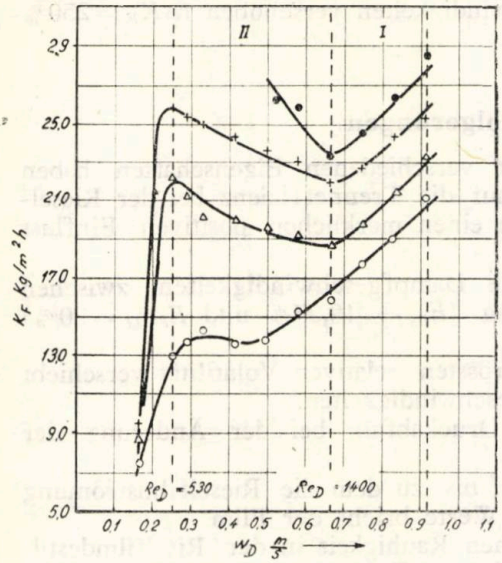


Abb. 4. — Die Veränderung der Stoffdurchgangszahl K_F als Funktion der Dampfgeschwindigkeit w_D für das Gemisch Äthanol-Wasser; o — $\varepsilon = 0{,}00$ mm; Δ — $\varepsilon = 0{,}20$ mm, + — $\varepsilon = 0{,}36$ mm, • — $\varepsilon = 0{,}60$ mm.

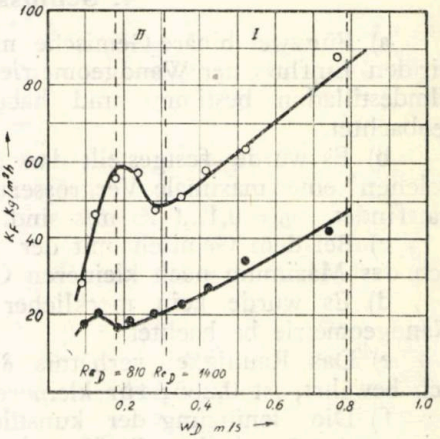


Abb. 5. — Die Veränderung der Stoffdurchgangszahl K_F als Funktion der Dampfgeschwindigkeit w_D für das Gemisch Benzol-Essigsäure; o — $\varepsilon = 0{,}00$ mm, • — $\varepsilon = 0{,}36$ mm.

In Tabelle 3 sind die Werte der prozentuellen Vergrösserungen $\Delta K_F[\%]$ für verschiedenen Dampfgeschwindigkeiten und Durchmesser des entwickelten Drahtes, gegeben.

Tabelle 3

w_D m/s	$\Delta K_F\,\% = \frac{K_F - K_0}{K_0} \cdot 100$		
	ε=0,20 mm	ε=0,36 mm	ε=0,60 mm
0,83	12,10	27,90	38,90
0,66	16,90	36,20	46,30
0,50	43,50	71,00	88,50
0,25	80,50	108,00	—

Die Verfolgung desselben Phänomens für das binäre System mit grösseren mittleren relativen Volatilität führt zu änlichen Schlussfolgerungen. Die Rechnungswerte für dieses Gemisch sind in der Abb. 5 graphisch dargestellt.

In diesem Falle sind die maximalen Werte der prozentuellen Vergrösserungen nach kleineren Dampfgeschwindigkeiten verschoben ($\Delta K_F = 250\,\%$ für $w_D = 0{,}19$ m/s und $\varepsilon = 0{,}36$).

4. Schlussfolgerungen

a) Für zwei binäre Gemische mit verschiedenen Eigenschaften haben wir den Einfluss der Wandgeometrie auf die Trenneffizienz bei der Rieselfilmdestillation bestimmt und haben einen merklichen positiven Einfluss beobachtet.

b) Es wurde festgestellt dass die Dampfgeschwindigkeiten, zwischen welchen eine maximale Vergrösserung ($E_{F,I} = 19{,}25\,\%$ und $E_{F,II} = 20\,\%$) stattfindet, $w_D = 0{,}1...0{,}25$ m/s sind.

c) Bei dem Gemisch mit der grössten relativen Volatilität verschiebt sich das Maximum nach kleineren Geschwindigkeiten.

d) Es wurde kein merklicher Druckabfall, bei der Änderung der Wandgeometrie beobachtet.

e) Das Rauhigkeitsverhätnis δ/ε, bis zu dem die Rieselfilmströmung sich bewährt, ist 0,285; für kleinere Werte bricht der Film.

f) Die Benützung der künstlichen Rauhigkeit in der Riselfilmdestillation, vergrössert den Stoffaustausch um Werte von $\Delta K_F = 100...250\,\%$. Der grösste Wert hängt auch von der mittleren relativen Volatilität des binären Gemisches ab.

Bezeichnungen

A — Stoffaustauschoberfläche,
E — Trenneffizienzvergrösserung,
K — Stoffdurchgangszahl,
ΔK — Stoffaustauschvergrösserung,
L — Rücklauf,
Re — Reynoldszahl,
w — lineare Geschwindigkeit,
x — Konzentration der leichtvolatilen Komponente,
Δx_m — mittleres Konzentrationsgefälle,
δ — Filmdicke,
ε — Rauchigkeitsdicke,
σ — Oberflächenspannung.

Indices

D — Dampf,
F — Flüssigkeit,
$n, n+1$ — Bodenzahl,

O — obere Probestelle,
o — ohne Rauhigkeit,
R — mit Rauhigkeit,
W — untere Probestelle.

Technische Hochschule, Jassy,
Lehrstuhl für allgemeine Technologie,
Laboratorium für Verfahrenstechnik

LITERATURVERZEICHNIS

1. Ellis S. R., Barker P. E., Contractor R. N., *Sieve Tray Performance at Reduced Pressure.* Trans. Inst. Chem. Engres, 1960, **38**, *1*, pp. 21—25.
2. Bevers K., *Untersuchung der Vakuumrektification an wendelförmigen Austauschelementen nach Kloss.* Chem. Ing. Techn., 1964, **36**, *3*, S. 217—221.
3. Morton F., King P. J., McLaughlin A., *Helical-coil distillation columns. I. Efficiency studies.* Trans Inst. Chem. Engrs., 1964, **42**, *8*, pp. 285—295.
4. Eberlein H., *Zu Fragen der Trennwirkung in einer horizontalen Kolonne.* Chem. Technik, 1964, **16**, *11*, S. 654—658.
5. Săveanu T., Ibănescu I., Vasiliu M., *Einfluss der Rauhigkeit in der Absorbtion* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1960, **VI (X)**, *3—4*, pp. 127—132.
6. — *Analiza intensificării proceselor de transfer în curgerea peliculară cu ajutorul rugozităţii.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1961, **VIII (XII)**, *3—4*, pp. 129—140.
7. Săveanu T., Ibănescu I., Cristian Gh., *Studiul intensificării proceselor de transfer în regim turbulent al fazei gazoase.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI (XV)**. *3—4*, pp. 143—148.

STUDII PRIVIND POSIBILITATEA DE INTENSIFICARE A DISTILĂRII PELICULARE

(Rezumat)

S-a determinat experimental, pentru două amestecuri binare (etanol-apă şi benzen-acid acetic), influenţa geometriei peretelui asupra eficienţei rectificării în curgerea peliculară cu valuri şi s-a observat o influenţă pozitivă sensibilă.

S-a constatat că valorile vitezelor vaporilor, între care are loc o creştere maximă a a eficienţei ($E_{F,I} = 19{,}5\%$ şi $E_{F,II} = 20\%$) sînt $w_D = 0{,}1...0{,}25$ m/s, funcţie de volatilitatea relativă a amestecului, maximele fiind deplasate spre viteze mici la amestecul cu volatilitatea relativă cea mai mare.

Nu s-a constatat nici o cădere de presiune datorită schimbării geometriei peretelui.

Raportul de rugozitate pînă la care se menţine curgerea peliculară este $\delta/\varepsilon = 0{,}285$. Pentru valori mai mici pelicula în curgere este ruptă.

Rugozitatea creată artificial intensifică transferul de masă în distilarea peliculară cu valori procentuale $\Delta K_F = 100...250\%$, funcţie de volatilităţile relative medii ale sistemului supus rectificării.

Explicația figurilor

Fig. 1. — Schema instalației de distilare peliculară.

Fig. 2. — Variația eficienței de separare E_F funcție de viteza vaporilor pentru amestecul etanol–apă.

Fig. 3. — Variația eficienței de separare E_F funcție de viteza vaporilor pentru amestecul benzen–acid acetic.

Fig. 4. — Variația coeficientului de transfer de masă K_F funcție de viteza vaporilor pentru amestecul etanol–apă.

Fig. 5. — Variația coeficientului de transfer de masă K_F funcție de viteza vaporilor pentru amestecul benzen–acid acetic.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

C. Z. 66.069

PROCESE DE TRANSFER ÎN PICĂTURI PULSATE

Nota II

INFLUENŢA NATURII LICHIDULUI ASUPRA COMPORTĂRII HIDRODINAMICE A PICĂTURII

DE

RADU Z. TUDOSE şi GH. CRISTIAN

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 28–30 septembrie 1967

1. Introducere

Într-o lucrare anterioară [1] s-a studiat influenţa frecvenţei şi amplitudinii pulsaţiilor asupra comportării hidrodinamice a picăturilor. S-a pus în evidenţă faptul că faza gazoasă pulsată acţionează asupra picăturii producînd deformarea acesteia. Deformarea relativă creşte cu amplitudinea şi frecvenţa pulsaţiilor. Funcţie de frecvenţă deformaţiile prezintă maxime explicate pe baza unui fenomen de rezonanţă.

În lucrarea de faţă ne-am propus să studiem influenţa proprietăţilor fizice ale lichidului asupra comportării hidrodinamice a picăturilor imersate într-o fază gazoasă pulsată.

2. Aparatura şi metoda de lucru

Schema instalaţiei cu ajutorul căreia s-au efectuat experienţele şi principiul de funcţionare sînt date în lucrarea citată [1].

În scopul lămuririi celor urmărite în prezenta lucrare s-au ales patru lichide astfel ca proprietăţile fizice: tensiune superficială, densitate şi vîscozitate să fie cît mai diferite (tabelul 1).

Picăturile de lichid au fost suspendate de un tub de sticlă vertical cu diametrul de 4,6 mm, rodat la capătul inferior.

Urmărirea dimensiunilor şi deformaţiilor picăturilor s-a efectuat cu ajutorul unui microscop prevăzut cu o scară de 1 cm divizată într-o sută de părţi.

Tabelul 1

Proprietăţile fizice la 20° C

Lichide experimentate	Tensiune superficială σ N/m	Densitate ρ kg/m^3	Vîscozitate η Ns/m^2
Apă	$72{,}8.10^{-3}$	998	$1{,}00.10^{-3}$
Soluţie apoasă de alcool etilic 40%	30.10^{-3}	935	$2{,}91.10^{-3}$
Acid acetic 100%	$27{,}8.10^{-3}$	1 048	$1{,}22.10^{-3}$
Soluţie apoasă de hidroxid de sodiu 50%	130.10^{-3}	1 525	$71{,}00.10^{-3}$

În scopul unei bune citiri la microscop, lichidele au fost colorate cu diverşi coloranţi, în proporţii mai mici de 0,2 %, cu scopul de a nu modifica proprietăţile fizice.

Pentru fiecare lichid s-a determinat dependenţa între volumul şi lungimea picăturilor. Volumul picăturilor s-a măsurat cu ajutorul unei microbiurete.

Înainte de începerea experienţelor s-a verificat cu mare atenţie dacă nu există aer pe cele două ramuri ale tubului de formare a picăturilor. Prezenţa aerului duce la deformaţii mult mai mari ale picăturilor de lichid datorită compresibilităţii acestuia.

Picăturile de lichid, sub acţiunea pulsaţiilor, au tendinţa de a se ridica pe marginea laterală a tubului. Pentru evitarea udării tubului, marginile au fost acoperite cu un strat foarte fin de parafină sau de grăsime.

Volumul picăturilor a fost variat între 15 şi 62 mm^3. Frecvenţa pulsaţiilor a fost variată între 0 şi 20 Hz, iar amplitudinea între 0 şi 120 mm.

Experienţele s-au efectuat în lipsa unui curent continuu de aer.

Temperatura de lucru a fost de $20° \pm 1°$C.

Rezultatele experimentale sînt redate sub forma dependenţei între deformaţia relativă (raportul dintre deformaţie şi diametrul ideal al picăturii) şi frecvenţa pulsaţiilor sau alte mărimi caracteristice.

3. Rezultate experimentale

O picătură de lichid suspendată şi alimentată continuu, creşte de la forma unei calote sferice la o formă alungită, apoi formează un gît de unde se secţionează şi picătura se desprinde.

Depedenţa între volumul şi lungimea picăturii este redată în fig. 1. În prima perioadă de formare, dependenţa lungime—volum urmează, cu oarecare aproximaţie, ecuaţia ce stabileşte legătura dintre diametrul şi volumul sferei. Apoi curbele prezintă cîte un punct de inversare a concavităţii, ca în cele din urmă, creşteri foarte mici ale volumului să ducă la creşteri foarte mari ale lungimii, care corespund momentului în care picătura urmează să se desprindă.

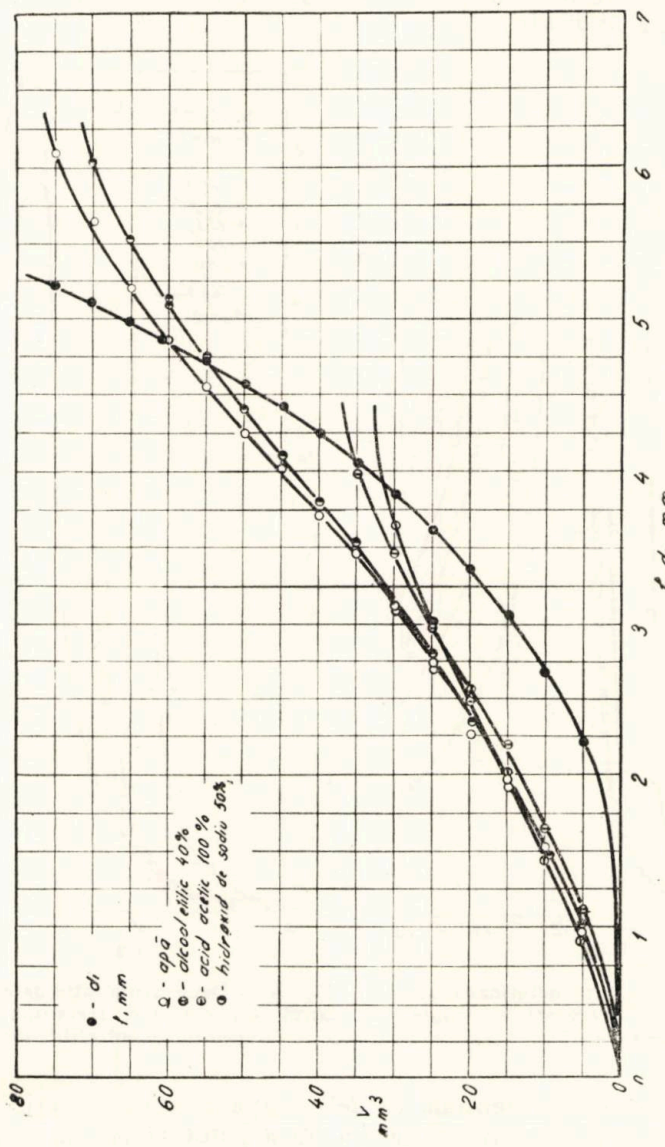


Fig. 1. — Variația lungimii picăturii funcție de volum.

Sub acţiunea fazei gazoase pulsate picăturile de lichid se turtesc şi se alungesc. Deformaţia picăturilor depinde de proprietăţile fizice ale lichidului. În fig. 2...5 s-a reprezentat, pentru cele patru lichide cercetate, dependenţa între deformaţia relativă a picăturilor şi frecvenţa pulsaţiilor pentru diverse volume ale picăturii.

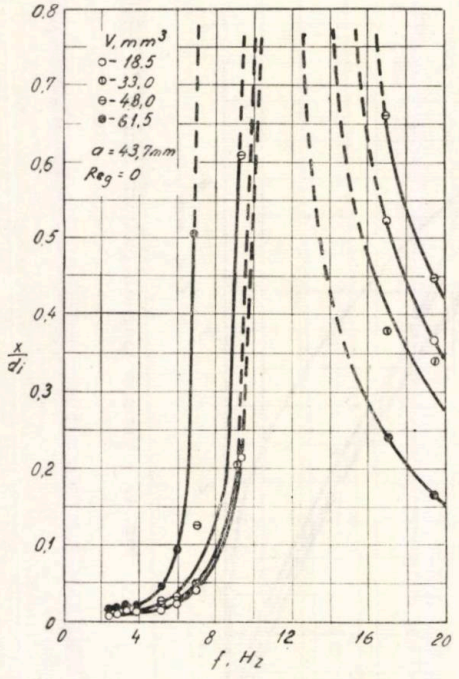


Fig. 2. — Dependenţa între deformarea relativă a picăturilor, frecvenţă şi volum, pentru apă.

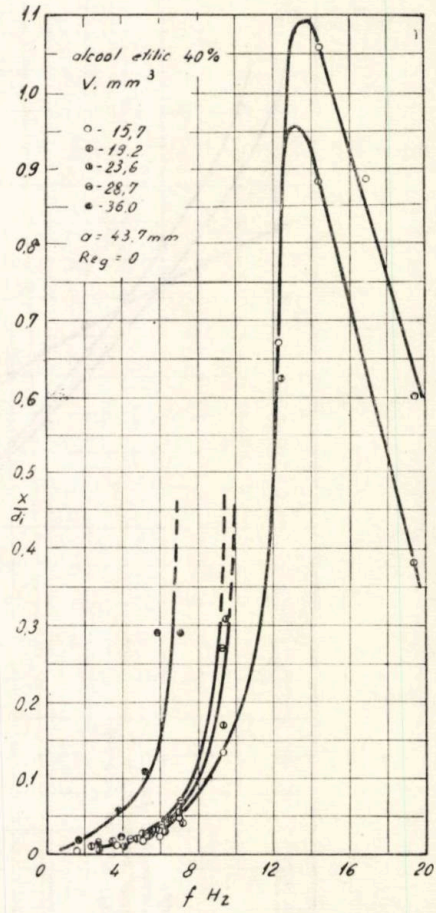


Fig. 3. — Dependenţa între deformarea relativă a picăturilor, frecvenţă şi volum, pentru alcool etilic 40%.

În toate cazurile se constată că deformaţia relativă, funcţie de frecvenţă, prezintă un maxim. Acest maxim nu a putut fi pus în evidenţă în toate cazurile (apă şi acid acetic) datorită faptului că în intervalul de frecvenţă în care apare, picăturile erau smulse de pe suport, de către faza

gazoasă pulsată. Pentru lichidele la care s-a determinat punctul de maxim rezultă că acesta este cuprins între frecvenţele de 13 şi 14 Hz. Maximul pentru celelalte două lichide, deşi nu a putut fi determinat cu exactitate, se poate aprecia că este cuprins între aceleaşi limite de frecvenţă.

Între cele patru lichide studiate există totuşi o diferenţă în ceea ce priveşte valoarea deformaţiei relative. Spre exemplu deformaţia unei picături de alcool etilic este mult mai mare decît cea a unei picături de soluţie de hidroxid de sodiu de 50%.

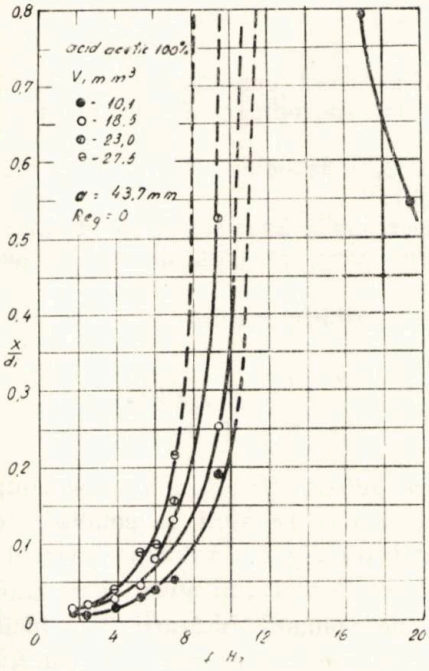


Fig. 4. — Dependenţa între deformaţia relativă a picăturilor, frecvenţă şi volum pentru acid acetic 100%.

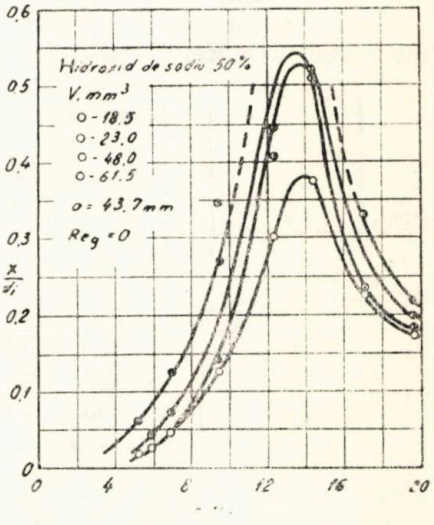


Fig. 5. — Dependenţa între deformaţia relativă a picăturilor, frecvenţă şi volum pentru soluţie de hidroxid de sodiu de 50%.

Amplitudinea pulsaţiei reprezintă un parametru care influenţează comportarea hidrodinamică a picăturilor. Variaţia amplitudinii are drept efect numai modificări cantitative (fig. 6...9).

Valoarea maximă a deformaţiei este independentă de amplitudinea pulsaţiei. Valoarea deformaţiei relative, după cum este de aşteptat, creşte cu amplitudinea. Spre exemplu în cazul soluţiei apoase de hidroxid de sodiu, prin creşterea amplitudinii de la 36,1 la 92,3 mm, deformaţia creşte de la 0,42 la 1,0.

Comportarea hidrodinamică a unei picături depinde în mare măsură atît de natura lichidului cît şi de volumul ei. Pentru a se pune în evidenţă acest aspect, pentru fiecare lichid s-a determinat variaţia deformaţiei relative funcţie de volumul picăturii (fig. 10...13).

Din analiza rezultatelor se constată în primul rînd o variaţie sinuoasă a deformaţiei relative cu volumul picăturii. Deformaţia prezintă o serie de maxime şi minime şi este cu atît mai pronunţată cu cît lichidul are o tensiune superficială mai mică şi cu cît volumul picăturii este mai mare.

4. Discuţii

Proprietăţile fizice ale lichidelor influenţează considerabil atît forma statică a picăturilor cît şi comportarea lor hidrodinamică sub influenţa unui mediu gazos pulsat.

În condiţii statice, asupra unei picături de lichid, (fig. 14), în secţiunea AA acţionează următoarele forţe [2]:

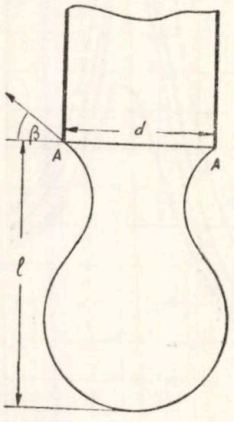


Fig. 14. — Picătură de lichid.

a) tensiunea superficială, $2\pi r\sigma \sin\beta$, b) greutatea picăturii, $V\rho$, c) forţa ce se exercită de sus în jos, $\pi r^2 (2\sigma/r' - l\rho)$.

Din condiţia de echilibru rezultă:

$$1 = \frac{1}{\pi r^2} V + \frac{2\sigma}{\rho}\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\sin\beta\right). \tag{1}$$

La prima vedere relaţia (1) pare a reprezenta ecuaţia unei drepte, ceea ce ar veni în contradicţie cu datele experimentale din fig. 1. În ecuaţie intervine însă raza de curbură (r') la vîrful picăturii şi unghiul β care sînt funcţii de volumul picăturii (V), încît ecuaţia este în realitate cu mult mai complicată Expresia analitică a acestei ecuaţii nu a putut fi stabilită.

Din fig. 1 rezultă că volumul şi lungimea picăturilor ce se desprind sînt cu atît mai mari cu cît tensiunea superficială este mai mare şi densitatea mai mică.

În cazul unei picături care suferă deformaţii sub acţiunea unei faze gazoase pulsate, trebuie luate în consideraţie următoarele forţe: tensiunea superficială, greutatea picăturii, forţa de vîscozitate şi forţa pulsatorie. Atunci cînd se lucrează şi cu un debit suplimentar de gaz trebuie luată în consideraţie şi forţa de presiune a acestuia. Nu s-a reuşit să se stabilească o ecuaţie care să realizeze o legătură între aceste forţe. Pe baza datelor experimentale se pot trage însă unele concluzii cu privire la influenţa acestor forţe.

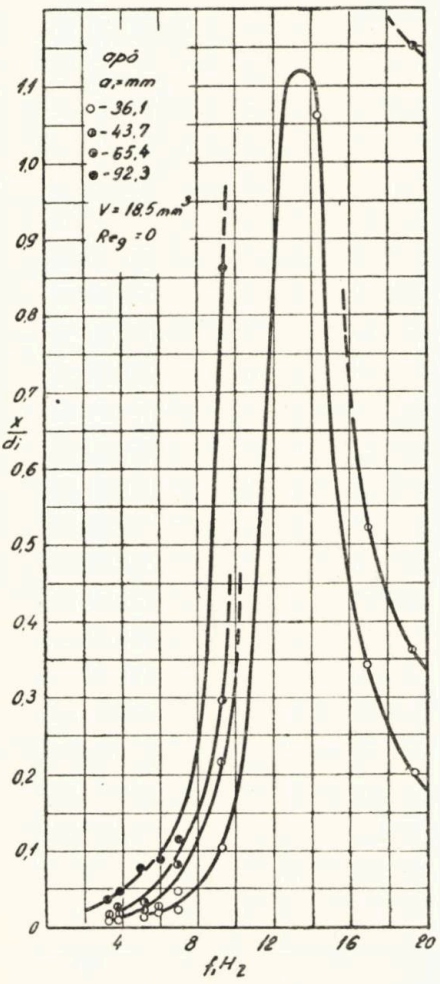


Fig. 6. — Dependența între deformația relativă a picăturilor, frecvență și amplitudine, pentru apă.

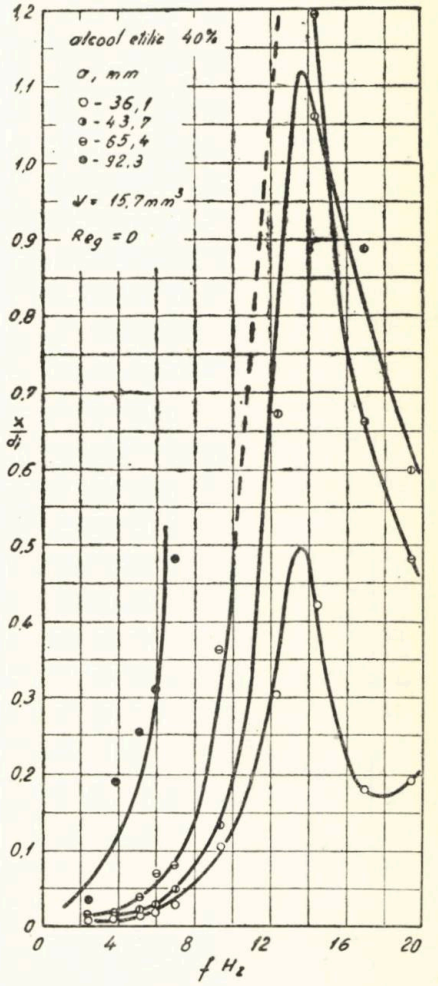


Fig. 7. — Dependența între deformația relativă a picăturilor, frecvență și amplitudine pentru alcool etilic 40%.

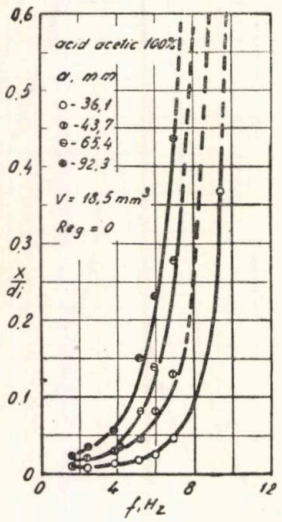


Fig. 8. — Dependenţa între deformaţia relativă a picăturilor, frecvenţă şi amplitudine, pentru acid acetic.

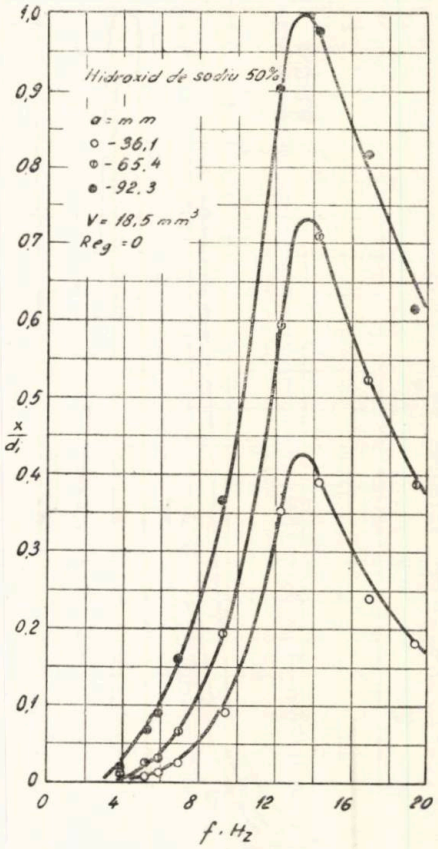


Fig. 9 — Dependenţa între deformaţia relativă a picăturilor, frecvenţă şi amplitudine, pentru soluţie de hidroxid de sodiu de 50%.

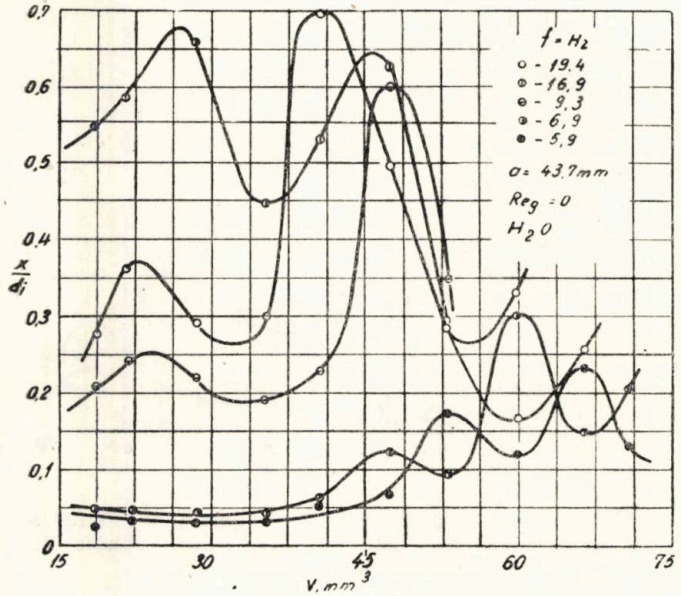


Fig. 10. — Dependența între deformația relativă a picăturilor, volum și frecvență, pentru apă.

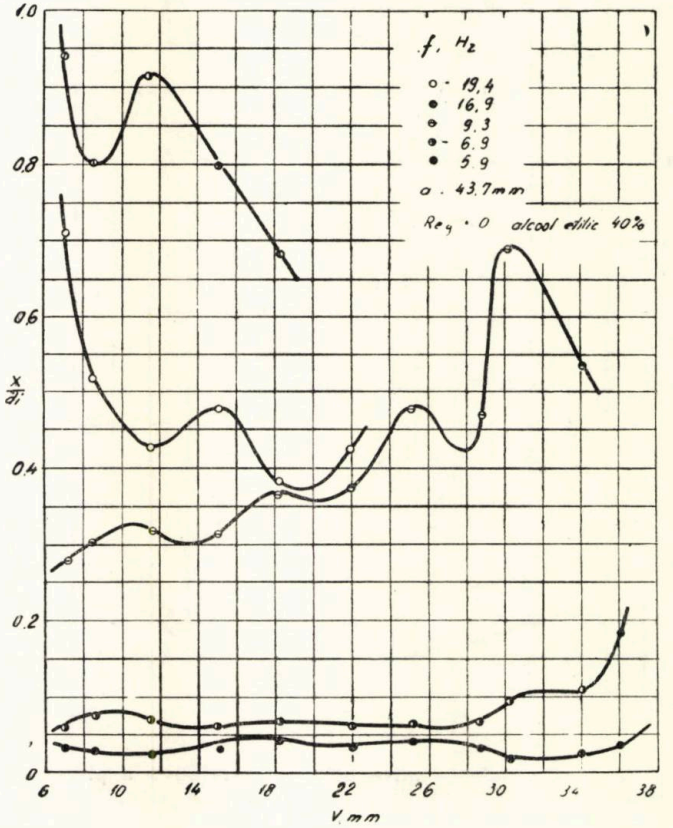


Fig. 11. — Dependența între deformația relativă a picăturilor, volum și frecvență, pentru alcool etilic 40%.

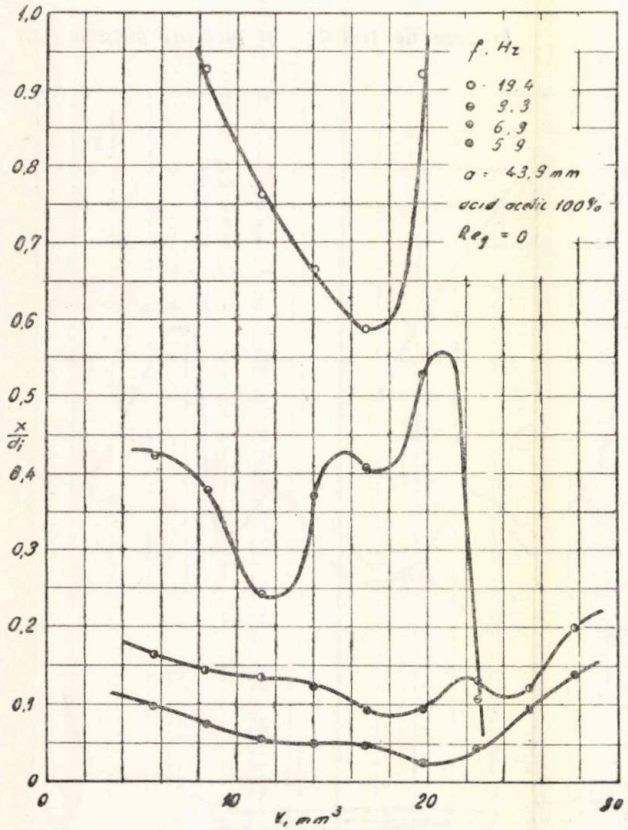


Fig. 12. — Dependența între deformația relativă a picăturilor, volum și frecvență, pentru acid acetic.

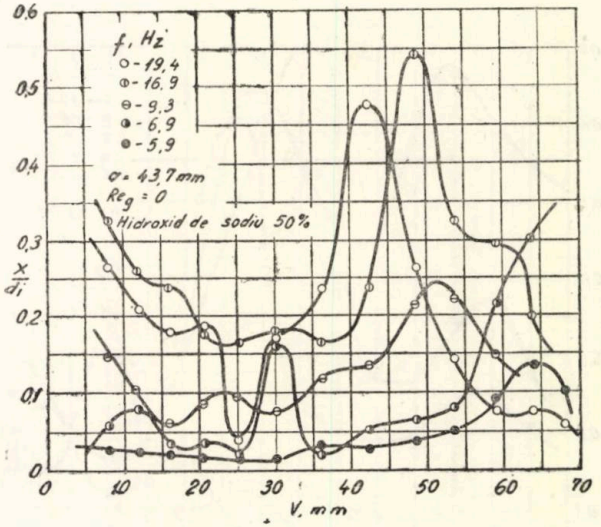


Fig. 13. — Dependența între deformația relativă a picăturilor, volum și frecvență, pentru soluție de hidroxid de sodiu de 50%.

Tensiunea superficială constituie forţa care exercită o influenţă predominantă asupra comportării hidrodinamice a picăturii (fig. 15). Cu cît tensiunea superficială a lichidului este mai mică cu atît picătura va suferi deformaţii mai puternice chiar în domeniul volumelor reduse. La tensiuni superficiale mari deformaţiile se diminuează fiind mai accentuate în domeniul volumelor mari. La o variaţie a tensiunii superficiale de 0,1 N/m, deformaţia relativă creşte de 3,3 ori (pentru $f = 19{,}4$ Hz) (fig. 16).

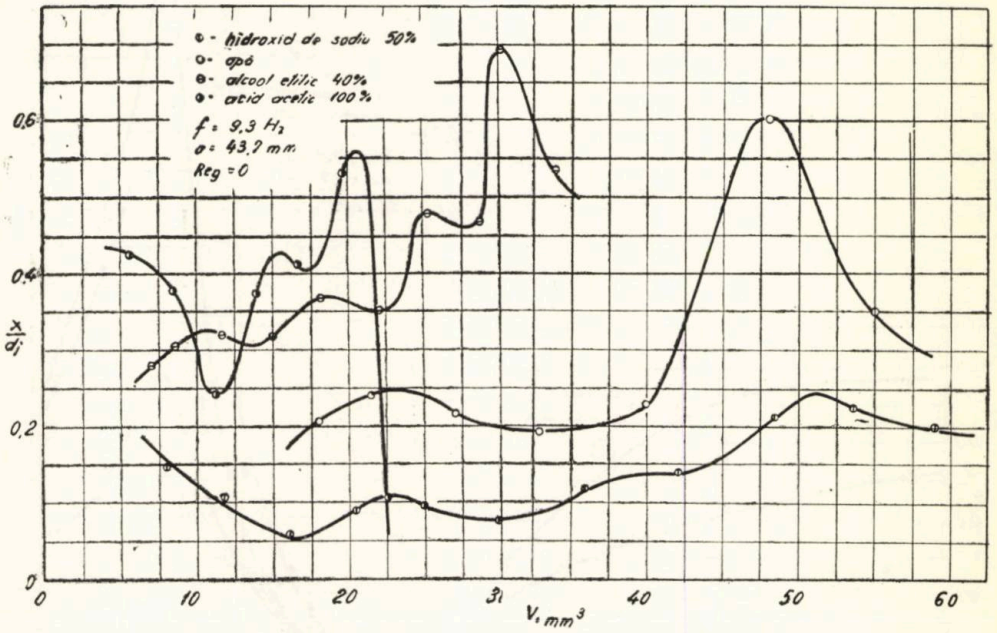


Fig. 15. — Dependenţa între deformaţia relativă şi volumul picăturilor pentru diverse lichide.

Deci, în general se poate trage concluzia că deformaţia relativă a picăturilor, sub influenţa unei forţe ondulatorii, scade cu creşterea tensiunii superficiale.

Dacă se compară dependenţa deformaţiei relative a picăturilor, cu frecvenţa pulsaţiilor, pentru diverse lichide (fig. 17), se constată că deformarea maximă apare la o frecvenţă cuprinsă între 13 şi 14 Hz.

Maximul deformaţiei poate fi explicat pe baza unui fenomen de rezonanţă. Frecvenţa de rezonanţă a unei picături:

$$f_0 = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{6\sigma}{(3\rho_l - 2\rho_g)\, r_p^3}} \tag{2}$$

este proporţională cu rădăcina pătrată a tensiunii superficiale. Faptul că pentru două lichide cu tensiunile superficiale de 0,03 şi 0,13 N/m se obţine un maxim la aceeaşi frecvenţă, ne permite să tragem concluzia că nici într-un caz nu este vorba de un fenomen de rezonanţă a picăturilor de lichid.

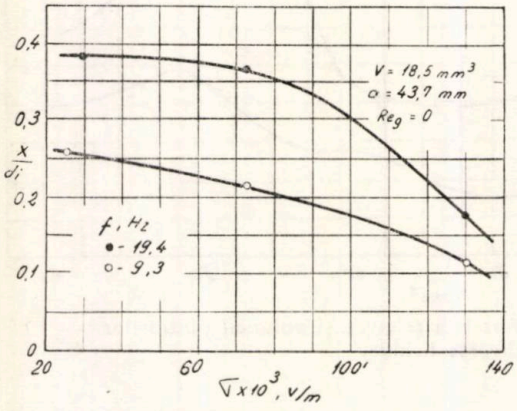


Fig. 16. — Variaţia deformaţiei picăturilor cu tensiunea superficială.

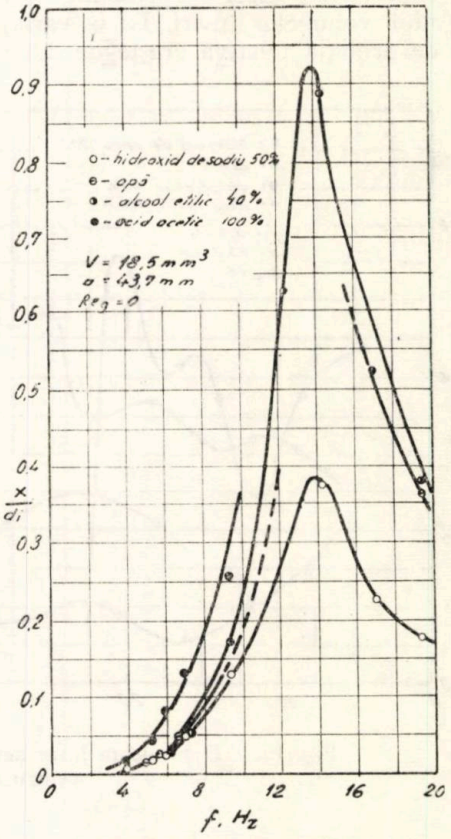


Fig. 17. — Dependenţa între deformaţia relativă şi frecvenţă pentru diverse lichide.

Rezonanţa în faza gazoasă ar trebui, conform calculelor, să apară la frecvenţe mult mai mari decît cele cu care s-a lucrat. În cazul de faţă fiind vorba de oscilaţii forţate, puternic amortizate, este posibil ca rezonanţa să apară la frecvenţa la care există maximul deformaţiei (fig. 17).

5. Concluzii

Rezultatele experimentale obţinute cu lichide cu proprietăţi fizice diferite permit să se tragă următoarele concluzii :

a) Deformaţia picăturilor pentru fiecare lichid prezintă un maxim funcţie de frecvenţă. Maximul a fost explicat pe baza rezonanţei ce apare în faza gazoasă.

b) Deformaţia relativă a picăturilor scade cu creşterea tensiunii superficiale a lichidului.

c) Deformaţia relativă depinde de volumul picăturilor şi anume creşte cu volumul.

Notaţii

a — amplitudinea pulsaţiei,
f — frecvenţa pulsaţiei,
f_0 — frecvenţa de rezonanţă,
l — lungimea picăturii,
r — raza tubului,
r' — raza de curbură la vîrful picăturii,
r_p — raza picăturii,
V — volumul picăturii,
β — unghiul,
σ — tensiunea superficială,
ρ_l, ρ_g — densitatea lichidului respectiv a gazului,
Re — numărul lui Reynolds.

Institutul politehnic din Iaşi,
Catedra de tehnologie chimică,
Laboratorul de operaţii şi utilaje
în industria chimică

BIBLIOGRAFIE

1. Tudose R. Z., Cristian Gh., Revista de chimie, 1964, **19**, 7, pp. 397–403.
2. Bouasse H., *Capillarité. Phénomènes superficiels.* Paris, 1924.

PROCESSUS DE TRANSFERT EN GOUTTE PULSÉE
Note II

Influence de la nature du liquide sur le comportement hydrodynamique des gouttes

(Résumé)

Pour l'étude de l'influence des propriétés physiques des liquides on a étudie quatre liquides, dont la tension superficielle, la densité et la viscosité sont différentes.

On a mis en évidence que l'influence de la tension superficielle joue un role déterminant.

Sous l'action des pulsations de la phase gazeuse les gouttes oscillent, en présentant un maximum qui dépend de la fréquence. Le maximum est d'autant plus prononcé que la tension superficielle est plus petite. L'apparition de celui-ci este due au phénomène de résonance de la phase gazeuse et pas à la résonance de la goutte.

Explications des figures

Fig. 1. — Variation de la longueur de la goutte fonction du volume.
Fig. 2. — Dépendence entre la déformation relative des gouttes, fréquence et volume, pour l'eau.

Fig. 3. — Dépendence entre la déformation relative des gouttes, fréquence et volume, pour l'alcool éthylique 40%.

Fig. 4. — Dépendence entre la déformation relative des gouttes, fréquence et volume, pour l'acide acétique 100%.

Fig. 5. — Dépendence entre la déformation relative des gouttes, fréquence et volume, pour une solution de hydroxide de natrium 50%.

Fig. 6. — Dépendence entre la déformation relative des gouttes, fréquence et amplitude pour l'eau.

Fig. 7. — Dépendence entre la déformation relative des gouttes, fréquence et amplitude, pour l'alcool éthylique 40%.

Fig. 8. — Dépendence entre la déformation relative des gouttes, fréquence et amplitude, pour l'acide acétique 100%.

Fig. 9. — Dépendence entre la déformation relative des gouttes, fréquence et amplitude, pour une solution de hydroxide de natrium 50%.

Fig. 10. — Dépendence entre la déformation relative des gouttes, volume et fréquence pour l'eau.

Fig. 11. — Dépendence entre la déformation relative des gouttes, volume et fréquence pour l'alcool éthylique 40%.

Fig. 12. — Dépendence entre la déformation relative des gouttes, volume et fréquence pour l'acide acétique.

Fig. 13. — Dépendence entre la déformation relative des gouttes, volume et fréquence, pour une solution de hydroxide de natrium 50%.

Fig. 14. — Goutte de liquide.

Fig 15. — Dépendence entre la déformation relative et le volume des gouttes pour diverses liquides.

Fig. 16. — Variation de la déformation des gouttes fonction de la tension superficielle.

Fig. 17. — Dépendence entre la déformation relative et la fréquence pour diverses liquides.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

D.K. 546.678.2

KONDENSATION VON 5-CHLORACENAPHTHENCHINON MIT PHENOLEN UND NAPHTHOLEN

VON

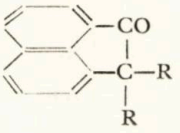
ILIE MATEI
Korrespondierendes Mitglied der Akademie
der Sozialistischen Republik Rumänien

MARIA DUMITRIU und I. COCÂRLĂ

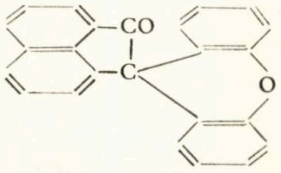
Mitteilung an der wissenschaftlichen Tagung der Technischen Hochschule, Jassy, 28–30. September 1967

1. Vorwort

Die Kondensationsreaktionen des Acenaphthenchinons mit Phenolen, Kresolen und Naphtholen, die von I. Matei und Mitarbeitern ausgeführt worden [1], [2], führen zu Acenaphthenonen vom *A*-Typus und zu Anhydro-acenaphthenonen vom *B*-Typus (in welchen R den entsprecheden Phenol, Kresol oder Naphtholrest vorstellt):

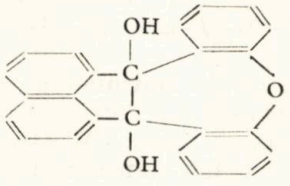


A



B

Mit β-Naphthol und *p*-Kresol erhält man nicht immer Stoffe der allgemeinen *A*- und *B*-Form sondern auch Stoffe der *C*-Form, die Anhydro-acenaphthendiole sind:



C

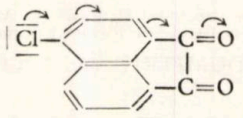
In der vorliegenden Arbeit haben wir das Verhalten der Chloracenaphthenchinone und die Darstellung susbstituierter Acenaphthenone behandelt.

2. Theoretische Betrachtungen

Zur Herstellung halogenierter Derivate des Acenaphthenchinons gibt die Fachliteratur die Oxydierungsreaktion von Halogenacenaphthen an.

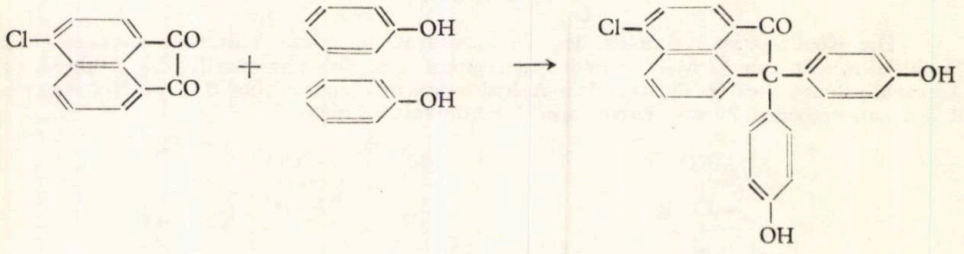
Wir haben 5-Chloracenaphthen aus Acenaphthen und Thionylchlorid nach Crompton und Walker [3] bereitet, welches durch Oxydation zu 5-Chloracenaphthenchinon führt [4].

Was die Kondensationsreaktion des 5-Chloracenaphthenchinons betrifft, sind wir der Ansicht, das die dem chlorsubstituierten Ring anliegende Ketogruppe am Umsatz nicht teilnimmt, da ihre Reaktivität durch den $+E$ -Effekt verringert ist :



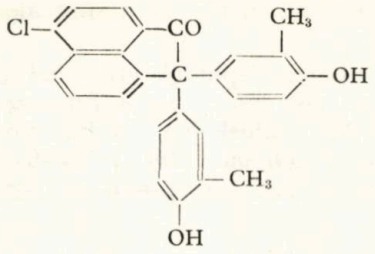
Tatsächlich zeigen die IR-Spektren eine freie Ketogruppe an dem mit Halogen in der Stellung *5* substituierten aromatischen Ring auf.

Der Kondensationsvorgang von 5-Chloracenaphthenchinon mit Phenol verlauft wie folgt :



Die Kondensation findet in Gegenwart von konz. Schwefelsäure beim Erhitzen auf dem Wasserbade statt. Wenn man von 1 Mol 5-Chloracenaphthenchinon und 2 Molen Phenol ausgeht, erhält man ein gelbes, in verdünnten Laugen vollständig lösliches Produkt was die Anwesenheit von freien Phenolgruppen anzeigt. Das Reaktionsprodukt ist ein *Diphenol-5-chloracenaphthenon* oder *1, 1-Bis-(4'-oxy-phenyl)-2-oxo-5-chloracenaphthen,* der Form (I).

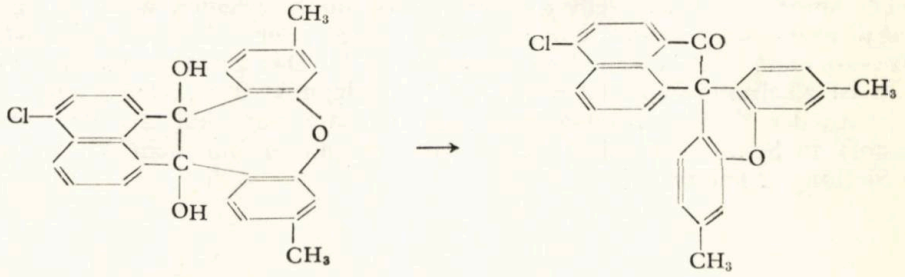
Mit *o*-Kresol verläuft die Kondensation von 5-Chloracenaphthenchinon in Äthylalkohol in Anwesenheit von konz. Salzsäure. Das Endprodukt ist alkalilöslich. An der Reaktion ist der Wasserstoff der sich in *p*-Stellung zur OH-Gruppe befindet, beteiligt ; man erhält *Di-o-Kresol-5-chloracenaphthenon* oder *1, 1-Bis-(3'-methyl-4'-oxy-phenyl)-2-oxo-5-chloracenaphthen* (II). Die Struktur des Stoffes wird auch vom IR-Spektrum bestätigt.



(II)

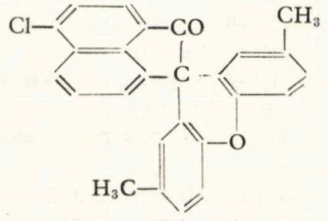
Unter schärferen Bedingungen, in Abwesenheit des Lösungsmittels und Anwesenheit der Schwefelsäure, reagiert *m*-Kresol mit 5-Chloracenaphthenchinon und führt zu einem Produkt mit Ringschluss in Xanthenform.

Was diese Reaktion betrifft, vermunten wir aufänglich die Bildung eines Stoffes pinakonischen Charakters [2], welcher dann unter den scharfen Bedingungen der Reaktion, eine Transposition mit Abscheidung eine Wassermoleküls erfährt und in den Stoff (III) übergeht, welcher *Anhydro-di-m-kresol-5-chloracenaphthenon* oder *Anhydro-[1, 1-bis-(2'-oxy-4'-methyl-phenyl)-2-oxo-5-chloracenaphthen]* ist.



(III)

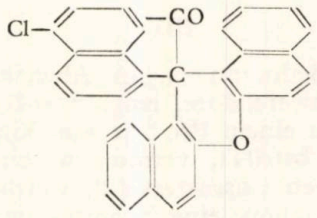
Ähnlich findet die Reaktion zwischen 5-Chloracenaphthenchinon und *p*-Kresol statt, indem man anfänglich Di-*p*-kresol-5-chloracenaphthenon erhält, welches durch Abscheiden eines Wassermoleküls, in *Anhydro-di-p-kresol-5-chloracenaphthenon* oder *Anhydro-[1,1-bis-(2'-oxy-5'-methyl-phenyl)-2-oxo-5-chloracenaphthen]* der Form (IV) übergeht.



(IV)

Bei der Kondensation mit Naph olen sind die Reaktionsbedingungen viel energischer.

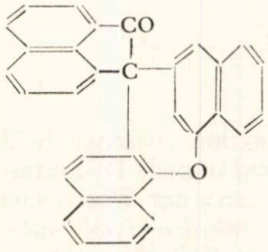
Die Kondensation mit β-Naphthol ging bei einer Temperatur von 120°...122°C in Gegenwart von konz. Schwefelsäure vor sich, wobei ein weisses kristallines, in Alkali unlösliches Produkt vom Schmelzpunkt 305°C erhalten wurde. En handelt sich um *Anhydro-di-β-naphthol-5-chloracenaphthenon* oder *Anhydro-[1,1-bis-(2'-oxy-β-naphthyl)-2-oxo-5-chloracenaphthen]* (V).



(V)

Die Reaktion zwischen α-Naphthol und 5-Chloracenaphthenchinon verläuft ebenfalls in Anwesenheit von konz. Schwefelsäure bei 110°...115°C, wobei unter Ringschluss ein Kondensationsprodukt erhalten wird und zwar *Anhydro-di-α-naphthol-5-chloracenaphthenchinon* oder *Anhydro-[1,1-bis-(1'--oxy-α-naphthyl)-2-oxo-5-chloracenaphthen]* (VI). Das gelbe kristalline Produkt ist alkaliunlöslich und weist den Schmelzpunkt 268°...269°C auf.

An der Kondensationsreaktion nimmt das β-Naphthol mit dem Wasserstoff in Stellung *1* teil, während das α-Naphthol mit dem Wasserstoff in Stellung *2* teilnimmt.



(VI)

Die chemische Struktur sowie auch einige Aspekte der molekularen Konstitution der synthetisierten Verbindungen wurden durch quantitative Analyse und mit Hilfe der IR-Absorptionsspektren präzisiert.

Auf den Abb. 1...6 sind die IR-Spektren der erhaltenen Produkte gegeben; es wurde eine Infrarot-Spektrophotometer „Perkin-Elmer-337" verwendet.

Man bemerkt das charakteristische Aussehen des Gebietes 700...900 cm^{-1}, wo Frequenzen der Deformierungsschwingungen ausserhalb der Ebe-

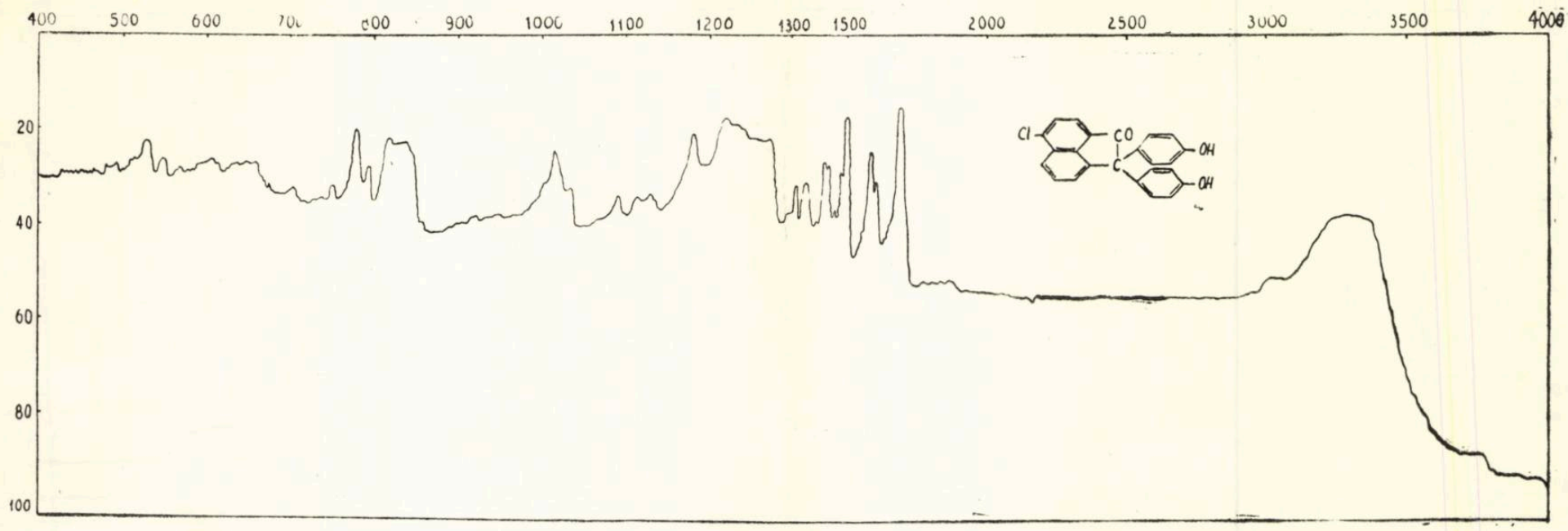


Abb. 1. — IR-Spektrum von 1,1-Bis-(4'-oxy-phenyl)-2-oxo-5-chloracenaphthen.

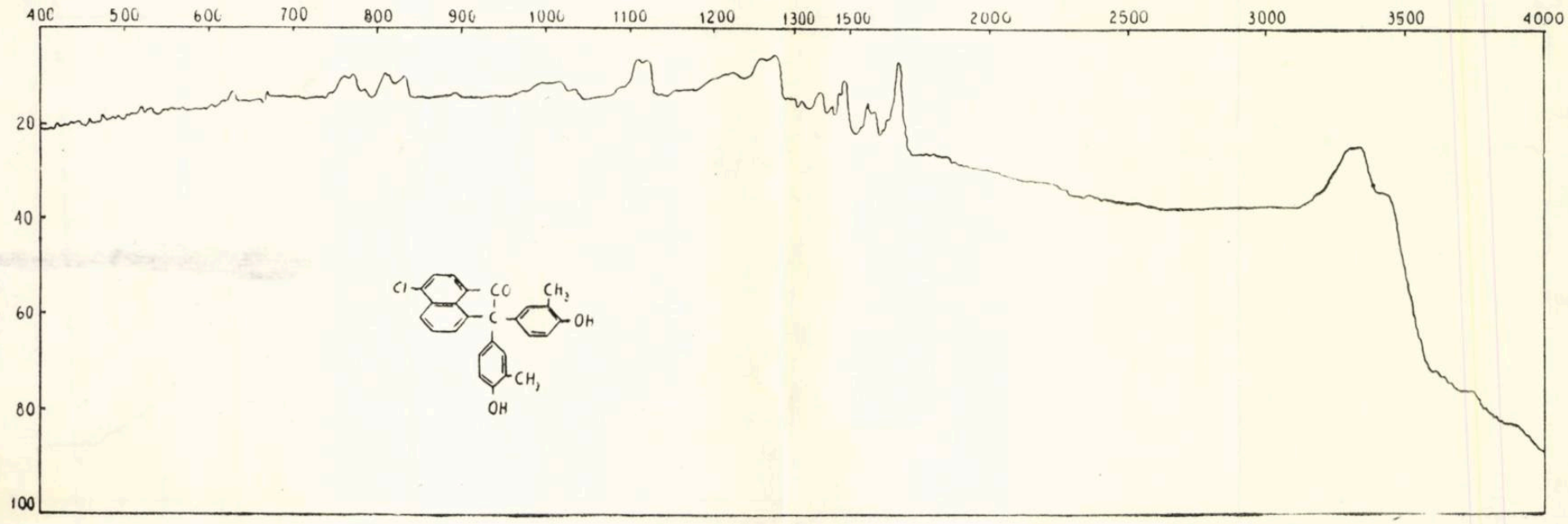


Abb. 2. — IR-Spektrum von 1,1-Bis-(3'-methyl-4'-oxy-phenyl)-2-oxo-5-chloracenaphthen.

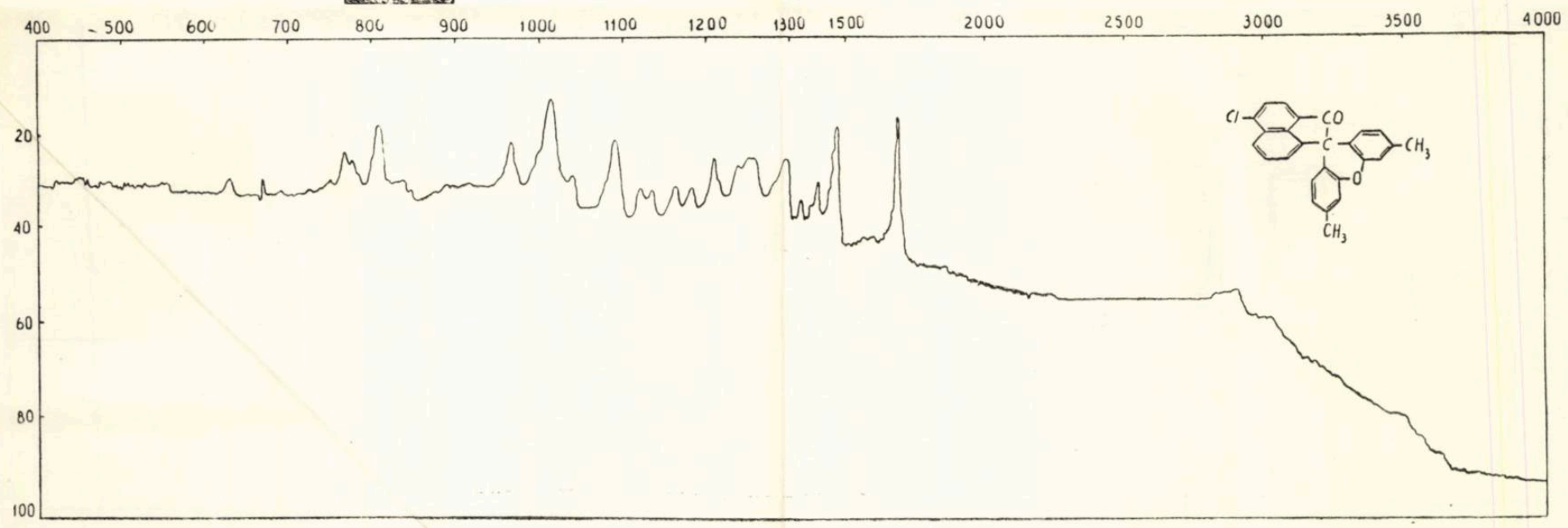


Abb. 3. — IR-Spektrum von Anhydro-[1,1-bis-(2'-oxy-4'-methyl-phenyl)-2-oxo-5-chloracenaphthen].

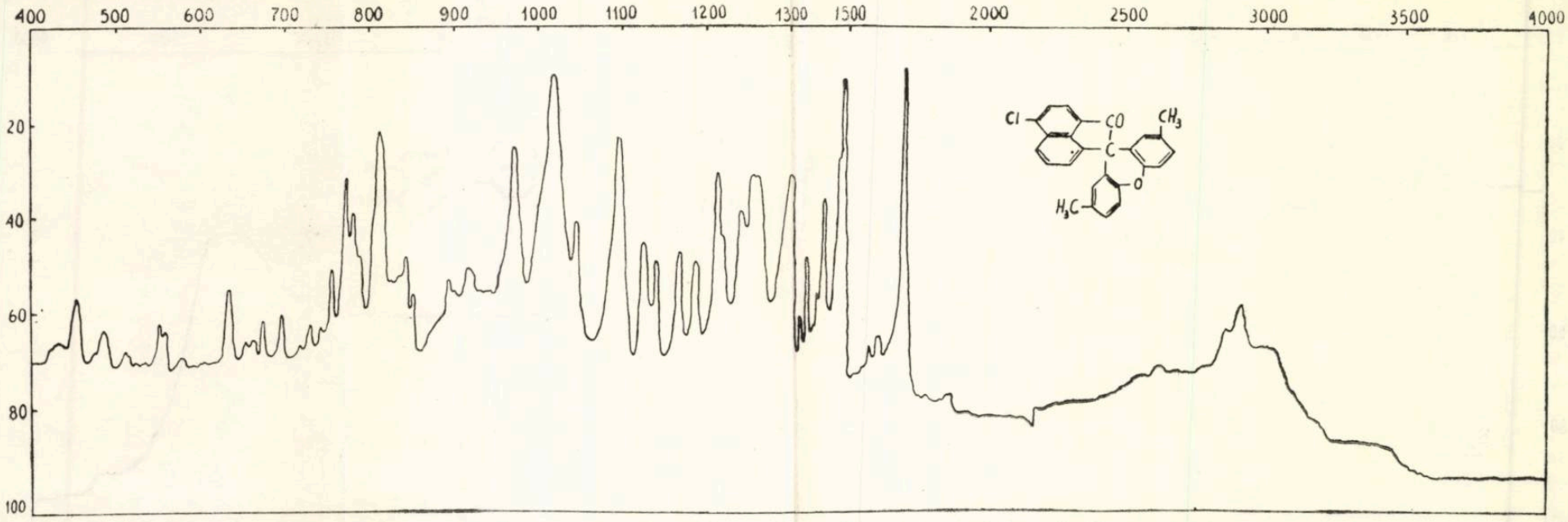


Abb. 4. — IR-Spektrum von Anhydro-[1,1-bis-(2′-oxy-5′-methyl-phenyl)-2-oxo-5-chloracenaphten].

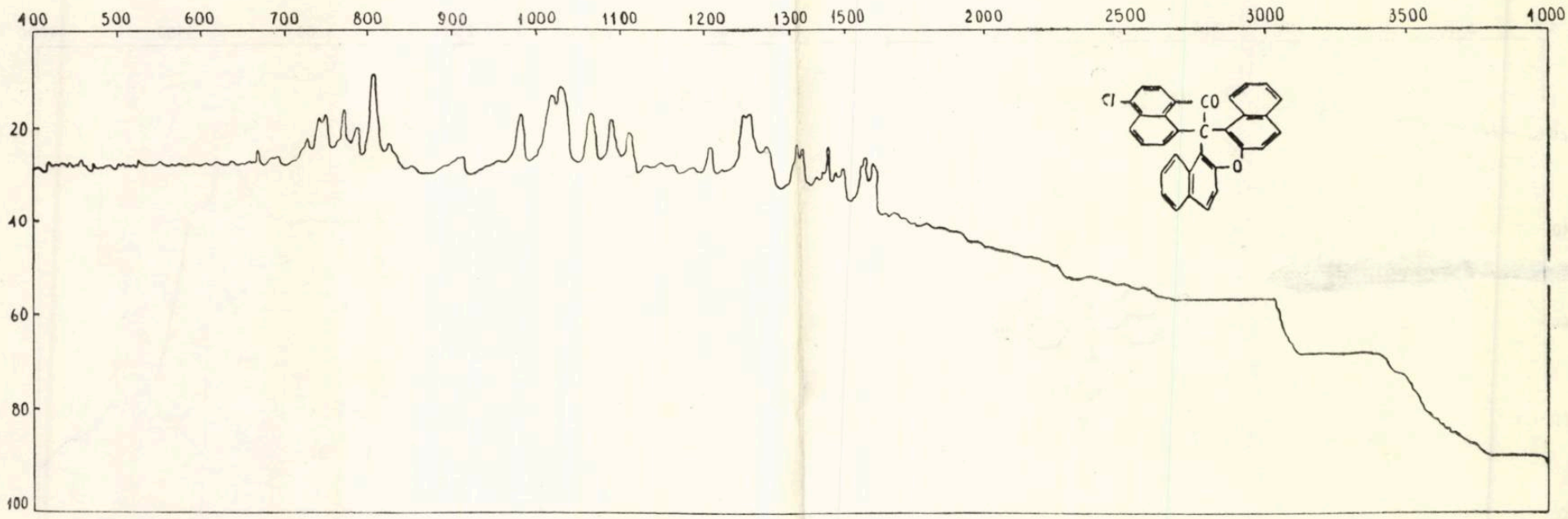


Abb. 5. — IR-Spektrum von Anhydro-[1,1-bis-(2′-oxy-β-naphthyl)-2-oxo-5-chloracenaphthen].

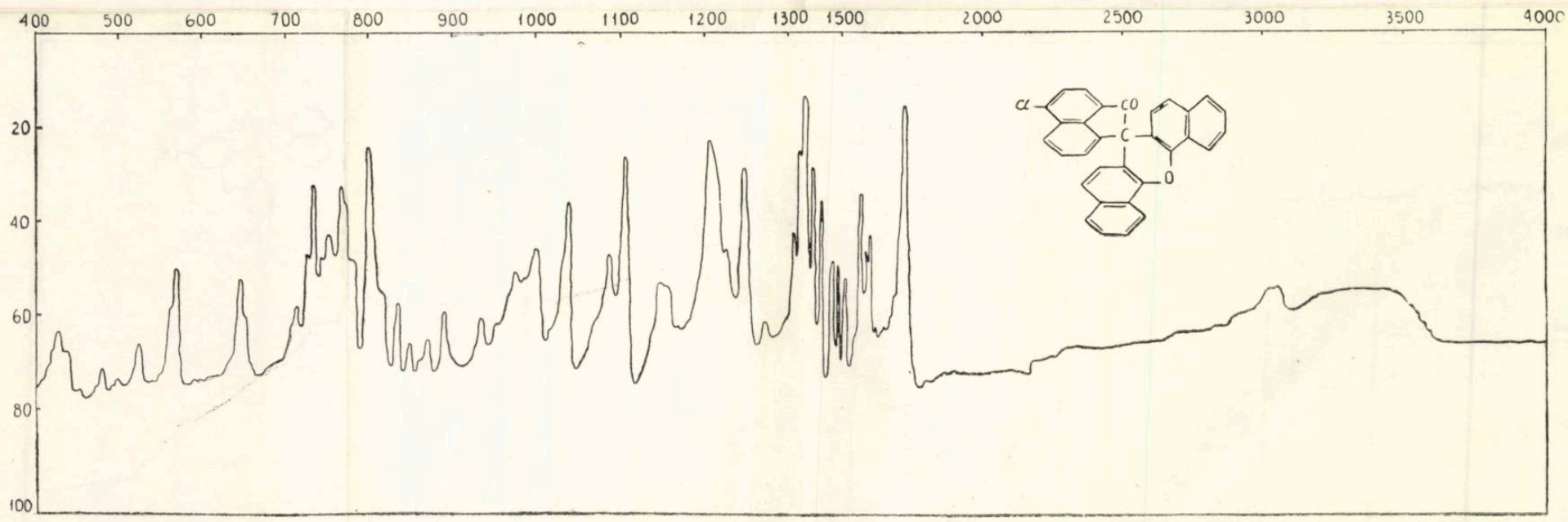


Abb. 6. — IR-Spektrum vou Anhydro-[1,1-bis-(1′-oxy-α-naphthyl)-2-oxo-5-chloracenaphthen].

ne der C—H Bindung auftreten: γ CH 750 cm^{-1}; 780 cm^{-1} für anliegende 3H und 820 cm^{-1} für anliegende 2H.

Im Bereiche 950...1 150 cm^{-1} erscheinen eine Reihe von Banden, welche den Deformierungsschwingungen in der Ebene der C—H Bindung des aromatischen Ringes entsprechen.

Bei 1 180 cm^{-1} stellt man eine Bande fest, die für die Valenzschwingung der C_6H_5—C Bindung charakteristich ist, welche sich in der Struktur des Produktes (I) vorfindet.

Die Absorption der Valenzschwingungen von C—C tritt im Bereiche 1 440...1 600 cm^{-1} auf (1 440, 1 500, 1 580, 1 600 cm^{-1}).

Die Korrelation der Banden bei 700...900, 900...1 150, 1 440...1 600 und 3 000 cm^{-1} kennzeichnet das Vorhandensein von substituierten Benzolringen.

Die Ketogruppe, die an den aromatischen Ring gebunden ist, welcher in 5-Stellung mit Halogen substituiert ist, gibt eine charakteristische Bande bei 1 695 cm^{-1} (Abb. 1, 3); 1 670 cm^{-1} (Abb. 2); 1 705 cm^{-1} (Abb. 4); 1 610 cm^{-1} (Abb. 5); 1 720 cm^{-1} (Abb. 6).

Die den Stoffen (I) und (II) mit freiem Phenol-OH zugeschriebene Struktur wird durch das Vorhandensein der Absorptionsbande bei 3 320 cm^{-1} bestätigt, welche den assoziierten Phenolgruppen entspricht.

Für die Stoffe (III), (IV), (V), (VI) erscheinen Absorptionsbanden, die für Schwingungen der C—O—C Bindung von cyclischen Äthern bei 1 020 cm^{-1} kennzeichnend sind.

Gleichfalls erscheinen für die Stoffe (III) und (IV) Absorptionsbanden, die für Schwingungen der C—H Valenz von Methyl-Gruppe bei 2 920 cm^{-1} charakteristisch sind.

3. Experimentelle Ergebnisse

a) *Kondensation von 5-Chloracenaphthenchinon mit Phenol* (I)

1 g 5-Chloracenaphthenchinon wird in 5 cm^3 frisch destilliertem Phenol bei geringem Erhitzen auf dem Wasserbad gelöst. Man lässt leicht abkühlen und sobald die Abscheidung von Chloracenaphthenchinon beginnt, führt man 1 cm^3 konz. H_2SO_4 unter Umrühren ein, wobei die Farbe der Lösung dunkler wird. Man erhitzt weiter auf dem Wasserbad bis eine Probe des Reaktionsgemisches sich vollständig in verdünnter NaOH löst.

Nach dem Abkühlen wird das Produkt mehrmals mit Wasser aufgenommen, um unreagiertes Phenol zu entfernen. Der Niederschlag wird in verdünnter KOH in der Kälte gelöst und dann zur Entfernung des unreagierten Chloracenaphthenchinons filtriert; das Filtrat wird mit HCl 2*n* gefällt. Das durch Filtrieren abgeschiedene Produkt wird getrocknet. Rohprodukt: 1 g.

Man reinigt es durch Lösen in Äthylalkohol und Behandeln mit warmen Wasser bis zur schwachen Trübung. Nach einiger Zeit scheiden sich gelbe Kristalle ab. Schmelzpunkt: 233°C.

Das Produkt löst sich in Aceton, Äthylalkohol, Essigsäure. Es ist löslich in Chloroform und schwer löslich in heissem Benzol und Toluol.

Analysen

$C_{24}H_{15}O_3Cl$; $M = 386{,}83$	C%	H%
Berechnet	74,52	3,90
Gefunden	74,63	4,12
	74,68	4,30

b) *Kondensation von 5-Chloracenaphthenchinon mit o-Kresol* (II)

Man nimmt 1,2 g 5-Chloracenaphthenchinon und 1,4 g *o*-Kresol, man fügt 35 cm³ absoluten Alkohol und 12 cm³ konz. HCl zu und man kocht $1^1/_2$ Stunden unter Rückfluss auf dem Wasserbad. Man lässt abkühlen und filtriert dann. Das Filtrat wird auf dem Wasserbade eingedampft; der Rückstand wird mit Wasser gekocht, bis er erstarrt. Man filtriert, man löst das in verdünnter Natronlauge und filtriert vom unreagiertem Chloracenaphthenchinon ab; das Filtrat wird mit HCl 2*n* gefällt. Das durch Filtrieren abgeschiedene Produkt wird getrocknet. Rohprodukt: 1,4 g.

Das Produkt löst sich in Aceton, Äthylalkohol, Äther und ist unlöslich in Chloroform; schwer löslich ist es in Essigsäure, Benzol und Toluol.

Man kristallisiert aus Toluol. Schmelzpunkt: 216°C.

Analysen

$C_{26}H_{19}O_3Cl$; $M = 414{,}90$	C%	H%
Berechnet	75,26	4,61
Gefunden	75,22	4,96
	75,17	5,11

c) *Kondensation von 5-Chloracenaphthenchinon mit m-Kresol* (III)

1,2 g 5-Chloracenaphthenchinon und 1,6 g *m*-Kresol werden auf dem Wasserbad 10 Min lang erhitzt, worauf nach und nach 1,5 cm³ konz. H_2SO_4 zugefügt werden. Man setzt das Erhitzen 1 Stunde lang fort, bis das Produkt zu einer festen Masse erstarrt. Das Produkt wird mehrmals mit Wasser gekocht, dann in Aceton in der Kälte gelöst und schliesslich mit Wasser ausgefällt Man filtriert und trocknet. Rohprodukt: 1 g.

Das Produkt löst sich in Aceton, Chloroform, Benzol, Toluol. In der Wärme löst es sich in Essigsäure und Äthylalkohol. Es ist unlöslich in Alkali. Man reinigt es aus Essigsäure. Es ergibt ein weisser kristalliner Stoff mit dem Schmelzpunkt 231°...232°C.

Analysen

$C_{26}H_{17}O_2Cl$; $M = 396{,}88$	C%	H%
Berechnet	78,68	4,32
Gefunden	78,36	4,70
	78,49	4,62

d) *Kondensation von 5-Chloracenaphthenchinon mit p-Kresol* (IV)

1,2 g 5-Chloracenaphthenchinon werden mit 1,6 g *p*-Kresol zusammen auf dem Wasserbad während 10 Min erhitzt. Man fügt dann nach und nach 1,5 cm³ konz. H_2SO_4 zu. Die Reaktion ist exotherm und das Reaktionsgefäss wird von zeit zu zeit in kaltem Wasser abgekühlt. Man rührt fortwährend bis nach Zugabe der letzten Portion Schwefelsäure das Reaktionsgemisch erstarrt. Man kocht das Produkt mehrmals mit Wasser und löst dann kalt in Aceton. Man fällt mit Wasser aus und filtriert. Es werden 1,2 g Trockenprodukt erhalten.

Der Stoff ist in Aceton, Chloroform, Benzol, Toluol löslich. Warm löst er sich in Essigsäure und Äthylalkohol. In Alkalien ist er unlöslich. Er wird aus Essigsäure gereinigt. Schmelzpunkt: 232°C.

Analysen

$C_{26}H_{17}O_2Cl$; $M = 396{,}88$	C%	H%
Berechnet	78,68	4,32
Gefunden	78,21	4,63
	78,42	4,67

e) *Kondensation von 5-Chloracenaphthenchinon mit β-Naphthol* (V)

0,6 g 5-Chloracenaphthenchinon und 1 g β-Naphthol werden auf dem Ölbad bis zum Schmelzen erwärmt; dann fügt man 3 Tropfen konz. H_2SO_4 zu. Man erhitzt weiter auf 120°...122°C während einer 3/4 Stunde, unter zeitweiligen Rühren. Beim Abkühlen, unter fortwährendem Umrühren, erstarrt das Reaktionsgemisch. Das Produkt wird mit siedendem Äthylalkohol digeriert. Es scheidet sich ein weisses Produkt ab, welches nach dem Trocknen 0,7 g weigt.

Das Produkt löst sich in der Wärme in Aceton, Benzol, Toluol; ist in warmer Essigsäure wenig löslich, in Methyl- und Äthylalkohol unlöslich. Man reinigt es aus Toluol, wobei man ein weisses, kristallines Produkt mit einem Schmelzpunkt von 305°C erhält.

Analysen

$C_{32}H_{17}O_2Cl$; $M = 468{,}80$	C%	H%
Berechnet	82,02	3,62
Gefunden	81,87	3,81
	81,93	3,79

f) *Kondensation von 5-Chloracenaphthenchinon mit α-Naphthol* (VI)

1,6 g α-Naphthol werden zusammen mit 1 g 5-Chloracenaphthenchinon zum Schmelzen erhitzt. Man fügt unter Rühren 3...4 Tropfen konz. H_2SO_4 zu und erhitzt auf dem Ölbad 1 Stunde lang, wobei eine Temperatur zwischen 110°...115°C eingehalten wird.

Beim Abkühlen, unter dauerndem Rühren erstarrt das Produkt. Man behandelt das Produkt mit 10%igem NaOH bei 40°...50°C um unreagiertes α-Naphthol und Chloracenaphthenchinon zu beseitigen. Man filtriert und wäscht mit viel Wasser aus.

Nach dem Trocknen ergaben sich 1,3 g Rohprodukt. Man reinigt es aus Essigsäure und erhält so einen kristallinen Stoff von gelber Farbe, der in Alkalien unlöslich ist. Schmelzpunkt: 268°...269°C.

Das Produkt löst sich in Aceton, Chloroform, Benzol, Toluol und ist in Methylalkohol unlöslich. Man löst in der Wärme in Essigsäure und Äthylalkohol.

Analysen

$C_{32}H_{17}O_2Cl$: $M = 468{,}80$	C%	H%
Berechnet	82,02	3,62
Gefunden	82,04	4,28
	82,10	4,15

4. Schlussfolgerungen

a) 5-Chloracenaphthenchinon wird mit Phenol in Gegenwart von konz. Schwefelsäure mit *o*-Kresol in einem Medium von salzsaurem Alkohol kondensiert, wobei sich Diphenol-5-chloracenaphthenon (I), bzw. Di-*o*-kresol-5-chloracenaphthenon (II) bilden.

b) Bei der Kondensation von 5-Chloracenaphthenchinon mit *m*-Kresol, *p*-Kresol, α-Naphthol und β-Naphthol in Anwesenheit von konzentrierter Schwefelsäure findet Ringbildungen statt, wobei Stoffe vom Xanthen-Typus enstehen (III), (IV), (V), (VI).

c) An den Kondensationsreaktionen nimmt der Karbonylsauerstoff aus Stellung *1* teil, wobei die Karbonylgruppe in Stellung *2* vom Chloratom aus *5*-Stellung entaktiviert ist. Dieser Umstand wird auch von den IR-Spektren bestätigt, die in den Endprodukten das Vorhandensein einer freien Ketogruppe an dem mit Chlor substituierten aromatischen Ring anzeigen.

Der chemische Bau der Verbindungen wurde analytisch und mittels IR-Spektren aufgeklärt. Die IR-Spektren wurden auf einem Apparat vom Typus „Perkin-Elmer-337" erhalten.

Technische Hochschule, Jassy,
Lehrstuhl für organische Chemie

LITERATURVERZEICHNIS

1. Matei I., B., 1929, **62**, S. 2095.
2. Matei I., Bogdan El., 1934, B, **67**, S. 1834.
3. Crompton H., Walker M., J. Chem. Soc. London, 1912, **101**, p. 958; C., 1912, II, S. 827.
4. Dziewonschi K. u. Mitarbeiter, C., 1927, **II**, S. 426.

CONDENSAREA 5-CLORACENAFTENCHINONEI CU FENOLI ŞI NAFTOLI

(Rezumat)

S-a condensat 4-cloracenaftenchinona cu fenolul în prezenţa acidului sulfuric concentrat şi cu *o*-crezolul în mediu de alcool şi acid clorhidric, formînd difenol-5-cloracenaftenonă (I) şi respectiv di-*o*-crezol-5-cloracenaftenonă (II).

La condensarea 5-cloracenaftenchinonei cu *m*-crezol, *p*-crezol, β-naftol si α-naftol în prezenţa acidului sulfuric concentrat se obţin produşi de tip xantenic (III), (IV), (V), (VI).

Structura chimică a compuşilor s-a determinat prin analize şi cu ajutorul spectrelor IR.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Spectrul IR al 1,1-bis-(4'-oxi-fenil)-2-oxo-5-cloracenaftenului.
Fig. 2. — Spectrul IR al 1,1-bis-(3'-metil-4'-oxi-fenil)-2-oxo-5-cloracenaftenului.
Fig. 3. — Spectrul IR al anhidro-[1,1-bis-(2'-oxi-4'-metil-fenil)-2-oxo-5-cloracenaftenului].
Fig. 4. — Spectrul IR al anhidro-[1,1-bis-(2'-oxi-5'-metil-fenil)-2-oxo-5-cloracenaftenului].
Fig. 5. — Spectrul IR al anhidro-[1,1-bis-2'-oxi-β-naftil)-2-oxo-5-cloracenaftenului].
Fig. 6. — Spectrul IR al anhidro-[1,1-bis-(1'-oxi-α-naftil)-2-oxo-5-cloracenaftenului].

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3–4, 1968

D. K. 542.951 ; 547.464

DIE KINETIK DER ESTERIFIZIERUNGSREAKTION DER HALOGENIERTEN ARYLOXYALKYLKARBOXYSÄUREN

VON

CORNELIU ONISCU

Mitteilung an der wissenschaftlichen Tagung der Technischen Hochschule, Jassy, 28–30. September 1967

1. Vorwort

In letzter Zeit nehm das Studium der Phenoxyazetatsäure-Verbindungen eine vielfältige Entwicklung wegen ihrer unkrautschädlichen und wachstumsanregenden Aktion bei Pflanzen, wie auch wegen ihrer Wichtigkeit auf dem Gebiet der Medikamente.

Unter die aktivisten Abkömmlinge dieser Verbindugen zählen sich auch deren Estere [1]. Die Untersuchungen zeigten dass die Wirksamkeit der Estere als unkrautschädliche Substanzen viel grösser ist, als der Säuren, Salze oder anderer Verbindungen. Der Verbrauch von Ester ist 2...3 mal kleiner im Vergleich zu anderen Verbindungen, bei gleichbleibender Wirkung [2].

Die Estere sind wirksam bei einigen Unkrautartren auf die Säure oder das Halogenoxynatriumazetat keine Wirkung haben [3]. Die grosse Wirksamkeit der Estere der Halogenphenoxyazetatsäuren ist durch deren besseres Eindringen in das Pflanzengewebe und das schnellere Vordringen im Pflanzensaftkeislauf bedingt [4].

Aus der grossen Anzahl der untersuchten Estere fanden eine grosse Anwendung in der Landwirtschaft, Ethyl-, Izopropyl-, Butyl und Amylestere.

Unter anderem muss erwähnt werden dass einige Estere eine fungizide Aktion aufweisen, ähnlich der organischen Quecksilberverbindungen [5].

Die Estere der Halogenphenoxyazetatsäuren wurden auch in der Chlorosulfonierungsreaktion verwendet, zur Herstellung der entsprechenden Sulfamidverbindungen, welche eine wachstumsanregende Aktion bei Pflanzen aufweisen [6].

Diese Anwendungsgebiete der Halogenphenoxyazetatestere bestimmten ihre industrielle Herstellung [7] und die Bedurfnisse von Esteren sind in stetem Steigen.

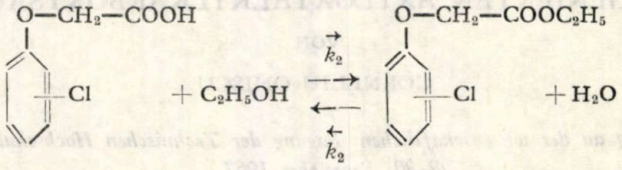
Die katalytische Esterifikation der Halogenphenoxyazetatsäuren mit Äthylalkohol ist eine homogene Reaktion, ausführbar in diskontinuierlichen Reaktoren in deren kinetische Projektionsgleichung die Reaktionsgeschwindigkeit und der Umsatzgrad eintreten [8], [9].

In der vorliegenden Arbeit ist ein kinetisches Studium der Esterifizierungsreaktion der Phenoxyazetatsäure und der Chlorphenoxyazetatsäure mit Äthylalkohol, von Schwefelsäure katalysiert ausgeführt. Diese Reaktion ist in der Literatur nicht untersucht.

2. Theoretische Betrachtungen

Das Studium der Esterifizierung von Phenoxyazetatsäure und Chlorphenoxyazetatsäuren mit Äthylalkohol wurde bei einer Temperatur von 78°C ausgeführt, unter einem molaren Erhältnis Säure-Alkohol 1 : 10. Die Veränderlichkeit der Säurekonzentration mit der Zeit wurde durch Titrieren mit einer NaOH-Lösung $n/10$ verfolgt. In allen Fällen wurde mit Säuren von 98% Reinheit gearbeitet, die nach bekannten verfahren hergestellt wurden [10], [11], Äthylalkohol 95,57% Konzentration und Schwefelsäuremonohydrat, in einem Verhältnis von 0,5% zu dem verwendeten Äthylalkoholgewichtes.

Die Esterifizierungsreaktion findet nach folgender Gleichung statt:



In der vorliegenden Arbeit benützt man folgende Bezeichnungen: a— die initiale Saurenkonzentration in der Reaktionsmasse [mol l^{-1}], b— die initiale Alkoholkonzentration in der Reaktionsmasse [mol l^{-1}], c— die initiale Wasserkonzentration in der Reaktionsmasse [mol l^{-1}], x— die Esterkonzentration in einem gegebenen Moment [mol l^{-1}], t— Reaktionsdauer [h].

Die Reaktion ist umkehrbar und die Gleichung die in diesem Fall die Geschwindigkeit des gesammten Prozesses bestimmt ist [12]:

$$\frac{dx}{dt} = \vec{k}_2 (a - x)(b - x) - \overleftarrow{k}_2 x (c + x) \tag{1}$$

oder

$$\frac{dx}{dt} = \vec{k}_2[(a - x)(b - x) - (\overleftarrow{k}_2 : \vec{k}_2)x(c + x)], \tag{2}$$

wo: $\vec{k}_2$—die Geschwindigkeitskonstante der Esterfizierungsreaktion [$l\,mol^{-1}\,h^{-1}$], $\overleftarrow{k}$ — die Geschwindigkeitskonstante der Esterhydrolyserreaktion [$l\,mol^{-1}\,h^{-1}$]

Aus der Gleichung (2) ist ersichtlich dass für $t = t_{Gleichgew.}$, die Reaktionsgeschwindigkeit der Esterifizierung $dx/dt = 0$ ist und

$$\overleftarrow{k}_2 : \vec{k}_2 = \lim_{x \to x_{Gleichgew.}} \frac{(a - x)(b - x)}{x(c + x)}.$$

Die graphische Darstellung des Verhältnisses $A = (a - x)(b - x)/[x(c + x)]$ in Abhängigkeit von t, erlaubt die Bestimmung des Grenzwertes des Verhältnisses $\overleftarrow{k}_2 : \vec{k}_2$. Durch Einführung dieses Wertes in die Gleichung (2), Trennung der veränderlichen Grossen und Integrierung, erhält man:

$$(3) \qquad \vec{k}_2 = \frac{1}{t}\int \frac{dx}{(1-\vec{k}_2:\vec{k}_2)x^2 - x(a+b+c\vec{k}_1:\vec{k}_2)+ab}.$$

Die Integrale aus der Gleichung (3) ist in konkreten Fällen relati leicht lösbar, und die graphische Darstellung ihrer Werte in Abhängigkeit von der Zeit erlaubt die Bestimmung des Wertes der Geschwindigkeitkonstante.

Diesen Weg verfolgend kann man bestimmen die Werte der Geschwindigkeitkonstante der Esterifizierungsreaktion mit Äthylalkohol von Phenoxyazetatsäure und dessen Chlorderivate.

3. Experimentelle Ergebnisse

a) *Esterifizierung von Phenoxyazetatsäure mit Äthylalkohol*

Die Esterifizierung von Phenoxyazetatsäure mit Äthylalkohol, katalysiert von Schwefelsäuremonohydrat, wurde mit folgenden molaren Konzentrationen der Reaktionspartner durchgefürt:

$$a = 1{,}4299 \text{ mol } l^{-1},\ b = 13{,}9241 \text{ mol } l^{-1},\ c = 1{,}6512 \text{ mol } l^{-1}.$$

Die zeitlichen Veränderungen der Konzentration der Reaktionspartner und Reaktionsprodukte sind aus Tabelle 1 ersichtlich.

Die graphische Darstellung der Veränderung des Konzentrationsverhältnisses A in Abhängigkeit von t zeigt die Abb 1. Aus der aufgezeichneten Kurve bestimmt man den Grenzwert des Konstantenverhältnisses $\vec{k}_2:\vec{k}_2$, der gleich 0,7 ist. Durch Einführung diesses Wertes zusammen mit den Werten der Reaktionspartnerkonzentrationen in die Gleichung (3), erhält man den numerischen Kalkulationausdruck der Geschwindigkeitkonstante

$$(4) \qquad \vec{k}_2 = \frac{1}{t}\int \frac{dx}{0{,}3x^2 - 16{,}5098x + 19{,}910}.$$

Tabelle 1

Nr.	t h	x mol l^{-1}	$a-x$ mol l^{-1}	$b-x$ mol l^{-1}	$c+x$ mol l^{-1}	$A=\frac{(a-x)(b-x)}{x(c+x)}$	Ausbeute %
1	0	0,0	1,4299	13,9241	1,6512	12,34	0
2	0,25	0,8228	0,6071	13,1013	2,4740	3,90	57,5
3	0,50	1,0155	0,4144	12,9086	2,6667	1,97	71,0
4	1,0	1,1601	0,2689	12,7640	2,8113	1,05	81,1
5	2,0	1,2275	0,2024	12,6966	2,8787	0,72	85,8
6	3,0	1,2372	0,1927	12,6869	2,8884	0,71	86,5

Ob man benutzt die Bezeichnung $R = 0{,}3\,x^2 - 16{,}5098\,x + 19{,}910$ und durch Lösen der Integrale erhält man:

$$\int \frac{dx}{R} = \frac{1}{15{,}76} \ln \frac{32{,}269 - 0{,}6\,x}{0{,}7489 - 0{,}6\,x}\,.$$

Die entsprechenden Werte der Integrale für verschiedene Werte von x sind aus Tabelle 2 ersichtlich.

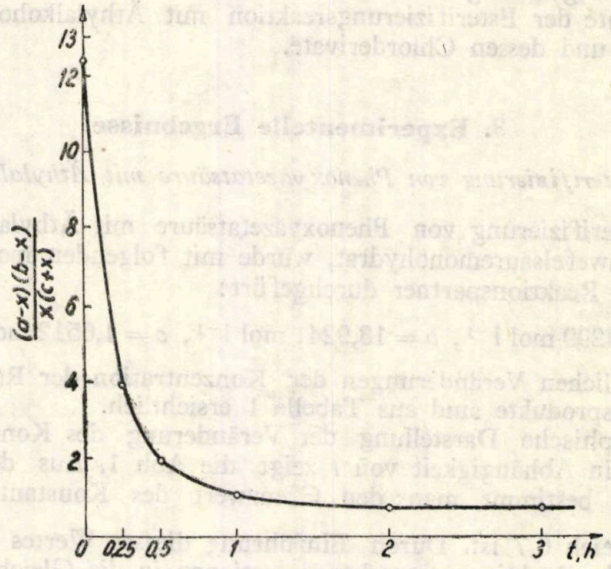


Abb. 1. — Zeit — Konzentrationsverhältnis für die Reaktion Phenoxyazetatsäure — Äthylalkohol.

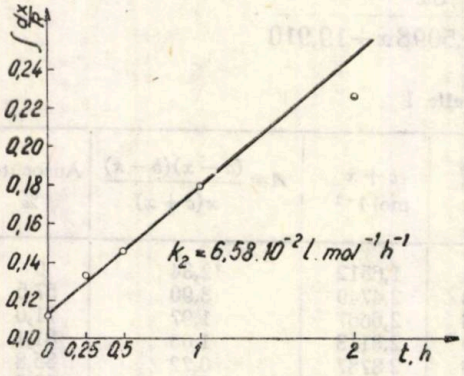


Abb. 2. — Geschwindigkeitskonstante der Reaktion Phenoxyazetatsäure — Äthylalkohol.

Tabelle 2

Nr.	t h	x mol l^{-1}	$\int \frac{dx}{R}$
1	0,0	0,0	0,112
2	0,25	0,8228	0,133
3	0,50	1,0155	0,145
4	1,0	1,1601	0,178
5	2,0	1,2275	0,226

Durch Darstellung der Zeit in der Abszisse und $\int \frac{dx}{R}$ in der Ordinate erhält man eine Gerade (Abb. 2) deren Steigung den Wert der Geschwindigkeitskonstante für die Esterifizierungsreaktion der Phenoxyazetatsäure mit Äthylalkohol $\vec{k}_2 = 6{,}58.10^{-2}$ l mol^{-1} h^{-1} darstellt.

b) *Esterifizierung von 2-Chlorphenoxyazetatsäure mit Äthylalkohol*

Die Esterifizierungsreaktion von 2-Chlorphenoxyazetatsäure mit Äthylalkohol wurde in Gegenwart von Schwefelsäuremonohydrat durchgeführt, mit folgenden initialen molaren Konzentrationen der Reaktionspartner:

$a = 1{,}3177$ mol l^{-1}, $b = 13{,}6882$ mol l^{-1}, $c = 1{,}5783$ mol l^{-1}.

Tabelle 3

Nr.	t h	x mol l^{-1}	$a-x$ mol l^{-1}	$b-x$ mol l^{-1}	$c+x$ mol l^{-1}	$A=\frac{(a-x)(b-x)}{x(c+x)}$	Ausbeute %
1	0,0	0,0	1,3177	13,6882	1,5783	11,43	0
2	0,25	0,6650	0,6527	13,0232	2,2433	5,70	50,4
3	0,50	0,8681	0,4496	12,8201	2,4464	2,71	65,8
4	1,0	1,0276	0,2901	12,6606	2,6059	1,40	77,9
5	2,0	1,1388	0,1789	12,5494	2,7171	0,73	86,4
6	3,0	1,1433	0,1644	12,5349	2,7316	0,66	86,8

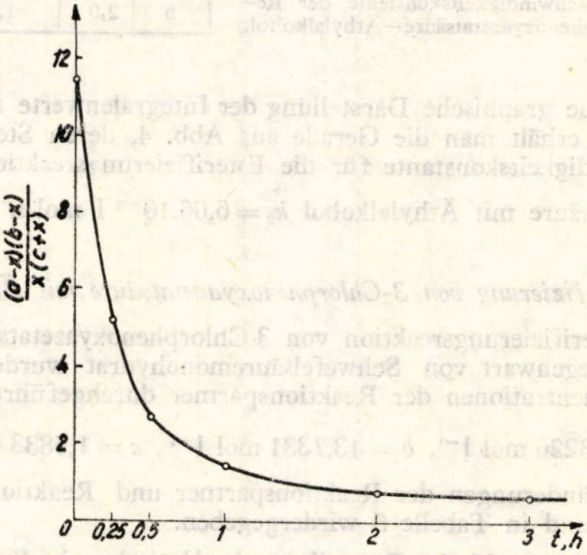


Abb. 3. — Zeit — Konzentrationsverhältnis fur die Reaktion 2-Chlorophenoxyazetatsäure—Äthylalkohol.

Die Veränderung der Konzentrationen der Reaktionspartner und der Reaktionsprodukte sind in Tabelle 3 gegeben.

Durch die graphische Darstellung der Veränderung des Konzentrationsverhältnisses A in Abhängigkeit der Zeit erhält man die Kurve aus Abb. 3. Mit Hilfe dieser Kurve bestimmen wir den Wert des Konstantenverhältnisses $\overleftarrow{k}_2 : \overrightarrow{k}_2$, dessen Wert 0,65 ist. Durch Einführung dieses Wertes, zusammen mit den Werten der Reaktionspartnerkonzentrationen in die Gleichung (3) und durch das Lösen der Gleichung, erhält man die Werte aus Tabelle 4.

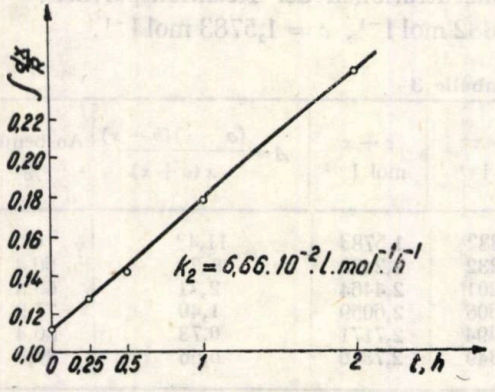


Abb. 4. — Geschwindigkeitskonstante der Reaktion 2-Chlorophenoxyazetatsäure—Äthylalkohol.

Tabelle 4

Nr.	t h	x mol l^{-1}	$\int \frac{dx}{R}$
1	0,0	0,0	0,112
2	0,25	0,6650	0,129
3	0,50	0,8681	0,144
4	1,0	1,0276	0,178
5	2,0	1,1388	0,245

Durch die graphische Darstellung der Integralenwerte in Abhängigkeit von der Zeit, erhält man die Gerade aus Abb. 4, deren Steigung den Wert der Geschwindigkeitskonstante für die Esterifizierungsreaktion von 2-Chlorphenoxyazetatsäure mit Äthylalkohol $\overrightarrow{k}_2 = 6,66.10^{-2}$ l mol h^{-1} ergibt.

c) *Esterifizierung von 3-Chlorphenoxyazetatsäure mit Äthylalkohol*

Die Esterifizierungsreaktion von 3-Chlorphenoxyazetatsäure mit Äthylalkohol, in Gegenwart von Schwefelsäuremonohydrat wurde mit folgenden molaren Konzentrationen der Reaktionspartner durchgeführt:

$$a = 1,3226 \text{ mol } l^{-1},\ b = 13,7331 \text{ mol } l^{-1},\ c = 1,5833 \text{ mol } l^{-1}.$$

Die Veränderungen der Reaktionspartner und Reaktionsproduktenkonzentrationen sind in Tabelle 5 wirdergegeben.

Durch die graphische Darstellung der Variation des Konzentrationsverhältnisses A in Abhängigkeit der Zeit erhält man die Kurve aus Abb. 5.

Tabelle 5

Nr.	t h	x mol l^{-1}	$a-x$ mol l^{-1}	$b-x$ mol l^{-1}	$c+x$ mol l^{-1}	$A=\frac{(a-x)(b-x)}{x(c+x)}$	Ausbeute %
1	0,0	0,0	1,3226	13,7331	1,5833	11,74	0
2	0,25	0,6993	0,6233	13,0338	2,2826	5,09	52,8
3	0,50	0,9251	0,3975	12,8080	2,5084	2,20	69,9
4	1,0	1,0969	0,2257	12,6363	2,6802	1,00	82,9
5	2,0	1,1557	0,1669	12,5774	2,7390	0,66	87,3
6	3,0	1,1586	0,1640	12,5745	2,7419	0,65	87,6

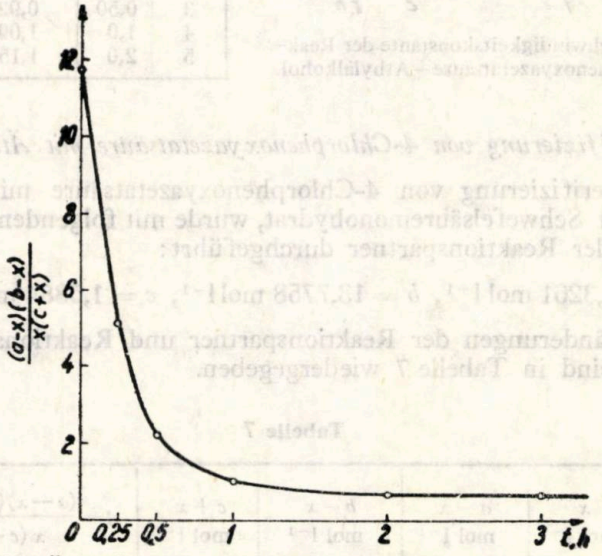


Abb. 5. — Zeit—Konzentrationsverhältnis für die Reaktion 3-Chlorphenoxyazetatsäure—Äthylalkohol.

Die Kurve aus Abb. 5 gestattet die Bestimmung des Wertes des Konstanterverhältnisses $\overleftarrow{k}_2 : \overrightarrow{k}_2$ gleich 0,64. Durch Einführung dieses Wertes zusammen mit den Werten der Reaktionspartnerkonzentrationen in die Gleichung (3) und durch Lösung der Gleichung erhält man die Werte aus Tabelle 6.

Durch die graphische Darstellung der Integralenwerte in Abhängigkeit von der Zeit erhält man die Kurve aus Abb. 6, deren Steigung den Wert der Geschwindigkeitskonstante $\overrightarrow{k}_2 = 6{,}67.10^{-2}\,l\ mol^{-1}\,h^{-1}$ für die Esterifizierungsreaktion von 3-Chlorphenoxyazetatsäure mit Äthylalkohol bestimmt.

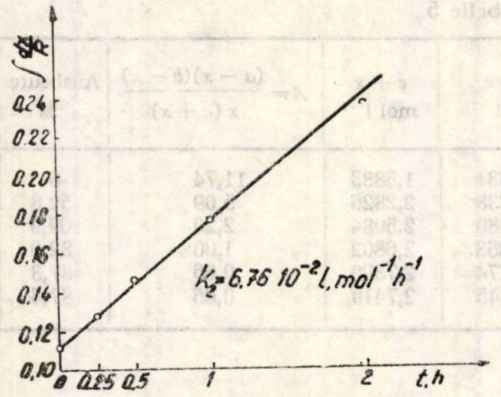


Abb. 6. — Geschwindigkeitskonstante der Reaktion 3-Chlorphenoxyazetatsäure—Äthylalkohol.

Tabelle 6

Nr.	t h	x mol l^{-1}	$\int \frac{dx}{R}$
1	0,0	0,0	0,112
2	0,25	0,6993	0,128
3	0,50	0,9251	0,146
4	1,0	1,0969	0,177
5	2,0	1,1557	0,245

d) *Esterifizierung von 4-Chlorphenoxyazetatsäure mit Äthylalkohol*

Die Esterifizierung von 4-Chlorphenoxyazetatsäure mit Äthylalkohol katalysiert mit Schwefelsäuremonohydrat, wurde mit folgenden molaren Konzentrationen der Reaktionspartner durchgeführt:

$$a = 1{,}3261 \text{ mol } l^{-1},\ b = 13{,}7758 \text{ mol } l^{-1},\ c = 1{,}5884 \text{ mol } l^{-1}.$$

Die Veränderungen der Reaktionspartner und Reaktionsproduktenkonzentrationen sind in Tabelle 7 wiedergegeben.

Tabelle 7

Nr.	t h	x mol l^{-1}	$a-x$ mol l^{-1}	$b-x$ mol l^{-1}	$c+x$ mol l^{-1}	$A=\frac{(a-x)(b-x)}{x(c+x)}$	Ausbeute %
1	0,0	0,0	1,3261	13,7758	1,5884	12,04	0
2	0,25	0,7142	0,6119	13,0616	2,3026	4,86	53,8
3	0,50	0,9213	0,4048	12,8546	2,5097	2,25	69,4
4	1,0	1,0177	0,3084	12,7583	2,6059	1,48	76,7
5	2,0	1,1345	0,1916	12,6413	2,7229	0,78	84,0
6	3,0	1,1545	0,1716	12,6213	2,7429	0,68	87,0

Durch die graphische Darstellung der Veränderung des Konzentrationenverhältnisses in Abhängigkeit von der Zeit erhält man die Kurve aus Abb. 7.

Mit Hilfe dieser Kurve bestimmt man den Wert des Konstantenverhältnisses $\overleftarrow{k}_2 : \overrightarrow{k}_2$ gleich 0,67. Diesen Wert zusammen mit den Werten der

Reaktionspartnerkonzentrationen setzt man in die Gleichung (3) ein und durch das Lösen der Gleichung erhält man die Werte aus Tabelle 8.

Die Steigung der Geraden aus Abb. 8, die durch die graphische Darstellung der Integralenwerte in Abhängigkeit von der Zeit erhalten wurde, bestimmt den Wert der Geschwindigkeitskonstante $\vec{k}_2 = 6{,}69.10^{-2}$ für die Esterifizierungsreaktion von 4-Chlorphenoxyazetatsäure mit Äthylalkohol.

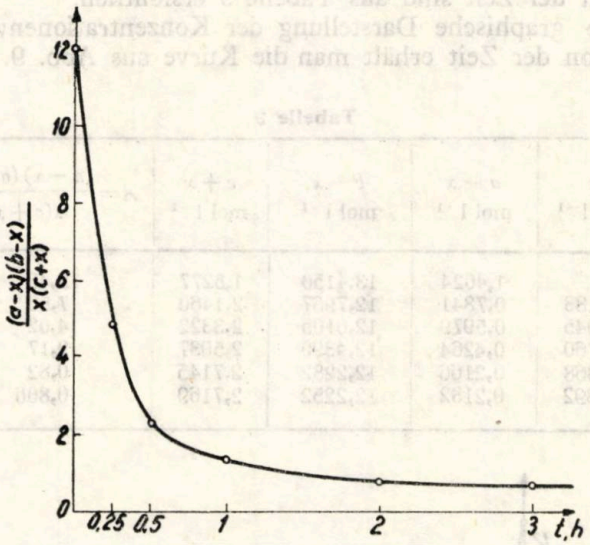


Abb. 7. — Zeit — Konzentrationsverhältnis für die Reaktion 4-Chlorphenoxyazetatsäure — Äthylalkohol.

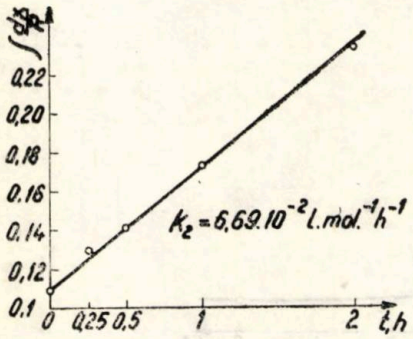


Abb. 8. — Geschwindigkeitskonstante der Reaktion 4 – Chlorphenoxyazetatsäure — Äthylalkohol.

Tabelle 8

Nr.	t h	x mol l^{-1}	$\int \frac{dx}{R}$
1	0,0	0,0	0,112
2	0,25	0,7142	0,129
3	0,50	0,9213	0,141
4	1,0	1,0177	0,174
5	2,0	1,1345	0,236

e) *Esterifizierung von 2,4-Dichlorphenoxyazetatsäure mit Äthylalkohol*

Die Reaktion wurde mit Äthylalkohol und Schwefelsäuremonohydrat als Katalysator, mit folgenden molaren Konzentrationen der Reaktionspartner durchgeführt:

$$a = 1{,}4024 \text{ mol } l^{-1},\ b = 13{,}4150 \text{ mol } l^{-1},\ c = 1{,}5277 \text{ mol } l^{-1}.$$

Die Veränderungen der Reaktionspartner und Reaktionsproduktenkonzentrationen mit der Zeit sind aus Tabelle 9 ersichtlich.

Durch die graphische Darstellung der Konzentrationenverhältnisse in Abhängigkeit von der Zeit erhält man die Kurve aus Abb. 9.

Tabelle 9

Nr.	t h	x mol l^{-1}	$a-x$ mol l^{-1}	$b-x$ mol l^{-1}	$c+x$ mol l^{-1}	$A=\frac{(a-x)(b-x)}{x(c+x)}$	Ausbeute %
1	0,0	0,0	1,4024	13,4150	1,5277	12,40	0
2	0,25	0,6183	0,7841	12,7967	2,1460	7,56	44,1
3	0,50	0,8045	0,5979	12,6105	2,3322	4,02	57,3
4	1,0	0,9760	0,4264	12,4390	2,5037	2,17	69,5
5	2,0	1,1868	0,2166	12,2282	2,7145	0,82	84,6
6	3,0	1,1892	0,2132	12,2252	2,7169	0,806	84,7

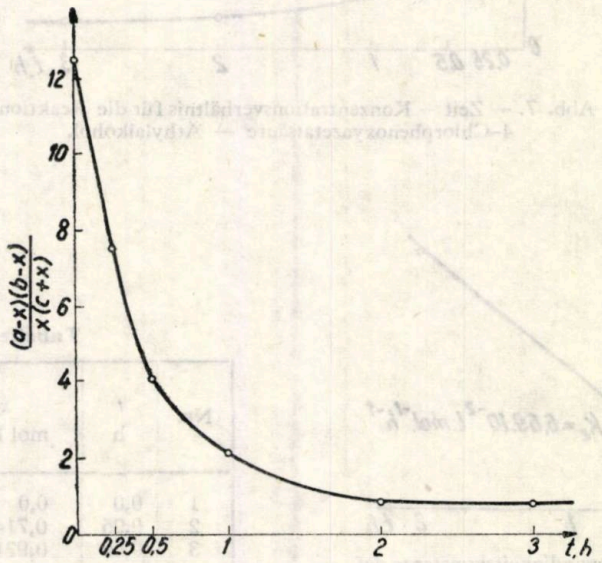


Abb. 9. — Zeit — Konzentrationsverhältnis für die Reaktion 2,4 Dichlorphenoxyazetatsäure — Äthylalkohol.

Aus der dargestellten Kurve bestimmt man den Grenzwert des Konstantenverhältnisses $\vec{k}_2 : \overleftarrow{k}_2$ gleich 0,8. Dieser Wert, eingeführt in die Gleichung (3) zusammen mit den Werten der Reaktionspartnerkonzentrationen und durch Lösung der Gleichung erhält man die Werte aus Tabelle 10.

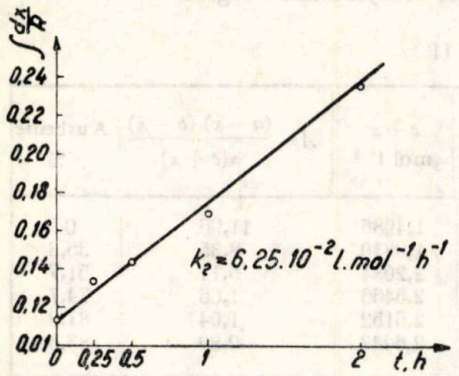


Abb. 10. — Geschwindigkeitskonstante der Reaktion 2,4 - Dichlorphenoxyazetatsäure — Äthylalkohol.

Tabelle 10

Nr.	t h	x mol l^{-1}	$\int \frac{dx}{R}$
1	0,0	0,0	0,112
2	0,25	0,6183	0,135
3	0,50	0,8045	0,142
4	1,0	0,9760	0,168
5	2,0	1,1868	0,236

Durch Darstellung der Zeit in der Abszisse und $\int \frac{dx}{R}$ in der Ordinate erhält man die Gerade aus Abb. 10, deren Steigung den Wert der Geschwindigkeitskonstante $\vec{k}_2 = 6,25.10^{-2}$ für die Esterifizierungsreaktion von 2,4-Dichlorphenoxyazetatsäure mit Äthylalkohol gibt.

f) *Esterifizierung von 2,4,5-Trichlorphenoxyazetatsäure mit Äthylalkohol*

Die Reaktion wurde mit Äthylakohol und Schwefelsäuremonohydrat als Katalysator, mit folgenden molaren Konzentrationen der Reaktionspartner durchgenführt:

$a = 1,3714$ mol l^{-1}, $b = 13,1060$ mol l^{-1}, $c = 1,4986$ mol l^{-1}.

Die Veränderung der Reaktionspartnerkonzentrationen mit der Zeit ist aus Tabelle 11 ersichtlich.

Die graphische Darstellung der Veränderung des Kozentrationsverhältnisses mit der Zeit ermöglicht der Aufzeichnung der Kurve aus Abb. 11 aus der man den Wert des Konstantenverhältnisses $\overleftarrow{k}_2 : \vec{k}_2$ gleich 0,88 erhält.

Diesen Wert zusammen mit den Werten der Reaktionspartnerkonzentrationen setzt man in die Gleichung (3) ein und erhält durch das Lösen der Gleichung die Werte aus Tabelle 12.

Stellt man die Werte aus Tabelle 12 in den Koordinaten Zeit und $\int \frac{dx}{R}$ dar so erhält man die Gerade aus Abb. 12, deren Steingung den Wert der Geschwindigkeitskonstante $\vec{k}_2 = 5{,}10.10^{-2}$ für die Esterifizierungsreaktion von 2,4,5-Trichlorphenoxyazetatsäure mit Äthylalkohol ergibt.

Tabelle 11

Nr.	t h	x mol l^{-1}	$a-x$ mol l^{-1}	$b-x$ mol l^{-1}	$c+x$ mol l^{-1}	$A=\frac{(a-x)(b-x)}{x(c+x)}$	Ausbeute %
1	0,0	0,0	1,3714	13,1060	1,4986	11,96	0
2	0,25	0,4844	0,8870	12,6216	1,9830	8,35	35,3
3	0,50	0,7098	0,6616	12,3962	2,2084	5,11	51,7
4	1,0	1,0480	0,3234	12,0580	2,5466	1,66	74,7
5	2,0	1,1166	0,2548	11,9894	2,6152	1,04	81,3
6	3,0	1,1456	0,2258	11,9604	2,6442	0,89	83,5

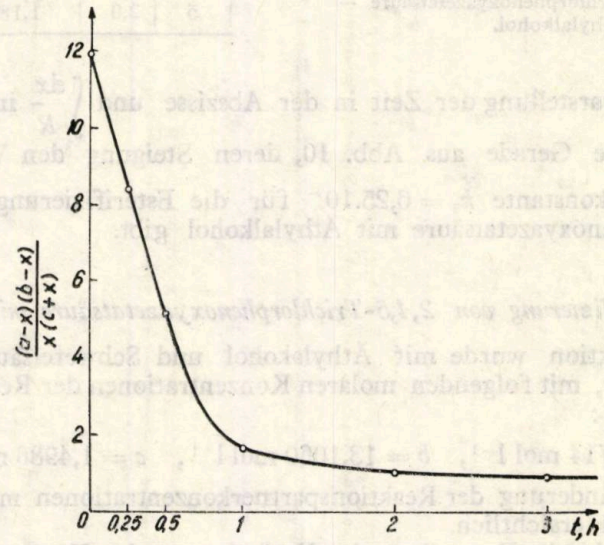


Abb. 11. — Zeit — Konzentrationsverhältnis für die Reaktion 2,4,5-Trichlorphenoxyazetatsäure–Äthylalkohol.

Vergleicht man die erhaltenen Ergebnisse der Esterifizierungreaktion der Phenoxy- und Chlorphenoxyazetatsäuren, so bermekt man dass die Werte der Geschwindigkeitskonstanten dieselben Grössenordung haben. Die Mo-

nochlorsäuren haben eine grössere Geschwindigkeitskonstante als die Phenoxyazetatsäure, was durch den induktiven und mesomeren Effekt des Chlors erklärt wird.

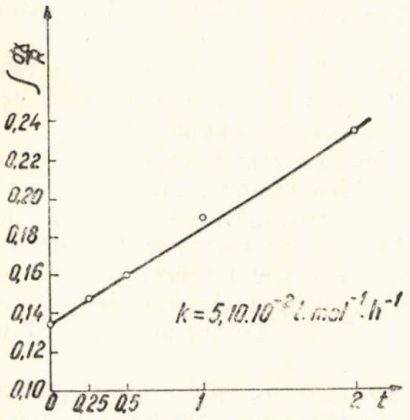


Abb. 12. — Geschwindigkeitskonstante der Reaktion 2,4,5-Trichlorphenoxyazetatsäure — Äthylalkohol.

Tabelle 12

Nr.	t h	x mol l^{-1}	$\int \frac{dx}{R}$
1	0,0	0,0	0,112
2	0,25	0,4844	0,147
3	0,50	0,7098	0,150
4	1,0	1,0480	0,190
5	2,0	1,1166	0,234

Der Wert der Geschwindigkeitskonstante der 3-Chlorphenoxyazetatsäure ist der grössten, da Chlor in Stellung *3* nur einen Induktiveffekt hat und somit eine grössere Wirkung auf die Karboxygruppe der Seitenkette ausübt durch die Verschiebung des Elektronenflusses dem Kern zu.

Bei den 2-Chlor- und 4-Chlorphenoxyazetatsäuren wirkt der mesomere Effekt $+M$, welcher durch die Schwächung des Effektes $-I$ eine Verminderung der Geschwindigkeitskonstantenwerte hervorruft.

Der Geschwindigkeitskonstantenwert der 2,4-*D* und 2,4,5-*T* Säure ist kleiner als jener der Phenoxyazetatsäuren, erklärt man durch sterische Hinderungen, obwohl die Säurestärke steigt. Bei der 2,4-*D* Säure ist dieser Einfluss kleiner und deshalb hat die Konstante einen annähernden Wert zu der Phenoxyazetatsäure.

Da die 2,4,5-*T* Säure drei Substituenten im aromatischen Ring hat, diese mehr beeinflussen die Seitenkette und deshalb fällt der Wert der Geschwindigkeitskonstante.

Vergleicht man die Werte der Esterausbeuten, bemerkt man folgendes:

In den ersten zwei Stunden erreicht die Esterausbeute 83...86% und in der folgenden Stunden steigt die Ausbeute um 1...2%. Die Reaktion strebt zum dynamischen Gleichgewicht. Infolgedessen kann man behaupten dass man die Reaktion nach zwei Stunden unterbrechen kann, eine Verlängerung der Reaktionszeit ist nicht gerechtfertigt.

4. Schlussfolgerungen

Aus den ausgeführten Untersuchungen zur Bestimmung der Geschwindigkeitskonstantenwerte der Esterifizierungsreaktion der Phenoxyazetatsäure und Chlorphenoxyazetatsäuren mit Äthylalkohol, kann man folgende Schlusse ziehen:

1. Die Geschwindigkeitskonstantenwerte der Esterifizierung von Phenoxyazetatsäure und der Chlorphenoxyazetatsäuren mit Äthylalkohol haben dieselbe Grössenordnung zwischen $5{,}10.10^{-2}...6{,}76.10^{-2}$ l mol^{-1} h^{-1}.

2. Die Geschwindigkeitskonstante der Esterifizierungsreaktion der Phenoxyazetatsäure ist kleiner als die Geschwindigkeitskonstanten der Monochlorphenoxyazetatsäuren, grösser als die Geschwindigkeitskonstanten der Monochlorphenoxyazetatsäuren und grösser als die Geschwindigkeitskonstanten der 2,4-Dichlor- und 2,4,5-Trichlorphenoxyazetatsäuren.

3. Die Esterausbeuten schwancken bei der Esterifizierung der Chlorphenoxyazetatsäuren mit Äthylalkohol von 95,57 % im molaren Verhältnis 1:10 zwischen 83 und 86 %.

4. Zur Erhaltung eine günstigen Esterausbeute für das angegebene molare Verhältnis, benötigt man eine Reaktionsdauer von zwei Stunden.

5. Die erhaltenen Geschwindigkeitskonstantenwerte der Reaktionen können bei den Projektionsberechnungen der Esterifizierungsanlagen der halogenierten Aryloxyalkylkarboxysäuren verwendet werden.

Technische Hochschule, Jassy,
Lehrstuhl für organische Industrie

LITERATURVERZEICHNIS

1. Grafts A., Science, 1948, **108**, p. 85.
2. Королев Л. С., Агробиология, 1952, **4**, стр. 170.
3. Hayes B., J. Am. Chem. Soc., 1943, **65**, p. 1555.
4. Linder P., Brown J., Mitschell J., Bot. Gaz., 1949, **110**, p. 628.
5. Мельников Н. Н., Владимирова И. Л., ЖОХ, 1959, **29**, стр. 3587.
6. Botez Gh., Oniscu C., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1964, **X (XIII)**, *3—4*, p. 139.
7. Sauders, Prescott, Ind. Eng. Chem., 1956, **51**, p. 974.
8. Levenspiel C., *Tehnica reacţiei in ingineria chimică*. Ed. tehn., Buc., 1967, p. 110, (trad. din l. engleză).
9. Raul M., Cîrloganu C., *Reactoare în industria chimică*. Ed. tehn., Buc., 1963, p. 121.
10. Eckstein et al., Przem. Chem., 1957, **13**, p. 390.
11. Faith, Keves, Clark, *Industrial Chemicals*. New York, 1957, p. 326.
12. Jungers J. C., *Cinétique chimique appliquée*. Soc. des techn., Paris, 1952, p. 131.

CINETICA REACŢIEI DE ESTERIFICARE A ACIZILOR ARILOXIALCHILCARBOXILICI HALOGENAŢI

(Rezumat)

Studiul cinetic al reacţiei de esterificare a acizilor ariloxialchilcarboxilici halogenaţi s-a efectuat cu alcool etilic de concentraţie 95,57 % folosind un raport molar alcool-acid de 10 : 1. Reacţia de esterificare a fost catalizată de acidul sulfuric monohidrat luat în pro-

porţie de 0,5 % faţă de alcool, iar variaţia în timp a concentraţiei reactanţilor a fost determinată prin titrare cu soluţie $n/10$ NaOH. În urma studiului efectuat la temperatura de 78°C s-au putut stabili următoarele concluzii :

a) Valoarea constantelor de viteză este cuprinsă între $5{,}10.10^{-3}...6{,}76.10^{-2}$ l mol^{-1} h^{-1}

b) Randamentele în ester sînt cuprinse între 83...86 %.

c) Timpul de reacţie necesar obţinerii unui randament optim în ester este de 2 ore.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Curba timp — raportul concentraţiilor pentru reacţia acid fenoxiacetic — alcool etilic.

Fig. 2. — Constanta de viteză a reacţiei acid fenoxiacetic — alcool etilic.

Fig. 3. — Curba timp — raportul concentraţiilor pentru reacţia acid 2-clorfenoxiacetic — alcool etilic.

Fig. 4. — Constanta de viteză a reacţiei acid 2-clorfenoxiacetic — alcool etilic.

Fig. 5. — Curba timp — raportul concentraţiilor pentru reacţia acid 3-clorfenoxiacetic — alcool etilic.

Fig. 6. — Constanta de viteză a reacţiei acid 3-clorfenoxiacetic — alcool etilic.

Fig. 7. — Curba timp — raportul concentraţiilor pentru reacţia acid 4-clorfenoxiacetic — alcool etilic.

Fig. 8. — Constanta de viteză a reacţiei acid 4-clorfenoxiacetic — alcool etilic.

Fig. 9. — Curba timp — raportul concentraţiilor pentru reacţia acid 2,4-diclorfenoxiacetic — alcool etilic.

Fig. 10. — Constanta de viteză a reacţiei acid 2,4-diclorfenoxiacetic — alcool etilic.

Fig. 11. — Curba timp — raportul concentraţiilor pentru reacţia acid 2,4-triclorfenoxiacetic — alcool etilic.

Fig. 12. — Constanta de viteză a reacţiei acid 2,4,5-triclorfenoxiacetic — alcool etilic.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

D. K. 547.678.2; 66.093.5; 547.562.1

DIE KONDENSATION VON 5, 6-DINITROACENAPHTENCHINON MIT PHENOLEN

VON

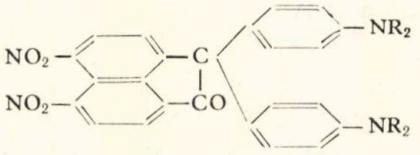
ILIE MATEI
Korrespondierendes Mitglied der Akademie
der Sozialistischen Republik Rumänien

MARIANA PĂSTRĂVANU und SILVIA VASILIU

Mitteilung an der wissenschaftlichen Tagung der Technischen Hochschule, Jassy, 28–30. September 1967

1. Vorwort

Frühere Untersuchungen [1] haben gezeigt, dass bei der Kondensation von 5,6-Dinitroacenaphtenchinon mit Dimethyl- und Diäthylanilin Dinitroacenaphtenone der Form (I) erhalten werden:



$(R = CH_3, C_2H_5)$

(I)

In der vorliegenden Arbeit haben wir die Erweiterung dieser Reaktion unternommen, wobei die Kondensation des Dinitroacenaphtenchinons mit mono- und biatomaren Phenolen vorgenommen wird.

2. Theoretische Betrachtungen

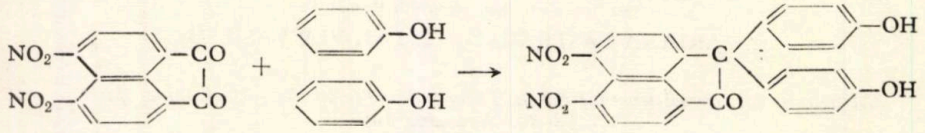
Die Kondensation von Acenaphtenchinon mit mono- und biatomaren Phenolen war Gegenstand früherer Arbeiten von Prof. I. Matei und Mitrabeiter [2]...[4].

Im Vergleiche mit den Synthesen der Acenaphtenone, stellen die Arbeitsbedingungen bei den Reaktionen des Dinitroacenaphtenchinons mit Phenolen den desaktivierenden Effekt der Nitrogruppen in den Vordergrund. Die Reaktionen verlaufen viel schwerer, wobei viel energischere Arbeitsbedingungen nötig sind und kleinere Ausbeuten erhalten werden.

5,6-Dinitroacenaphtenchinon wurde durch Nitrierung von Acenaphtenchinon gemäss den Literaturangaben [5] dargestellt.

5,6-Dinitroacenaphtenchinon wird mit überschüssigem *Phenol* in Gegenwart von Schwefelsäure kondensiert. Während bei der Synthese von Diphenolacenaphtenon die Kondensation auf Rechnung der Reaktionstemperatur allein vor sich geht [2], ist die Reaktion des 5,6-Dinitroacenaphtenchinons mit Phenol nur leicht exotherm bei Zusatz der Schwefelsäure, was unbedingt eine Erwärmung auf siedendem Wasserbad erfordet.

Man erhält mit guter Ausbeute Diphenol-5,6-Dinitroacenaphtenon (II), gemäss der Reaktion:

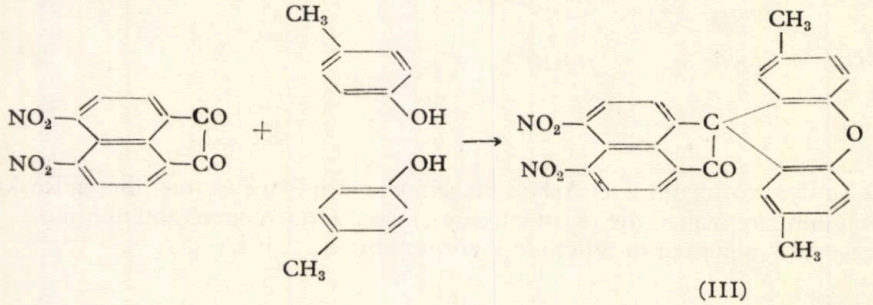


(II)

Bei der Kondensation mit *Kresolen* konnte man nur die Struktur des Reaktionsproduktes mit *p*-Kresol feststellen; die Struktur der mit *o*- und *m*-Kresol erhaltenen Produkte bleibt späteren Arbeiten vorbehalten.

Die Kondensation von 5,6-Dinitroacenaphtenchinon mit *p*-Kresol verläuft in Schwefelsäure-Medium, unter Erwärmen auf 160°C in einem Paraffinölbad.

Es findet folgende Reaktion statt:



(III)

Die Struktur von *Anhidro-di-p-Kresol-5,6-Dinitroacenpahtenon* (III) wurde durch chemische Analyse und spektralanalytisch ermitellt. Die IR-Spektren weisen eine Absorptionsbande bei 1020 cm^{-1} auf, welche für die ätherische Funktion charakteristisch ist, womit der Xanthenringschluss bestätigt wird (Abb. 1).

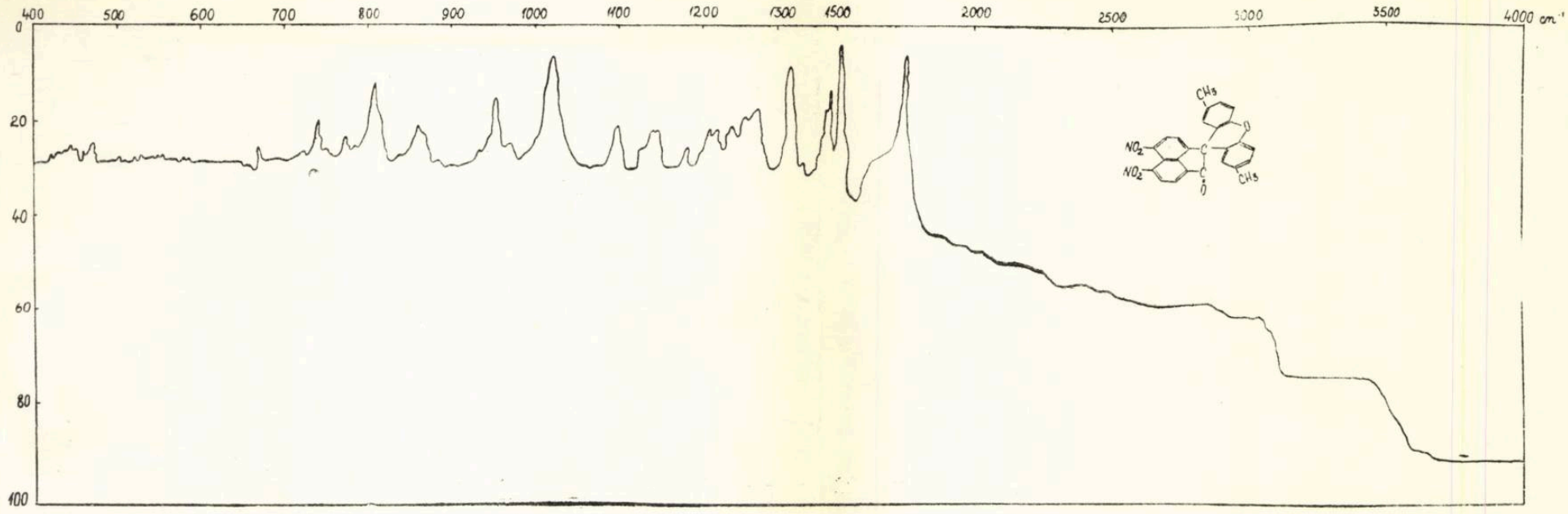


Abb. 1. — IR-Spektrum von Anhidro-di-*p*-Kresol-5,6-Dinitroacenaphtenon.

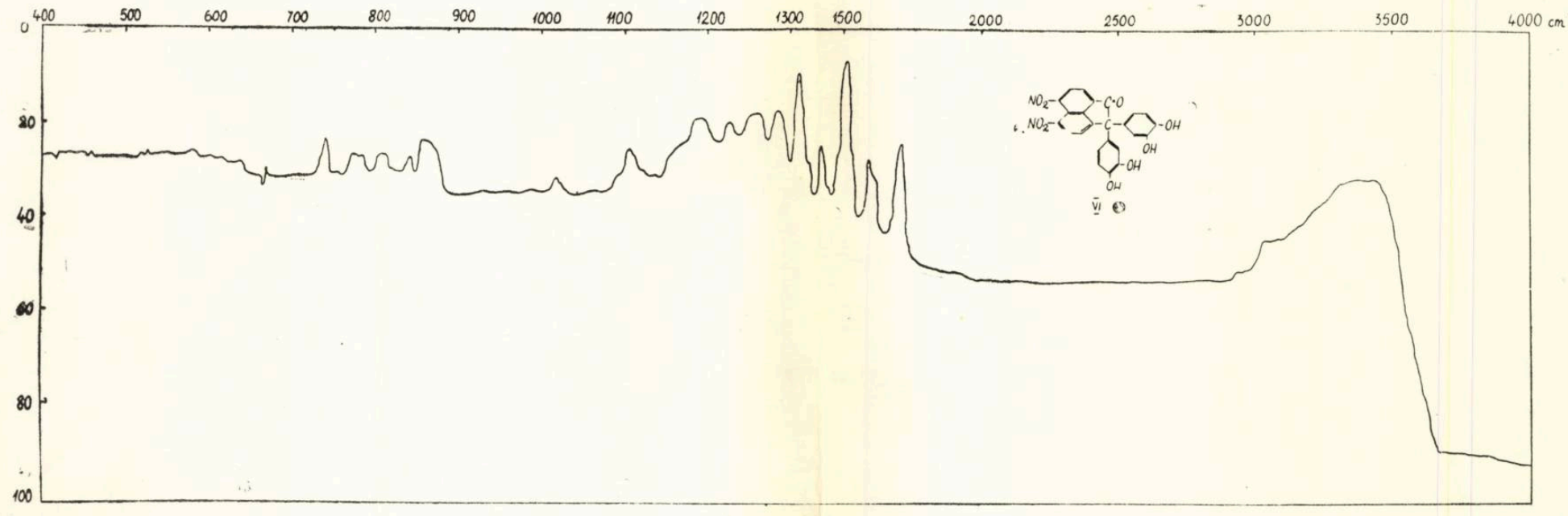


Abb. 2. — IR-Spektrum von Di-pyrokatechin-5,6-Dinitroacenaphtenon.

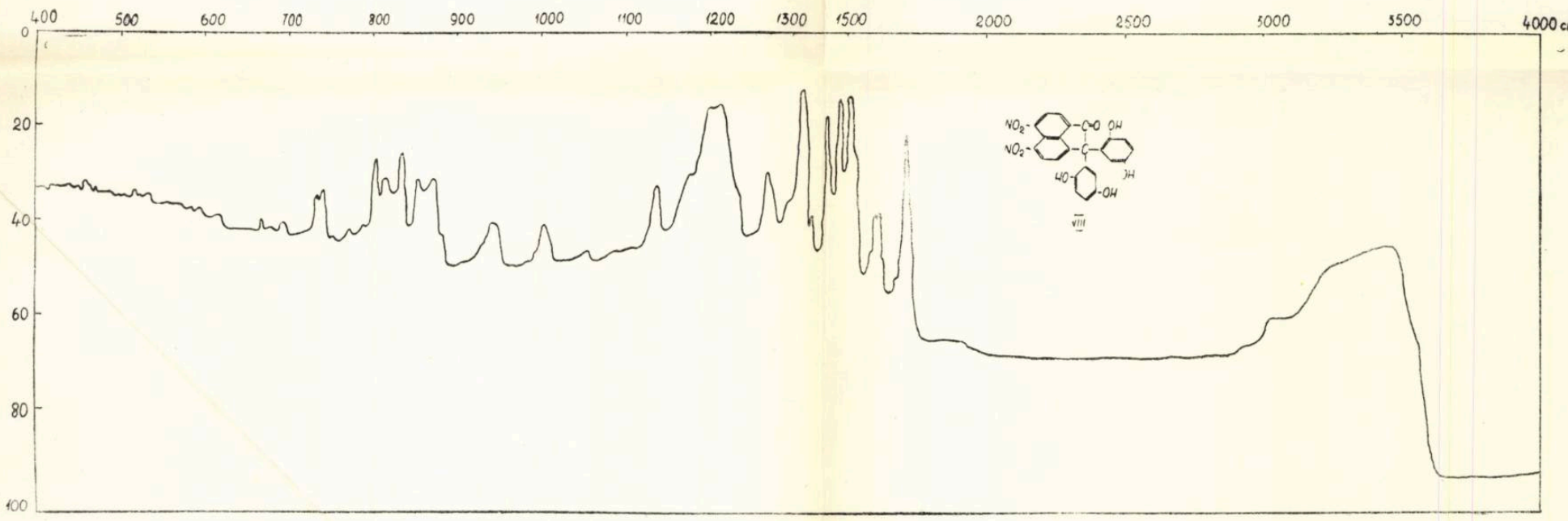


Abb. 3. — IR-Spektrum von Di-hydrochinon-5,6-Dinitroacenaphtenon.

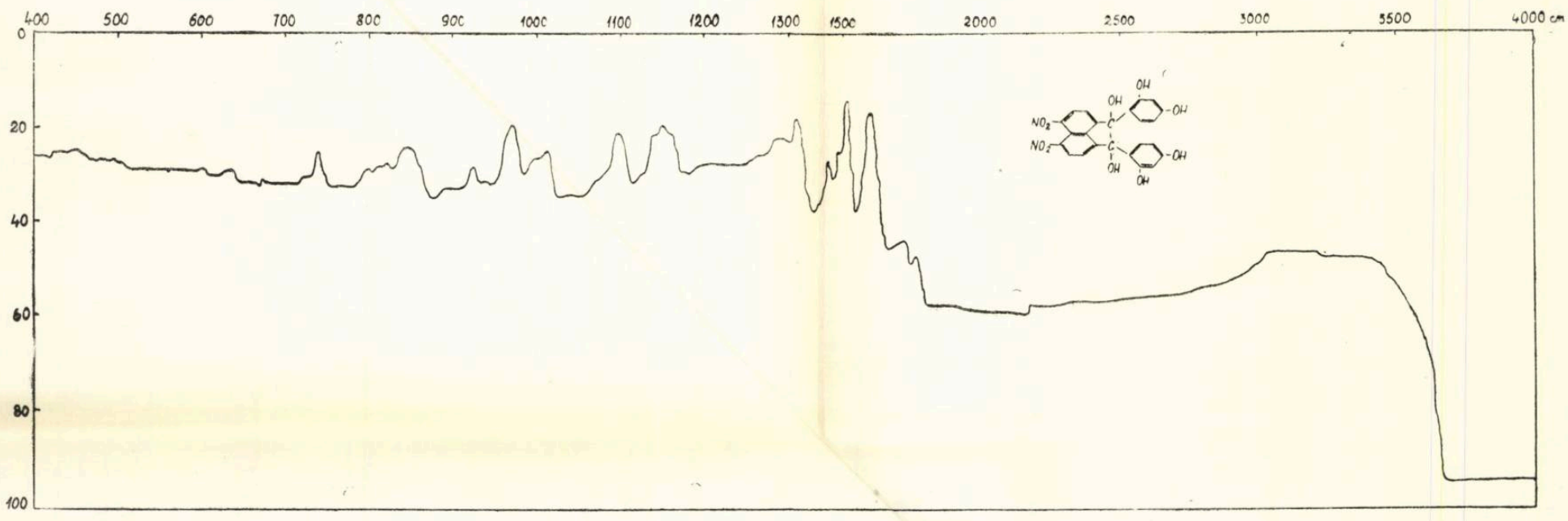
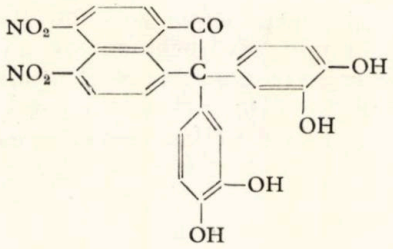


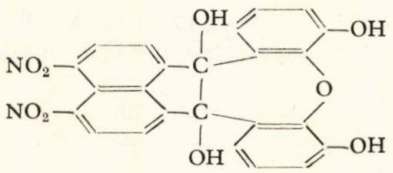
Abb. 4. — IR-Spektrum von Anhydro-Di-Resorzin-5,6-Dinitroacenaphtendiol-1,2.

Die Kondensation von Dinitroacenaphtenchinon mit *Diphenolen* ergibt die besten Ergebnisse bei Zusatz von Schwefelsäure in die essigsäure Lösung der Reaktionsteilnehmer. Die Kondensation von 5,6-Dinitroacenaphtenchinon mit Pyrokatechin führt zu *Di-pyrokatechin-5,6-Dinitroacenaphtenon* (IV), ein dem mit Phenol erhaltenem Produkt analoges Derivat:



(IV)

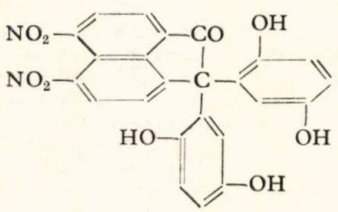
Die Struktur des Reaktionsproduktes wurde quantitativ, analytisch und mit das Hilfe des Absorptionsspektrums im Infrarot ermittelt. Auf Grund der quantitativen Analyse könnte man dem Produkt auch die Formel (V) zuschreiben, eine pinakonische Form, welche man bei der Kondensation von Acenapthtenchinon mit *p*-Kresol, β-Naphtol und *m*-Xilenol erhält:



(V)

Im IR-Sepktrum (Abb. 2) beobachtet man aber ein Absorptionsmaximum bei 1720 cm^{-1}, welches der Carbonylgruppe zukommt, sowie die Abwesenhait der für die Äthergruppe charakteristische Bande; dieser Umstand liess uns annehmen dass die tatsächliche Struktur des Reaktionsproduktes durch Formel (IV) ausgedrückt wird.

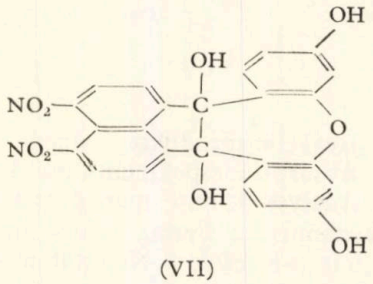
Hydrochinon führt unter denselben Reaktionsbedingungen zu Di-Hydrochinon-5,6-Dinitroacenaphtenon (VI), ein dem mit Pyrokatechin erhaltem Produkt analoges Derivat:



(VI)

Auch in diesem Falle zeigt das IR-Spektrum, dass eine Kondensationtsreaktion stattgefunden hat und nicht eine Additionsreaktion mit der möglichen Bildung eines Produktes von Typus (V), da im Spektrum bei 1720 cm^{-1} das der Karbonylgruppe charakteristische Absorptionsmaximum erscheint.

Wegen der besonderen Reaktionsfähigkeit des *Resorzins* im Vergleiche mit jener von Pyrokatechin und Hydrochinon wurde bei dieser Reaktion eine kleinere Schwefelsäuremenge angewendet. Die Reaktion mit Resorzin verläuft anders als jene mit Pyrokatechin und Hydrochinon. Das erhaltene Produkt ist *Anhydro-Di-Resorzin-5,6-Dinitroacenaphtendiol-1,2* (VII):



(VII)

Es hat eine Additionsreaktion stattgefunden; die Struktur des erhaltenen Produktes wurde durch das Fehlen der Carbonylbande im IR-Spektrum bestätigt (Abb.4).

Gemäss vorhergegangener Untersuchungen [3], [4] musste sich die Verbindung (VII) von pinakonischer Form dennoch in die pinakoline (ketonische) Form verwandeln.

Diese Reaktionsverschiedenheit von Phenolen mit Dinitroacenaphtenchinon gegenüber der von Acenaphtenchinon selbst wird in späteren Arbeiten geklärt werden.

Die Spektralbestimmungen wurden in der Kaliumbromidpastille an einem „Perkin-Elmer 337" Spektrophotometer ausgeführt.

3. Experimentelle Ergebnisse

a) *Kondensation von 5,6-Dinitroacenaphtenchinon mit Phenol* (II)

3 g Dinitroacenaphtenchinon wird in der Wärme in 6 g Phenol gelöst; nach Abkühlung fügt man tropfenweise unter ständigem Rühren 1,2 ml Schwefeläsure zu. Das Reaktionsgemisch wird auf dem Wasserbade ungefähr 3/4 Stunden lang erhitzt; man lässt abkühlen und giesst dann in kaltes Wasser. Es scheidet sich ein Öl ab, welches durch wiederholtes Auswaschen mit warmen Wasser vom Phenolüberschuss befreit wird. Zur Entfernung von nichtreaktioniertem Dinitroacenaphtenchinon wurde in verdünnter Natronlauge gelöst und mit verdünnter Schwefelsäure ausgefällt. Ausbeute 3,6 g Rohprodukt.

Zur Reinigung löst man das Produkt in der Wärme in Äthylalkohol und fügt nach Abkühlung Wasser zu bis die gebildete Emulsion beim Schütteln nicht mehr verschwindet. Nach dem Absitzen scheidet sich ein gelber Stoff von kristallinem Aussehen ab, der in Aceton, Essigsäure löslich, in Benzol, Toluol, Chloroform, Tetrachlorkohlenstoff unlöslich ist. Schmelzpunkt 155°C.

Die Analyse wurde nach dem Entfernen des Kristallwassers aus dem Produkt vorgenommen.

Analysen

$C_{24}H_{14}O_7N_2$; M=442	C%	H%	N%
Berechnet	65,38	3,16	6,33
Gefunden	64,92	3,54	5,96
	65,05	3,36	6,20

b) *Kondensation von 5,6-Dinitroacenaphtenchinon mit p-Kresol* (III)

3 g Dinitroacenaphtenchinon und 3,5 g *p*-Kresol werden im Paraffinölbad auf 80°C erhitzt. Dann fügt man in kleinen Portionen unter energischem Rühren 3 ml konz. Schwefelsäure zu. Man erhöht die Temperatur auf 150°C und hält sie auf dieser Höhe ungefähr 3/4 Stunden. In dieser Zeit wird das Reaktionsgemisch sehr zähflüssig und färbt sich braun. Nach dem Abkühlen kocht man mit Wasser, um den Überschuss von *p*-Kresol zu entfernen, bis die Reaktionsmasse hart geworden ist. Ausbeute: 2,3 g Rohprodukt.

Das Produkt löst sich in Aceton, Essigsäure, Äthylacetat und ist in Äther, Alkohol unlöslich. Es schmilzt über 300°C.

Für die Analyse reinigt man durch Umkristallisieren aus Toluol und erhält ein gelb gefärbtes Produkt.

Analysen

$C_{26}H_{16}O_6N_2$; M=452	C%	H%	N%
Berechnet	69,02	3,54	6,19
Gefunden	69,08	3,86	5,82
	69,68	4,02	6,08

c) *Kondesation von 5,6-Dinitroacenaphtenchinon mit Pyrokatechin* (IV)

Einer Mischung von 3 g Dinitroacenaphtenchinon und 2,8 g Pyrokatechin in 40 ml Eisessig fügt man unter Umrühren 5 ml konz. Schwefelsäure zu. Man erhitzt auf dem Paraffinölbad bei 120°...125°C $1^1/_2$ Stunden. Nach dem Abkühlen filtriert man und fällt mit Wasser das Reaktionsprodukt aus.

Es ist in Methylalkohol, Essigsäure, Aceton löslich und in Chloroform, Tetrachlorkohlenstoff, Benzol, Toluol unlöslich.

Zur Analyse reinigt man das Produkt durch Lösen in der Wärme in Äthylalkohol, Filtrieren, Wasserzusatz bis zur Trübung und Erwärmen bis sich die Lösung vollkommen klärt. Beim Abkühlen kristallisiert gelb gefärbtes Acenaphtenon aus. Schmelzpunkt 282°C. Die Analyse wurde nach dem Entfernen des Kristallwassers durchgeführt.

Analysen

$C_{24}H_{14}O_9N_2$; M=474	C%	H%	N%
Berechnet	60,75	2,95	5,90
Gefunden	60,32	3,59	6,04
	60,47	3,30	6,09
	61,21	3,48	6,18

d) *Kondensation von 5,6-Dinitroacenaphtenchinon mit Hydrochinon* (VI)

Zu einem Gemisch von 3 g Dinitroacenaphtenchinon und 2,8 g Hydrochinon in 40 ml Eisessig fügt man unter Umrühren 5 ml konz. Schwefelsaure. Man erhitzt $^1/_2$ Stunden auf einem Paraffinölbad bei 120°...125°C, wobei die Flüssigkeit sich rotbraun färbt. Man kühlt, filtriert und fällt aus dem Filtrat das Dinitroacenaphtenon mit Wasser ab. Es wurden 4,5 g Rohprodukt erhalten.

Für die Analyse wurde durch Auskristallisieren aus Äthylalkohol gereinigt. Das Produkt von braun-roter Farbe ist in Essigsäure, Pyridin löslich und in Chloroform, Tetrachlorkohlenstoff, Benzol, Toluol unlöslich. Es schmilzt nicht bis 300°C.

Analyse

$C_{24}H_{14}O_9N_2$; $M=474$	C%	H%	N%
Berechnet	60,7	2,95	5,90
Gefunden	60,9	3,34	6,35
	60,9	3,48	6,22

e) *Kondensation von 5,6-Dinitroacenaphtenchinon mit Resorzin* (VII)

Man vermengt 3 g Dinitroacenaphtenchinon mit Resorzin und 55 ml Eisessig und fügt unter Umrühren 3 ml konz. Schwefelsäure zu. Man erhitzt auf dem Paraffinölbad $1^1/_2$ Stunden bei 120°...125°C. Man kühlt ab, filtriert und fällt aus der essigsauren Lösung mit Wasser das Reaktionsprodukt. Man erhielt 3,5 g Rohprodukt.

Die Reinigung des Produktes wird durch wiederholtes Lösen in verdünnter Natronlauge und Fällen mit Schwefelsäure, gefolgt von Waschen mit vielen Wasser und Trockung vorgenommen. Das amorphe Produkt ist braun gefärbt; es ist in Äthylalkohol, Aceton, Essigsäure, Pyridin, Äthylacetat löslich, ohne aber zu kristallisieren. Es schmilzt nicht bis 350°C.

Analysen

$C_{24}H_{14}O_9N_2$; $M=474$	C%	H%	N%
Berechnet	60,75	2,95	5,90
Gefunden	60,32	3,10	6,12
	60,49	3,17	6,23

4 Schlussfolgerungen

In der vorliegenden Arbeit wurden Kondensationen von Dinitroacenaphtenchinon mit mono- und biatomaren Phenolen untersucht.

Man stellt fest dass im Falle von *p*-Kresol die Umsetzung zu einem Produkt vom Xanthentypus durch Anhydrisierung der OH-Gruppen in Orthostellung führt.

Verschieden verhält sich aber bei der Reaktion Dinitroacenaphtenchinon mit Resorzin, die zu einem Stoff von pinakonischem Charakter führt; mit Hydrochinon erhält man aber ein Kondensationsprodukt ohne dass eine Anhydrisierung der phenolischen OH-Gruppen in der Orthostellung stattfindet.

Die Struktur der Produkte wurde festgestellt indem die bei der chemischen Analyse und die aus den IR-Spektren erhaltenen Angaben zu Grunde gelegt wurden.

Technische Hochschule, Jassy,
Lehrstuhl für organische Chemie

LITERATURVERZEICHNIS

2. Matei I., Vasiliu S., Păstrăvanu M., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1966, **XII (XVI)**, *3—4*, pp. 187.
2. Matei I., Ber. dtsch. chem. Ges., 1929, **62**, S. 2095.
3. Matei I., Bogdan El., Ber. dtsch. chem. Ges., 1934, **67**, S. 1834.
4. — Ber. dtsch. chem. Ges., 1938, **71**, S. 2292.
5. Mayer F., Kaufmann W., Ber. dtsch. chem. Ges., 1920, **53**, S. 297.

CONDENSAREA 5,6-DINITROACENAFTENCHINONEI CU FENOLI

(Rezumat)

Se studiază condensări de dinitroacenaftenchinonă cu fenoli mono- şi biatomici.

Se constată că în cazul *p*-crezolului reacţia conduce la un produs de tip xantenic prin anhidrizarea grupelor OH din poziţia *orto*.

Diferit se comportă însă în reacţie dinitroacenaftenchinona cu rezorcina care conduce la un produs de tip pinaconic; cu hidrochinona conduce la un produs de condensare fără a avea loc totuşi o anhidrizare a grupelor fenolice —OH din poziţia *orto*.

Structura produselor a fost stabilită luînd ca bază datele obţinute la analiza chimică şi spectrele în infraroşu (IR).

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Spectrul IR al anhidro-di-*p*-crezol-5,6-dinitroacenaftenonei.
Fig. 2. — Spectrul IR al di-pirocatehin-5,6-dinitroacenaftenonei.
Fig. 3. — Spectrul IR al di-hidrochinon-5,6-dinitroacenaftenonei.
Fig. 4. — Spectrul IR al anhidro-di-rezorcin-5,6-dinitroacenaftendiolului-1,2.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1963

УДК 665.521.23

ПОВЫШЕНИЕ АНТИДЕТОНАЦИОННЫХ СВОЙСТВ БЕНЗИНОВ С ПОМОЩЬЮ СИНТЕТИЧЕСКОГО ЦЕОЛИТА

Х. И. АРЕШИДЗЕ и Г. О. ЧИВАДЗЕ

1. *Введение*

Известно, что алканы нормального строения обладают низкими октановыми числами, поэтому их присутствие в бензинах снижает октановую характеристику последних. Извлечение нормальных алканов из бензинов позволяет повысить их октановые числа. *Н*-алканы, выделенные из бензинов, могут быть изомеризованы и вновь добавлены к бензинам с целью их облагораживания или же подвергнуты пиролизу с целью получения олефиновых мономеров. Выделение *н*-алканов из бензина имеет и аналитическое значение, которое дает возможность уточнить из общего количества алканов алканы нормального и изостроения.

Впервые синтетический цеолит CaA для определения *н*-алканов, входящих в состав бензинов, был применен Шварцем [1]. Браун и другие [2] использовали тот же цеолит для выделения *н*-алканов из бензинов с целью повышения их октанового числа.

Я. В. Мирский и М. Г. Митрофанов [3] изучили разделяющую способность синтетического цеолита CaA на смесях *н*-гептана с толуолом и метилциклогексаном. Разделение осуществлялось как в жидкой, так и в паровой фазах.

Л. Н. Квитковский и Е. В. Грушецкая [4] определили *н*-алканы в искусственных смесях углеводородов и в нефтяных фракциях. Показано, что расхождение параллельных опытов в случае искусственных смесей не превышает 0,5%, а для нефтяных фракций оно колеблется от 0,87 до 4,76%.

М. Г. Митрофанов, Я. В. Мирский, А. З. Дорогочинский с сотрудниками [5] выделили *н*-алканы из бензинов грозненской, озексуатской, ромашкинской нефтей, а также из дистиллята бензина „галоша" при помощи синтетического цеолита CaA. В результате удаления *н*-алканов октановое число их повысилось на 11,2...18,1 пунктов.

И. Н. Самсонова и С. П. Жданов [6] с сотрудниками использовали цеолиты CaA и пористое стекло для количественного определения содержания *н*-алканов в искусственных смесях и бензиновых дистиллятах. В работе использовался проточный и весовой методы. В результате проведенных исследований показано, что пористое стекле с успехом можно использовать для количественного определения *н*-алканов в деароматизированных бензинах.

Бензины отличаются количественным содержанием *н*-алканов и поэтому при удалении их эффект улучшения топливных свойств бензинов будет разный. Поэтому с целью повышения антидетонационных свойств бензинов из каждого образца *н*-алканы должны быть удалены.

Определение содержания в бензиновых фракциях парафиновых углеводородов нормального и изостроения и их выделение помимо теоретического интереса имеет и практическое значение.

В связи с этим в настоящей работе излагаются результаты исследования по применению синтетического цеолита CaA для выделения *н*-алканов из бензиновых фракций мирзаанской и бакинской нефти. Нами подобраны оптимальные условия адсорбции и десорбции *н*-алканов и изучено влияние различных факторов на полноту их выделения (объемная скорость, температура и различные десорбаты).

Перед началом адсорбции синтетический цеолит CaA сушили до полного удавления влаги при 400°С. После сушки определили адсорбционную емкость, которая в наших опытах оказалась равной 13 г на 100 г цеолита CaA по *н*-гептану.

Применяемый нами для опытов цеолит CaA (горьковской опытной базы ВНИИНП) избирательно адсорбирует нормальный алкан из искусственной смеси с разветвленным алканом. В качестве эталонной смеси при определении разделяющей способности сорбента применялась смесь, состоящая из *н*-гептана и 2,2,4-триметилпентана, взятых в различных соотношениях.

Изучение разделяющей способности цеолита CaA на эталонной смеси показало, что он нацело отделяет *н*-гептан от 2,2,4-триметилпентана. Исследование адсорбционной емкости и разделяющей способности показало, что этот цеолит может быть с успехом применен для выделения *н*-алканов из бензина.

Адсорбцию проводили при температуре превышающей на 20°С температуру кипения фракции для полного перевода ее в парообразное состояние. Как показано в работе [7], адсорбция в парообразном состоянии адсорбата протекает лучше.

Во время адсорбции применяли остаточное давление от 30 до 400 мм рт. ст., которое, как известно из французского патента [8], препятствует оставаться на поверхности цеолита неадсорбированным углеводородам, что способствует выделению *н*-алканов в чистом виде.

Адсорбцию *н*-алканов из бензина мирзаанской нефти проводили при давлении 30 мм рт. ст. В последующей работе [9] показано, что процесс адсорбции *н*-алканов может хорошо протекать и при давлении 400 мм.

Нами были испытаны различные агенты для десорбции адсорбированных *н*-алканов — азот, водяной пар и крекинг газ нефтеперерабатывающего завода.

Десорбцию с применением азота и крекинг газа проводили при температуре 350°С и давлении 5 мм рт. ст. Температура десорбции 350°С не влияет на кристаллическую структуру цеолита, как это показано в работе [10].

Многими исследователями было показано, что оптимальным пределом температуры для полной десорбции *н*-алканов $C_5 \ldots C_8$ является 350°...400°С. В работе [5] показано, что при 250°С десорбируется 50%, а при 350°С, 100% адсорбированных *н*-алканов $C_5 \ldots C_8$.

Применяемые нами десорбаты — азот и крекинг газ — хорошо проводят процесс десорбции *н*-алканов $C_5 \ldots C_9$, но в присутствии угле-

водородов C_{10} и выше десорбция ухудшается. В последнем случае лучше применять водяной пар.

Опыты по выделению *н*-алканов с применением одного и того же образца синтетического цеолита CaA проводились при использовании газов в качестве десорбирующих агентов в продолжении 200 часов, а в случае водяного пара — 30...40 часов. В первом случае адсорбционная способность почти не изменилась, а во втором понизилась на 7...10%.

Исследование выделенных *н*-алканов методом газо-жидкостной хроматографии показало (таблица 1), что синтетические цеолиты удаляют, правда в малом количестве, и алканы изостроения, в том числе малоразветвленные, у которых метильная группа находится у предпоследнего углеводородного атома. Такие углеводороды своей прямой цепочкой могут войти в поры синтетического цеолита, т. е. эта часть молекулы углеводорода может вести себя как алкан нормального строения.

Антидетонационные свойства бензинов после удаления из них *н*-алканов улучшились. Октановое число мирзаанского бензина повысилось на 14, а бакинского — на 7 пунктов (таблица 2).

В мирзаанском бензине *н*-гептана больше, чем в бакинском, чем и объясняется разная степень повышения октанового числа после удаления *н*-алканов (таблица 1).

Нами было показано, что из общего количества алканов в мирзаанском бензине содержится 20,8%, а в бакинском — 17,5 *н*-алканов.

Таблица 1

Результаты хроматографического анализа выделенной смеси н-алканов

Смесь *н*-алканов, выделенных из:	Состав %							
	н-пентан	*н*-гексан	*н*-гептан	*н*-октан	2-метилпентан	2-метилгексан	2-метилгептан	остальные углеводороды
Мирзаанского бензина	15,7	28,8	37,8	9,2	0,9	1,7	3,0	2,9
Бакинского бензина (заводская продукция)	31,7	27,5	18,5	15,3	0,3	1,6	2,4	2,7

2. *Экспериментальная часть*

Синтетический цеолит CaA помещали в кварцевую трубку высотой 1000 мм, диаметром 12 мм, насыпной объем которой 300 мл. Поверхность синтетического цеолита была покрыта битым стеклом для предварительного испарения бензина. Трубку с адсорбентом переносили в

вертикально установленную трубчатую электропечь. Цеолит сушился при 400°С в течение 3 часов под вакуумом (5 мм).

До начала опытов была определена разделяющая способность цеолита СаА по отношению к *н*-алкану, для чего была приготовлена искусственная смесь (из 40% *н*-гептана и 60% изооктана). Смесь подавали в адсорбер при температуре 150°С с объемной скоростью 0,2 час$^{-1}$, как рекомендовано в работе [11]. После пропускания 20 г искусственной смеси подачу ее прекращали. Десорбцию адсорбированного углеводорода проводили при температуре 350°С, а давление доводили до 5 мм. После десорбции получили 7,8 г углеводорода, который имел $П_D^{20} = 1{,}3875$, $d_4^{20} = 0{,}6840$. Эти константы полностью совпадают с литературными данными для *н*-гептана.

Для установления влияния скорости подачи сырья в адсорбер на полноту выделения *н*-алканов из бензина она изменялась от 0,15 до 1,0 час$^{-1}$. Экспериментальным путем было найдено, что более приемлемой скоростью является — 0,15 час$^{-1}$. В дальнейшем мы поддерживали эту скорость.

Бензин, освобожденный от *н*-алканов, собирали в приемник и ловушку, охлаждаемые жидким азотом.

Таблица 2

Свойства бензинов и выделенных из них н-алканов

	Мирзаанский бензин			Бакинский бензин		
	Исходный	Депарафинированный	Смесь *н*-алканов	Исходный	Депарафинированный	Смесь *н*-алканов
Выход (% вес.)		75,3	20,8		75,8	17,5
Удельный вес d_4^{20}	0,7280	0,7320	0,6781	0,7338	0,7456	0,6860
Показатель преломления $П_D^{20}$	1,4085	1,4175	1,3837	1,4025	1,4184	1,3891
Групповой углеводородный состав (% вес.):						
а) парафиновые	46,0	30,8	94,5	53,4	35,4	94,8
б) нафтеновые	41,6	51,5	—	31,3	46,4	—
в) ароматические	14,4	17,7	—	15,3	18,2	—
Максимальная анилиновая точка	54,1	46,1	68,7	57,7	48,3	69,2
Фракционный состав (°С):						
а) начало кипения	40	44	37	35	42	36
б) выкипает 10%	81	83	72,1	84	85	84
в) выкипает 50%	113	117	102	108	109	108
г) выкипает 90%	138	141	140	149	150	149
д) конец кипения	150	150	150	153	152	152
Молекулярный вес	110,2	—	—	112,5	—	—
Октановое число (мм)	54,0	68,0	—	68,0	75,0	—

В каждом опыте за один цикл работы пропускали 200 мл бензина, после чего адсорбер продували азотом.

Десорбцию адсорбированных из бензина *н*-алканов проводили при температуре 340°...350° С и давлении 5 мм рт. ст., в присутствии азота или газа нефтеперерабатывающего завода.

Во всех опытах цикл десорбции проводился 7...10 мин. В каждом цикле количество десорбата азота или газа нефтеперерабатывающего завода составляло 10...12 литров. Образование кокса в процессе десорбции не наблюдалось.

Полнота выделения *н*-алканов контролировалась повторным пропусканием одного и того же образца бензина (так же, как это описано в работе [9].

Результаты опытов по выделению *н*-алканов из бензинов приведены в таблице 2.

Выделенная смесь *н*-алканов была исследована методом газо-жидкостной хроматографии. Результаты анализа представлены в таблице 1.

3. *Выводы*

1. Из прямогонных, мирзаанского и бакинского, бензинов выделены *н*-алканы при помощи синтетического цеолита CaA.

2. В мирзаанском бензине из общего количества алканов 46,0% на *н*-алканы приходится 20,8%, а в случае бакинского бензина из общего количества 53,4% на *н*-алканы — 17,5%.

3. В результате выделения *н*-алканов из мирзаанского и бакинского бензинов их октановое число повышено соответственно на 14 и 7 пунктов.

4. Методом газо-жидкостной хроматографии установлено присутствие в мирзаанском и бакинском бензине *н*-пентана, *н*-гексана, *н*-гептана и *н*-октана.

5. Цеолит CaA в течение 200 часов почти полностью сохранил адсорбционную способность, когда десорбатом применялись азот и крекинг газ, а в случае применения водного пара через 30...40 часов — снизилась на 7...10%.

Поступила 10 I 1968 г.

Институт физической и органической химии им. П. Г. Меликишвили АН Грузинской ССР, Тбилиси, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Schwartz R. D., Brasseaux D. I., Anal. Chem., 1957, **29**, S. 1026.
2. Brown C. R., Rightmire K. A., Strecker H. A., Oil a. Gas I., 1959, **57**, p. 189.
3. Мирский Я. В., Митрофанов М. Г., ЖПХ, 1961, **35**, стр. 460.
4. Квитковский Л. Н., Грушецкая Е. В., Хим. и техн. топлив и масел, 1962, *3*, стр. 61.

5. Митрофанов М. Г., Мирский Я. В., Дорогочинский и др., Тр. ГрозНИИ, 1963, **15**, стр. 84.
6. Самсонова И. Н., Жданов С. П. и др., ЖПХ, 1963, **36**, стр. 2502.
7. Митрофанов М. Г., Мирский Н. В., Сб. *Синтетические цеолиты.* Изд. АН СССР, 1962, стр. 236.
8. * * * Франц. пат. 1356914 (РЖХим., 1965, 18 *Н* 10).
9. Арешидзе Х. И., Чивадзе Г. О., Материалы Второго Всесоюзного совещания по цеолитам, М.—Л., 1965, стр. 294.
10. Пигузова Л. И., Хим. и техн. топлив и масел, 1961, *4*, стр. 9.
11. Вольф М. Б., Алексеева Р. А., *Синтетические цеолиты.* Изд. АН СССР, М., 1962, стр. 237.

ÎNBUNĂTĂŢIREA PROPRIETĂŢILOR ANTIDETONANTE ALE BENZINELOR DIN MIRZAANI ŞI BAKU CU AJUTORUL ZEOLIŢILOR SINTETICI

(Rezumat)

Din cercetările efectuate au fost trase următoarele concluzii:

1. Din benzinele de distilare directă din Mirzaani şi Baku au fost separate *n*-alcani cu ajutorul zeolitului sintetic CaA.

2. În cazul benzinei de Mirzaani la cantitatea totală de 46,0% alcani, pentru *n*-alcani revine 20,8%, iar în cazul benzinei de Baku din cantitatea totală de 53,4% revine 17,5%.

3. Ca rezultat al separării *n*-alcanilor din benzinele de Mirzaani şi Baku indicele lor octanic a crescut corespunzător la 17 şi 7 puncte.

4. Folosind metoda cromatografică gaz-lichid s-a stabilit prezenţa în ambele benzine a *n*-pentanului, *n*-hexanului, *n*-heptanului şi *n*-octanului.

5. Zeolitul CaA în decurs de 200 ore şi-a păstrat aproape în întregime capacitatea lui de absorbţie în cazul cînd au fost folosiţi ca desorbanţi azotul şi gazul de cracare şi a scăzut cu 7...10% după 30...40 ore în cazul folosirii vaporilor de apă.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

C. Z. 675.041

CERCETĂRI PRIVIND INFLUENŢA CONCENTRAŢIEI SOLUŢIILOR DE TANINURI VEGETALE ASUPRA MĂRIMII PARTICULELOR DE TANIN

DE

GH. CHIRIŢĂ şi MARIA MANCIU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 28—30 septembrie 1967

1. Introducere

Concentraţia soluţiilor de taninuri vegetale şi sintetice are un rol deosebit de important în procesul pătrunderii substanţelor tanante în pielea gelatină, la tăbăcire. Pătrunderea pielii gelatină în soluţii tanante concentrate nu este determinată numai de afinitatea substanţelor tanante faţă de colagen ci şi de alţi factori ca, de exemplu, efectul osmotic şi vîrscozitatea soluţiilor [1]...[3]. La o anumită concentraţie, care depinde de natura taninurilor, presiunea osmotică ce se crează între soluţiile tanante şi pielea gelatină, precum şi vîscozitatea, au valori care permit o difuzie optimă a substanţelor tanante în piele. Dacă se depăşeşte concentraţia critică la care are loc o stagnare a difuziei, se produce o tăbăcire moartă, iar pielea scade considerabil în grosime şi se încreţeşte. Cauza tăbăcirii moarte, după H. Heidemann [1], o constituie îngustarea puternică a porilor stratului median al pielii, încă netăbăcit, în urma unei deshidratări osmotice. Tăbăcirea moartă datorită deshidratării este un fenomen reversibil deoarece prin diluarea soluţiilor tanante se poate realiza situaţia ca tăbăcirea să continue, iar încreţirea pielii să dispară.

Soluţiile tanante concentrate cu particule mici duc la tăbăcire moartă mai ales datorită efectului lor de deshidratare osmotică [1].

Soluţiile tanante cu particule mari exercită o acţiune mai moderată de deshidratare asupra stratului mijlociu; în acest caz intervine în special vîscozitatea mai ridicată care încetineşte, respectiv frînează, difuzia substanţei tanante [1].

La elaborarea procedeului de tăbăcire rapidă R.F.P. a firmei Bayer, B. Zinz [4] face observaţia, pe baza unor date practice, că astringenţa substanţelor tanante vegetale creşte odată cu concentraţia numai pînă la o anumită limită, situată la concentraţia de aproximativ 15° Bé. La soluţiile de tananţi vegetali cu concentraţii mai ridicate astringenţa nu mai creşte ci dimpotrivă devine mult mai redusă.

Deoarece procedeele de tăbăcire mai vechi se bazează în special pe utilizarea soluţiilor tanante diluate, s-au întreprins numeroase studii referitoare la proprietăţile lor chimico-coloidale, în schimb s-au studiat mult mai sumar soluţiile tanante concentrate, care se folosesc în procedeele moderne şi care urmăresc accelerarea tăbăcirii pieilor pentru talpă.

Cercetările efectuate în cadrul lucrării de față au avut ca scop de a urmări influența concentrației soluțiilor tanante vegetale asupra astringenții, factor de importanță deosebită în procesul de pătrundere a taninurilor în pielea supusă tăbăcirii.

Experimentările s-au efectuat cu extract de quebracho sulfitat și extract de castan; analiza chimică a acestor substanțe este dată în tabelul 1.

Tabelul 1

Analiza chimică a extractelor

Date analitice %	Extract de:	
	quebracho sulfitat	castan
Umiditate	9,90	11,27
Reziduu total	90,10	88,73
Solubile totale	87,32	87,67
Insolubile	2,78	1,06
Substanțe tanante	63,22	72,85
Substanțe netanante	24,10	14,82
Cifra de puritate	72,40	83,09

2. Influența concentrației soluțiilor de extracte tanante vegetale asupra mărimii particulelor de substanțe tanante

Soluțiile tanante reprezintă sisteme complexe coloid-chimice polidisperse, în care mărimea particulelor substanțelor dizolvate și nedizolvate variază de la porțiuni cu grad de dispersie mic, considerate din punct de vedere analitic ca insolubile, pînă la particule în stare de diviziune molecular dispersă. Substanțele tanante propriu-zise se găsesc totdeauna în stare coloidală, deoarece gradul de dispersie coloidală constituie chiar o premiză a proprietăților tanante a majorității substanțelor folosite la tăbăcire. Particulele de substanțe tanante din soluție sînt formate din molecule de tanin legate între ele prin legături de hidrogen. Gradul lor de agregare, în soluție, se modifică ușor sub influența a numeroși factori, cum sînt: concentrația soluțiilor, raportul între substanțele tanante și cele netanante, natura netaninurilor, pH-ul, temperatura, îmbătrînirea soluțiilor etc. De aceea a fost necesar să se stabilească o metodă analitică cu ajutorul căreia să se poată face aprecieri referitoare la mărimea acestor particule fără a se influența concentrația soluțiilor.

Adăugarea unei cantități de electrolit (NaCl, HCl, H_2SO_4 etc.) în soluțiile de tanin provoacă scăderea solubilității particulelor de substanțe tanante. La un conținut redus de electrolit sînt scoase din soluție particulele cele mai mari de tanin, apoi pe măsură ce crește cantitatea de electrolit

ies din soluție mereu alte particule, din ce în ce mai mici [5]...[7]. În general taninurile pirocatehinice sînt mai sensibile la precipitare decît cele pirogalolice, mai ales față de acizii minerali. Unele taninuri pirogalolice nu precipită la adăugarea de acizi.

Comportarea diferită față de electroliți a taninurilor vegetale, în soluție, arată că particulele fiecărei substanțe tanante se deosebesc din punct de vedere al mărimii și încărcării electrice caracteristice.

Pentru a cerceta modul cum variază astringența taninurilor vegetale cu creșterea concentrației soluțiilor s-a folosit o proprietate ce o posedă substanțele tanante de a coagula în prezența acizilor minerali [6]. În vederea coagulării s-a folosit acid clorhidric 2*N*. După unii autori [8], [9], acidul clorhidric exercită o acțiune de precipitare mai energică decît alți acizi minerali, ca de pildă acidul sulfuric. S-a folosit acid clorhidric 2*N* pentru a nu dilua diferitele soluții de tanin supuse precipitării.

S-au preparat soluții de quebracho sulfitat și extract de castan în următoarele concentrații: 30, 60, 100, 150, 200, 300, 350 și 400 g extract sec la litru. Din fiecare soluție s-au pus în pahare Berzelius cîte 8 probe a 100 ml fiecare, apoi li s-au adăugat cantități crescînde de acid clorhidric 2*N*, coborîndu-li-se treptat pH-ul pînă la valori sub punctul de floculare a soluției analitice (4 g tanin pur la litru) a extractului respectiv. Soluțiile de tanin au fost lăsate apoi în repaus timp de 24 ore, după care s-au centrifugat pentru a se îndepărta sedimentul format. Pentru fiecare serie de probe s-a centrifugat și cîte o probă din soluția de tanin la care s-a păstrat pH-ul natural.

Soluția martor, clară, a fiecărei serii, a fost diluată în așa fel încît să aibă o concentrație analitică iar probele aceleiași serii, la care s-au adăugat cantități variate de acid, s-au diluat de un număr egal de ori cu proba martor. Soluțiile astfel diluate au fost aduse apoi la pH=7,0 cu o soluție de hidroxid de sodiu 2*N*, astfel încît culoarea lor să nu fie influențată de variația de pH, din cadrul aceleiași serii. S-au citit apoi diferențele de concentrație în tanin, ale soluțiilor, față de proba martor, în cadrul fiecărei serii, cu ajutorul fotocolorimetrului F. M.-56, fabricat în U.R.S.S., folosindu-se filtrul albastru K6. Rezultatele determinărilor, exprimate în densitate optică, sînt date în graficele din fig. 1 și 2.

În vederea determinării cantității de tanin rămasă în soluție, paralel cu analiza fotocolorimetrică s-a folosit și o metodă oxidimetrică. În acest ultim caz nu a fost necesar ca soluțiile analitice să fie aduse la pH=7,0.

Metoda oxidimetrică aplicată se bazează pe procedeul Löwenthal [10]. Soluțiile analitice de tanin au fost titrate cu soluție de permanganat de potasiu $n/100$ în prezență de indigocarmin ca indicator. Variația conținutului în tanin al soluțiilor a fost apreciată în raport cu cantitatea de permanganat consumată. Rezultatele determinărilor sînt date în tabelele 2 și 3.

Din analiza graficelor din fig. 1 și 2 și a datelor din tabelele 2 și 3 se constată că în toate cazurile odată cu coborîrea pH-ului soluțiilor, crește cantitatea de sediment, pe seama substanțelor tanante care sînt scoase progresiv din soluție.

Atît în cazul extractului de quebracho cît şi a celui de castan coborîrea pH-ului provoacă o îndepărtare a taninului cu atît mai energică cu cît concentraţia soluţiilor tanante este mai mare, pînă la o valoare critică

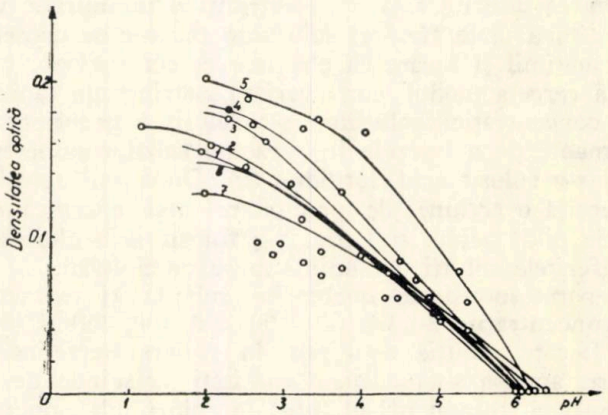


Fig. 1. — Influenţa variaţiei conţinutului în tanin al soluţiilor de extract de quebracho sulfitat, de diferite concentraţii, funcţie de pH. Concentraţia soluţiilor exprimate în g extract sec/l: *1*—30, *2*—60, *3*—100, *4*—150, *5*—200, *6*—350, *7*—400.

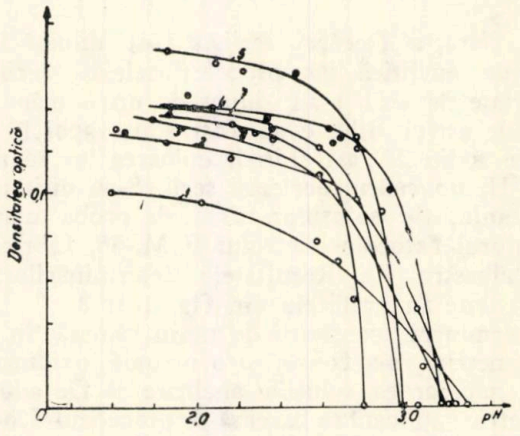


Fig. 2. — Influenţa variaţiei conţinutului în tanin a soluţiilor de extract de castan, de diferite concentraţii, funcţie de pH. Concentraţia soluţiilor exprimate în g extract sec/l: *1*—30, *2*—60, *3*—100, *4*—150, *5*—200, *6*—300, *7*—400.

a concentraţiei, după care precipitatul format începe să scadă. La extractul de quebracho cît şi la cel de castan precipitarea maximă a taninului se produce în soluţiile ce conţin 200 g extract sec la litru.

Acest fapt dovedește că astringența taninurilor vegetale crește cu concentrația soluțiilor pînă la o anumită limită peste care începe din nou să scadă.

Tabelul 2

Variația sedimentului soluțiilor concentrate de extract de quebracho sulfitat (exprimat în procente de extract sec) *funcție de pH*

pH	Concentrația soluțiilor g/l extract sec				
	30	60	100	200	350
5,5	0,2	2,8	3,4	3,7	0,3
5,0	0,5	5,5	6,5	7,0	0,8
4,0	1,6	9,5	10,9	12,5	1,2
3,0	3,6	13,2	15,2	16,8	2,8
2,0	7,0	17,0	19,2	21,4	6,6

Tabelul 3

Variația sedimentului soluțiilor concentrate de extract de castan (exprimat în procente de extract sec) *funcție de pH*

pH	Concentrația soluțiilor g/l extract sec				
	30	60	100	200	350
3,0	1,0	2,0	2,9	2,0	0,0
2,5	2,8	7,2	10,1	13,5	10,0
2,0	6,4	12,7	18,0	20,4	18,5
1,5	10,0	18,2	24,2	28,5	25,4

Variația cantității de tanin precipitat funcție de concentrația soluțiilor de extracte tanant, depinde de stabilitatea stărilor de agregare a substanțelor tanante din soluție. Această stabilitate este influențată în primul rînd de gradul de asociere a moleculelor și apoi de acțiunea impurităților stabilizante din soluție. Probabil, creșterea gradului de agregare a substanțelor tanante are loc numai pînă la o anumită concentrație a soluțiilor, datorită influenței unor netaninuri care provoacă slăbirea legăturilor de hidrogen dintre moleculele de tanin ce formează particulele tanante, producînd dispersarea lor și deci scăderea astringenței soluțiilor.

3. Concluzii

Coborîrea pH-ului soluțiilor tanante vegetale are ca urmare creșterea cantității de sediment pe seama substanțelor tanante ce sînt scoase progresiv din soluție. Îndepărtarea taninului provocată de coborîrea pH-ului soluțiilor tanante este mai accentuată pînă la o valoare critică a concentrației după care precipitatul format începe să scadă. Acest aspect se observă atît la taninurile pirocatehinice cît și la cele pirogalolice.

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de tehnologia pielii, înlocuitorilor de piele și substanțelor tanante

BIBLIOGRAFIE

1. Heidemann H., Das Leder, 1960, *5*, S. 99–105
2. Lasserre R., Bull. de l'AFCIC, 1962, *12*.
3. Chiriță Gh., Chiriță A., Boți E., Rev. ind. ușoară, 1967, *4*.
4. Zinz B., Gerbereiwissenschaft und Praxis, 1964, *5*.
5. Stiavsny E., Solomon O.E., Collegium, 1923, S. 326.
6. Gerngross O., Herfeld H., Collegium, 1932, S. 679.
7. Thomas A. W., Foster E. I., Ing. Eng. Ch., 1922, p. 191; Ibid., 1923, p. 707.
8. Wilson J. A., Kern E. I., Ing. Eng. Ch., 1922, p. 1128.
9. Machon H., Collegium, 1930, S. 60.
10. Küntzel A., *Gerbereitechnisches Taschenbuch*. 6-e Aufl., Dresden u. Lepzig, 1955.

RECHERCHES CONCERNANT L'INFLUENCE DE LA CONCENTRATION DES TANINS VÉGÉTAUX SUR LA GRANDEUR DES PARTICULES DE TANIN

(Résumé)

Le but de cette Note est d'examiner l'influence de la concentration des solutions des tanins végétaux exercée sur leur astringence, facteur important concernant l'absorbtion du tanin par la peau soumise au tannage.

Les essais ont été effectués avec de l'extrait de québracho sulfité et de l'extrait de chataignier.

Afin d'analyser la variation de l'astringence des tanins végétaux avec la concentration des solutions on a utilisé la propriété de la matière tannante de coaguler avec les acides minéraux. Dans ce cas on a utilisé pour coagulation de l'acide chlorhydrique 2*N*.

La quantité de tanin précipitée par la baisse du pH des solutions tannantes augmente avec la concentration des solutions jusqu'à une certaine valeur critique, puis le précipité formé commence à diminuer.

Cet aspect a été remarqué tant chez les tanins pyrocatéchiniques que chez les tanins pyrogalolyques.

Explications des figures

Fig. 1. — Influence de la variation du contenu en tanin des solutions d'extrait de québracho sulfité, à différentes concentrations, fonction du pH. La concentration des solutions est exprimée en g extrait sec/l: *1* — 30; *2* — 60; *3* — 100; *4* — 150; *5* — 200; *6* — 350; *7* — 400.

Fig. 2. — Influence de la variation du contenu en tanin des solutions d'extrait de chataignier, à différentes concentrations. La concentration des solutions est exprimée en g extrait sec/l: *1* — 30; *2* — 60; *3* — 100; *4* — 150; *5* — 200; *6* — 300; *7* — 400.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

C. D. 631.831

UTILISATION DE CERTAINS RÉSIDUS DE L'INDUSTRIE TEXTILE COMME ENGRAIS

PAR

IONELA POPESCU et M. DIMA

1. Introduction

À l'heure actuelle les industries de toutes sortes prennent intérêt à faire valoir les résidus qu'elles obtiennent, tandis que les unités agricoles cherchent à améliorer la fertilité du sol, mais sans s'engager à des dépenses trop coûteuses. Pour pouvoir apprécier la fertilité des sols on considère non seulement sa teneur en azote, en phosphore et en potassium, mais aussi les autres éléments tels que : manganèse, cuivre, zinc, molybdène, bore, etc. Les recherches de chez nous, effectuées par V. Ababi [1], A. Duca et D. Stănescu [4], par I. Morazov et N. Băjescu [7], etc., ont montré que certains sols ont une teneur relativement réduite en microéléments et qu'il est bien nécessaire, lorsqu'on applique les engrais, que l'on en tienne compte. En utilisant comme engrais les résidus industriels qui contiennent des quantités remarquables d'éléments fertilisants, on épargne les sels correspondants qui, sous cette forme, sont plus coûteux, pouvant en même temps être employés dans d'autres buts industriels.

2. Matières et méthodes

Afin de connaître la teneur en éléments fertilisants des certains résidus provenus de l'industrie textile, comme, par exemple, la chènevotte (constituée des portions de tige et des restes de fibres), on a défini la composition chimique de celle-ci. Étant donné que la chènovotte toute fraîche ne peut être utilisée avec succès comme engrais parce qu'elle fait diminuer en intensité le processus de la nitrification [6], on a utilisé la chènevotte décomposée par les microorganismes dont la réaction est peu alcaline ($pH = 7,4$). Il faut mentionner que cette chènevotte fut gardée durant sa décomposition sur le sol dans un endroit tout découvert, à proximité de la fabrique, de telle manière que l'eau provenue des précipitations a pu entrainer une partie des substances fertilisantes solubles.

Compte tenu que les entreprises font souvent brûler une partie de chènovotte, en l'utilisant comme combustible ou encore pour libérer l'espace destinée à l'entrepôt, on a aussi soumis à l'analyse la cendre provenue de la combustion de la chènevotte fraîche. Ces résidus ont été procurés à l'entreprise „Textile Rouge" de Jassy.

Grâce aux analyses de laboratoire, on a défini la teneur en macro- et microcomposants de la chènevotte et de la cendre de chènevotte.

Afin de connaître l'influence exercée par ces résidus sur la production de blé, de maïs, de tournesol et de betterave à sucre, on les a appliqués, au cours des années 1961-1963, au tchernozium moyen lévigé des alentours de Jassy.

Les residus, employés comme engrais, on été fourmis en automne, étant enfouis dans le sol lors des labours profonds. La cendre fut utilisée avec de l'azotate d'ammonium et de superphosphate, tandis que la chènevotte fut employée séparément et aussi avec des engrais. Les variantes expérimentées ont été les suivantes:

V_1 — non fertilisé (témoin);
V_2 — 60 kg/ha N + 45 kg/ha P_2O_5 (témoin);
V_3 — 5 000 kg/ha chènevotte;
V_4 — 10 000 kg/ha chènevotte;
V_5 — 20 000 kg/ha chènevotte;
V_6 — 5 000 kg/ha chènevotte + 60 kg/ha N + 45 kg/ha P_2O_5;
V_7 — 500 kg/ha cendre + 60 kg/ha N + 45 kg/ha P_2O_5;
V_8 — 750 kg/ha cendre + 60 kg/ha N + 45 kg/ha P_2O_5;
V_9 — 1 000 kg/ha cendre + 60 kg/ha N + 45 kg/ha P_2O_5.

3. Résultats obtenus et leur interprétation

Après l'avoir séchée à 105° C, on a constaté que la chènevotte, décomposée par les microorganismes, contenait 58,25 % d'eau, tandis que la cendre de chènevotte seulement 2,31 %. Les résultats obtenus lors de la définition de la composition chimique de ces deux résidus sont notés dans les fig. 1...6. Il en résulte des données de ces figures que la chènevotte et la cendre respective ont une teneur relativement élevée en Si, Al, Ca, Fe ainsi qu'en Mn, Cu, etc. Certains microéléments, tels que B, Co et Cu chez la chènevotte et Mo chez la cendre, s'y trouvent en quantités appréciables sous une forme facilement assimilable et peuvent être aisément utilisés par les plantes.

Les données obtenues à l'analyse de la cendre de chènevotte, sont semblables à celles trouvées par O. Heuser et citées par C. Ceapoiu [3] et N. Zamfirescu [9]; elles ne s'en distinguent que par une teneur moins élevée en azote et potassium et par un taux plus élevé de calcium. Quant à la chènevotte, celle-ci se remarque par un taux élevé de substance organique (69,58 %) et, relativement, par une quantité accrue d'azote (2,14 %). M. Vasa [8] recommande à utiliser come engrais le limon, obtenu au rouissage du lin, dont l'analyse a donné des résultats ci-dessous: 25,2 % substance sèche; 1,5 % P_2O_5; 0,38 % K_2O; 4,11 % CaO. Si l'on compare la teneur en éléments fertilisants de ce limon aux données que l'analyse de la chènevotte nous en a donné, on constate que ces deux résidus se ressemblent quant à leur teneur en N et en Ca, mais la chènevotte contient un peu plus de K_2O et moins de P_2O_5.

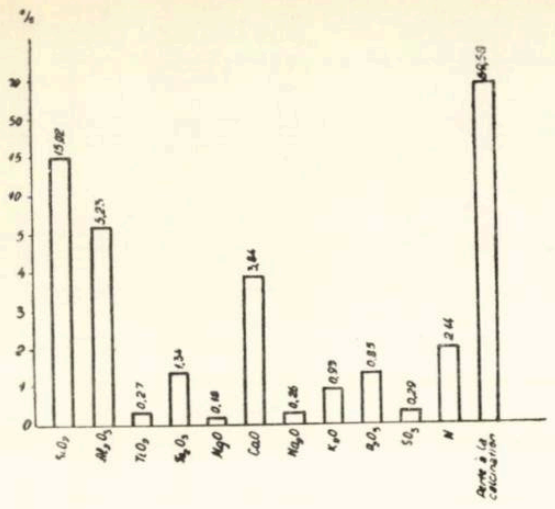


Fig. 1. — Teneur en macrocomponents de la chènevotte.

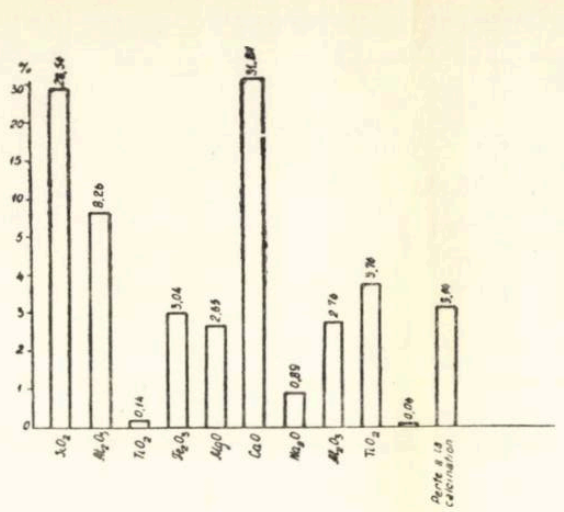


Fig. 2. — Teneur en macrocomponents de la cendre de chènevotte.

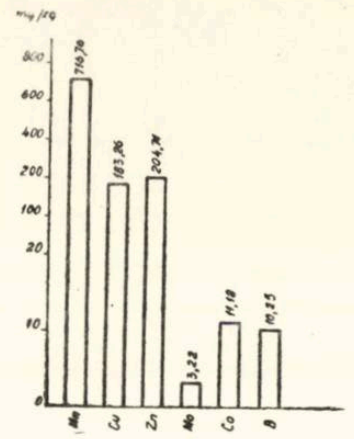


Fig. 3. — Teneur en microéléments de la chènevotte.

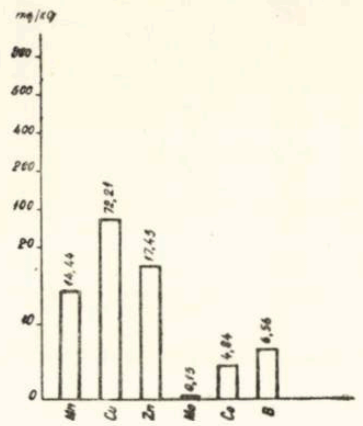


Fig. 4. — Teneur en microéléments de la cendre de chènevotte.

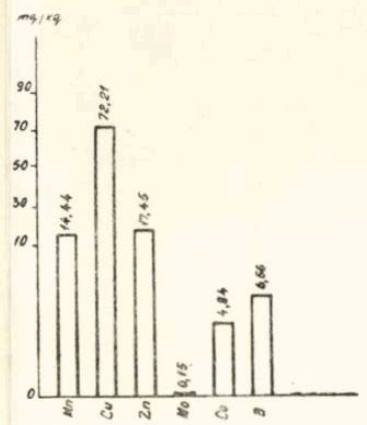


Fig. 5. — Les formes mobiles des microéléments de la chènevotte.

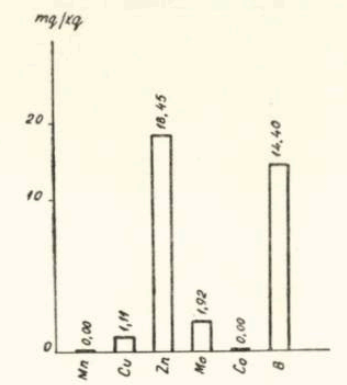


Fig. 6. — Les formes mobiles des microéléments de la cendre de chènevotte.

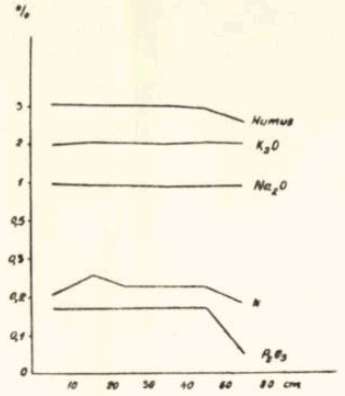


Fig. 7. — Teneur du sol en éléments fertilisants.

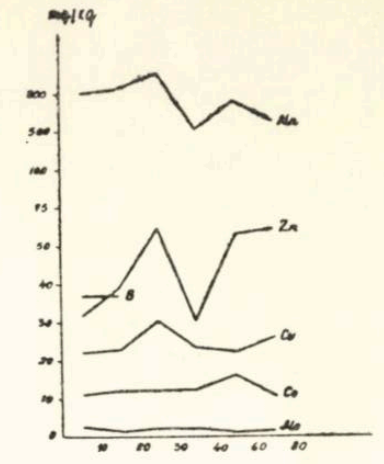


Fig. 8. — Teneur du sol en microéléments totaux.

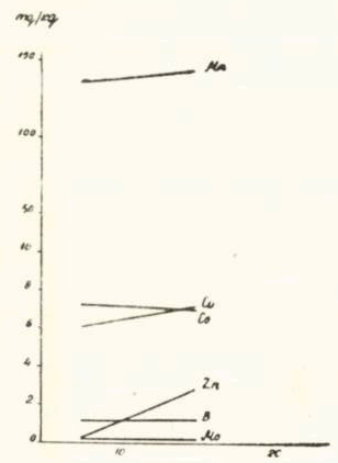


Fig. 9. — Teneur du sol en microéléments, formes mobiles.

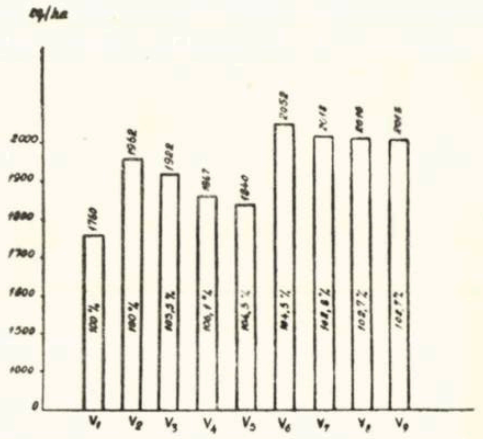


Fig. 10. — Production de grains du blé, moyenne 1961—1963.

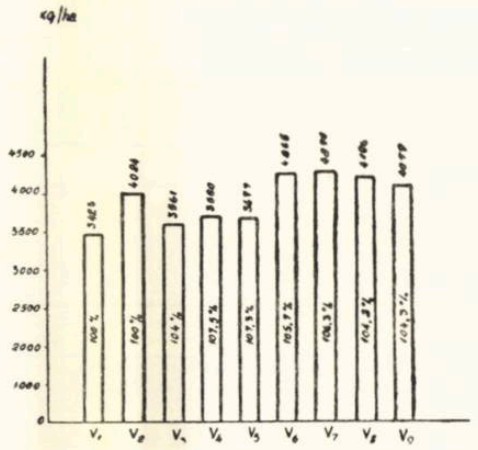


Fig. 11. — Production de grains du maïs, moyenne 1961—1963.

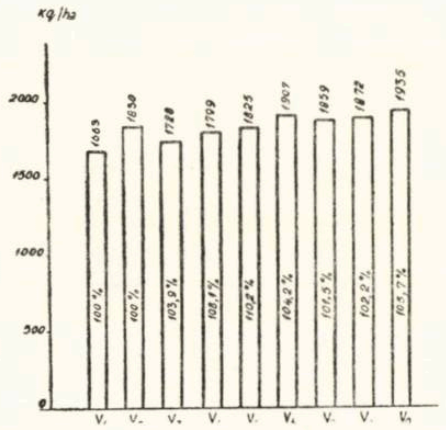


Fig. 12. — Production de grains du tournesol, moyenne 1961—1963.

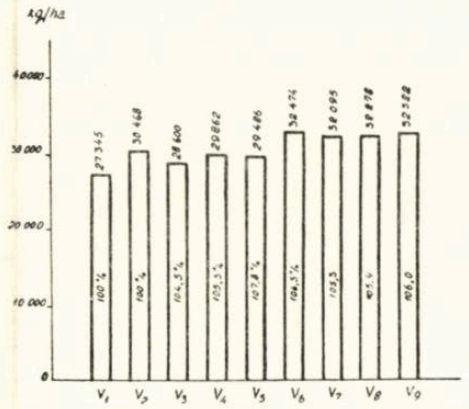


Fig. 13. — Production de racines de betterave à sucre, moyenne 1961—1963.

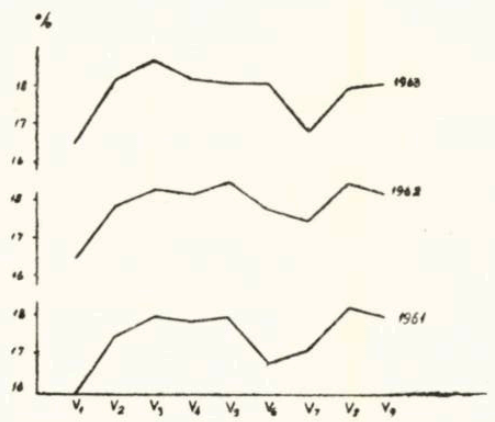


Fig. 14. — Variation de la teneur en substances protéiques des grains de blé.

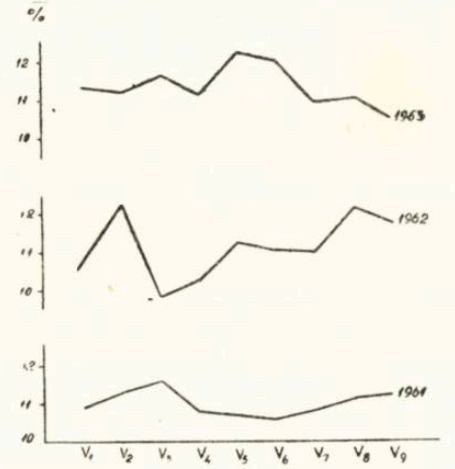


Fig. 15. — Variation de la teneur en substances protéiques des grains de maïs.

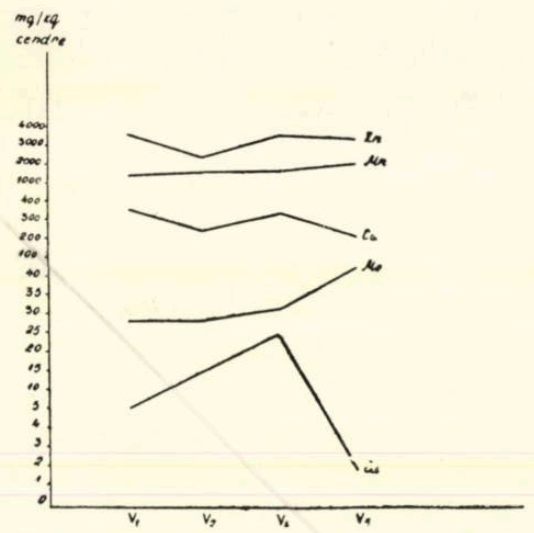


Fig. 16. — Teneur en microéléments des grains de blé.

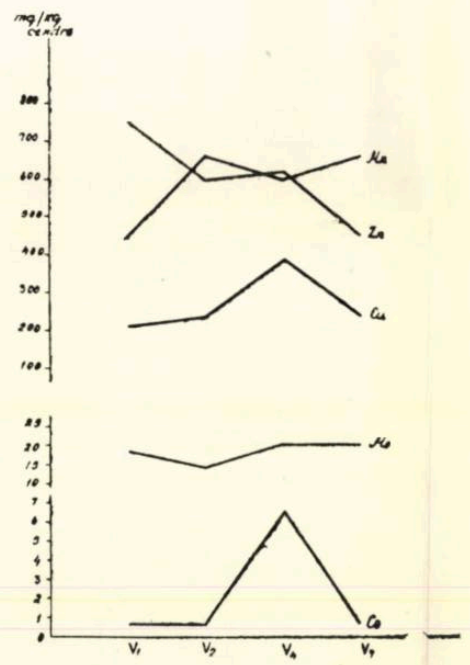


Fig. 17. — Teneur en microéléments des grains de maïs.

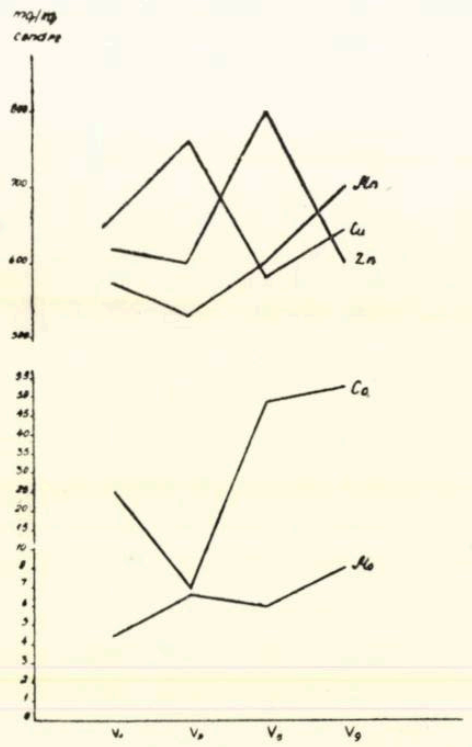


Fig. 18. — Teneur en microéléments des grains de tournesol.

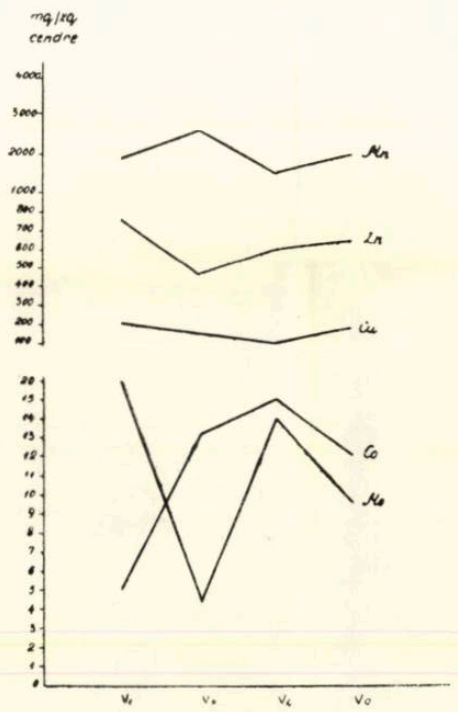


Fig. 19. — Teneur en microéléments des racines de betterave à sucre.

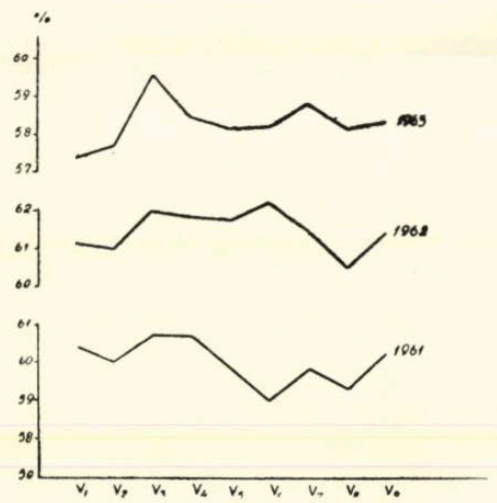


Fig. 20. — Variation de la teneur en substances grasses des grains de tournesol.

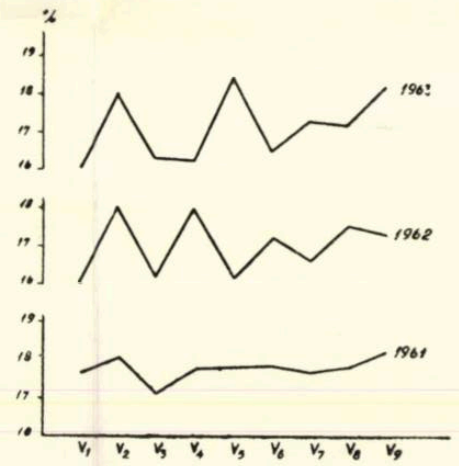


Fig. 21. — Variation de la teneur en sucre, des racines de betterave.

La teneur élevée en éléments fertilisants de ces résidus ainsi que leur réaction alcaline montrent qu'ils peuvent être utilisés comme engrais et amendements.

Tenant compte du rôle très important que Mo, Co et Cu jouent dans le processus de la synthèse de la chlorophylle, dans la fructification, dans la fixation de l'azote de l'air par les microorganismes, etc., on considère, qu'en utilisant la chènevotte et la cendre comme engrais, on peut mettre à la disposition des plantes ces microéléments.

On a procédé à l'analyse du sol sur lequel on a organisé les essais. Les résultats obtenus et notés dans les fig. 7...9 prouvent qu'il contient une quantité convenable d'éléments fertilisants : le pH du sol en KCl des prélévements récoltés à la surface jusqu'a 80 cm profondeur est compris entre 6,05 et 7,05.

a) *Essais sur le blé d'automne.* On a utilisé la variété Nr. 301 ; à la récolte des plantes on a obtenu, en trois années, le rendement noté dans la fig. 10. Les données de cette figure démontrent que la chènevotte, fournie comme engrais au tchernozium moyen lévigé, donne des rendements réduits en blé d'automne qui ne dépassent pas 6,1 %. Ce résidu fait améliorer en quelque sorte le poids des grains et leur teneur en substances protéiques (fig. 14). La cendre de la chènevotte donne des rendements plus réduits et porte moins sur les propriétés de la récolte, qu'à l'application de la chènevotte. Si l'on définit la teneur en microéléments des grains de blé, on obtient les données notées dans la fig. 16, qui montrent que les plantes auxquelles on a fourni de la chènevotte et de la cendre, accumulent dans les grains un peu plus de Mn, Mo, Zn et Co que le témoin. Tenant compte que certains de ces éléments (Mn, Co) présentent de l'importance pour la nutrition de l'homme et des animaux, les grains de blé obtenus du sol où l'on a appliqué de la chènevotte et de la cendre peuvent mieux satisfaire les exigences en microéléments de ces organismes.

b) *Essais sur le maïs.* On a utilisé, dans ces essais, l'hybride double 203 et ont a obtenu, à la récolte, en moyenne, en trois années, les résultats donnés dans la fig. 11. On constate que la chènevotte fait augmenter le rendement de 138 à 257 kg/ha ou de 4,0 à 7,5 %.

Les résultats de ces essais, comparés à ceux obtenus à la station expérimentale du Podu-Iloaie, département de Jassy, au cours des années 1961-1963, et cités par N. Giosan [5], font voir qu'à la même dose, mais de fumier, le maïs donne un rendement de 324 kg/ha ou 9 %, c'est-à-dire seulement de 1,5 % supérieur à celui obtenu avec de la chènevotte.

La cendre de chènevotte, fournie au sol avec NH_4NO_3 et superphosphate en doses méntionnées ci-dessous, détermine un accroissement du rendement en grains qui atteint 254 kg/ha ou 6,3 %. Le taux de la cendre le plus indiqué est de 0,5 t/ha. Ces résidus, employés dans la culture du maïs, font améliorer quelque peu la teneur en substances protéiques des grains et leur poids (fig. 15). À l'analyse de la récolte on a constaté

l'accumulation dans les grains de certaines quantités plus élevées de Mn, Cu et Mo (fig. 17).

B. P. Baguinskas et collaborateurs [2] mentionnent que certains microéléments, tels que Mn, Cu et Mo, contribuent à une teneur plus élevée en substances protéiques des grains de maïs.

c) *Essais sur le tournesol.* On a utilisé la variété VNIIMK 8931, la récolte étant influencée favorablement par la chènevotte (fig. 12). On a obtenu des rendements moyens en trois années, atteignant 169 kg/ha, ou 10,2%. Appliquée à une dose de 10 t/ha la chènevotte donne les rendements les plus élevés.

Quant à l'action de la cendre sur la récolte de tournesol, la dose la plus convenable afin d'établir un rapport favorable entre N, P et K, est de 1 t/ha, les rendements étant moins élevés que dans le cas précédent (105 kg/ha ou 5,7%).

Si l'on considère quelques propriétés de la récolte de tournesol (fig. 20), on constate que la chènevotte détermine une certaine augmentation du taux de la graine des fruits de tournesol et de la production d'huile.

Il en résulte de la fig. 18 que la chènevotte et la cendre, appliquées comme engrais au tournesol, ont pris part aux processus physiologiques de la plante et ont déterminé l'accumulation dans les grains de certaines quantités, plus élevées, de Mn, Co, Zn et Mo.

d) *Essais sur la betterave à sucre.* La variété utilisée a été Bod 165; les données obtenues à la récolte (fig. 13) prouvent que la chènevotte et la cendre ont fait augmenter la rendement en racines de 1 255 à 2 141 kg/ha, c'est-à-dire de 4,5 à 7,8%, exerçant aussi une certaine influence sur la teneur en sucre des racines (fig. 21). Par conséquent on peut obtenir plus de sucre à l'unité de surface pas rapport au témoin. Les doses les plus convenables sont les suivantes: chènevotte — 20 t/ha, cendre — de 0,7 à 1,0 t/ha.

W. Werner [10] montre que dans les sols qui contiennent peu de magnésium, les engrais à magnésium font augmenter le rendement en racines de 10 à 19%, et la teneur en sucre de 0,5 à 1,5%. Il est possible que la cendre et la chènevotte, ayant une teneur relativement élevée en Mn, exercent une influence favorable sur la récolte de la betterave à sucre grâce à ce composant.

Les résultats analytiques montrent qu'à la suite de l'apport de ces résidus, la teneur en azote nocif des racines n'augmente pas; cepedant des quantités un peu plus élevées de certaines microéléments (Cu, Co, Zn et Mo) s'accumulent dans les racines (fig. 19).

4. Conclusions

Les résidus de l'industrie textile utilisés comme engrais ont donné, en général, des rendements de récolte modérés.

La chènevotte, décomposée par les microorganismes, utilisé comme engrais, fait augmenter le rendement en blé, en moyenne en trois années,

tout au plus de 6,1%; le rendement en maïs et en betterave à sucre atteint respectivement 7,5% et 7,8%, en tournesol 10,2% par rapport au témoin non fertilisé. La dose la plus efficace pour le blé, le maïs et le tournesol est de 10 t/ha, pour la betterave à sucre est de 20 t/ha

La cendre de chènevotte appliquée avec de l'zotate d'ammonium et du superphosphate, donne des rendements plus réduits que la chènevotte. Ainsi, les rendements en blé atteignent 2,8%, en maïs 6,3%, en tournesol 5,7%, par rapport au témoin qui n'a reçu que des engrais azotés et phosphatiques. La dose la plus indiquée pour le blé et le maïs et de 0,5 t/ha; pour le tournesol et la betterave à sucre elle en est de 1 t/ha.

Les rendements modérés obtenus au cours de ces essais pourraient permettre à obtenir de grandes quantités de produits, si l'on utilise à la fertilisation des cultures des quantités importantes de chènevotte qui résultent annuellement des racines de chènevotte.

Les résidus de l'industrie textile, utilisés comme engrais, font améliorer les grains de blé, de maïs et de tournesol en substances protéiques et substances grasses, tandis que les racines de la betterave déterminent une accumulation de sucre un peu plus élevée. La récolte a de même une teneur un peu plus élevée en microéléments (Mn, Co, Mo au blé; Cu, Mo, Co au maïs; Mn et Co au tournesol; Co et Zn à la betterave).

Tenant compte que les résidus, qu'on a mis à la recherche, ont une teneur relativement élevée en calcium, en cuivre, en molybdène, en cobalt ainsi qu'en d'autres éléments fertilisants, on considère qu'ils peuvent donner des rendements plus élevés si l'on les apporte aux sols qui ont une teneur insuffisante en substancess nutritives.

Reçue le 15 V 1968

Institut Agronomique «Ion Ionescu de la Brad», Jassy,
et
Institut Polytehnique, Jassy,
Chaire de Chimie technologique

BIBLIOGRAPHIE

1. Ababi V., *Distribuţia diferitelor forme de mangan în solurile din regiunea Suceava.* St. şi cerc. şt., Chimie, Acad. R.P.R. filiala Iaşi, 1959, **X**, *1*, pp. 35—55.
2. Багинскас Б. П., Антанайтис А. И., Жемайтис А. Б., *Влияние микроэлементов на различные сельскохозяйственные культуры в Литовской ССР. Микроэлементы в сельском хозяйстве и медицине.* Киев, 1953.
3. Ceapoiu N., *Cinepa. Studiul monografic.* Ed. Acad. R.P.R., Buc., 1958.
4. Duca A., Stănescu D., *Determinarea citorva microelemente în sol* (Cu, Pb, Ni, Co şi Mn) *polarografic.* St. şi cerc. de Chimie, Cluj, 1957, **VIII**, p. 75.
5. Giosan N., *Comportarea celor mai valoroşi hibrizi dubli de porumb şi agrotehnica lor în lumina noilor rezultate experimentale.* Probleme agricole, 1964, *4*, p. 23.
6. Хренникова А. С., Толлочко И. М., *Коноплеводство.* М., 1953.
7. Morozov I., Băjescu N., *Conţinutul de cupru şi repartiţia cuprului total pe profil la cîteva tipuri de sol din R.P.R.* An. Inst. Cerc. Agron., s. n., 1956, **XXIV**, *5*, p. 31.

8. Vasa M., *Vyuziti macirenskych ka'uu k hnojeni zimniho zeli.* Sb. Československo Akad. Zemdelskych ved, Rostlinna vyroba, 1961, *5*, p. 745.
9. Zamfirescu N. et collaborateurs, *Fitotehnia.* Vol. **II**, Ed. Agrosilvică, Buc., 1958.
10. Werner W., *Zur Frage der Magneziumernährung der Zuckerrube.* Agrochimica, 1963, **VIII**, *1*, S. 5–16.
11. *** *Anuarul statistic al R. P. R.* Ed. şt., Buc., 1963, p. 68.

FOLOSIREA UNOR REZIDUURI DIN INDUSTRIA TEXTILĂ CA ÎNGRĂŞĂMINTE

(Rezumat)

Se studiază conţinutul în macrocomponente şi microelemente al reziduurilor din industria textilă (puzderia de cînepă descompusă de microorganisme şi cenuşa de puzderie). Prin aplicarea lor ca îngrăşăminte la grîu, porumb, floarea soarelui şi sfecla de zahăr, s-a putut constata că se obţin sporuri moderate de recoltă, cuprinse între 6,1% la grîu şi 10,2% la floarea soarelui, doza cea mai eficientă fiind de 10...20 t/ha puzderie şi 0,5...1 t/ha cenuşă.

Aceste reziduuri au un conţinut relativ ridicat în Ca, Cu, Mo, Co etc. şi exercită o influenţă favorabilă asupra însuşirilor calitative ale recoltei.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Compoziţia în macrocomponente a puzderiei de cînepă (%).
Fig. 2. — Compoziţia în macrocomponente a cenuşei de puzderie de cînepă (%).
Fig. 3. — Compoziţia în microelemente a puzderiei de cînepă (mg/kg).
Fig. 4. — Compoziţia în microelemente a cenuşei de puzderie de cînepă (mg/kg).
Fig. 5. — Forme mobile ale microelementelor puzderiei de cînepă (mg/kg).
Fig. 6. — Forme mobile ale microelementelor cenuşei puzderiei de cînepă (mg/kg).
Fig. 7. — Compoziţia solului în elemente fertilizate (%).
Fig. 8. — Compoziţia solului în microelemente totale (mg/kg).
Fig. 9. — Compoziţia solului în microelemente, forme mobile (mg/kg).
Fig. 10. — Randamentul în boabe de grîu, media 1961—1963 (kg/ha).
Fig. 11. — Randamentul în grăunţe de porumb, media 1961—1963 (kg/ha).
Fig. 12. — Randamentul în seminţe de floarea soarelui, media 1961—1963 (kg/ha).
Fig. 13. — Randamentul în rădăcini de sfeclă de zahăr, media 1961—1963 (kg/ha).
Fig. 14. — Variaţia conţinutului în substanţe proteice a boabelor de grîu (%).
Fig. 15. — Variaţia conţinutului în substanţe proteice a grăunţelor de porumb (%).
Fig. 16. — Compoziţia în microelemente a boabelor de grîu (mg/kg cenuşă).
Fig. 17. — Compoziţia în microelemente a grăunţelor de porumb (mg/kg cenuşă).
Fig. 18. — Compoziţia în microelemente a seminţelor de floarea soarelui (mg/kg cenuşă).
Fig. 19. — Compoziţia în microelemente a rădăcinilor de sfeclă de zahăr (mg/kg cenuşă).
Fig. 20. — Variaţia conţinutului în substanţe grase a seminţelor de floarea soarelui (%).
Fig. 21. — Variaţia conţinutului în zahăr al rădăcinilor de sfeclă de zahăr (%).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

УДК 631.82

ЭФФЕКТИВНОСТЬ УДОБРЕНИЙ ВНЕСЕННЫХ ПОД СОЮ НА СКЛОНАХ

КИРИЛ ПОПЕСКУ

1. *Введение*

Бобовые культуры представляют большое значение для экономики нашей страны, потому-что полученная продукция имеет повышенное содержание белковых веществ. Живя в симбиозе с приклепленными бактериями азота эти растения улучшают и плодородие почвы.

На склонах бобовые культуры помогают борьбе с эрозией почвы и сочетаются в севообороте с пшеницей или другими плотными растениями.

В общем удобрения приносят повышенный урожай на эродированных почвах как доказали исследования, проведенные в стране и за границей и прочитанные М. Моцок [6] и другими исследователями. С внесением удобрений еще нужно учитывать почву и ее плодородие, выращенный вид, место в севообороте и т. д.

В этой работе исследуется эффект минеральных удобрений азотных, фосфорных и калийных, внесенных на склонах под сою и затем пшеницу, выращенную на следующий год на этом же месте.

2. *Почвенно-климатические условия*

Опыты были организованы в период 1961...1964 на среднем деградированном черноземе на южном склоне 9...10% наклона, вблизи города Яссы. Горизонт *A* есть немного эродированный и имеет толщину 25...30 см. Количество азота, фосфора и калия пахотного слоя, колеблется между следующими пределами 0,21...0,26% H; 0,16...0,17% P_2O_5 и 2,04...2,16% K_2O.

Количество гумуса колеблется от 3,25...3,33%, pH = 6,23...7,05.

За год в области выпадает 517,8 мм осадков и средняя температура, 9,6° C. В период 1961...1964 зарегистрированы осадки близкие к нормальным. В первые два года они повысили нормальные осадки на 70,5 мм и соответственно 33,8 мм, а следующие годы они были меньше нормальных. Распределение осадков в течение нескольких лет

было неравномерное и периоды засухи значительно снизили урожай и на сою и на пшеницу. В этом периоде не отмечалось ливневых дождей. Зарегистрированные температуры в эти годы были близки к нормальным.

3. *Организация опытов*

Предшественником сои была Суданская трава и подготовка земли началась осенью путем глубокой вспашки и вместе с ней закапывался под борозду суперфосфат и калийная соль, в дозах показанных в таблице 1. Азотно-кислый аммоний вносится весной одновременно с подготовкой почвы перед посевом. Использовался грунт Херб 620.

Таблица 1

Количество минеральных удобрений внесенных на сою и пшеницу

Вариант	Соя			Пшеница			Всего		
	N	P_2O_5	K_2O	N	P_2O_5	K_2O	N	P_2O_5	K_2O
1	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	—	30	—	—	—	—	—	30	—
3	—	45	—	45	45	—	45	90	—
4	—	60	—	—	—	—	—	60	—
5	—	15	—	45	45	—	—	60	—
6	—	25	—	—	35	—	45	60	—
7	—	30	—	—	60	—	—	90	—
8	—	45	—	45	—	—	45	45	—
9	30	45	20	30	15	—	60	60	20
10	30	45	—	—	45	—	30	90	—
11	—	45	—	60	45	—	60	90	—
12	45	90	—	45	30	—	90	120	—

На следующий год после сои, была посеяна озимая пшеница номер 301, и одновременно с подготовкой почвы, перед посевом, внесли азотно-кислый аммоний и суперфосфат, в дозах показанных в таблице 1. После сбора урожая пшеницы была подготовленна почва и на следующий год на этом же месте была посеяна озимая пшеница, но без внесения удобрений. Прирост урожая полученного в последнем опыте есть благодаря только продолженному эффекту удобрений, внесенных под сою и под пшеницу в предшествующие годы.

Подготовка почвы, посев и работы по содержанию растений были сделаны по направлению горизонталей.

Удобрения использованные в этих опытах имеют следующий состав активных веществ: суперфосфат 18 % P_2O_5, азотно-кислый аммоний 32 % N и каменная соль 40 % K_2O.

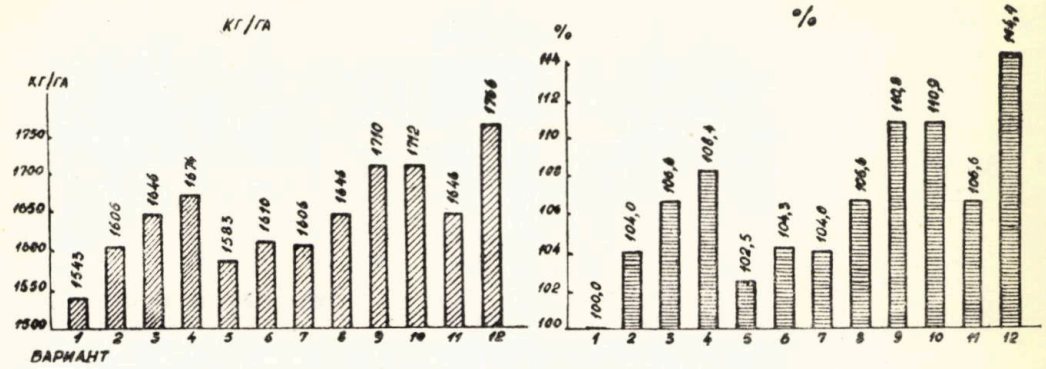


Рис. 1. — Урожай сои (среднее 1961—1963 годы).

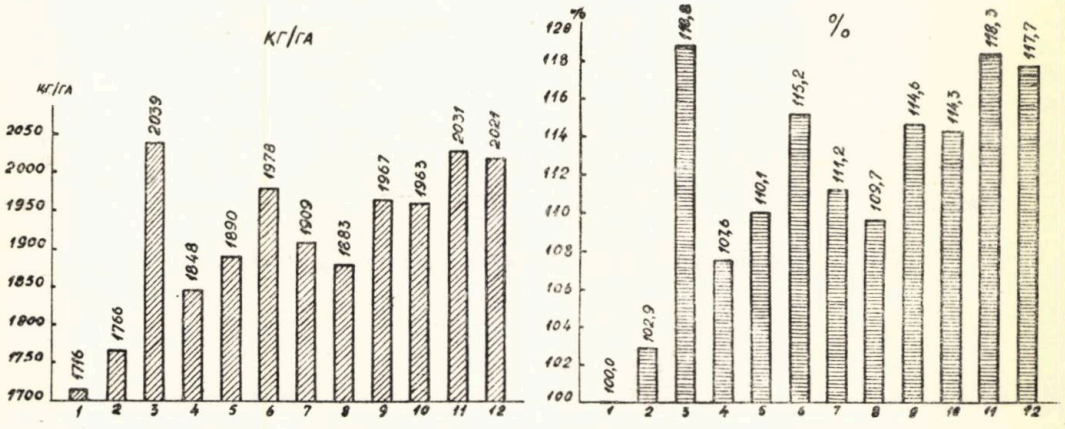


Рис. 2. — Урожай пшеницы выращенной после сои в первый год (среднее 1962—1964 годы).

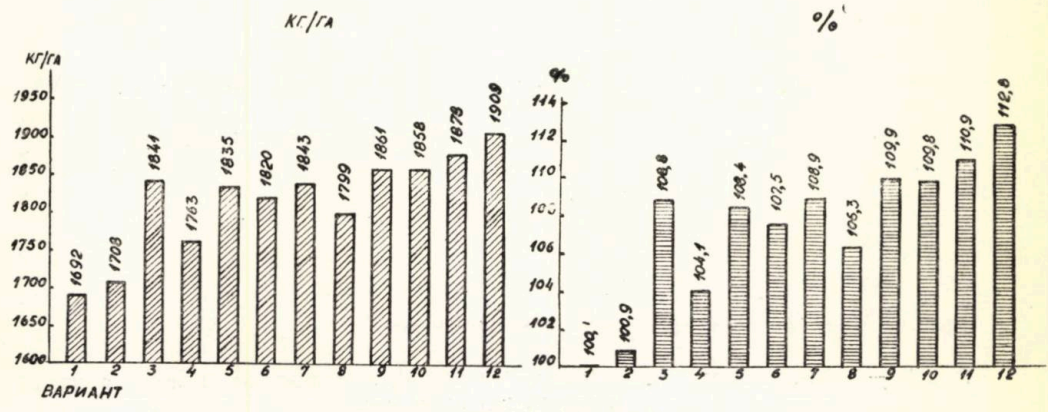


Рис. 3. — Урожай пшеницы выращенной после сои на второй год (среднее 1963—1964 годы)

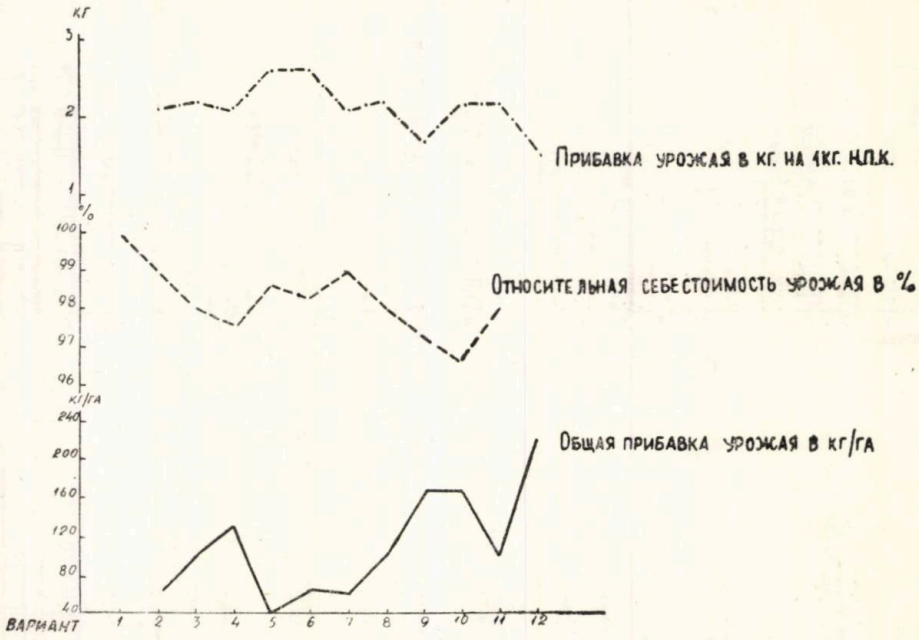


Рис. 4. — Эффективность минеральных удобрений внесенных на сою.

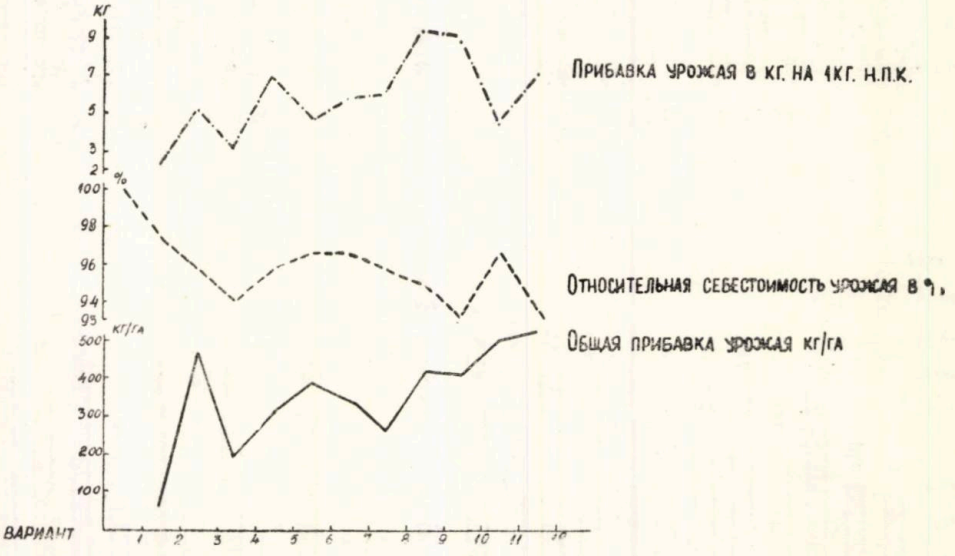


Рис. 5. — Эффективность минеральных удобрений внесенных на пшеницу в первый и второй год после сои.

4. *Полученные результаты и их анализ*

Соя дала зерновую продукцию показанную на рис. 1 и исследуя эффект удобрений установлено, что самый большой прирост урожая был получен в [12], где были внесены большие дозы удобрений. Азотные удобрения [10] способствуют повышению урожая зерен у сои, когда они внесены вместе с фосфорными.

Калийная соль не увеличивает урожай у этой культуры [9]. Опыты проведенные Г. Тимару и сотрудниками [10] в низменности Жижия—Бахлуй показали также, что калийная соль не повышает урожай сои. Исследуя содержание белковых веществ и жиров в зернах сои, их абсолютный вес и объем установлено, что удобрения повлияли положительно на эти качества урожая.

Пшеница, выращенная в первый год после сои дала продукцию показанную в рис. 2 с приростом урожая, который достиг 323 кг/га или 18,8% [3].

Хорошие урожаи дала пшеница, которая получила примерно 45...60 кг/га активного вещества из азотных и фосфорных удобрений. Хотя соя повышает содержание азота [3], [11] в почве, все-таки на склонах азотно-кислый аммоний способствует повышению урожая у пшеницы [3]. Л. Поп и сотрудники [8] установили что на серо-красных лесных почвах, пшеница посеянная после гороха увелчивает урожай благодаря азотным удобрениям.

На деградированном черноземе К. Попеску [9] получает на пшеницу посеянную после сои, на ровном поле, прирост урожая на 226 кг/га посредством внесения азотных и фосфорных удобрений. Одностороннее удобрение пшеницы азотно-кислым аммонием [8] или только суперфосфатом [5], [7] не дает самого большого прироста урожая. Опыты, проделанные на экспериментальной станции Добруджя и прочитанные П. Томороагэ [11] показывают также что у сорта пшеницы номер 301 самыми подходящими дозами удобрений являются 100...200 кг/га и 200...400 кг/га суперфосфата. Д. Пынзару и сотрудники [7] получают прирост урожая гораздо больше у пшеницы сорта номер 301, когда вносят на ровном поле минеральные удобрения вместе с органическими. На почвах сильно эродированных, которые частично потеряли горизонт с гумусом, Н. Джиосан [4] и Гр. Кокулеску [2] показывают, что минеральные удобрения дают прирост урожая на пшеницу на 781...1 645 кг/га. Пшеница, выращенная на следующий год после пшеницы, без удобрений, дала урожай показанный в рис. 3 и это доказывает что минеральные удобрения внесенные на сою и на пшеницу проявляют благоприятный эффект и в последующие годы после внесения. Большие дозы удобрений 60...90 кг/га N и 90...120 кг/га P_2O_5 [11], [12] увеличили урожай до 217 кг/га или 12,8%. Ал. Лука и сотрудники [5] получили с помощью органических и минеральных удобрений на второй год после внесения прирост урожая на пшеницу на 210 кг/га. Считаем что прирост урожая есть благодаря богатому

развитию корней, которые остаются в почве после более лучшего питания растений сои или пшеницы в следствии внесения удобрений.

Определяя содержание клейковины из зерен пшеницы из двух опытов, абсолютный вес и объем установленно, что удобрения в какой-то степени улучшили эти свойства. Для того чтобы узнать эффективность удобрений внесенных под сою и под пшеницу, вычислили прирост урожая, который приходится на каждый кг активного вещества в использованных удобрениях, стоимость урожая, выраженную в % по отношению к свидетелю.

Полученные результаты показаны в рис. 4 и 5 и они доказывают что умеренные дозы удобрений являются самыми экономичными. Максимальный прирост урожая на 1 кг активного вещества хватает для сои на 2,6 кг зерна, а для пшеницы в течении двух лет на 9,3 кг зерен.

Д. Давидеску [3] показывает что озимая пшеница, выращенная на деградированном черноземе получает сходный прирост урожая с помощью азотных удобрений. На больших или меньших дозах удобрений получается прирост меньше на 1 кг активного вещества и стоимость повышается.

Считаем, что для определения подходящей дозы удобрений нужно учитывать прирост урожая, который приходится на 1 кг активного вещества, стоимость урожая, общее увеличение урожая и эффект удобрений на второй год после внесения. Принимая во внимание все это, установлено, что в условиях в которых были произведены опыты, на сою экономичны дозы 30 кг/га **H** и 45 кг/га P_2O_5 [10] и на пшеницу выращенную после сои, которая получает удобрение 45 кг/га P_2O_5 [10].

На шоколадном черноземе в Иляна, район Лехлиу, Гр. Кокулеску [1] получает самые экономичные урожаи на сорт пшеницы номер 301, выращенной после овса с дозами 48 кг/га **H** и 64 кг/га P_2O_5.

На другие сорта были подходящими другие дозы удобрений.

5. *Выводы*

На склонах с меньшей эрозией азотно-кислый аммоний и суперфосфат дают прирост урожая, который достиг 223 кг/га или 14,4% для сои и 323 кг/га или 18,8% для пшеницы. Благоприятный эффект удобрений чувствуется и на второй год после внесения.

Самыми экономичными дозами удобрений для сои являются 30 кг/га **H** и 45 кг/га P_2O_5. Выращенная пшеница после сои которая получает удобрение, дает экономичный прирост урожая на дозу 45 кг/га P_2O_5. Калийная соль, внесенная вместе с азотно-кислым аммонием и суперфосфатом, не повышает урожай у сои.

Внесение удобрений в больших дозах и на сою и на пшеницу не экономично. Удобрения благоприятно влияют на качественные свойства урожая сои и пшеницы.

Поступила 16 V 1968 г.

Ясский политехнический институт,
Кафедра почвоведения
и барьбы с эровией почвы

ЛИТЕРАТУРА

1. Coculescu Gr., *Aplicarea diferenţiată a ingrăşămintelor la griu in raport cu soiul cultivat.* Probl. agr., 1963, *9.*
2. — *Sistemul de ingrăşare la grîul de toamnă.* Probl. agr., 1962, *10.*
3. Davidescu D., *Contribuţiuni la problema eficienţei ingrăşămintelor cu azot.* În *Probleme actuale de biologie şi ştiinţe agricole.* Ed. Acad. R. P. R., 1960.
4. Giosan N., *Caracterizarea agrobiologică a soiurilor de griu şi agrotehnica lor in lumina noilor rezultate experimentale.* Probl. agr., 1963, *10.*
5. Luca Al., Iuraşcu C., Popa A., Popa G., *Combaterea eroziunii şi refacerea fertilităţii solului in Podişul Central Moldovenesc.* Probl. agr., 1963, *8.*
6. Moţoc M., *Eroziunea solului pe terenuri agricole şi combaterea ei.* Ed. Agrosilvică, Buc., 1963.
7. Pînzaru D., Costache I., Dumitrescu N., Petrovici P., *Aspecte ale agrotehnicii grîului în regiunea Iaşi.* Probl. agr., 1963, *9.*
8. Popa L., Coifan M., *Contribuţii la stabilirea sistemului de ingrăşare la griu in zona centrală a Olteniei.* Probl. agr., 1962, *8.*
9. Popescu Ch., *Comportarea soiei ingrăşată cu superfosfat ca premergătoare pentru cereale.* Lucr. ştiinţ. Inst. agron. „Ion Ionescu de la Brad", Iaşi, 1960.
10. Timaru Gh., Pînzaru D., Costache I., Rusanovschi V., Petrovici P., Dalas M., Dumitrescu N., *Contribuţii la stabilirea agrotehnicii soiei in depresiunea Jijia—Bahlui.* Probl. agr., 1963, *5.*
11. Tomoroagă P., *Rezultate experimentale şi de producţie privind agrotehnica diferenţiată a grîului de toamnă în Dobrogea.* Probl agr., 1963, *1.*

EFICIENŢA ÎNGRĂŞĂMINTELOR MINERALE APLICATE LA SOIA PE TEREN ÎN PANTĂ

(Rezumat)

Se studiază eficienţa îngrăşămintelor minerale aplicate la soia pe teren în pantă, ţinînd seama de sporul de recoltă ce revine pentru 1 kg substanţă activă, preţul de cost al recoltei, sporul total de recoltă şi efectul îngrăşămintelor în anul al doilea după aplicare. Dozele cele mai economice de îngrăşăminte s-au dovedit a fi de 30 kg/ha N şi 45 kg/ha P_2O_5 pentru soia şi 45 kg/ha P_2O_5 pentru grîul cultivat după soia care primise îngrăşăminte.

Aplicarea îngrăşămintelor în doze mari atît la soia cît şi la grîu nu este economică. Efectul favorabil al îngrăşămintelor se resimte şi în anul al doilea după aplicare.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Producţia la soia (media 1961—1963).

Fig. 2. — Producţia la grîul cultivat după soia, anul I (media 1962—1964).

Fig. 3. — Producţia la grîul cultivat după soia, anul II (media 1963—1964).

Fig. 4. — Eficienţa îngrăşămintelor minerale aplicate la soia; -·- kg spor recoltă la 1 kg N. P. K., --- preţ relativ de cost al recoltei (%), — spor recoltă total (kg/ha).

Fig. 5. — Eficienţa îngrăşămintelor minerale aplicate la grîul cultivat, anul I şi II, după soia; -·- kg spor recoltă la 1 kg N. P. K., --- preţ relativ de cost al recoltei (%), — spor recoltă total (kg/ha).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

C. D. 66

RÔLE ET PLACE DE L'INDUSTRIE CHIMIQUE DANS LE CADRE DE LA RÉVOLUTION TECHNICO-SCIENTIFIQUE CONTEMPORAINE

PAR

EUGEN POPA, MARIA PONTA, I. ADUMITRĂCESEI et VALERIU RĂUŢU

Communication présentée dans la session scientifique de l'Institut Polytechnique de Jassy, 28–30 septembre 1967

1. Introduction

Les changements d'ordre qualitatif qui se produisent dans les domaines de la science, de la techinique et de la production constituent un des processus fondamentaux de la société contemporaine. La révolution technico-scientifique affecte tous les domaines de la science, toutes les branches de la production matérielle, mais le degré de cette affectation est différent dans chaque domaine.

Nous nous proposons dans cette étude-ci de présenter certains aspects de l'accomplissement de la révolution technico-scientifique actuelle dans le domaine de la chimie.

2. La recherche scientifique dans le domaine de la chimie et les perspectives créées pour l'industrie chimique

La recherche scientifique dans le domaine de la chimie connaît une ampleur presque sans égale par rapport aux autres domaines. Sur le plan mondial, la recherche scientifique dans ce domaine est axée tant sur les recherches fondamentales, que sur celles applicatives.

La sphère de la recherche scientifique s'est considérablement élargie en chimie.

Outre les domaines classiques — la chimie anorganique, la chimie organique, la chimie physique, la chimie biologique — des branches nouvelles se sont développées telles que: la chimie quantique, la chimie cosmique, la radio-chimie, la neurochimie, la biologie moléculaire, l'immunochimie. Ainsi, en même temps que la division sur horizontale a lieu une division sur verticale, au fur et à mesure qu'on approfondit la structure de la matière et l'ensemble de ses lois.

L'ampleur de la recherche scientifique a nécessité non seulement d'importants investissements, mais elle en est conditionnée.

Si l'on considère tous les frais affectant la recherche scientifique dans l'industrie privée il en résulte que le taux des frais dans l'industrie chimique a été le suivant: aus États-Units, (1967) 10 %, en Angleterre (1958) — 15,5%, en France (1963) — 14%.

Par rapport à la valeur annuelle de la production globale de l'industrie chimique, les frais affectés aux recherches scientifiques ont représenté ces dernières années 3% en France, 3,5% dans la R.F.A., 4% en Angleterre, 2,5% en Belgique. Quant aux taux des frais exigés

par la recherche scientifique, l'industrie chimique occupe la troisième place apres l'aéronautique, la construction des machines électriques et l'électronique. Dans les pays capitalistes développés c'est le financement par l'état qui joue le plus grand rôle dans la recherche. Pourtant, dans le domaine de la chimie le rôle principal revient a l'autofinancement par les monopoles (aux Etats-Unis—80% en 1962). Les grands monopoles chimiques dépensent pour la recherche scientifique jusqu'à 4...5% de la valeur de leur production. Les états socialistes, à leur tour, destinent des sommes importantes à la recherche dans le domaine de la chimie. Dans notre pays au cours des années 1959...1963, ces frais ont représenté 1,3...1,5 % de la valeur de la production globale de l'industrie chimique.

Le puissant essor de la recherche scientifique dans la chimie est reflété aussi par le grand nombre de chercheurs dans ce domaine.

Dans des pays ayant une forte industrie chimique, plus de la moitié des spécialistes possédant des études supérieures occupés dans cette branche travaillent dans le domaine de la recherche scientifique. Aux États-Unis (1962) du total du personnel de l'industrie chimique ayant une qualification supérieure, 41,6% est directement affecté à la recherche scientifique, ce qui dépasse la moyenne (35,7%) pour l'ensemble de l'industrie. Dans ce pays 28% de tous les scientifiques sont des chimistes — situation sans égale dans les autres branches de la science. En Angleterre (1958) le nombre des chercheurs de l'industrie chimique représente 18% de tous les chercheurs occupés dans l'industrie de transformation.

Dans notre pays, dans les 26 instituts, centres et laboratoires d'usine travaillent plus de 1 200 chercheurs et un nombreux personnel auxiliaire. Le savant anglais J. D. Bernal estime, qu'approximatif 3/4 du total des scientifiques du monde travaillent dans le domaine de la chimie et de l'électricité.

L'ampleur de la recherche scientifique dans le domaine de la chimie se reflète aussi dans le grand nombre de travaux et de publications parues dans ce domaine. Selon la revue française *Analyse et Prévisions* (juillet-août 1966) le volume de la documentation scientifique dans le domaine de la chimie, comparé à celui des autres domaines, a évolué de la manière indiquée dans le tableau 1.

Tableau 1

Discipline	Nombre de documents significatifs			Dynamique	
	1961	1965	1970	1965/1961	1970/1965
Total dont:	658 000	900 500	1 143 000	137	120
Chimie	150 000	225 000	300 000	150	133
Constructions mécaniques	150 000	175 000	200 000	117	114
Métallurgie	30 000	40 000	50 000	133	125
Géologie	20 000	25 000	30 000	125	120

On observe que le volume de la documentation connaît la dinamique la plus rapide dans le domaine de la chimie. Par suite de ce fait le rôle des matériaux documentaires de ce domaine a augmenté en tout de 22,7 % en 1961 à 23,6 % en 1965, et l'on estime son augmentation en 1970 à 26,2%.

Si dans tous les domaines de la science le nombre des travaux et des publications double tous les 15 ans, dans le domaine de la chimie on constate ce phénomène au bout de 8 ans seulement. Il est à remarquer aussi que les publications de 1964 se sont rapportées a 400 000 composés chimiques, dont 75 000 composés nouveaux.

Une grande partie des recherches scientifiques en chimie est constituée par les recherches fondamentales. C'est ce qui assure la base théorique de la création des nouveaux composés chimiques, de l'élaboration des nouveaux processus technologiques.

Le domaine de la chimie sur lequel portent les recherches ces dernieres temps c'est la structure de la matière au niveau des microparticules, la nature de la liaison chimique. C'est dans ce domaine que, à l'aide de la physique (de la mécanique tout particulièrement), on a élaboré toute une série de théories à savoir, la théorie électronique de la covalence, la théorie de la résonance, etc., qui représentent le fondament scientifique des processus technologiques de l'industrie chimique moderne.

Un autre secteur, où la recherche scientifique en chimie connaît un grand essor, c'est celui des composés macromoléculaires. Les découvertes effectuées dans ce domaine ont frayé la voie aux possibilités d'obtenir des sucédanés des divers produits naturels, ainsi que de réaliser certains matériaux ayant de propriétés nouvelles, inconnues chez les matériaux naturels.

Une autre direction principale de la recherche scientifique en chimie c'est le perfectionnement des procédés technologiques utilisés, de même que l'élaboration des procédés nouveaux. Dans ce sens une grande importance présente le perfectionnement des méthodes de synthèse, l'utilisation sur une grande échelle de la catalyse, des radiations, des températures et des pressions très hautes et très basses, le perfectionnement de l'appareillage de mesure et de contrôle. C'est ce qui a contribué à l'élargissement du front de la recherche scientifique, au gain du temps nécessaire pour effectuer et faire valoir les recherches, pour diminuer la durée des processus de production, améliorer la qualité des produits et réduire leur prix de revient.

Par son ampleur et par sa profondeur, la recherche scientifique dans le domaine de la chimie a ouvert de larges perspectives au développement de l'industrie chimique.

3. Rôle de l'industrie chimique dans l'économie moderne

Il n'y a actuellement aucun domaine de la production matérielle, de l'activité sociale et culturelle où des produits et des processus chimiques ne soient employés à une échelle de plus en plus large.

L'alimentation, les vêtements, les habitations, les médicaments, les moyens de travail et ceux de diffusion de la culture supposent de nombreuses et variées applications de la chimie moderne.

L'application des résultats de la chimie constitue une des directions principales, actuelles et de grande perspective, du progrès technique. Par cette voie on assure d'une part la mise en valeur supérieure d'importantes ressources naturelles et l'élargissement de la base de matières premières, d'autre part le large emploi des produits et des procédés chimiques dans toutes les branches de l'économie.

Les résultats obtenus dans la recherche scientifique, l'élaboration de nouveaux procédés technologiques, ont permis d'élargir considérablement la base de matières premières de l'industrie chimique, de même que la sphère des ressources naturelles que l'on peut utiliser dans cette branche.

Le changement le plus important dans la base des matières premières de l'industrie chimique, est constitué par la substitution de la carbochimie par la pétrochimie, substitution qui prend pleinement des contours pendant la sixième décennie de notre siècle. À la suite de ce processus, dans l'industrie chimique de synthèse organique l'importance du charbon, des produits agricoles et du bois a baissé, tandis que celle des produits pétroliers et des gaz naturels a augmenté.

Cet aspect résulte aussi de la tendance présenté par la production de charbon, de pétrole et des gaz naturels tant dans les pays capitalistes que dans ceux socialistes. Ainsi, dans l'ensemble du système mondial capitaliste en 1964 par rapport à 1938, le niveau de la production de charbon, était de 1,14 fois plus élevé, celui du pétrole de 4,9 fois, celui de gaz naturel de 7,4 fois, tandis que dans l'ensemble du système mondial socialiste, en 1962 par rapport à 1950, la production de charbon était de 3,3 fois plus élevée, celle de pétrole de 4,7 fois, et celle de gaz naturel de 7,2 fois.

Grâce aux possibilités offertes à la mise en valeur des ressources de pétrole et de gaz et afin d'obtenir une gamme plus large de matériaux synthétiques, dans les pays développés la pétrochimie occupe une place prépondérante dans l'industrie chimique.

Ainsi aux États-Unis, le taux fourni par l'industrie pétrochimique représente plus de 60% ; en Angleterre la pétrochimie représentait en 1960, 50% de la production chimique

organique. Dans notre pays la pétrochimie occupait en 1965, 21% de l'industrie chimique et elle représentera en 1970, 36%. Sur le plan mondial, la production de l'industrie de la pétrochimie représentait ces dernières années environ 12% du total de l'industrie chimique, tandis que la valeur des produits pétrochimiques constituait plus de 28% de la valeur de la production chimique globale. Quoique relativement jeune, l'industrie chimique donnait en 1964 plus de 3 000 produits.

La base de matières premières dans l'industrie de la cellulose et du papier s'est beaucoup élargie par l'emploi d'une gamme vaste d'espèces de bois et de certaines plantes annuelles. Le développement de l'industrie chimique moderne, de la pétrochimie tout particulièrement, assure la diversification de la base de matières premières, la réduction du prix de revient des produits chimiques, tout en permettant à obtenir des produits de plus en plus importants. Les calculs démontrent qu'en divers pays les produits obtenus dans l'industrie pétrochimique sont, par rapport aux produits similaires obtenus dans l'industrie carbochimique, de 40% meilleur marché pour l'éthylène, de 15% pour la benzène et de 35% pour le xylène.

Il est concluant pour le haut degré de mise en valeur des ressources naturelles par l'intermédiaire de la pétrochimie le fait que de la même quantité de pétrole on peut obtenir de la benzénacétone ou de l'alcool éthylique ayant une valeur de 20 fois plus grande, du caoutchouc et des masses plastiques ayant une valeur de 40 fois plus grande, et des fibres synthétiques ayant une valeur de plus de 100 fois plus grande que celle du pétrole utilisé.

Dans notre pays, la mise en valeur supérieure des ressources naturelles au cours de l'actuel plan quinquennal est traduite par le fait que, du gaz méthane en valeur de 1 leu on peut obtenir de la polychlorure de vinyle en valeur de 60 lei, qui transformée atteint la valeur de 120 lei, et si l'on en fabrique des fibres de mélana, leur valeur s'élève a 160 lei environ.

Grâce au puissant essor enregistré par l'industrie chimique contemporaine, ou assure une diversification de la base de matières premières de l'économie nationale de chaque pays. On apprécie que chaque année font leur apparition, dans le monde entier, plus de 400 de nouveaux produits chimiques et surtout le nombre des produits secondaires se trouve considérablement augmenté.

En 1964 l'industrie chimique de notre pays fabriquait, au total, plus de 5 500 produits. La contribution actuelle, importante, de l'industrie chimique et l'élargissement de la base de matières premières est prouvée par le fait qu'une partie considérable de la production de cette branche (plus de la moitié, dans notre pays) est destinée aux autres branches économiques. L'utilisation des produits fournis par l'industrie chimique dans les autres branches de l'économie nationale contribue à la diversification de la production, à l'amélioration de la qualité et à la réduction du prix de revient des produits.

De même, l'utilisation des méthodes chimiques dans les autres branches de l'économie contribue à diminuer la durée du cycle de production et à augmenter la productivité du travail.

En sidérurgie on a créé des installations de grande capacité qui utilisent l'hydrogène provenant du gaz méthane afin d'obtenir du minerai de fer par voie directe. On obtient un fer d'une haute pureté, de même que la mise en valeur de tous les éléments utiles du minerai, par le procédé de la chloruration des minerais. Les méthodes chimiques jouissent d'un large emploi dans la métallurgie des métaux non ferreux aussi. Dans l'industrie des constructions de machines, en électronique, de même qu'en électrotechnique on utilise de nombreuses pièces confectionnées en matières plastiques. Si, au début, les masses plastiques ont remplacé dans cette branche les métaux ferreux et non ferreux elles sont devenues ensuite des matériaux irremplaçables, grâce à leurs qualités et à leur efficience économique.

À la suite de ce processus, dans la période d'après guerre, le pourcentage des matériaux plastiques dans la consommation mondiale de matériaux naturels et artificiels s'est élevé de 3 à 15% tandis que celui de métaux ferreux s'est réduit de 90% a 80% et celui de métaux non ferreux de 7% à 5%.

On pourrait donc affirmer que l'humanité est en train de passer de l'âge de fer à un nouvel âge de son historie — celui des matériaux plastiques.

Dans l'industrie de la construction des machines et dans l'industrie des moyens de transport surtout, le caoutchouc synthétique jouit, lui aussi, d'un large emploi, assuré par l'industrie chimique.

Sur le plan mondial, en 1963, la production du caoutchouc synthétique a représenté 55% du total de la production de caoutchouc.

Les matériaux plastiques sont largement utilisés dans les autres branches. Dans les constructions industrielles et civiles les matières plastiques (bétons légers, polystyrène, résines d'uréthanes) remplacent de plus en plus, à très bons résultats, les matériaux classiques.

Dans l'industrie de transformation du bois, l'emploi des résines et des celles synthétiques a pris une grande extension pour la production des plaques agglomérées et fibroligneuses, pour le finissage des meubles, etc.

L'industrie chimique révolutionne d'une manière continue la base de matières premières de l'industrie textiles. Les fibres polyamidiques remplacent la soie, les fibres cellulosiques, celles de résines polyestères, polypropiléniques, vinyliques, polynosiques, remplacent le coton, tandis que les fibres polyacrylonitriliques prennent la place de la laine.

Toutes ces matières synthétiques ont des proprietés supérieures aux celles des matières premières naturelles. De même, le remplacement des fibres naturelles par des fibres chimiques apporte d'importantes économies de travail.

Le total des frais de travail nécessaires pour produire une tonne de coton est d'environ 1 660 homme/heures ; pour une tonne de laine lavée il est besoin de 7 000 hommes/heures et pour une tonne de soie naturelle de 35 000 homme/heures.

On emploie à peine 800 homme/heures pour produire une tonne de soie artificielle de viscose.

Grâce à ces avantages, l'importance des fibres chimiques par égard aux autres fibres textiles est en permanente ascension.

En 1962 la production mondiale de fibres chimiques a représenté 25% de la quantité totale des fibres textiles.

En U.R.S.S. ce taux a été de 12,5%, aux États-Unis de 23,7%. Dans notre pays le rôle des fibres chimiques dans l'ensemble des fibres textiles employées a augmenté de 4,3% en 1950, à 27,3% en 1963.

L'industrie chimique joue un grand rôle dans le développement d'une agriculture intensive, dans la réalisation d'une production végétale et animale élevée et constante, dans la solution du problème de l'alimentation de la population. La pratique des pays ayant une économie développée montre que les engrais chimiques et les substances antiparasitaires assurent 60% du rendement en céréales à l'hectare (le reste de 40% étant réalisé par la mécanisation et les autres mesures agrotechniques). C'est dans les pays où les engrais chimiques sont le plus employés qu'on obtient des récoltes les plus riches.

Les données contenues dans le tableau 2 (pour 1963), concernant plusieurs pays européens, sont significatives.

Tableau 2

Pays	Consommation d'engrais chimique à l'ha agricole (kg)	Productions moyennes à l'ha (kg)			
		Blé	Maïs	Betterave	Pommes de terre
R. F. A.	186	3 510	3 640	42 600	27 900
R. D. A.	168	3 000	—	26 000	17 300
France	87	2 660	4 060	37 600	18 900
Tchécoslovaquie	85	2 460	2 930	31 400	13 000
Hongrie	43	1 560	2 760	29 000	8 700
Bulgarie	31	1 590	3 620	16 500	9 600
Roumanie	13	1 320	1 780	12 900	8 400

Dans notre pays les fermes agricoles où l'on utilise à présent un volume plus élevé d'engrais chimiques à l'ha, ont obtenu des rendements de beaucoup plus élevées que ceux moyens. Ainsi, en 1963 par exemple (année agricole de sécheresse), dans ces unités agricoles le rendement moyen en blé à l'ha a été de 49,2% plus élevé que celui moyen du pays; le rendement en maïs a été de 61% plus élevé.

L'emploi des substances antiparasitaires, fournies par l'industrie chimique à l'agriculture, y fait éviter de grandes pertes. On apprécie que les parasites détruisent jusqu'à 1/4 de la production de céréales, légumes et fruits.

L'industrie chimique contribue aussi au développement de la zootechnie, en enrichissant sa base fouragère et en l'assurant de biostimulateurs et de médicaments.

Il en résulte que la chimie joue un rôle multilatéral, de plus en plus important, dans l'économie moderne de chaque pays, dans la création de nouvelles possibilités afin de satisfaire les besoins de la population.

4. Place de l'industrie chimique dans l'ensemble du développement industriel

Dans les pays développés au point de vue industriel, tout comme dans ceux en plein développement, la chimie occupe une place de premier ordre dans l'économie nationale. J. D. Bernal [12] apprécie qu'à la suite des transformations survenues au cours de notre siècle „l'industrie chimique vient tout de suite après l'industrie électrotechnique, qu'elle est devenue l'industrie centrale de la civilisation moderne".

Si jadis l'industrie chimique se résumait à fournir une série de matières auxiliares aux autres branches de l'économie, à présent c'est elle qui assure une grande quantité de matières premières de base à un nombre important de branches, contribuant de plus en plus à la réalisation du progrès technique dans tout l'ensemble de l'économie nationale.

L'industrie chimique contemporaine se distigue nettement par rapport à celle du siècle précédent. Parmi les traits principaux de l'industrie chimique moderne on peut citer: l'organisation de la production en flux continu, l'utilisation des capacités des production optimes et le niveau élevé de mécanisation et d'automation, ce qui assure une grande efficience économique, l'intensification de la combinaison de la production, en vue d'obtenir une mise en valeur supérieure des matières premières.

Vu le rôle croissant de l'industrie chimique dans presque tous les pays du monde on fait de grands efforts pour développer à un rythme soutenu cette branche, ce qui se reflète dans le taux important des investissements destinés à l'industrie chimique.

Au cours des années 1955–1961 ce taux a été aux États-Unis de 7,3%, en Angleterre de 10,1%, dans la R.F.A. de 12,9%, en Italie (en 1961) de 15%.

En 1964 le taux de l'industrie chimique a représenté dans certains pays socialistes par rapport à l'ensemble des investissements industriels, 5,7% en Bulgarie, 12,3% en Pologne, 15,2% en Roumanie, 15,2% en Hongrie.

Le développement de l'industrie chimique entraîne une partie toujours plus grande de la force de travail de chaque pays.

Grâce à la dynamique très élevée de cette branche, le nombre des salariés qui y sont occupés double tous les dix ans environ (sur le plan mondial). Dans notre pays, au cours de la période 1961–1965 (dans un intervalle de 15 ans donc) le nombre des salariés de l'industrie chimique a augmenté de 4,25 fois, tandis que, dans toute l'industrie l'augmentation a été de 2,05 fois.

L'industrie chimique moderne attire non seulement un nombre toujours croissant de forces de travail, mais elle les en assure aussi une utilisation supérieure. Cela s'explique par le niveau technique élevé des entreprises chimiques, par la haute qualification des ouvriers qui y sont employés, par l'organisation supérieure de la production et du travail. L'industrie chimique se situe parmi les branches les plus dynamiques de l'industrie. Elle se développe de beaucoup plus rapidement que l'industrie de transformation considérée dans son ensemble. Sur le plan mondial, la production de l'industrie de transformation a été en 1962 de 3,2 fois plus élevée par rapport à l'année 1950, tandis que la production de l'industrie chimique a augmentée de 5,2 fois. Au cours de la période 1951–1965 le rythme moyen anuel de développement de l'industrie chimique, comparé à celui des industries des constructions de machines et de transformation de métaux a évolué comme il en résulte du tableau 3.

Tableau 3

Le pays	Le rythme moyen annuel pour			Le coefficient de devancement par l'industrie chimique par rapport à	
	le total de l'industrie	l'industrie chimique	la construction de machines et l'industrie de transformation des métaux	toute l'industrie	l'industrie des constructions de machines et transformation des métaux
Angleterre	3,1	5,2	4,0	1,67	1,30
France	5,7	11,3	6,7	1,98	1,68
	8,1	10,9	9,9	1,34	1,10
États-Unis	4,4	7,4	5,7	1,68	1,29
Bulgarie	13,7	21,2	20,4	1,54	1,03
Tchécoslovaquie	9,0	14,6	13,0	1,62	1,12
R. D. A.	9,5	10,1	12,2	1,06	0,82
Yougoslavie	10,3	16,6	—	1,60	—
Pologne	11,4	16,6	21,1	1,45	0,78
Roumanie	13,3	22,1	18,8	1,60	1,17
Hongrie	9,5	17,4	11,8	1,83	1,47
U. R. S. S.	10,7	14,5	14,5	1,36	1,00

Il en résulte de l'analyse des donnés ci-dessus que le rythme de développement de l'industrie chimique dévance considérablement non seulement celui de la production mais aussi le rythme des autres branches jouant un rôle decisif dans le progrès technique (dans la plupart des cas).

Dans l'industrie chimique contemporaine les rythmes les plus élevés sont enregistrés par les sous-branches nouvelles, dont la production a un rôle de plus en plus important dans l'accomplissement du progrès dans l'économie tout entière.

Sur le plan mondial la dynamique de la production dans certaines sous-branches de l'industrie chimique se présente de la manière indiquée dans le tableau 4.

Tableau 4

Produit	Période	Dynamique	Source des données
Engrais chimiques	1951—1963	2,5 fois	[17]
Masses plastiques	1950—1962	5,7 fois	[5]
Fibres synthétiques	1950—1964	24,4 fois	[11]
Détergents synthétiques	1938—1959	203,3 fois	[5]

La place de l'industrie chimique dans le développement de l'industrie considérée dans son ensemble est synthetisée dans la plus grande mesure par le taux que cette branche fournit dans l'ensemble de l'industrie. L'évolution de ce taux pour un certain nombre de pays est donné dans le tableau 5.

Tableau 5[1])

Le pays	La première année			
	l'année		l'année	
Angleterre	1935	5,8	1963	9,1
France	1938	8,0	1963	11,4
R. F. A.	1936	9,3	1963	11,5
Italie	1948	9,7	1963	19,2
Japon	1938	7,5	1963	8,9
États-Unis	1948	4,9	1963	9,1
Bulgarie	1950	2,8	1965	7,2
Tchécoslovaquie	1950	4,1	1964	6,5
R. D. A.	1955	13,7	1965	16,0
Pologne	1950	3,8	1965	8,0
Roumanie	1950	3,1	1965	10,0
Hongrie	1957	7,5	1964	9,6

[1]) Pour les pays capitalistes [15]; pour les pays socialistes [16].

Ces données montrent que dans tous les pays le poids spécifique de l'industrie chimique considérée dans l'ensemble de la production industrielle a considerablement augmenté, ce qui met en évidence le rôle toujours croissant de cette branche dans le développement de l'économie.

Le développement soutenu de l'industrie chimique crée de grandes posibilités, non seulement pour satisfaire les besoins intérieurs de chaque pays, mais aussi pour faire participer de plus en plus le pays respectif à la division internationale du travail.

La fructification de ces posibilités est concrétisée dans l'augmentation du taux de l'exportation des produits créés par l'industrie chimique. En 1960 ce taux représentait 62,5% en Suisse, 56,2% en Hollande, 53,2% en Belgique, 47% en Norvège, 25,6% en R.F.A., 18,4% en Angleterre, 17,9% en France, 7,9% aux États-Unis. Dans notre pays en 1965 20% de la production marchandise de l'industrie chimique a été réservée à l'exportation; jusqu'en 1970 ce taux augmentera à 25% environ.

Le taux fourni par l'industrie chimique dans l'exportation totale du pays a représenté près de 7% en 1967, et l'on prévoit qu'il représentera en 1970 près de 17%.

5. Conclusions

Les aspects analysés dans ce travail mènent à la conclusion que grâce au développement intense de la recherche scientifique, dans le domaine de la chimie, de l'industrie chimique, une véritable révolution se produit dans la base de matières premières de l'économie et de larges posibilités sont créées en vue d'intensifier le processus de l'application de la chimie dans la production.

Institut Polytechnique de Jassy,
Chaire d'Organisation et de Planification,
Chaire d'Économie Politique

BIBLIOGRAPHIE

1. Ceauşescu N., *Cuvîntare la Consfătuirea pe țară a lucrătorilor din industria chimică.* Ed. polit., Buc., 1967.
2. Gaston Marin, Gh. *Dezvoltarea industriei chimice și sarcinile ce revin acestei ramuri din Documentele Congresului al IX-lea al P.C.R.* „Scînteia", 4 iulie 1967.
3. Scarlat C., *Chimia pe noi trepte ale dezvoltării.* Viața economică, 1966, *28.*
4. Roman V., *Revoluție industrială în dezvoltarea societății.* Ed. șt., Buc., 1965, pp. 85–101, 168–173.
5. Florescu M., *Chimia și producția modernă.* În *Știința–forță de producție.* Ed. polit., Buc., 1964.
6. — *Avintul industriei chimice în anii cincinalului.* Probl. econ., 1965, *9.*
7. — *Dezvoltarea industriei chimice românești.* Lupta de clasă, 1964, *4.*
8. Sahini V., *Unele probleme teoretice actuale ale chimiei.* Lupta de clasă, 1965, *3.*
9. Iancu A., *Chimizarea–direcție principală a progresului tehnic.* Probl. econ., 1964, *12.*
10. Neniţescu C., Simionescu C., Drăgulescu C., *Chimia în învățămîntul superior.* Lupta de clasă, 1965, *11.*
11. *** *Anuarul statistic al Republicii Socialiste România.* Ed. șt., Buc., 1966.
12. Bernal J. D., *Știința în istoria societății.* Ed. polit. Buc., 1964, pp. 578–582, (trad. din l. engl.).
13. *** *Dezvoltarea economiei țărilor socialiste.* Probl. ale păcii și socialismului, 1963, *8,* (supliment).
14. *** *Economia țărilor membre ale CAER în etapa actuală* (sinteză). Probl. ale păcii și socialismului, 1966, *1.*
15. *** *Мир капитализма.* Справочник, М., 1964.
16. *** *Экономия химической промышленности капиталистических стран.* Справочник, М., 1965.
17. *** *Страны социализма и капитализма в цифрах.* М., 1966.
18. *** Annuaire F. A. O., t. **XVIII**, Rome, 1964.

ROLUL ŞI LOCUL INDUSTRIEI CHIMICE ÎN CADRUL REVOLUŢIEI ŞTIINŢIFICE-TEHNICE CONTEMPORANE

(Rezumat)

Amploarea cercetării științifice în domeniul chimiei și dezvoltarea intensă a industriei chimice conduc la o adevărată revoluționare a bazei de materii prime a economiei și creează largi posibilități pentru intensificarea procesului de chimizare a producției.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

Electrotehnică. Electronică

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том XIV (XVIII), вып. 3—4, 1968

Электротехника. Электроника

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

Electrical Engineering. Electronics

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

C. Z. 537.226.2; 547.586.2

PROPRIETĂŢILE DIELECTRICE ALE UNOR DERIVAŢI SULFAMIDAŢI AI ACIZILOR FENOXIACETICI

DE

EMIL LUCA, GH. BOTEZ, OVIDIU SCUTARU
şi ANASTASIA VASILIU

Comunicare prezentată în sesiunile ştiinţifice ale Institutului politehnic din Iaşi, din 3-5 februarie 1965 şi 28-30 septembrie 1967

1. Consideraţii generale

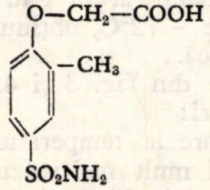
Absorbţia dipolară Debye a compuşilor organici a fost atribuită de către Bottcher [1], Smith [2] şi alţii, orientării în cîmpul de înaltă frecvenţă a moleculelor sau a grupurilor OH, C=O, COOH etc.

Întrucît acest mod de a interpreta absorbţia dipolară Debye în cazul compuşilor organici era susceptibil de a fi criticat (Sack [1]) s-a încercat de către M. Freyman [3], Yager şi Morgan [4], M. Freymann şi J. Le Bot [5], în urma cercetărilor experimentale efectuate asupra camforului natural şi sintetic, cît şi asupra triofenului, furnizarea unei explicaţii pe baza electronilor legaţi în moleculă.

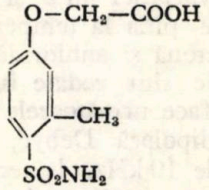
În scopul confirmării acestei explicaţii ne-am propus să studiem proprietăţile dielectrice, respectiv absorbţia dipolară Debye a derivaţilor sulfamidaţi ai acizilor fenoxiacetici [6], care prezintă atît un dipol permanent dat de grupul metaxicarboxil, cît şi posibilităţi de deplasare a electronilor în cadrul moleculei respective.

2. Rezultate experimentale

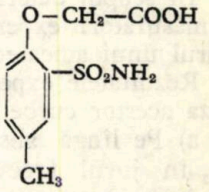
Măsurările experimentale au fost efectuate asupra a trei compuşi organici noi şi anume asupra a trei derivaţi sulfamidaţi ai acizilor fenoxiacetici la care grupul CH_3 ocupă succesiv poziţiile *orto*, *meta* şi *para*:



acidul 4 sulfanamido-2-metil-fenoxiacetic
(I)



acidul 4 sulfanamido-3-metil-fenoxiacetic
(II)



acidul 2 sulfanamido-4-metil-fenoxiacetic
(III)

Valorile lui ε' şi tg δ au fost măsurate în gama de frecvenţe 100 Hz...10 MHz cu ajutorul unei punţi „Tesla", a unui montaj în punte Wien realizat de noi, pentru domeniul 100 Hz...20 kHz şi a unui Q-metru „Tesla" pentru domeniul 30 kHz...10 MHz.

De oarece datele experimentale permiteau determinarea unei permitivităţi aparente, rezultată din pulberea substanţei respective şi aerul dintre componenţii pulberii, ce varia cu gradul de tasare al acesteia, am determinat permitivitatea reală a pulberilor utilizînd formula amestecurilor dată de Wiener [7], cercetată de Bruggemann [8] şi modificată de Oehme [9]:

$$2Vx^2 + (1 - \varepsilon_1' + V\varepsilon_1')x^2 + (2 - 2V_1 - 2\varepsilon_1')x - V\varepsilon_1 = 0,$$

în care: ε_1' — permitivitatea amestecului de pulbere şi aer, determinată de noi în măsurătorile experimentale, iar $V = V_1/V_2$ unde: V_1 — volumul pulberii, rezultat din raportul $V_1 = m/\rho$, m fiind masa pulberii iar ρ — masa specifică a acesteia, V_2 — volumul ocupat de amestecul pulbere şi aer între armăturile condensatorului cilindric.

Cea mai mică rădăcină pozitivă din cele trei soluţii reale ale ecuaţiei de mai sus furnizează valoarea permitivităţii reale a produsului respectiv după relaţia:

$$\varepsilon' = x^2.$$

Curbele de variaţie ale lui ε' şi tg δ ale compuşilor I şi III, funcţie de frecvenţă, pentru diverse temperaturi constante, sînt redate în fig. 1 şi 2.

Analiza acestor curbe arată existenţa unei zone de dispersie, datorită absorbţiei dipolare Debye, care se deplasează spre frecvenţe cu atît mai înalte cu cît creşte temperatura. În zonele de dispersie, pierderile dielectrice, exprimate prin tg δ, prezintă un maxim plasat spre regiunea inferioară a pantei permitivităţii.

Existenţa unei zone de dispersie în jurul frecvenţei de 10 kHz se datoreşte catenei laterale metaxicarboxilice, ce prezintă un dipol permanent care nu exercită o influenţă vizibilă asupra deplasărilor electronilor.

Din curbe se observă că valoarea absolută a permitivităţii este mai mare în cazul produsului I (CH_3 în poziţie *orto*) şi ceva mai redusă în cazul produsului III (CH_3 în poziţie *para*). Valoarea cea mai redusă a lui ε' a fost obţinută la produsul II (CH_3 în poziţia *meta*).

În scopul determinării variaţiei lui ε' şi tg δ cu temperatura s-au efectuat măsurători experimentale pînă la temperaturi de —72°C, obţinute cu ajutorul unui amestec de acetonă şi anhidridă carbonică.

Rezultatele experimentale sînt redate în curbele din fig. 3 şi 4. Din analiza acestor curbe se pot face următoarele constatări:

a) Pe lîngă absorbţia dipolară Debye, care apare la temperatura de 20°C, în jurul frecvenţei de 10 kHz, la temperaturi mult mai scăzute se pune în evidenţă un nou proces de dispersie, similar unei schimbări de fază.

Această nouă dispersie a permitivităţii se manifestă printr-o creştere bruscă a permitivităţii ε', la o anumită temperatură (punct critic), care de

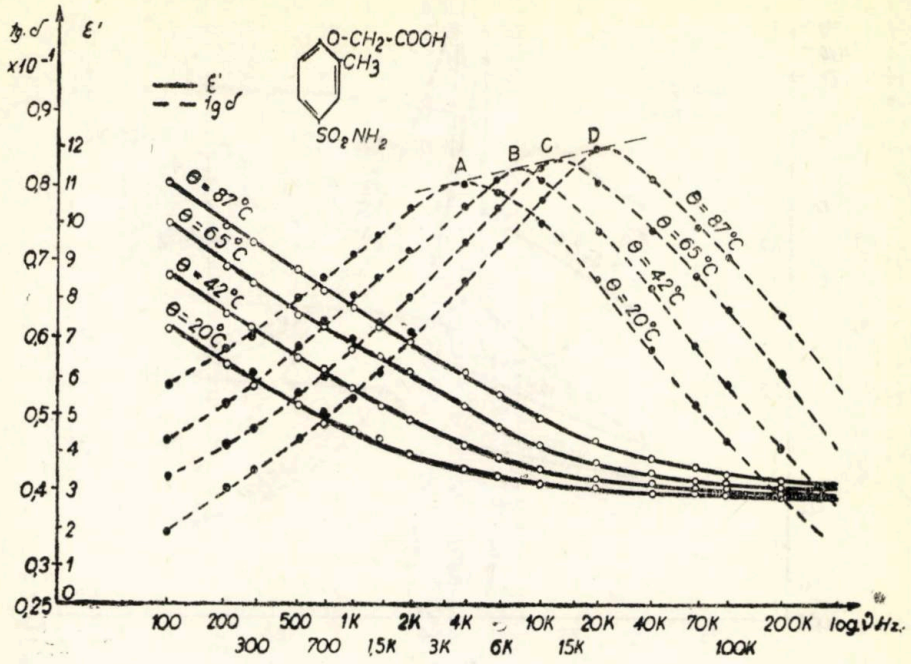

tg δ
ε'
x10⁻¹
ε'
tg δ
O-CH₂-COOH
CH₃
SO₂NH₂
A
B
C
D
θ=87°C
θ=65°C
θ=42°C
θ=20°C
100 200 500 1K 2K 4K 10K 20K 40K 70K 200K log ν Hz
300 700 1,5K 3K 6K 15K 100K

Fig. 1

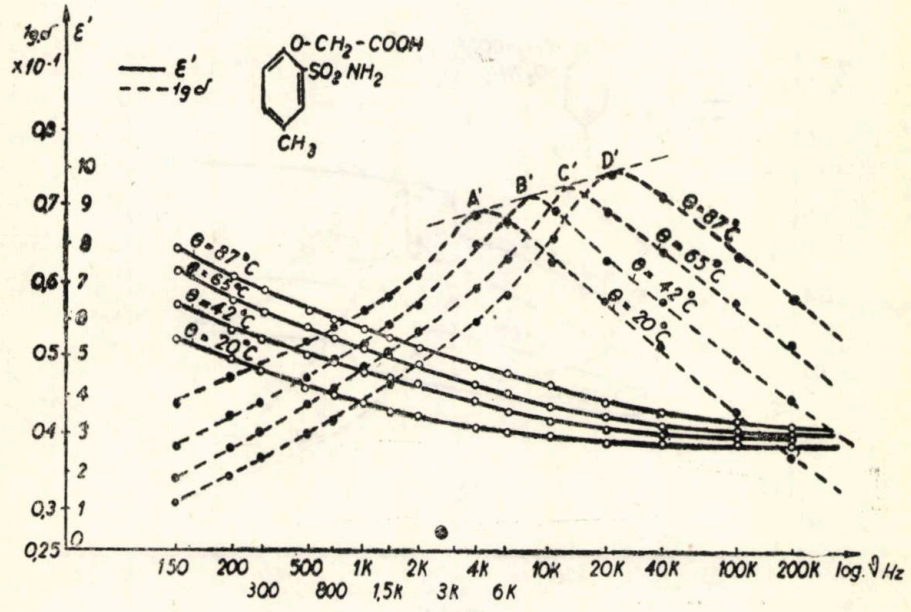

tg δ
ε'
x10⁻¹
ε'
tg δ
O-CH₂-COOH
SO₂NH₂
CH₃
A'
B'
C'
D'
θ=87°C
θ=65°C
θ=42°C
θ=20°C
150 200 500 1K 2K 4K 10K 20K 40K 100K 200K log ν Hz
300 800 1,5K 3K 6K

Fig. 2

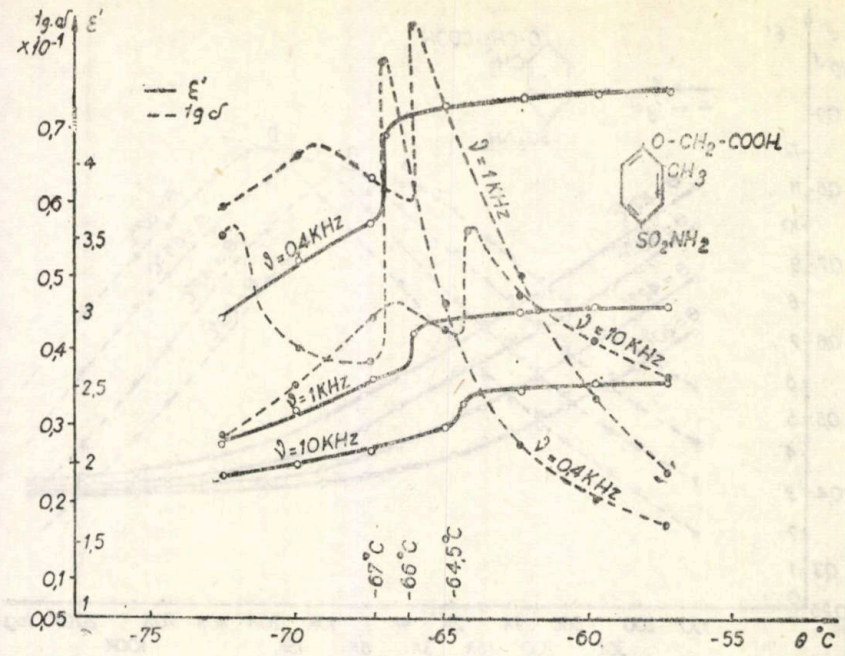

tg δ x10⁻¹
ε'
ε'
tg δ
O-CH₂-COOH
CH₃
SO₂NH₂
ν=0,4KHz
ν=1KHz
ν=10KHz
ν=10KHz
ν=1KHz
ν=0,4KHz
-67°C
-66°C
-64,5°C
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0,05
4
3,5
3
2,5
2
1,5
1
-75
-70
-65
-60
-55
θ°C

Fig. 3

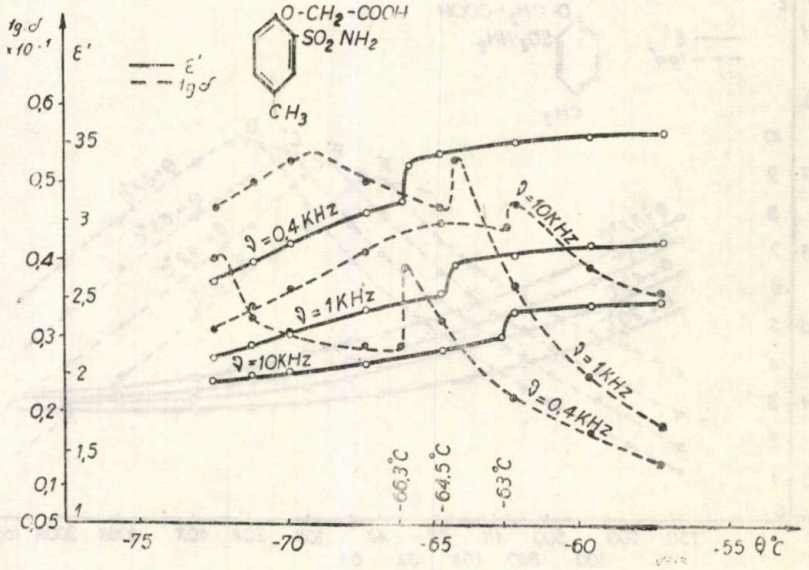

tg δ x10⁻¹
ε'
ε'
tg δ
O-CH₂-COOH
SO₂NH₂
CH₃
ν=0,4KHz
ν=1KHz
ν=10KHz
ν=10KHz
ν=1KHz
ν=0,4KHz
-66,3°C
-64,5°C
-63°C
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0,05
3,5
3
2,5
2
1,5
1
-75
-70
-65
-60
-55 θ°C

Fig. 4'

asemenea se deplasează spre temperaturi mai ridicate cu cît frecvența cîmpului de măsurare este mai înaltă.

Pierderile dielectrice, exprimate prin tg δ, prezintă, în punctul în care se produce schimbarea de fază, un maxim, ceea ce pune și mai bine în evidență zona respectivă de dispersie. Maximele lui tg δ se deplasează de asemenea spre temperaturi mai ridicate, cu cît frecvența cîmpului de măsurare crește.

Această zonă de dispersie, determinată de o eventuală schimbare de fază, apare mai evidentă la compusul I (CH_3 în poziția *orto*), mai puțin evidentă la compusul III (CH_3 în poziția *para*) și nu apare de loc la compusul II (CH_3 în poziția *meta*).

Aceste diferențe între comportarea celor trei izomeri, la temperaturi cuprinse între $-70°$ și $-60°C$, sub acțiunea unui cîmp electric de înaltă frecvență, se pot explica, conform teoriei electronice, prin structura chimică diferită a izomerilor și prin influența reciprocă a atomilor și grupurilor de atomi din moleculă.

Datorită încălzirii și sub acțiunea cîmpului electric are loc o deplasare de electroni, care conduce la schimbarea structurii electronice a moleculei, cu formarea unei structuri limită în punctul critic (saltul brusc din curbe). Această structură este diferită de la un izomer la altul.

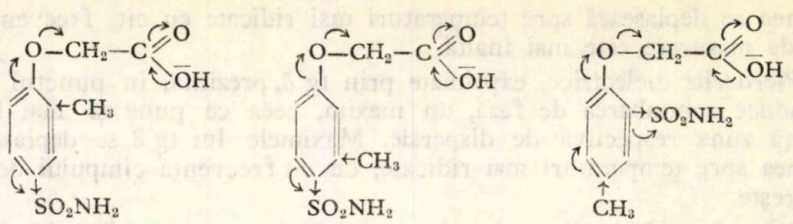
Gruparea metil (CH_3) și gruparea sulfonamidică (SO_2NH_2), grefate în diferite poziții pe nucleul benzenic, influențează schimbările electronice, atît prin caracterul lor diferit cît și prin pozițiile lor reciproce din moleculă.

Se știe [10] că gruparea metil (CH_3) exercită asupra nucleului un efect inductiv pozitiv (respingător de electroni, deci $+M$), pe cînd gruparea sulfonamidică (SO_2NH_2), avînd o configurație electronică nestabilă, exercită un efect inductiv negativ (atrăgător de electroni, deci $-M$).

Prezența acestor grupări, precum și a oxigenului eteric, va determina o polarizare statică a nucleului benzenic, manifestată prin mărirea densității electronice în anumite poziții. În polarizarea statică influența grupei carboxil asupra repartiției electronilor în nucleul benzenic nu este hotărîtoare, întrucît ea se stabilizează parțial, ca urmare a concurenței efectului $+M$ al grupei ON și a efectului $-M$ al oxigenului carbonilic.

În polarizarea dinamică deplasarea electronilor se produce spre un capăt al catenei, după direcția cîmpului exterior, și în acest caz sensul de deplasare al electronilor este dictat de oxigenul carbonilic, de oarece legătura C=O este mai polarizată decît legătura C—O în eter și hidroxil.

Prin urmare, sub acțiunea cîmpului electric, electronii din nucleul benzenic devin mobili suferind deplasări, în sensul indicat de săgeți, care conduc la apariția unor densități electronice diferite de aceea existentă inițial în moleculă:



I II III

Datorită acestor densităţi electronice, diferite de cele existente iniţial în moleculă, ce apar la punctul de temperatură critic, se schimbă polaritatea moleculei, ceea ce justifică salturile corespunzătoare în ceea ce priveşte valorile lui ε' şi tg δ la compuşii I şi III. La compusul II deplasarea de electroni fiind permanentă, datorită vecinătăţii grupei metil (respingătoare de electroni), de gruparea sulfonamidică (atrăgătoare de electroni), nu se produc salturile respective în ceea ce priveşte valorile lui ε' şi tg δ.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de fizică,
Catedra de industrii organice

BIBLIOGRAFIE

1. Freymann R., Soutif M., *La spectroscopie hertzienne appliquée à la chimie.* Dunod, Paris, 1960, p. 60.
2. Smith J., *Electric Dipole Moment.* Butherworth, 1955.
3. Freymann M., Chem J., Phys., 1952, 20, p. 1970.
4. Yager A. W., Morgan O. S., J. Amer. Chem. Soc., 1945, 57, p. 207.
5. Freymann M., Le Bot J., J. Phys., 1957, 18, *6-8.*
6. Botez Gh., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1960, VI (X), *3-4*, p. 133.
7. Wiener O., Phys. Ztschr., 1926, 27, S. 115.
8. Bruggemann, Ann. Phys., 1935, 24, S. 636.
9. Oehme F., Chemische Technik, 1950, 2, S. 349.
10. Neniţescu C. D., *Chimie organică.* Vol. I, Ed. tehn., Buc., 1956, p. 103.

PROPRIÉTÉS DIÉLECTRIQUES DES DÉRIVÉS SULFONAMIDÉS DES ACIDES PHÉNOXYACÉTIQUES

(Résumé)

On étudie la variation de la permittivité ε' et des pertes diélectriques exprimées par tg δ, chez les trois derivés sulfonamidés des acides phénoxyacétique ci-dessous: l'acide sulfonamido-4-méthyl-2-phénoxyacétique, l'acide sulfonamido-4-méthyl-3-phénoxyacétique et l'acide sulfonamido-2-méthyl-4-phénoxyacétique, tant en fonction de la température (−72°...+87°C), qu'en fonction de la fréquence (100 Hz...10 MHz).

L'analyse des courbes tracées en fonction de fréquence permet la localisation, dans le cas des produits mentionnés, d'une zóne de dispersion (ADD) aux environs de la fréquence de 10 kHz, créée par la chaîne latérale métaxycarboxylique qui présente un dipôle permanent.

De l'analyse des courbes tracées en fonction de la température, on constate une comportation différente des trois isomères, compte tenu qu'à la suite du chauffage et de l'application du champ électrique extérieur se produit un déplacement des électrons qui conduit au changement de la structure électronique de la molécule, avec la formation de la structure limite au point critique, qui diffère pour chaque isomère.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

D. K. 538.561

PARAMETRISCHE SCHWINGUNGEN DER PARAMETRONEN IN PUSH-PULL

VON

GH. SAVIN, NORBERT ZITRON und DANA BĂLAN

1. Vorwort

Alle parametrische Schwingungsgeneratoren arbeiten mit demselben Prinzip: es wird Energie in einem Schwingungskreis mittels periodischer Änderung dessen Induktivität oder Kapazität gepumpt. Falls der Kondensator oder die Spule nichtlineare Elementen mit periodisch änderenden Parametern sind wird der parametrische Schwingungsgenerator „Parametron" genannt.

Obwohl das Prinzip der parametrischen Schwingung und Verstärkung schon seit lange bekannt ist (Lord Rayleigh, 1894) begannen die praktischen Anwendungen der Forschungen vor kurzem zu erscheinen. Zum ersten Mal (1954) verwendete E. Goto den subharmonischen parametrischen Oszillator (für $f/2$) als Speicherelement in den Rechenmaschinen [1].

Eine analyse der Arbeitsweise, des induktiven parametrischen Oszillators, an hand der Unterschwingungen 3, 4 und 5, also mit 3, 4 oder 5 verschiedenen Schwingungsphasen, wurde von dem Kollektiv Liasko gemacht [2].

Um logische Elemente mit mehreren stabilen Ständen zu verwirklichen haben wir eine praktische Parametronschaltung, die eine leichte Erzeugung der 9–nten Unterschwingung, also von 9 stabilen Schwingungszustände, gestattet, untersucht und vorgeschlagen [3].

Ist die Theorie des parametrischen Oszillators, der sich auf die zweite Unterschwingung auswirkt, auf Grund der Mathieuschen Gleichung für die Projektierung zufriedenstellend, so ist nicht das gleiche über die Theorien der parametrischen Erzeugung von Unterschwingungen mit grösserer Hochzahl, die sich mit der gleichen Schaltung (Abb. 1) erzeugen, zu sagen.

Wenn man die Hystereseschleife durch die grundlegende Magnetisierungskennlinie approximiert und wenn man die Änderungskurve der dynamischen Induktivität, für das Parametron, das bei sinusförmigen Strom arbeitet (Abb. 2) darstellt, kann man schreiben

$$L_d = L = L_0 + \frac{\Delta L}{2} \cos \omega t = L_0 (1 + m \cos \omega t), \tag{1}$$

wobei $m = \Delta L / 2L_0$.

Der erste Kirchhoffsche Satz für den Resonanzkreis in welchen die parametrische Schwingung erschien (Abb. 3) ergibt:

$$i + i' + i'' = 0, \tag{2}$$

oder:

(3) $$i + \frac{u}{R} + C\frac{du}{dt} = 0,$$

wobei $u = d(Li)/dt$.

Durch Einsetzung erhält man:

(4) $$i + \frac{1}{R}\cdot\frac{d}{dt}(Li) + C\frac{d^2}{dt^2}(Li) = 0$$

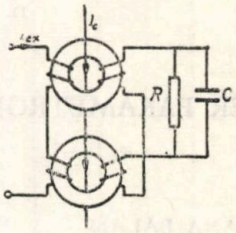


Abb. 1

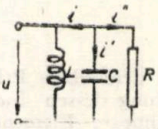


Abb. 3

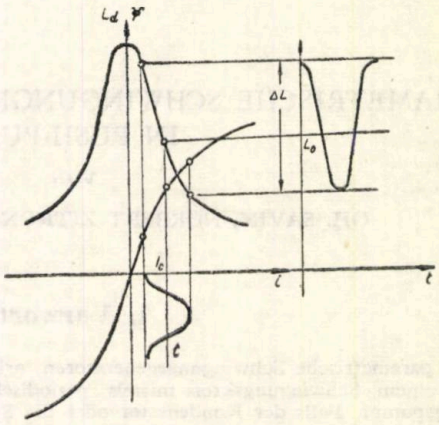


Abb. 2

Bezeichnend $i(1 + m\cos\omega t) = iL/L_0 = I$, folgt:

(5) $$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{1}{RC}\cdot\frac{dI}{dt} + \frac{I}{L_0C(1 + m\cos\omega t)} = 0,$$

oder:

(6) $$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{1}{RC}\cdot\frac{dI}{dt} + \frac{I}{L_0C}(1 - m\cos\omega t) = 0.$$

Mit der Substitution $I = ye^{-\delta t}$, wobei $\delta = 1/2RC$, erhält man den Ausdruck:

(7) $$\frac{d^2y}{dt^2} + y(\omega_0^2 - \delta^2 - \omega_0^2 m\cos\omega t) = 0,$$

wobei $\omega_0^2 = 1/LC$.

Die Gleichung (7) ist eine Mathieusche Gleichung dessen drei ersten instabilen Lösungen für

(8) $$\omega_{01} = \frac{1}{2}\omega, \quad \omega_{02} = \omega, \quad \omega_{03} = \frac{3}{2}\omega$$

erhalten werden.

Die Versuche zeigen, dass im Falle der Erregung des Parametrons mit einem sinusförmigen Strom können auch andere Unterschwingungen deren Kreisfrequenz ein gerader Bruchteil der Erregungssignalsfrequenz ist, erscheinen. Die Erzeugung dieser Unterschwingungen kann nicht durch die instabilen Lösungen (6) der Mathieuschen Gleichung erklärt werden.

Wir haben bemerkt, dass wenn man das Parametron bei sinusförmiger Spannung erregt, erhält man experimentell die ganze Reihe der Unterschwingungen $f/2$, $f/3$, $f/4$, $f/5$ u. a., also die gleichen, die sich auch wenn der Vormagnetisierungsgleichstrom nicht vorhanden ist, erhalten [3].

Man erklärte diese Eigenheit, durch das, dass in diesen Arbeitsfall, in der Änderungskurve der dynamischen Induktivitat, eine starke Harmonische mit der Hochzahl zwei vorhanden ist.

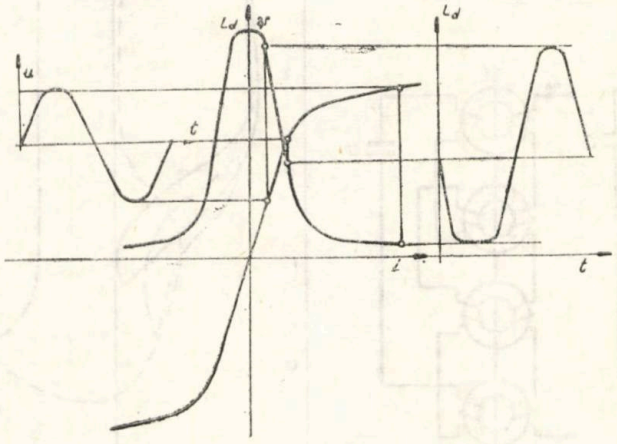


Abb. 4

Die Kennlinie $L_d = f(t)$ sieht, für diesen Arbeitsfall mit der die man bei Abwesenheit des Vormagnetisierungsgleichstrom erhält, ähnlich aus. Die grundlegende Frequenz der dynamischen Induktivität ist in diesem Falle $2f$.

2. Erfahrungsmässige Bestimmungen über die parametrischen Schwingungen der Parametronen in push-pull

Unsere Versuche führten wir an hand von zwei gleichen induktiven Parametronen, mit Kernen aus Ultraperm ZK 11 S ($50 \times 40 \times 5 \times 0{,}05$), dessen Steuerungswicklungen in Reihe-aditiv oder Reihe-differentiell (push-pull), geschaltet wurden. In beiden Arbeitsfällen hat man das Unterschwingungsspektrum, das man bei einer sinusförmigen Stromerregung und auch bei einer sinusförmigen Spannungserregung erzeugt, bei einer Frequenz von 50 Hz, verglichen.

Abb. 5 zeigt die Schaltung der Parametronen mit den Erregungs- und auch Steuerungswicklungen in Reihe-aditiv gebunden (Reiheschaltung).

In Abb. 6 ist die push-pull Schaltung der Parametronen gezeigt; die Erregungswicklungen sind in Reihe-aditiv und die Steuerungswiklungen sind in Reihe-differentiell, gebunden.

In Abb. 7 wird ein Teil des parametrischen Schwingungsspektrums gezeigt, das man bei der Kapazitätsänderung des Resonanzkreises, für zwei gleiche Parametronen, die man wie in Abb. 5 geschaltet hat.

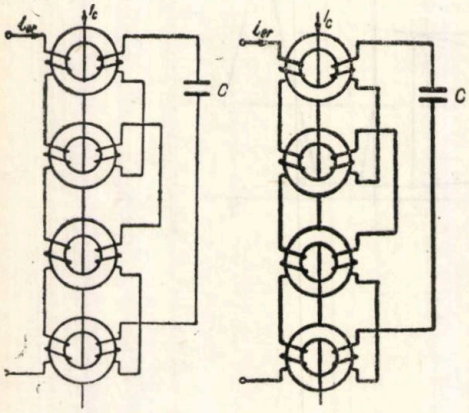


Abb. 5 Abb. 6

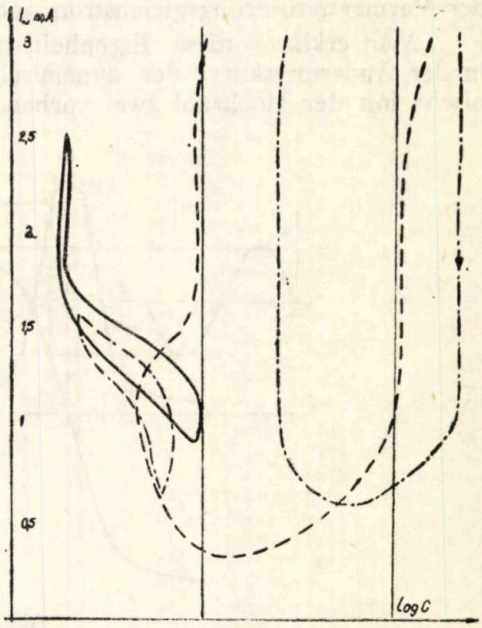


Abb. 7

Die Schaltung aus Abb. 5 verursacht keine Spektrumänderungen in Anbetracht zur Schaltung aus Abb. 1. Es ist zu bemerken, dass die Unterschwingung $f/2$ (25 Hz) die Hauptunterschwingung ist und dass zwischen den Existenzbereichen der Unterschwingungen Überlagerungszonen sind. Es sind auch die Existenzbereiche der Unterschwingungen mit den Frequenzen f (50 Hz) und $3f/2$ (75 Hz), die von der Stabilitätsuntersuchung der Mathieuschen Gleichungslösungen vorgesehen sind und auch das Existenzbereich der Unterschwingung $f/4$ (12,5 Hz), dargestellt.

Das Existenzbereich der letzten Unterschwingung hat eine Form die mit den instabilen Lösungen der Mathieuschen Gleichung ähnlich ist [5]. Ihre Existenz kann man aber nicht durch die Analyse dieser Differentiellgleichung rechtfertigen.

Abb. 8 stellt ein beschränktes Spektrum der parametrischen Unterschwingungen dar, die bei der push-pull Schaltung (Abb. 6) erscheinen können.

Man bemerkt dass: a) die Existenzbereiche der Unterschwingungen praktisch keine Überlagerungszonen haben; b) die Unterschwingung mit der Frequenz f die Hauptunterschwingung ist; c) das ganze Unterschwingungsspektrum erhält man ohne die Schwingung mit der Frequenz $3f/2$ (75 Hz).

In den Abb. 9 und 10 sind die beschränkten Spektren für den Fall, in den beide Schaltungen aus Abb. 5 und 6, bei sinusförmiger Spannung arbeiten, dargestellt.

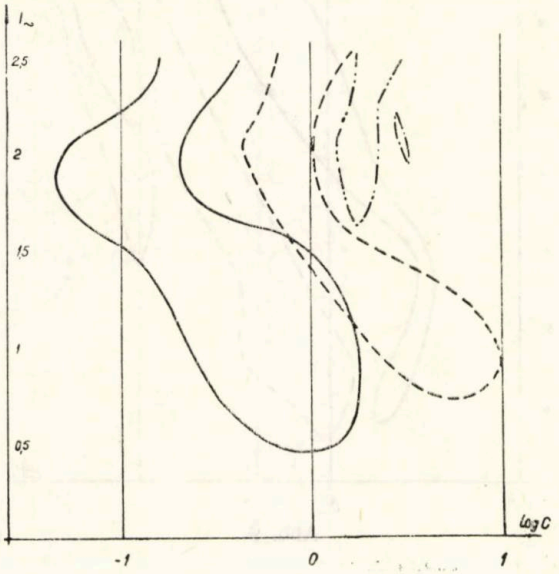


Abb. 8

Man kann folgende Bemerkungen machen: a) die Spektren enthalten die gleichen Unterschwingungen; b) es erscheint die ganze Reihe der Unterschwingungen; c) im Falle der Reihe-Schaltung aus Abb. 5 sind die Existenzbereiche nicht überlagert und die Hauptschwingung hat die Frequenz f; d) im Falle der push-pull Schaltung (Abb. 6) teilen sich die Existenzbereiche in zwei, überlagern sich und haben die Hauptschwingung mit der Frequenz f.

3. Arbeitsweise des parametrischen Oszillators in push-pull

In Abb. 11 ist die Zeitänderung der dynamischen Induktivität, für den mit sinusförmigen stromerregten Parametron in push-pull, wenn man die Hystereseschleife durch die grundlegende Magnetisierungskennlinie approximiert.

Man bezeichnete mit L_{d_1} und L_{d_2} die dynamischen Induktivitäten der beiden Parametronen.

Es ist zu bemerken, dass:

$$L_{d1}(\omega t) = L_{d2}(\omega t + \pi).$$

Die Ausdrücke der Fourierreihen der beiden dynamischen Induktivitäten sind:

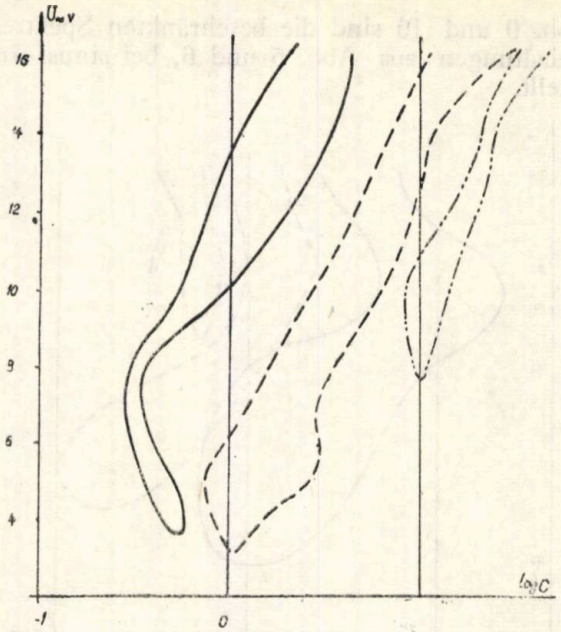


Abb. 9

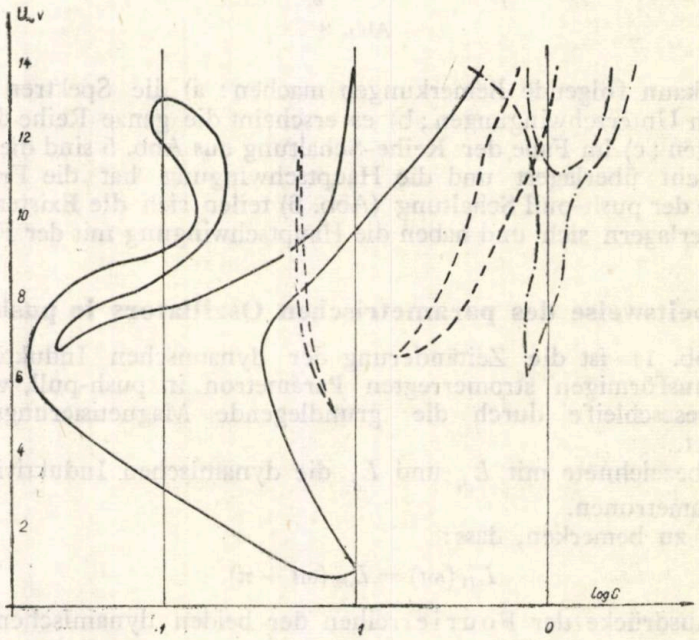


Abb. 10

$$(9)\quad \begin{cases} L_{d1} = L_0 + L_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + L_2 \sin(2\omega t + \alpha_2) + L_3 \sin(3\omega t + \alpha_3) + \cdots, \\ L_{d1} = L_0 - L_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + L_2 \sin(2\omega t + \alpha_2) - L_3 \sin(3\omega t + \alpha_3) + \cdots \end{cases}$$

Die resultierende dynamische Induktivität (L_d) ist:

$$(10)\quad L_d = L_{d1} + L_{d2} = 2L_0 + 2L_2 \sin(2\omega t + \alpha_2) + 2L_4 \sin(4\omega t + \alpha_4) + \cdots$$

Es ist ersichtlich, dass die resultierende dynamische Induktivität sich mit doppelter Frequenz des Erregungsstroms ändert, und ist dem Falle, in dem der Steuerungsgleichstrom nicht vorhanden ist, ähnlich.

Die erste instabile Lösung der Mathieuschen Gleichung, des Kreises, erhält man für 50 Hz, weil die grundlegende Frequenz der dynamischen Induktivität 100 Hz ($2f$) ist. Die Versuche bestätigen dieses, da im Falle der push-pull Schaltung, die Schwingung mit der Frequenz 75 Hz, die bei der Reiheschaltung der Parametronen erscheint, sich nicht erregt.

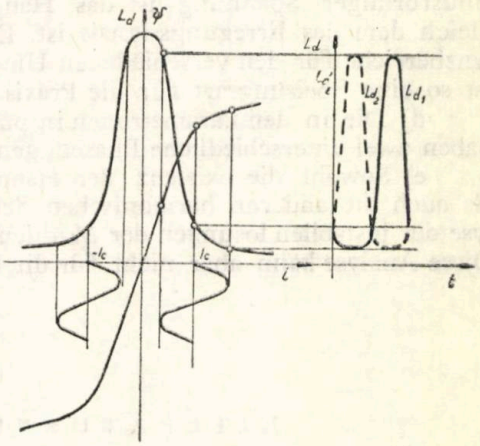


Abb. 11

Die Erzeugung der parametrischen Unterschwingungen mit einer Frequenz kleiner als $f/2$, kann man durch die instabilen Lösungen der Mathieuschen Gleichung nicht erklären, aber, zweifellos wird ihre Erscheinung von der Änderungsfrequenz des induktiven Parameters verursacht (L_d, L_i).

Die erfahrungsmässigen Versuche haben gezeigt, dass die parametrische Schwingungen mit der Frequenz f (50 Hz) zwei unterschiedliche Phasen haben, die man durch ein äusseres Signal steueren kann. Weil das Existenzbereich der Schwingung mit der Frequenz f, im Falle der Parametronen in push-pull, sich nicht mit den Existenzbereichen anderer Schwingungen überlagert, so können wir behaupten, dass die Anwendung der Parametronen in push-pull als logisches Element, für die Praxis interessant sein kann.

Bei den Parametronen in push-pull mit sinusförmiger Spannungserregung, kann man leicht feststellen, dass die praktischen Anwendungen wenigen Interesse darbringen, obwhol die Schwingung mit der Frequenz f ein breites Existenzbereich besitzt, in welchem keine anderen Schwingungen sich überlageren. Auch hier, kann man einen Zusammenhang zwischen der Art und dem Existenzbereich der erzeugten Unterschwingung und der Zeitänderungskurve der dynamischen Induktivität finden.

4. Schlussfolgerungen

Der unterharmonische Oszillator, gebildet durch die Schaltung zweier Parametronen in push-pull, hat folgende Eigenschaften:

a) Die Hauptschwingung, so bezeichnet an hand der Amplitude und des Existenzbereiches, besitzt die gleiche Frequenz mit dem Erregungsignal.

b) Im Falle einer Erregung mit sinusförmigen Strom, unterscheiden sich die Existenzbereiche der verschiedenen Unterschwingungen, zum Unterschied des klassischen Parametrons. Bei Verwendung der Parametronen in push-pull, ist praktisch die Möglichkeit nicht vorhanden, ein Signal mit anderer Frequenz zu erregen, als mit der gewünschten.

c) Auch im Falle der Speisung der Parametronen in push-pull mit sinusförmiger Spannung ist das Hauptsignal das jenige, dessen Frequenz gleich dem des Erregungssignals ist. Es erscheinen jedoch gespaltete Existenzbereiche für den verschiedenen Unterschwingungen. Aus diesem Grunde, ist so eine Speisungsart für die Praxis nicht von grossen Interesse.

d) Die in den Parametronen in push-pull erregten Hauptschwingungen, haben zwei unterschiedliche Phasen, genau so wie im klassischen Parametron.

e) Sowohl die existenz der Hauptschwingungen mit der Frequenz f, als auch die anderen harmonischen Schwingungen, können durch die Analyse der instabilen lösungen der Mathieuschen Gleichung rechtfertigt werden. Diese Analyse kann aber nicht für die Unterschwingungen gemacht werden.

Technische Hochschule, Jassy,
Lehrstuhl für Electrotechnik

LITERATURVERZEICHNIS

1. * * * *Параметроны.* ИЛ, М., 1962, стр. 13—227.
2. * * * *Магнитные аналоговые элементы.* Изд. Наука, М., 1965, стр. 144—155.
3. Savin Gh., Zitron N., Cîrţînă Gh., *Über die Frequenzteilung auf der Grundlage nichtlinearer magnetischer Kreise*, (unter Druck.).
4. Cunningham W. J., *Analyse non linéaire.* Dunod, Paris, 1963, (aus engl. übersetzt).
5. Мандельштам И. Л., *Полное собрание прудов.* Т. **II**, Изд. АН СССР, 1947, стр. 63—69.

OSCILAŢIILE PARAMETRICE ALE PARAMETROANELOR ÎN PUSH-PULL

(Rezumat)

Se prezintă rezultatele experimentelor efectuate în scopul analizei naturii şi domeniilor de existenţă ale oscilaţiilor parametrice care apar în parametroanele inductive legate în contratimp (push-pull). Pentru aceste tipuri de parametroane se arată ca frecvenţa fundamentală a inductanţei dinamice este $2f$, deci oscilaţia parametrică de bază are frecvenţa f.

Oscilaţia parametrică de bază prezintă de asemenea două faze de oscilaţii distincte separate cu π radiani.

Prin legarea parametroanelor în contratimp şi prin alimentarea schemei la curent sinusoidal nu apar practic suprapuneri cu alte oscilaţii şi deci siguranţa în funcţionare pentru o anumită oscilaţie creşte considerabil.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

C. Z. 621.392.5

ASUPRA CONDIŢIILOR DE PASIVITATE ALE UNUI CUADRIPOL DIPORT LINIAR, ÎN REGIM PERMANENT SINUSOIDAL

DE

HUGO ROSMAN

1. Pînă nu de mult era acreditată opinia că orice reţea pasivă este constituită exclusiv din elemente reciproce, iar la rîndul său o reţea avînd în structura sa incluse element nereciproce are, în mod necesar, un caracter activ. Primul element nereciproc pasiv şi-a făcut apariţia în tehnică în urmă cu două decenii (T e l l e g e n [1]). Prezenţa unor astfel de elemente în structura reţelelor electrice a făcut necesară revizuirea conceptelor clasice de pasivitate şi reciprocitate. O contribuţie importantă la delimitarea acestor noţiuni a adus-o prof. S. C o n d r e a într-o lucrare publicată în urmă cu peste 10 ani [2]. Cu toate acestea, într-o serie de manuale de largă circulaţie, apărute relativ recent, se fac confuzii în această ordine de idei. Astfel, fie se identifică, în cazul unui cuadripol liniar, relaţia de reciprocitate cu cea de pasivitate [2], fie se postulează teza că „orice cuadripol liniar pasiv are un caracter reciproc" [4], şirul exemplelor de acest tip putînd fi extins.

Scopul acestei Note este de a stabili, pentru un cuadripol diport liniar (CDL), nereciproc sau, în particular, reciproc, funcţionînd în regim permanent sinusoidal, relaţiile la care satisfac parametrii cuadripolului în cazul cînd acesta are un caracter pasiv.

Astfel de relaţii au fost stabilite, numai în anumite cazuri particulare, de către M. V a u l o t [5], B. D. H. Tellegen [6], P. S a t c h e [7], N. S o t i r e s c u şi M. L e o n [8]. Anume, relaţiile stabilite în lucrările citate se referă exclusiv la cazul cuadripolilor pasivi reciproci şi doar la anumite scheme echivalente, cu caracter particular.

2. Se consideră un CDL nereciproc, neautonom, avînd ecuaţiile:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

în cazul cînd este alimentat în sens direct şi

$$\begin{bmatrix} \underline{U}'_2 \\ \underline{I}'_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\underline{A}} \begin{bmatrix} \underline{A}_{22} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}'_1 \\ \underline{I}'_1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

atunci cînd cuadripolul este inversat, unde

(3) $$\underline{A} = \det |\underline{A}_{st}|, \quad (s,t = 1,2).$$

Cuadripolul considerat are un caracter pasiv dacă sînt satisfăcute simultan inegalităţile [9]:

(4) $$\Delta P = P_1 - P_2 > 0, \quad \Delta P' = P_2' - P_1' > 0^1),$$

unde $P_1 = \mathcal{R}e(\underline{U}_1 \underline{I}_1^*)$ reprezintă puterea activă absorbită pe la poarta de intrare, $P_2 = \mathcal{R}e(\underline{U}_2 \underline{I}_2^*)$ constituie puterea activă cedată pe la poarta de ieşire, în cazul cînd cuadripolul este alimentat în sens direct, $P_2' = \mathcal{R}e(\underline{U}_2' \underline{I}_2'^*)$ — puterea activă absorbită pe la poarta de intrare iar $P_1' = \mathcal{R}e(\underline{U}_1' \underline{I}_1'^*)$ — puterea activă cedată pe la poarta de ieşire, atunci cînd cuadripolul este inversat.

Ţinînd seama de ecuaţiile (1) rezultă:

(5) $$P_1 = \mathcal{R}e(\underline{A}_{11} \underline{A}_{21}^*) U_2^2 + \mathcal{R}e(\underline{A}_{12} \underline{A}_{22}^*) I_2^2 + \mathcal{R}e(\underline{A}_{11} \underline{A}_{22}^* \underline{U}_2 \underline{I}_2^*) + \mathcal{R}e(\underline{A}_{12} \underline{A}_{21}^* \underline{U}_2^* \underline{I}_2),$$

Dar

(6) $$\underline{U}_2 \underline{I}_2^* = U_2 I_2 (\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2), \quad \underline{U}_2^* \underline{I}_2 = U_2 I_2 (\cos \varphi_2 - j \sin \varphi_2),$$

încît expresia (5) devine:

(7) $$P_1 = \mathcal{R}e(\underline{A}_{11} \underline{A}_{21}^*) U_2^2 + \mathcal{R}e(\underline{A}_{12} \underline{A}_{22}^*) I_2^2 + [\mathcal{R}e(\underline{A}_{11} \underline{A}_{22}^* + \underline{A}_{12} \underline{A}_{21}^*) \cos \varphi_2 - \mathcal{I}m(\underline{A}_{11} \underline{A}_{22}^* - \underline{A}_{12} \underline{A}_{21}^*) \sin \varphi_2] U_2 I_2.$$

Prin urmare inegalitatea (4) se poate scrie:

(8) $$\Delta P = \mathcal{R}e(\underline{A}_{11} \underline{A}_{21}^*) U_2^2 + \mathcal{R}e(\underline{A}_{12} \underline{A}_{22}^*) I_2^2 + [\mathcal{R}e(\underline{A}_{11} \underline{A}_{22}^* + \underline{A}_{12} \underline{A}_{21}^* - 1) \cos \varphi_2 - \mathcal{I}m(\underline{A}_{11} \underline{A}_{22}^* - \underline{A}_{12} \underline{A}_{21}^*) \sin \varphi_2] U_2 I_2 > 0,$$

ΔP fiind o formă pătratică în U_2, I_2.

În acelaşi timp, făcînd apel la ecuaţiile (2) se obţine:

(9) $$P_2' = \frac{1}{A^2}\left[\mathcal{R}e(\underline{A}_{21}^* \underline{A}_{22}) U_1'^2 + \mathcal{R}e(\underline{A}_{11}^* \underline{A}_{12}) I_1'^2 + \mathcal{R}e(\underline{A}_{11}^* \underline{A}_{22} \underline{U}_1' \underline{I}_1'^*) + \mathcal{R}e(\underline{A}_{12} \underline{A}_{21}^* \underline{U}_1'^* \underline{I}_1')\right].$$

Deoarece

(10) $$\underline{U}_1' \underline{I}_1'^* = U_1' I_1' (\cos \varphi_1' + j \sin \varphi_1'), \quad \underline{U}_1'^* \underline{I}_1' = U_1' I_1' (\cos \varphi_1' - j \sin \varphi_1'),$$

relaţia (9) poate fi scrisă şi sub forma echivalentă:

---

[1]) În cele ce urmează se consideră exclusiv CDL disipativi.

$$P_2' = \frac{1}{A^2}\{\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{21}^{*}\,\underline{A}_{22})\,U_1'^2 + \mathcal{R}e(\underline{A}_{11}^{*}\,\underline{A}_{12})\,I_1'^2 + \tag{11}$$
$$+ [\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{11}^{*}\,\underline{A}_{22} + \underline{A}_{12}\,\underline{A}_{21}^{*})\cos\varphi_1' - \mathcal{I}m\,(\underline{A}_{11}^{*}\,\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\,\underline{A}_{21}^{*})\sin\varphi_1']\,U_1'\,I_1'\}.$$

Inegalitatea (4) devine:

$$\Delta P' = \frac{1}{A^2}\{\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{21}^{*}\,\underline{A}_{22})\,U_1'^2 + \mathcal{R}e\,(\underline{A}_{11}^{*}\,\underline{A}_{12})\,I_1'^2 + \tag{12}$$
$$+ [\mathcal{R}e(\underline{A}_{11}^{*}\underline{A}_{22} + \underline{A}_{12}\underline{A}_{11}^{*} - A^2)\cos\varphi_1' - \mathcal{I}m\,(\underline{A}_{11}^{*}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21}^{*})\sin\varphi_1']U_1'I_1'\} > 0,$$

$\Delta P'$ fiind o formă pătratică în U_1', I_1'.

Pentru ca formele pătratice (8), (12) să fie pozitiv definite este necesar și suficient să fie satisfăcute condițiile lui Sylvester [10]. Se obține:

$$\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{11}\,\underline{A}_{21}^{*}) > 0, \quad \mathcal{R}e\,(\underline{A}_{12}\,\underline{A}_{22}^{*}) > 0, \tag{13}$$

$$4\,\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{11}\,\underline{A}_{21}^{*})\,\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{21}\,\underline{A}_{22}^{*}) - [\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{11}\,\underline{A}_{22}^{*} + \underline{A}_{12}\,\underline{A}_{21}^{*} - 1)\cos\varphi_2 - \tag{14}$$
$$- \mathcal{I}m\,(\underline{A}_{11}\,\underline{A}_{22}^{*} - \underline{A}_{12}\,\underline{A}_{21}^{*})\sin\varphi_2]^2 > 0,$$

respectiv

$$\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{21}^{*}\,\underline{A}_{22}) > 0, \quad \mathcal{R}e\,(\underline{A}_{11}^{*}\,\underline{A}_{12}) > 0, \tag{15}$$

$$4\,\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{21}^{*}\,\underline{A}_{22})\,\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{11}^{*}\,\underline{A}_{22}) - [\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{11}^{*}\,\underline{A}_{22} + \underline{A}_{12}\,\underline{A}_{21}^{*} - A^2)\cos\varphi_1' - \tag{16}$$
$$- \mathcal{I}m\,(\underline{A}_{11}^{*}\,\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\,\underline{A}_{21}^{*})\sin\varphi_1']^2 > 0.$$

Inegalitatea (14) trebuie să fie satisfăcută oricare ar fi valoarea unghiului φ_2, adică, la limită, și pentru acea valoare a acestui unghi la care expresia:

$$m(\varphi_2) = [\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{11}\,\underline{A}_{22}^{*} + \underline{A}_{12}\,\underline{A}_{21}^{*} - 1)\cos\varphi_2 - \mathcal{I}m(\underline{A}_{11}\,\underline{A}_{22}^{*} - \underline{A}_{12}\,\underline{A}_{21}^{*})\sin\varphi_2] \tag{17}$$

este maximă.

Or

$$\frac{dm}{d\varphi_2} = -2[\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{11}\,\underline{A}_{22}^{*} + \underline{A}_{12}\,\underline{A}_{21}^{*} - 1)\cos\varphi_2 - \mathcal{I}m\,(\underline{A}_{11}\,\underline{A}_{22}^{*} - \underline{A}_{12}\,\underline{A}_{21}^{*})\sin\varphi_2] \times \tag{18}$$
$$\times [\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{11}\,\underline{A}_{22}^{*} + \underline{A}_{12}\,\underline{A}_{21}^{*} - 1)\sin\varphi_2 + \mathcal{I}m\,(\underline{A}_{11}\,\underline{A}_{22}^{*} - \underline{A}_{12}\,\underline{A}_{21}^{*})\cos\varphi_2]$$

se anulează pentru:

$$\begin{cases} \varphi_{21} = \operatorname{arctg}\dfrac{\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{11}\,\underline{A}_{22}^{*} + \underline{A}_{21}\,\underline{A}_{21}^{*} - 1)}{\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{11}\,\underline{A}_{22}^{*} - \underline{A}_{12}\,\underline{A}_{21}^{*})}, \\ \varphi_{22} = -\operatorname{arctg}\dfrac{\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{11}\,\underline{A}_{22}^{*} - \underline{A}_{12}\,\underline{A}_{21}^{*})}{\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{11}\,\underline{A}_{22}^{*} + \underline{A}_{12}\,\underline{A}_{21}^{*} - 1)}. \end{cases} \tag{19}$$

Efectuînd calculele rezultă:

$$(20)\quad m(\varphi_{21})=0,\ m(\varphi_{22})=[\mathcal{R}e(\underline{A}_{11}\underline{A}^*_{22}+\underline{A}_{12}\underline{A}^*_{21}-1)]^2+[\mathcal{I}m(\underline{A}_{11}\underline{A}^*_{22}-\underline{A}_{12}\underline{A}^*_{21})]^2$$

și se constată că $m(\varphi_{22})=\text{maxim}$, căci

$$(21)\quad \frac{d^2m}{d\varphi_2^2}\Big|_{\varphi_2=\varphi_{22}}=-2\{[\mathcal{R}e(\underline{A}_{11}\underline{A}^*_{22}+\underline{A}_{12}\underline{A}^*_{21}-1)]^2+[\mathcal{I}m(\underline{A}_{11}\underline{A}^*_{22}-\underline{A}_{12}\underline{A}^*_{21})]^2\}<0.$$

Prin urmare inegalitatea (14) devine la limită:

$$(22)\quad \begin{aligned}&4\mathcal{R}e(\underline{A}_{11}\underline{A}^*_{21})\,\mathcal{R}e(\underline{A}_{12}\underline{A}^*_{22})-[\mathcal{R}e(\underline{A}_{11}\underline{A}^*_{22}+\underline{A}_{12}\underline{A}^*_{21}-1)]^2-\\&-[\mathcal{I}m(\underline{A}_{11}\underline{A}^*_{22}-\underline{A}_{12}\underline{A}^*_{21})]^2>0,\end{aligned}$$

sau, ținînd seama de identitatea [11]:

$$(23)\quad \begin{aligned}&[\mathcal{R}e(\underline{A}_{11}\underline{A}^*_{22}+\underline{A}_{12}\underline{A}^*_{21})]^2+[\mathcal{I}m(\underline{A}_{11}\underline{A}^*_{22}-\underline{A}_{12}\underline{A}^*_{21})]^2-\\&-4\mathcal{R}e(\underline{A}_{11}\underline{A}^*_{21})\,\mathcal{R}e(\underline{A}_{12}\underline{A}^*_{22})=A^2,\end{aligned}$$

se obține în definitiv

$$(24)\quad \mathcal{R}e(\underline{A}_{11}\underline{A}^*_{22}+\underline{A}_{12}\underline{A}^*_{21})>\frac{A^2+1}{2}.$$

Într-un mod analog poate fi tratată inegalitatea (16). Anume, această inegalitate trebuie să fie satisfăcută, la limită, pentru acea valoare a unghiului φ_1' la care expresia:

$$(25)\quad m'(\varphi_1')=[\mathcal{R}e(\underline{A}^*_{11}\underline{A}_{22}+\underline{A}_{12}\underline{A}^*_{21}-A^2)\cos\varphi_1'-\mathcal{I}m(\underline{A}^*_{11}\underline{A}_{22}-\underline{A}_{12}\underline{A}^*_{21})\sin\varphi_1']^2$$

este maximă.

Derivata

$$(26)\quad \begin{aligned}\frac{dm'}{d\varphi_1'}=&-2[\mathcal{R}e(\underline{A}^*_{11}\underline{A}_{22}+\underline{A}_{12}\underline{A}^*_{21}-A^2)\cos\varphi_1'-\mathcal{I}m(\underline{A}^*_{11}\underline{A}_{22}-\underline{A}_{12}\underline{A}^*_{21})\sin\varphi_1']\times\\&\times[\mathcal{R}e(\underline{A}^*_{11}\underline{A}_{22}+\underline{A}_{12}\underline{A}^*_{21}-A^2)\sin\varphi_1'+\mathcal{I}m(\underline{A}^*_{11}\underline{A}_{22}-\underline{A}_{12}\underline{A}^*_{21})\cos\varphi_1'],\end{aligned}$$

se anulează pentru:

$$(27)\quad \begin{cases}\varphi'_{11}=\operatorname{arctg}\dfrac{\mathcal{R}e(\underline{A}^*_{11}\underline{A}_{22}+\underline{A}_{12}\underline{A}^*_{21}-A^2)}{\mathcal{I}m(\underline{A}^*_{11}\underline{A}_{22}-\underline{A}_{12}\underline{A}^*_{21})},\\ \varphi'_{12}=-\operatorname{arctg}\dfrac{\mathcal{I}m(\underline{A}^*_{11}\underline{A}_{22}-\underline{A}_{12}\underline{A}^*_{21})}{\mathcal{R}e(\underline{A}^*_{11}\underline{A}_{22}+\underline{A}_{12}\underline{A}^*_{21}-A^2)}.\end{cases}$$

Dacă se efectuează calculele se obține:

$$m'(\varphi'_{11}) = 0,\ m'(\varphi'_{12}) = \mathcal{R}e(\underline{A}^*_{11}\underline{A}_{22} + \underline{A}_{12}\underline{A}^*_{21} - A^2)]^2 + [\mathcal{I}m(\underline{A}^*_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}^*_{21})]^2; \tag{28}$$

$$\left.\frac{d^2m'}{d\varphi'^2_1}\right|_{\varphi'_1=\varphi'_{12}} = -2\{[\mathcal{R}e(\underline{A}^*_{11}\underline{A}_{22} + \underline{A}_{12}\underline{A}^*_{21} - A^2)]^2 + [\mathcal{I}m(\underline{A}^*_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}^*_{21})]^2\} < 0. \tag{29}$$

Aşadar, la limită, inegalitatea (16) devine:

$$4\mathcal{R}e(\underline{A}^*_{21}\underline{A}_{22})\mathcal{R}e(\underline{A}^*_{11}\underline{A}^*_{12}) - [\mathcal{R}e(\underline{A}^*_{11}\underline{A}_{22} + \underline{A}_{12}\underline{A}^*_{21} - A^2)]^2 - [\mathcal{I}m(\underline{A}^*_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}^*_{21})]^2 > 0. \tag{30}$$

Dacă se are în vedere acum identitatea:

$$[\mathcal{R}e(\underline{A}^*_{11}\underline{A}_{22} + \underline{A}_{12}\underline{A}^*_{21} - A^2)]^2 + [\mathcal{I}m(\underline{A}^*_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}^*_{21})]^2 - 4\mathcal{R}e(\underline{A}^*_{21}\underline{A}_{22})\mathcal{R}e(\underline{A}^*_{11}\underline{A}_{12}) = A^2, \tag{31}$$

care se poate stabili recurgînd la aceieaşi mijloace ca în cazul identității (23) [11], inegalitatea (16) conduce, în definitiv, la (24).

În concluzie, *inegalitățile* (13), (15) *şi* (24) *constituie condițiile necesare şi suficiente pentru ca un CDL nereciproc neautonom să fie pasiv.*

3. În cazul particular al *CDL* reciproci $\underline{A} = 1$, încît inegalitatea (24) devine:

$$\mathcal{R}e(\underline{A}_{11}\underline{A}^*_{22} + \underline{A}_{12}\underline{A}^*_{21}) > 1. \tag{32}$$

Aşadar *inegalitățile* (13), (15) *şi* (32) *reprezintă condițiile necesare şi suficiente pentru ca un CDL reciproc să fie pasiv.*

4. Inegalitățile (13), (15), (24), (32) pot fi formulate făcînd apel la ceilalți parametrii ai cuadripolului ($\underline{Y}_{st}, \underline{Z}_{st}, \underline{H}_{st}, \underline{F}_{st}$; $s, t = 1, 2$) [12].

5. Într-o lucrare anterioară [11] am stabilit: a) condițiile necesare şi suficiente de transmisie a energiei active printr-un CDL nereciproc cu randament maxim:

$$\mathcal{R}e(\underline{A}_{11}\underline{A}^*_{21}) > 0,\ \mathcal{R}e(\underline{A}_{12}\underline{A}^*_{22}) > 0,\ \mathcal{R}e(\underline{A}^*_{21}\underline{A}_{22}) > 0,\ \mathcal{R}e(\underline{A}^*_{11}\underline{A}_{12}) > 0, \tag{33}$$

$$|\mathcal{R}e(\underline{A}_{11}\underline{A}^*_{22} + \underline{A}_{12}\underline{A}^*_{21})| > A, \tag{34}$$

atît la alimentarea cuadripolului în sens direct cît şi în cazul cînd cuadripolul este inversat; b) condițiile necesare şi suficiente de transmisie a puterii active maxime:

$$\mathcal{R}e(\underline{A}_{11}\underline{A}^*_{22}) > 0,\ \mathcal{R}e(\underline{A}_{12}\underline{A}^*_{22}) > 0, \tag{35}$$

$$\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{11}\,\underline{A}^{*}_{22} + \underline{A}_{12}\,\underline{A}^{*}_{21}) > 0, \tag{36}$$

oricare ar fi sensul de alimentare al cuadripolului.

Or, inegalităţile (33) coincid cu grupul de inegalităţi (13), (15) iar (24) implică cu necesitate inegalitatea (34) căci $(A^2 + 1)/2 > A$. De asemenea din confruntarea inegalităţilor (13), (15), (24) cu (35), (36) rezultă ca acestea din urmă sînt satisfăcute de orice CDL nereciproc pasiv. Prin urmare *orice CDL nereciproc pasiv este capabil:* a) *de a transmite energia activă cu randament maxim,* b) *de a furniza receptorului o putere activă maximă, atît la alimentarea sa în sens direct cît şi în cazul cînd este inversat.*

6. Dacă pe de-o parte se ţine seama că:

$$\begin{cases} \mathcal{R}e\,(\underline{A}_{11}\,\underline{A}^{*}_{21}) = \dfrac{P_{10}}{U_2^2}, \quad \mathcal{R}e\,(\underline{A}_{12}\,\underline{A}^{*}_{22}) = \dfrac{P_{1sc}}{I_2^2}, \\ \mathcal{R}e\,(\underline{A}^{*}_{21}\,\underline{A}_{22}) = \dfrac{P_{20}}{U_1^2}, \quad \mathcal{R}e\,(\underline{A}^{*}_{11}\,\underline{A}_{12}) = \dfrac{P_{2sc}}{I_1^2}, \end{cases} \tag{37}$$

notaţiile fiind cele uzuale, iar pe de altă parte se are în vedere că randamentul maxim cu care un CDL nereciproc transmite energia activă este dat de [11]:

$$\eta_{max} = \frac{\eta'_{max}}{A^2} = \frac{1}{\sqrt{[\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{11}\,\underline{A}^{*}_{22} + \underline{A}_{12}\,\underline{A}^{*}_{21})]^2 - A^2} + \mathcal{R}e\,(\underline{A}_{11}\,\underline{A}^{*}_{22} + \underline{A}_{12}\,\underline{A}^{*}_{21})}, \tag{38}$$

unde η_{max} reprezintă randamentul maxim în cazul alimentării cuadripolului în sens direct iar η'_{max} — randamentul maxim în situaţia în care cuadripolul este inversat, inegalităţile (13), (15) şi (32) pot fi scrise sub formele echivalente:

$$P_{10} > 0, \; P_{1sc} > 0, \; P_{20} > 0, \; P_{2sc} > 0, \tag{39}$$

$$\eta_{max} = \frac{\eta'_{max}}{A^2} < \frac{1}{A^2}. \tag{40}$$

În cazul CDL reciproci pasivi ultima inegalitate devine:

$$\eta_{max} < 1. \tag{41}$$

7. Rezultatele obţinute, pe lîngă interesul în sine, prezintă o deosebită importanţă în sinteza CDL reciproci sau nereciproci (de ex. [13], [14]).

Primită la 7 III 1968

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de electrotehnică

BIBLIOGRAFIE

1. Tellegen B. D. H., *The Gyrator. A New Electric Network Element.* Philips Res. Rep., apr. 1948.
2. Condrea S., *Circuite nereciproce cu elemente pasive și active.* Bul. Inst. polit. Buc., 1957, **XIX**, *3-4*, pp. 319–332.
3. Kalantarov P. L., Neiman L. R., *Bazele teoretice ale electrotehnicii.* Vol. **II**, EES, Buc., p. 133, (trad. din l. rusă)
5. Vaudot M., *Sur les constantes du quadripôle passif.* RGÉ, 1927, **XXII**, pp. 493—503.
6. Tellegen B. D. H., *Sur les constantes du quadripôle passif.* RGÉ, 1928, **XXIV**, pp. 211—213.
7. Satche P., *Les constantes d'un réseau passif.* RGÉ, 1947, **LVI**, pp. 267–270.
8. Sotirescu N., Leon M., *Privitor la condițiile în care trei parametri pot defini un cuadripol liniar pasiv.* Bul. șt. Acad. milit. tehn., 1956, **II**, *2*, pp. 143–148.
9. Timotin Al. ș. a., *Lecții de bazele electrotehnicii.* Vol. **II**, EDP, Buc., 1964, p. 239.
10. Ciorănescu N., *Curs de algebră și analiză matematică.* Ed. tehn., Buc., 1958, p. 328.
11. Rosman H., Braier A., *Randamentul transmisiei energiei electrice prin cuadripoli* (V). Bul. Inst. polit. Iași, 1955, **I** (V), *1-2*, pp. 159–172.
12. Șora C., *Cuadripolul electric.* Ed. tehn., Buc., 1964, p. 54.
13. Balabanian N., *Network Synthesis.* Prentice-Hall, N. Y., 1958, § 8.
14. Stewart J. L., *Circuit Theory and Design.* J. Wiley & Sons, N. Y., § 6,

SUR LES CONDITIONS DE PASSIVITÉ D'UN QUADRIPÔLE DIPORTE, LINÉAIRE, EN RÉGIME PERMANENT SINUSOÏDAL

(Résumé)

On établit les conditions nécessaires et suffisantes qui assurent le caractère passif d'un quadripôle diporte, linéaire, nonréciproque, nonautonome, en régime permanent sinusoïdal, à savoir les inégalités (13), (15), (24). Ces conditions peuvent être écrites sous les formes équivalentes (39), (40).

Lorsque le quadripôle est réciproque les conditions de passivité sont données par les négalités (13), (15), (32).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

C Z. 621.316.11

REGIMUL TRANZITORIU AL CIRCUITULUI ELECTRIC PARALEL CU BOBINĂ NELINIARĂ COMANDATĂ

DE

ILIE POPESCU

1. Introducere

Studiul circuitului electric neliniar de tip paralel constituit dintr-un rezistor liniar, un condensator liniar şi o bobină neliniară comandată, în regim tranzitoriu, este complicat, soluţia analitică riguroasă a ecuaţiei diferenţiale neliniare a circuitului putînd fi obţinută numai în condiţii particulare. De aceea la studiul regimurilor tranzitorii în circuitele neliniare, o mare răspîndire au căpătat metodele calitative, bazate pe cercetarea laturii fizice a proceselor în fiecare schemă concretă, iar pentru obţinerea relaţiilor cantitative, metodele experimentale şi metodele aproximative de calcul.

În această lucrare se analizează comportarea circuitului neliniar de tip paralel cu bobină comandată (circuit dubluferorezonant paralel) în regim tranzitoriu [1], aproximînd în mod adecvat pe porţiuni caracteristica V-A neliniară a bobinei comandate [3].

Studiul regimului tranzitoriu în acest circuit de tip dubluferorezonant paralel pune în evidenţă apariţia regimurilor de releu fără contacte, cu trei domenii distincte de funcţionare.

2. Conectarea circuitului dubluferorezonant paralel la tensiune sinusoidală

Pentru studiul circuitului electric neliniar paralel cu bobină comandată, în regim tranzitoriu, se liniarizează pe porţiuni, în mod convenabil, caracteristica V-A a bobinei cu miez feromagnetic moale (cu pierderi reduse şi cu ciclu de isterezis rectangular). Schema electrică a circuitului este redată în fig. 1 şi funcţionarea sa în regim permanent sinusoidal rezultă din curbele reprezentate în fig. 2, în care inductivitatea dinamică a bobinei neliniare comandate se substituie succesiv cu trei inductivităţi statice definite cu relaţiile

$$(1)\quad L_1 = \frac{\psi_A - \psi_0}{i_A - i_0} = \frac{\psi_A}{i_A} = L_0,\quad L_2 = \frac{\psi_B - \psi_A}{i_B - i_A},\quad L_3 = \frac{\psi_C - \psi_B}{i_C - i_B} = L_{sat} \cong L_0,$$

unde fluxurile şi curenţii corespunzători punctelor A, B şi C se pot considera funcţii liniare [3] de ω şi I_{CC},

$$(2)\qquad \begin{cases} \psi_A = f_1(I_{CC}),\ \psi_B = f_2(\omega, I_{CC}),\ \psi_C = f_3(\omega); \\ i_A = F_1(I_{CC}),\ i_B = F_2(\omega, I_{CC}),\ i_C = F_3(\omega). \end{cases}$$

Ţinînd seama de relaţiile (1) schema echivalentă a circuitului din fig. 1 poate fi reprezentată sub forma indicată în fig. 2, în care $u_1 = U_m \sin(\omega t + \gamma)$, L_1, L_2 sînt date de relaţia (1), r reprezintă rezistenţa activă a bobinei comandate, iar $1/R = G$.

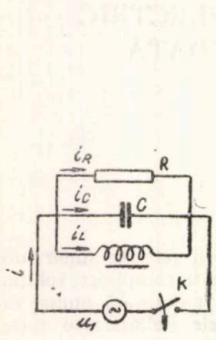


Fig. 1

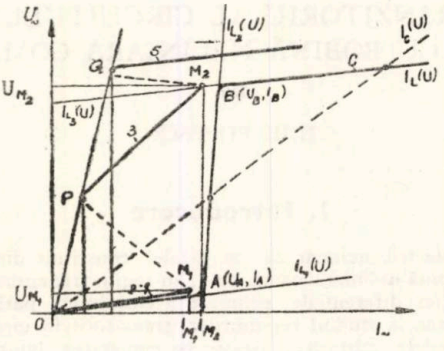


Fig. 2

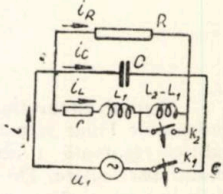


Fig. 3

La cuplarea circuitului dubluferorezonant paralel la o sursă de tensiune sinusoidală, circuitul funcţionează în regim tranzitoriu pe porţiunea *1* a caracteristicii V-A rezultante a circuitului, ceea ce în schema echivalentă din fig. 2 corespunde manevrei de închidere a întrerupătorului k_1. Dacă valoarea de regim tranzitoriu a curentului total din circuit depăşeşte valoarea limită din circuit i_{M_1}, se produce un nou regim tranzitoriu prin modificarea inductivităţii din circuit de la L_1 la L_2, echivalentă cu închiderea întrerupătorului k_2 în schema din fig. 3, circuitul funcţionînd pe porţiunea *3* a caracteristicii. În sfîrşit dacă curentul total depăşeşte valoarea i_{M_2}, regimul tranzitoriu ce ia naştere prin modificarea inductivităţii circuitului de la L_2 la L_1, echivalează cu deschiderea întrerupătorului k_2 în schema circuitului din fig. 3.

În cele ce urmează se stabilesc condiţiile necesare şi suficiente pentru ca într-un circuit dubluferorezonant paralel, cuplat la o tensiune sinusoidală, să se poată stabili cîte un regim permanent pe fiecare dintre porţiunile *1*, *3* şi respectiv *5* ale caracteristicii V-A rezultante a circuitului.

Se aplică circuitului din fig. 3 teoremele lui Kirchhoff; în regimul corespunzător închiderii întrerupătorului k_1 se obţine;

$$(3)\qquad i = i_R + i_C + i_L,\quad u_1 = Ri_R,\quad u_1 = L_1 \frac{\mathrm{d}i_{L_1}}{\mathrm{d}t} + ri_{L_1},\quad u_1 = u_C = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C\,\mathrm{d}t.$$

Folosind pentru circuitul liniarizat metoda operaţională rezultă:

$$\mathcal{L}i_R = \frac{1}{R}\mathcal{L}u_1, \quad \mathcal{L}i_{L_1} = \frac{\mathcal{L}u_1}{pL_1 + r}, \quad \mathcal{L}i_C = pC\mathcal{L}u_1 - CU_C(0). \tag{4}$$

Se introduc relaţiile (4) în (3) obţinînd imaginea curentului total:

$$\mathcal{L}i = U_m \frac{p^2(\omega L_1 C\cos\gamma + GL_1\sin\gamma) + p(GL_1 + rC)\omega\cos\gamma}{(pL_1 + r)(p^2 + \omega^2)} +$$

$$+U_m \frac{p(1 - \omega^2 L_1 C + Gr)\sin\gamma + \omega(1 + rG)\cos\gamma - \omega^2 Cr\sin\gamma}{(pL_1 + r)(p^2 + \omega^2)} = \tag{5}$$

$$= U_m \frac{A_1 p^2 + A_2 p + A_3}{(pL_1 + r)(p^2 + \omega^2)}, \quad (i = i_\sim + i_{tr}).$$

Originalul acestei expresii este:

$$i_1 = \frac{U_m}{\omega^4 L_1^2 + \omega^2 r^2} \cdot \frac{-\omega^3 rA_1 + \omega^3 L_1 A_2 + \omega rA_3}{\cos\varphi_1}\sin(\omega t - \varphi_1) +$$

$$+ U_m \frac{(r/L_1)^2 A_1 + (r/L_1)A_2 + A_3}{[(r/L_1)^2 + \omega^2]L_1} e^{-\frac{r}{L_1}t}, \tag{6}$$

unde

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{-\omega^3 L_1 A_1 - \omega^2 rA_2 + \omega L_1 A_3}{-\omega^2 rA_1 + \omega^2 L_1 A_2 + rA_3}, \tag{7}$$

cu

$$\begin{cases} A_1 = \omega L_1 C\cos\gamma + GL_1\sin\gamma, \\ A_2 = (GL_1 + rC)\omega\cos\gamma + (1 - \omega^2 L_1 C + Gr)\sin\gamma, \\ A_3 = \omega(1 + rG)\cos\gamma - \omega^2 rC\sin\gamma. \end{cases} \tag{8}$$

Expresia (6) reprezintă curentul total din circuitul dubluferorezonant în regimul ce urmează conectării sale la o sursă de tensiune sinusoidală. Condiţia ca punctul de funcţionare al circuitului să se stabilească fie pe porţiunea *1*, fie pe porţiunea *5* a caracteristicii V-A rezultante a circuitului este:

$$i_1 < i_{M_1}, \text{ unde } i_{M_1} = U_{m_{M_1}}\sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L_1}\right)^2}\sin(\omega t + \gamma - \varphi_1), \tag{9}$$

respectiv

$$i_1 > i_{M_2}, \text{ unde } i_{M_2} = U_{m_{M_2}}\sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L_{20}}\right)^2}\sin(\omega t + \gamma - \varphi_2), \tag{10}$$

cu $L_{20} = L_2$, $(\psi_A = 0)$.

Dacă se neglijează rezistenţa bobinei ($r \cong 0$, rezistenţa r_p echivalentă se consideră cuplată în paralel şi se include în rezistenţa R), atunci relaţiile (6), (7) se simplifică devenind

$$i_1 = \frac{U_m}{\omega L_1} \cdot \frac{A_2}{\cos\varphi_1} \sin(\omega t - \varphi_1) + \frac{U_m}{\omega L_1} \cos\gamma, \tag{11}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{-\omega^2 A_1 + A_3}{\omega A_2} = \frac{-\omega G L_1 \sin\gamma + (1 - \omega^2 C L_1)\cos\gamma}{\omega G L_1 \cos\gamma + (1 - \omega^2 C L_1)\sin\gamma}. \tag{12}$$

Regimul tranzitoriu dispare în următoarele cazuri:
I. $\omega, L_1, r \to \infty$, în general greu de satisfăcut (la limită);
II. $\cos\gamma = 0$ deci $\gamma = \pm\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

În cazul cînd $\cos\gamma = 0$ relaţia (6) devine:

$$\begin{aligned} i_{1\,II} &= U_m \sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L_1}\right)^2} \sin\left[\omega t \pm \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) + \varphi_2'\right] = \\ &= U_m \sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L_1}\right)^2} \sin(\omega t - \varphi_1), \quad \varphi_2' = -\varphi_1 \mp \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right). \end{aligned} \tag{13}$$

Mărimile critice ale valorii efective şi fazei iniţiale ale tensiunii corespunzătoare cazului în care funcţionarea se stabileşte pe porţiunea *1*, în regim tranzitoriu, se obţin cu ajutorul inegalităţii (9); prin urmare:

$$U_m Y_1 \sin(\omega t + \gamma - \varphi_1) + \frac{U_m}{\omega L_1} \cos\gamma < U_{m_{M_1}} Y_1 \sin(\omega t + \gamma - \varphi_1). \tag{14}$$

Pentru ca

$$(i_1)_{\max} < (i_{M_1})_{\max} \tag{15}$$

este necesar ca

$$U_m Y_1 + \frac{U_m}{\omega L_1} \cos\gamma_1 < U_{m_{M_1}} Y_1. \tag{16}$$

Prin urmare

$$\begin{cases} U_{m_{cr}} < U_{m_{M_1}} \dfrac{Y_1}{Y_1 + \cos\gamma/\omega L_1}, \\ \gamma_{cr} < \arccos Y_1 \omega L_1 \left(\dfrac{U_{m_{M_1}}}{U_m} - 1\right). \end{cases} \tag{17}$$

Se observă că pentru $0 < \cos\gamma < 1$ se obţine $U_{m_{M_1}} > U_{m_{cr}} > 0{,}5\, U_{m_{M_1}}$.

Pentru ca punctul de funcţionare să se stabilească pe porţiunea *5* a caracteristicii V-A trebuie satisfăcută inegalitatea (15), adică

$$(18)\qquad U_m Y_1 \sin(\omega t + \gamma - \varphi_1) + \frac{U_m}{\omega L_1}\cos\gamma > U_{m_{M_2}} Y_2 \sin(\omega t + \gamma - \varphi_2).$$

În sfîrşit pentru a avea

$$(19)\qquad (i_1)_{\max} > (i_{M_2})_{\max}$$

este necesar ca

$$(20)\qquad U_m Y_1 + \frac{U_m}{\omega L_1}\cos\gamma > U_{m_{M_2}} Y_2.$$

Expresiile critice ale valorii efective şi fazei iniţiale ale tensiunii aplicate circuitului, corespunzătoare cazului în care punctul de funcţionare se stabileşte pe porţiunea *5* a caracteristicii V-A (se neglijează într-o primă aproximaţie regimul tranzitoriu de pe porţiunea *3*), sînt date de:

$$(21)\qquad U_{m_{cr}} > U_{m_{M_2}} \frac{Y_2}{Y_1 + \cos\gamma/\omega L_1},$$

$$(22)\qquad \gamma_{cr} > \arccos \omega L_1 Y_1 \left(\frac{Y_2}{Y_1}\cdot\frac{U_{m_{M_2}}}{U_m} - 1\right).$$

Tensiunea critică maximă (21) este atinsă după scurgerea unui timp t_{M_2} de la cuplarea circuitului la reţea dat de:

$$(23)\qquad t_{M_2} = \frac{\varphi_1}{\omega} \pm \frac{1}{\omega}\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right).$$

Se observă că prin cuplarea la o tensiune sinusoidală, punctul de funcţionare a unui circuit dubluferorezonant are tendinţa de a se plăsa pe porţiunea *1* cînd $\gamma = \pm (2k+1)\pi/2$ şi pe porţiunea *5* cînd $\gamma = \pm k\pi$, pentru o aceeaşi valoare efectivă a tensiunii aplicate.

Pentru ca punctul de funcţionare a circuitului să se stabilească pe porţiunea *3* a caracteristicii V-A rezultante este necesar ca curentul în regim tranzitoriu să nu depăşească valoarea maximă a curentului i_{M_2}.

Dacă curentul i_1 în regim tranzitoriu atinge valoarea i_{M_1}, se produce un nou regim tranzitoriu determinat de modificarea structurii circuitului (inductivitatea variază de la L_1 la L_2); apar în circuit t. e. m. periodice avînd armonice de rang exclusiv impar, corespunzătoare caracterului deformant al regimului din circuit. În acest caz schema echivalentă a circuitului în regimul tranzitoriu declanşat la valoarea $i_1 > i_{M_1}$ a curentului este redată în fig. 4.

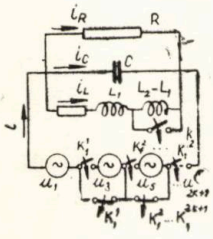


Fig. 4

Întrucît această schemă este liniară se poate aplica teorema suprapunerii pentru a afla forma şi valoarea efectivă a curentului pe porţiunea *3* de funcţionare a circuitului.

Pentru termenul fundamental rezultă

$$u_1 = U_m \sin(\omega t' + \gamma_2), \quad (t' \geqslant 0), \tag{24}$$

unde

$$\gamma_2 = \omega t_1 + \gamma_1. \tag{25}$$

Condiția $i_1 = i_{M_1}$ conduce la

$$t_1 = \frac{1}{\omega} \arcsin \frac{U_{..}}{U_{m M_1} - U_m} \cdot \frac{\cos \gamma_1}{Y_1 \omega L_1} + \frac{\varphi_1 - \gamma}{\omega}. \tag{26}$$

În mod analog

$$u_3 = U_{3m} \sin(3\omega t' + \gamma_2),$$
$$u_5 = U_{5m} \sin(5\omega t' + \gamma_2), \ldots, u_{2k+1} = U_{2k+1,m} \sin[(2k+1)\omega t' + \gamma_2]. \tag{27}$$

Dacă se aplică circuitului teoremele lui Kirchhoff rezultă ecuațiile

$$i_1 = i_{R1} + i_{C1} + i_{L1}, \tag{28}$$

$$i_{R1} = \frac{u_1}{R} = G u_1, \quad i_{C1} = \frac{\mathrm{d}q_C}{\mathrm{d}t} = C \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}, \quad i_{L1} = \frac{1}{L_2} \int u_1 \, \mathrm{d}t, \tag{29}$$

și deci

$$\mathcal{L} i_1 = \left(G + pC + \frac{1}{pL_2} \right) \mathcal{L} u_1 + \frac{i_{L_1}(0)}{p} - C U_C(0). \tag{30}$$

La $t = t_1$, $t' = 0$, se obține

$$i_{L_1}(0) = \frac{U_m}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L_1^2}} \sin(\omega t_1 + \gamma_1 - \varphi_1) - \frac{U_m}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L_1^2}} \sin(\gamma_1 - \varphi_1) \mathrm{e}^{-\frac{L_1}{r} t_1} =$$
$$= I_{L_1 m} \sin(\gamma_2 - \varphi_1) - I_{L_1 m} \sin(\gamma_1 - \varphi_1) \mathrm{e}^{-\frac{r}{L_1} t_1}. \tag{31}$$

De asemenea la $t' = t$

$$u_c(t') = U_{1m} \sin(\omega t' + \gamma_2), \tag{32}$$

iar la $t = t_1$, $t' = 0$,

$$u_C(0) = U_{1m} \sin(\omega t_1 + \gamma_1) = U_{1m} \sin \gamma_2. \tag{33}$$

Prin urmare

$$\mathcal{L} i_1 = \left(G + pC + \frac{1}{pL_2} \right) \mathcal{L} u_1 + \frac{I_{L_1 m}}{p} \sin(\gamma_2 - \varphi_1) -$$
$$- \frac{I_{L_1 m}}{p + r/L_1} \sin(\gamma_1 - \varphi_1) - C U_{1m} \sin \gamma_2. \tag{34}$$

Dacă se face ipoteza simplificatoare $r \cong 0$, $\varphi_1 \simeq -\pi/2$, (v. condiția I) rezultă

$$\mathcal{L}i_1 = \left(G + pC + \frac{1}{pL_2}\right)\mathcal{L}u_1 + \frac{I_{L_1m}}{p}\sin(\gamma_2 - \varphi_1) - \frac{I_{L_1m}}{p}\sin(\gamma_1 - \varphi_1) -$$

$$- CU_{1m}\sin\gamma_2 = \left(G + pC + \frac{1}{pL_2}\right)\mathcal{L}u_1 + \frac{I_{L_1m}}{p}\cos\gamma_2 - \frac{I_{L_1m}}{p}\cos\gamma_1 - \tag{35}$$

$$- CU_{1m}\sin\gamma_2 = \left(G + pC + \frac{1}{pL_2}\right)\frac{\omega\cos\gamma_2 + p\sin\gamma_2}{p^2 + \omega^2}U_{1m} + \frac{U_{1m}}{\omega L_1}\cdot\frac{\cos\gamma_2}{p} -$$

$$- \frac{U_{1m}}{\omega L_1}\cdot\frac{\cos\gamma_1}{p} - CU_{1m}\sin\gamma_2.$$

Aşadar

$$\mathcal{L}i_1 = U_{1m}\frac{p^2A_1^{(1)} + pA_2^{(1)} + A_3^{(1)}}{pL_2(p^2 + \omega^2)} + \frac{U_{1m}}{\omega L_1}\cdot\frac{\cos\gamma_2}{p} - \frac{U_{1m}}{\omega L_1}\cdot\frac{\cos\gamma_1}{p}, \tag{36}$$

unde

$$\begin{cases} A_1^{(1)} = \omega L_2 C\cos\gamma_2 + GL_2\sin\gamma_2, \\ A_2^{(1)} = \omega GL_2\cos\gamma_2 + (1 - \omega^2 L_2 C)\sin\gamma_2, \quad A_3^{(1)} = \omega\cos\gamma_2. \end{cases} \tag{37}$$

Rezultă în definitiv

$$i_1 = U_{1m}\left[Y_2\sin(\omega t' + \gamma_2 - \varphi_2) + \left(\frac{1}{\omega L_2} - \frac{1}{\omega L_1}\right)\cos\gamma_2 + \frac{\cos\gamma_1}{\omega L_1}\right], \tag{38}$$

$$i_1 = i_{1\sim} + i_{1tr},$$

cu

$$\begin{cases} Y_2 = \dfrac{A_2^{(1)}}{\omega L_2\cos\varphi_2}, \quad \operatorname{tg}\varphi_2 = \dfrac{-\omega^2 A_1^{(1)} + A_3^{(1)}}{\omega A_2^{(1)}}, \\ \cos\varphi_2 = \dfrac{\omega A_2^{(1)}}{\sqrt{\omega^2 A_2^{(1)2} + (A_3^{(1)} - \omega^2 A_1^{(1)})^2}}. \end{cases} \tag{39}$$

Se obține astfel expresia de regim tranzitoriu pentru cazul cînd la cuplarea tensiunii sinusoidale de frecvență fundamentală, punctul de funcționare trece pe porțiunea *3* a caracteristicii V-A rezultante.

Pentru ca după cuplarea la rețea în circuit să se stabilească direct regimul permanent sinusoidal este necesar ca:

$$i_{1tr} = \left(\frac{1}{\omega L_2} - \frac{1}{\omega L_1}\right)\cos\gamma_2 + \frac{\cos\gamma_1}{\omega L_1} = 0. \tag{40}$$

Sînt de considerat două cazuri:

I. $$\omega L_1 = \omega L_2, \quad \gamma_1 = \pm (2k+1)\frac{\pi}{2},$$

II. $$\gamma_2 = \gamma_1 = \pm (2k+1)\frac{\pi}{2}.$$

Deoarece $L_2 \neq L_1$ (fig. 2), în al doilea caz ($t_1 = 0$) rezultă

$$\gamma_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{U_{1m}}{U_{m_{M_1}} - U_{1m}} \cdot \frac{1}{G\omega L_1} + \operatorname{tg}\varphi_1\right), \tag{41}$$

$$\left(\text{dacă } U_{1m} = U_{m_{M_1}} \text{ atunci } \gamma_1 = \frac{\pi}{2}\right).$$

Pentru ca regimul de funcţionare al circuitului să se stabilească direct pe porţiunea *3* de funcţionare, după cuplarea la reţea, este necesar ca

$$i_{M1} < i_1 < i_{M2} \tag{42}$$

sau

$$Y_1 U_{m_{M_1}} \sin(\omega t + \gamma_1 - \varphi_1) < U_{1m}\left[Y_2 \sin(\omega t' + \gamma_2 - \varphi_2) + \right. \tag{43}$$

$$\left. + \left(\frac{1}{\omega L_2} - \frac{1}{\omega L_1}\right)\cos\gamma_2 + \frac{\cos\gamma_1}{\omega L_1}\right] < U_{m_{M_2}} Y_2 \sin(\omega t' + \gamma_2 - \varphi_2).$$

Dacă este satisfăcută condiţia II atunci:

$$U_{m_{M_1}} \frac{Y_1 \sin(\omega t + \gamma_1 - \varphi_1)}{Y_2 \sin(\omega t' + \gamma_2 - \varphi_2)} < U_{1m} < U_{m_{M_2}}, \tag{44}$$

sau pentru $t = t' + t_1$

$$U_{m_{M_1}} \frac{Y_1 \sin(\omega t' + \gamma_2 - \varphi_1)}{Y_2 \sin(\omega t' + \gamma_2 - \varphi_2)} < U_{1m} < U_{m_{M_2}}. \tag{45}$$

În cazul particular $t' = 0$ (cel mai defavorabil din punct de vedere al regimului tranzitoriu) se obţine

$$U_{m_{M_1}} \frac{Y_1 \sin(\gamma_2 - \varphi_1)}{Y_2 \sin(\gamma_2 - \varphi_2)} < U_{1m} < U_{m_{M_2}}. \tag{46}$$

Condiţia generală (42) se mai poate scrie sub forma

$$(i_{M1})_{\max} < (i_1)_{\max} < (i_{M2})_{\max}, \tag{47}$$

rezultînd

$$Y_1 U_{m_{M_1}} < U_{1m}\left[Y_2 + \left(\frac{1}{\omega L_2} - \frac{1}{\omega L_1}\right)\cos\gamma_2 + \frac{\cos\gamma_1}{\omega L_1}\right] < Y_2 U_{m_{M_2}}. \tag{48}$$

Din relaţia (48) rezultă limitele lui γ_{1cr} corespunzătoare cazului de stabilire directă a regimului de funcţionare pe porţiunea *3* a caracteristicii:

$$\alpha + \arcsin Y_2 \frac{\frac{U_{M_1}}{U}\left(\frac{U_{M_1}}{U}\cdot\frac{Y_1}{Y_2} - 1\right)}{\frac{1}{\omega L_2} - \frac{1}{\omega L_1}} \cos\alpha \geqslant \gamma_{1cr} \geqslant$$

(49)

$$\geqslant \alpha + \arcsin Y_2 \frac{\frac{U_{M_1}}{U}\left(\frac{U_{M_2}}{U} - 1\right)}{\frac{1}{\omega L_2} - \frac{1}{\omega L_1}} \cos\alpha,$$

unde

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{U_{M1}}{\sqrt{U^2 + U_{M_1}^2}} + \frac{\omega L_2}{\omega L_1 - \omega L_2}\cdot\frac{U}{U_{M_1}}. \tag{50}$$

Se observă că pentru o tensiune dată (fie ca valoare maximă, fie ca valoare efectivă) există o anumită valoare a fazei iniţiale (49) pentru care regimul circuitului, după cuplarea sa la reţea, se stabileşte direct pe porţiunea *3* a caracteristicii (porţiune stabilă).

Prezintă interes să se determine aportul armonicilor în circuitul neliniar de tip paralel, în care la aplicarea unei tensiuni sinusoidale, se obţine un curent nesinusoidal. În acest caz elementul neliniar care deformează curentul este bobina cu miez feromagnetic, magnetizată suplimentar în curent continuu. În cazul aproximării caracteristicii V-A a bobinei neliniare comandate ca în fig. 2 se obţine pe cale grafică, pentru curentul i_L, forma nesinusoidală dată în fig. 5, corespunzătoare cazului cînd punctul de funcţionare al circuitului se stabileşte pe porţiunea *3* (*AB*).

Descompunînd curba curentului $i_L(t)$, bisimetrică, în serie Fourier se obţine

$$i_L(t) = \sum_{k=0}^{\infty} i_{2k+1}. \tag{51}$$

Acest curent nesinusoidal parcurgînd bobina liniară de inductivitate L_2 produce la bornele ei o tensiune de asemenea nesinusoidală de forma:

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{2k+1}(t), \tag{52}$$

unde

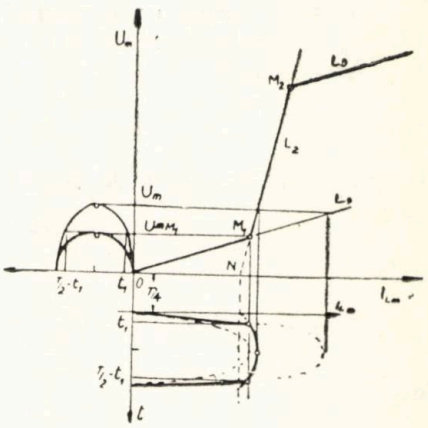


Fig. 5

$$t_1 = \frac{1}{\omega} \arcsin \frac{U_{M_1}}{U}, \quad (U > U_{M_1}). \tag{53}$$

Tensiunea va fi dată de:

$$u = U_m \sin(\omega t' + \gamma_2) + \sum_{k=1}^{\infty} U_{2k+1,\,m} \sin[(2k+1)\,\omega t' + \gamma_2)], \tag{54}$$

unde

$$U_{2k+1,m} = \frac{2U_m}{\pi} \left\{ \left[\frac{1}{2k} \sin 2k\omega t_1 - \frac{1}{2(k+1)} \sin 2(k+1)\omega t_1 \right] + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{2k+1} \sin \omega t_1 \cos(2k+1)\,\omega t_1 \right\} \cdot \frac{L_2 - L_1}{L_2}. \tag{55}$$

Se poate observa că pentru

$$\begin{cases} t_1 = \dfrac{T}{4}, & U = U_{M_1}, \quad U_{2k+1,m} = 0; \\ t_1 \to 0, & U \to \infty, \quad U_{2k+1,m} = \dfrac{4U_{M_1}}{k\pi}. \end{cases}$$

În cazul în care tensiunea aplicată circuitului dubluferorezonant creşte cu mult peste valoarea U_{M_1}, aportul armonicilor de tensiune de rang superior (3, 5, 7) este redus $\left(U_{2k+1} < \dfrac{4U_{M_1}}{k\pi}\right)$.

Această tensiune nesinusoidală se aplică întregului circuit la momentul $t' = 0$ şi se obţine curentul nesinusoidal total.

Armonicii de rang $2k+1$ a tensiunii

$$u_{2k+1} = U_{2k+1,m} \sin[(2k+1)\,\omega t' + \gamma_2] \tag{56}$$

îi corespunde armonica de curent:

$$i_{2k+1} = i_{R_{2k+1}} + i_{C_{2k+1}} + i_{L_{2k+1}}, \tag{57}$$

unde

$$i_{R_{2k+1}} = GU_{2k+1}, \quad i_{C_{2k+1}} = C\frac{\mathrm{d}u_{2k+1}}{\mathrm{d}t}, \quad i_{L_{2k+1}} = \frac{1}{L_2}\int u_{2k+1}\,\mathrm{d}t, \tag{58}$$

încît

$$\mathcal{L}i_{2k+1} = \left(G + pC + \frac{1}{pL_2}\right) \mathcal{L}u_{2k+1} + i^{(0)}_{L_{2k+1}} - CU^{(0)}_{C_{2k+1}}. \tag{59}$$

Pînă la timpul $t \leqslant t_1$, $(t' \leqslant 0)$, nu există regim deformant şi deci $i_{L_{1_{2k+1}}}(0) = 0$. În acest caz se obţine următoarea expresie pentru armonicile superioare ale curentului total din circuitul dubluferorezonant paralel:

$$i_{2k+1} = Y_{2k+1} U_{2k+1,m} \sin[(2k+1)\omega t' + \gamma_2 - \varphi_{2k+1}]. \tag{60}$$

Valoarea instantanee a curentului total, cînd este îndeplinită condiţia $U < U_{M_1}$, rezultă:

$$i = \sum_{k=0}^{\infty} i_{2k+1} + U_m \left| \left(\frac{1}{\omega L_2} - \frac{1}{\omega L_1} \right) \cos \gamma_2 + \frac{\cos \gamma_1}{\omega L_1} \right|. \tag{61}$$

Condiţia generală (42) impusă circuitului, ca după cuplarea sa la o sursă de tensiune sinusoidală, regimul să se stabilească pe porţiunea *3* de funcţionare, poate fi scrisă şi pentru valorile efective şi anume:

$$I_{M_1} < I < I_{M_2}, \tag{62}$$

$$\begin{cases} I^2 = I_0^2 + \sum_{k=0}^{\infty} I_{2k+1}^2, \quad I_{M_1} = Y_1 U_{M_1}, \; I_{M_2} = Y_2 U_{M_2}, \\ I_0 = U \left[\left(\frac{1}{\omega L_2} - \frac{1}{\omega L_1} \right) \cos \gamma_2 + \frac{\cos \gamma_1}{\omega L_1} \right], \quad I_{2k+1} = Y_{2k+1} U_{2k+1}. \end{cases} \tag{63}$$

Pentru a determina valoarea critică a parametrilor, ce decurge din condiţia (62), se poate limita numărul armonicilor la maximum două, celelalte avînd amplitudine neglijabilă.

3. Rezultate experimentale

Pentru studiul experimental şi verificarea rezultatelor teoretice obţinute cu privire la regimul tranzitoriu în circuitele electrice neliniare de tip paralel cu bobină neliniară comandată (de caracteristică V-A dată) în curent continuu, se foloseşte montajul din fig. 6, unde: *CF* — cheie de fază care permite închiderea circuitului la faze iniţiale ale tensiunii impuse, *u* — tensiune sinusoidală stabilizată, R_p — cutie de rezistenţe în decade tip Metra, *C* — cutie de condensatoare în decade tip Ulrich, *AM* — amplificator magnetic tip ZK-115 — ultraperm.

În fig. 7 s-au trasat caracteristicile V-A ale bobinei neliniare comandate în curent continuu. Se observă că pentru materialele magnetice moi (cu pierderi reduse şi ciclu de isterezis rectangular) metoda liniarizării pe porţiuni a caracteristicii V-A este indicată.

Pentru circuitul electric neliniar paralel cu bobină comandată (fig. 1) s-au trasat experimental caracteristicile V-A rezultante reprezentate în fig. 8. Se poate observa că funcţie de parametrii circuitului este posibilă obţinerea celor trei cazuri limită şi anume:

1° Releu dubluferorezonant paralel care prezintă numai două porţiuni stabile de funcţionare la creşterea curentului total din circuit, *1* şi respectiv *5*. În regim tranzitoriu se constată că după cuplarea circuitului la o tensiune de valoare efectivă dată, regimul se poate stabili, funcţie de faza iniţială a tensiunii, pe porţiunea *1* şi respectiv *5*, conform relaţiilor (9), (10).

2° Releu dubluferorezonant, care la creşterea tensiunii prezintă trei domenii stabile de funcţionare, *1*, *3* şi respectiv *5*. În cazul în care pentru anumiţi parametri ai circuitului diferenţa $i_{M_2} - i_{M_1}$ este importantă, indiferent de faza iniţială a tensiuni aplicate circuitului

punctul de funcţionare în regim tranzitoriu nu poate ajunge pe porţiunea stabilă 5. Pentru o anumită valoare critică a mărimii γ_{cr} şi respectiv a parametrilor din circuit, pentru o tensiune dată (în valoare efectivă) în regim tranzitoriu, punctul de funcţionare al circuitului se poate plasa pe oricare din porţiunile stabile (*1*, *3* şi respectiv *5*), cînd faza iniţială a tensiunii variază.

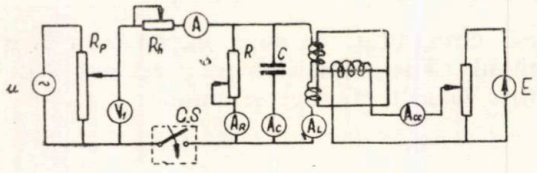


Fig. 6

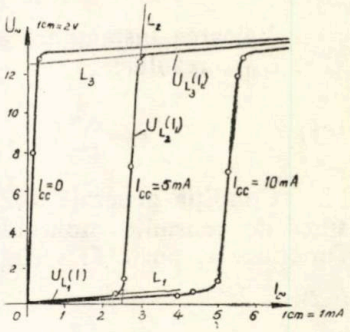


Fig. 7

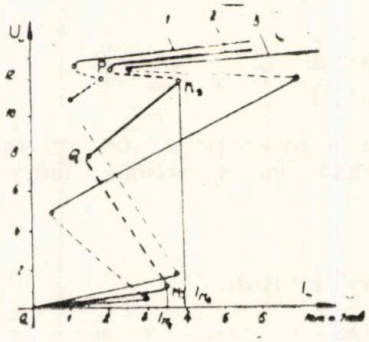


Fig. 8

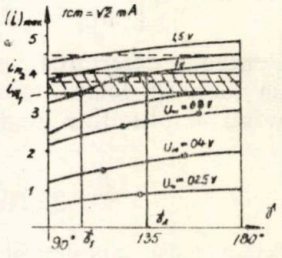


Fig. 9

În fig. 9 s-au trasat supraintensităţile care apar în circuit funcţie de faza iniţială a tensiunii la diverse valori efective ale acesteia, măsurate la oscilograful cu remanenţă tip TR-4501-*D* şi verificate cu ajutorul voltmetrului V_1 din fig. 6, care indică poziţia punctului de funcţionare în regim permanent.

Se observă de asemenea că cu cît diferenta $i_{M_1} - i_{M_2}$ este mai mare, γ_{cr} se micşorează (pînă la dispariţie); circuitul nu mai poate prezenta trei stări stabile pentru o valoare efectivă dată a tensiunii de alimentare variind numai faza iniţială a acesteia.

4. Concluzii

1. Folosirea metodei grafoanalitice propuse pentru analiza circuitului electric neliniar paralel cu bobină comandată în curent continuu, în regim tranzitoriu, duce la rezultate verificate experimental şi permite o discuţie funcţie de oricare alt parametru, inclusiv faza iniţială a tensiunii aplicate circuitului, efectuată în lucrare.

2. Studiul regimului tranzitoriu, în astfel de circuite, în funcţie de faza iniţială a tensiunii aplicate circuitului, pune în evidenţă trei domenii stabile de funcţionare spre care se îndreaptă circuitul după stingerea regimului tranzitoriu.

3. Studiul acestui circuit justifică o dată în plus importanţa pe care o prezintă condiţiile iniţiale în analiza circuitelor neliniare, şi pune în evidenţă faptul că pentru anumite valori critice ale parametrilor regimul circuitului se stabileşte pe una din cele trei porţiuni stabile de funcţionare (*1*, *3* şi *5*), funcţie de condiţiile iniţiale (faza iniţială a tensiunii). În acest mod se poate comanda un releu ferorezonant cu ajutorul fazei iniţiale a tensiunii aplicate; totodată cu ajutorul unui astfel de circuit se poate determina domeniul fazei iniţiale în care se află circuitul.

4. Se pot studia releele de tip ferorezonant capabile să funcţioneze independent de momentul cuplării sau decuplării lor de la reţea (independente de condiţiile iniţiale).

Primită la 14 III 1968

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de electrotehnică

BIBLIOGRAFIE

1. Savin Gh., Simion E., Popescu I., *Circuits à double ferrorésorance utilisant des bobine. à noyaux ferromagnétiques magnetisées en courant continu.* R. G. É., 1965, **74**, *5s*
2. Hayashi Ch., *Nonlinear Oscillation in Physical Systems.* Mc Graw-Hill Book, New-York, 1964.
3. Simion E., *Circuit série, double ferrorésonant, avec des paramètres variables.* Revue „E", 1967, **V**, *6*.
4. Popescu I., Simion E., *Rezonanţa în circuitele electrice neliniare de tip paralel cu bobină comandată.* Comunicată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Cluj, 10–12 oct. 1968.

RÉGIME TRANSITOIRE DU CIRCUIT ÉLECTRIQUE PARALLÈLE À BOBINE NONLINÉAIRE COMMANDÉE

(Résumé)

On étudie le régime transitoire dans un circuit électrique parallèle à bobine nonlinéaire commandée en courant continu, en utilisant la méthode de la linéarisation par portions des caractéristiques V-A nonlinéaires.

Si l'on introduit des schémas électriques équivalentes linéaires on peut utiliser des méthodes d'analyse opérationnelles.

On étudie la variation du courant dans le circuit, fonction de la phase initiale de la tension sinusoïdale appliquée.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

C. D. 512.99.99 ; 538.552.9

SUR LA DÉTERMINATIONS DES COMPOSANTES SYMÉTRIQUES PAR VOIE ANALYTIQUE DANS UN RÉSEAU TRIPHASÉ À TROIS CONDUCTEURS*)

PAR

LAURIAN PREDA

Communication présentée dans la session scientifique de l'Institut Polytechnique de Jassy, 28—30 septembre 1967

1. On connaît dans la littérature la méthode graphique pour la détermination des composantes symétriques. On procède de la manière suivante : a) on considère trois vecteurs qui forment le triangle ABC (fig. 1); b) on construit le triangle $A'B'C'$ en prenant O comme origine commune des trois vecteurs (fig. 2) ; c) on construit d'une part et de l'autre, pour chaque côté du triangle $A'B'C'$ deux triangles équilatéraux ($A'B'M$, $A'B'M'$, $B'C'N$, $B'C'N'$, $A'C'P$, $A'C'P'$ — fig. 2); d) en unissant les sommets des triangles équilatéraux avec les sommets du triangle $A'B'C'$ qui n'ont été pas utilisés dans leur construction, on trouve le triple des composantes directe et inverse du système des trois vecteurs (fig. 2); e) on construit séparemment le système des composantes directes et inverses ; si l'on construit les résultantes de ces systèmes on obtient les vecteurs donnés (fig. 3).

En utilisant cette méthode graphique nous nous sommes proposés à déterminer les expressions analytiques des composantes symétriques.

2. On considère les trois vecteurs $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ qui forment un triangle (fig. 4 a). On utilise les notations : $|\bar{A}| = a$, $|\bar{B}| = b$, $|\bar{C}| = c$.

Dans la fig. 4 a on a réalisé la décomposition des trois vecteurs $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ coformément à la méthode exposés ci-dessus. On a déterminé donc par voie graphique les composantes directe (A_d) et inverse (A_i), l'angle d'entre elles (φ), l'angle formé par la composante directe et le vecteur de base (μ) de même que celui entre la composante inverse et le vecteur de base (ν).

Du triangle $AO'D$ (fig. 4 b) il résulte :

$$\frac{O'D}{\sin \mu} = \frac{AO'}{\sin (\tau - \mu)} = \frac{AD}{\sin (\pi - \tau)},$$

*) Travail effectué dans le laboratoire de Mesures électriques de l'Institut Polytechnique de Jassy, sous la direction scientifique du professeur docteur docent V. Petrescu.

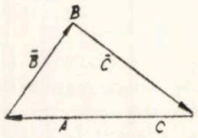


Fig. 1

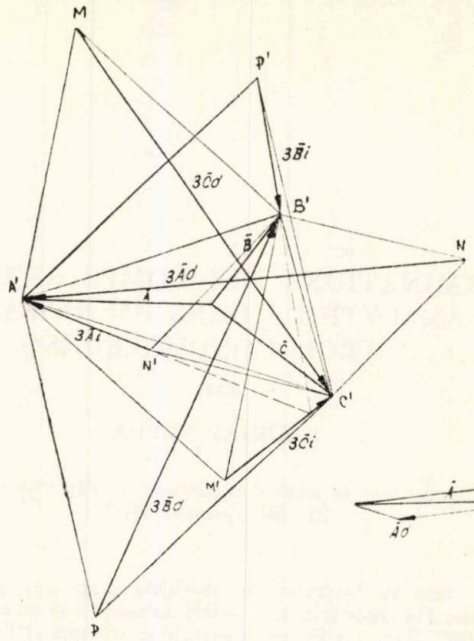


Fig. 2

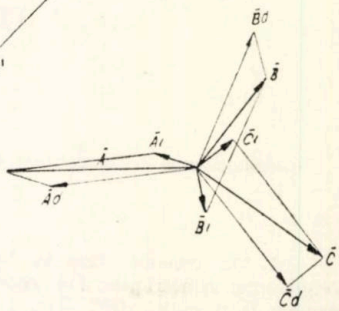


Fig. 3

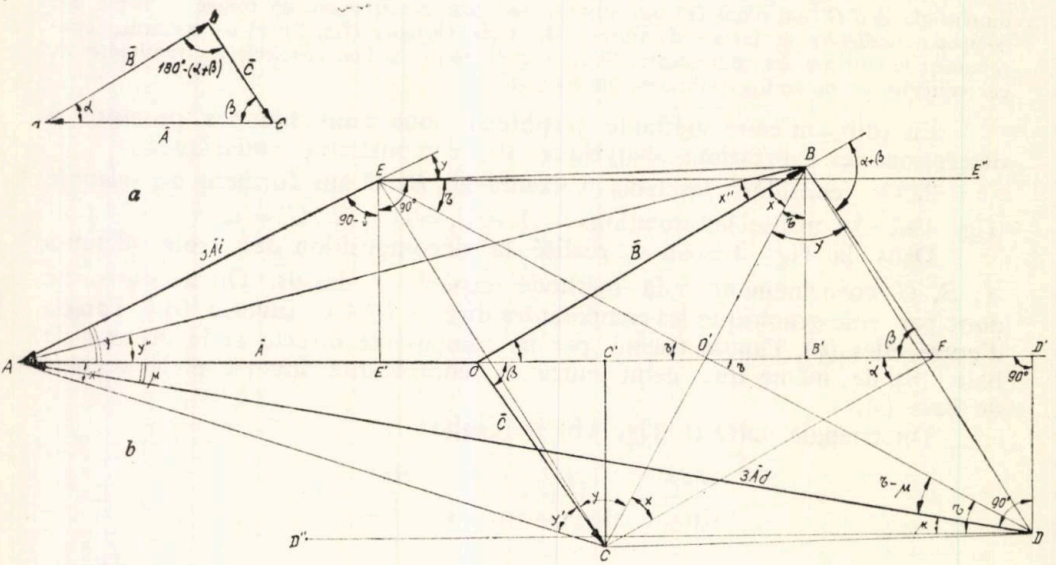


Fig. 4

tandis que du triangle équilatéral BCD, où $O'D$ est la hauteur, on obtient:

$$O'D = BD\cos 30° = BC\frac{\sqrt{3}}{2} = 2O'B\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}O'B$$

et du triangle $OO'B$:

$$\frac{O'B}{\sin\alpha} = \frac{OO'}{\sin x}, \quad O'B = OO'\frac{\sin\alpha}{\sin x} = \frac{a}{2}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin x}.$$

Mais

$$O'D = \frac{\sqrt{3}}{2}a\frac{\sin\alpha}{\sin x}, \quad AO' = \frac{3}{2}a, \quad AD = 3|\bar{A}|.$$

Compte tenu de ces valeurs on obtient:

$$|\bar{A}_d| = \frac{a}{2}\cdot\frac{\sin\tau}{\sin(\tau-\mu)} = \frac{a}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{\sin\alpha\sin\tau}{\sin x\sin\mu}, \quad \frac{\sin\mu}{\sin(\tau-\mu)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin x}.$$

Du triangle rectangle OBB' on trouve $\tau = \pi/2 - \alpha - x$ et du triangle AEO'

$$\frac{AE}{\sin\tau} = \frac{AO'}{\sin(\pi-\nu-\tau)} = \frac{EO'}{\sin\nu}$$

où

$$AE = 3|\bar{A}_i|, \quad AO' = \frac{3}{2}a, \quad EO' = O'D = \frac{\sqrt{3}}{2}a\frac{\sin\alpha}{\sin x}.$$

Par substitution de ces valeurs il en résulte:

$$|\bar{A}_i| = \frac{a}{2}\cdot\frac{\sin\tau}{\sin(\tau+\nu)} = \frac{a\sin\alpha\sin\tau}{2\sqrt{3}\sin x\sin\nu},$$

$$\frac{\sin\nu}{\sin(\nu+\tau)} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{3}\sin x} = \frac{\sin\mu}{\sin(\tau-\mu)}.$$

En exprimant τ, μ, ν et x en fonction de a, b, c on obtient, compte tenu de la fig. 4 a,

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{\sin\alpha\cos(\alpha+x)}{\sqrt{3}\sin x + \sin\alpha\sin(\alpha+x)}, \quad \operatorname{tg}\nu = \frac{\sin\alpha\cos(\alpha+x)}{\sqrt{3}\sin x - \sin\alpha\sin(\alpha+x)},$$

$$\mu+\nu = \varphi, \quad \operatorname{tg}x = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha/\sin\beta - \cos(\alpha+\beta)},$$

$$\cos\alpha = \frac{c^2-a^2-b^2}{2ab}, \quad \cos\beta = \frac{b^2-c^2-a^2}{2ac}.$$

En effectuant les calculs on obtient:

$$(1)\quad \begin{cases} |\bar{A}_d| = \pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{a^2+b^2+c^2+\sqrt{3}\sqrt{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}}, \\ |\bar{A}_i| = \pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{a^2+b^2+c^2-\sqrt{3}\sqrt{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}}, \\ \delta = \dfrac{|\bar{A}_i|}{|\bar{A}_d|} = \dfrac{a^2+b^2+c^2+\sqrt{3}\sqrt{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}}{2\sqrt{a^4+b^4+c^4-a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2}}, \\ \operatorname{tg}\mu = \dfrac{b^2-c^2}{\sqrt{3a^2+\sqrt{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}}}, \\ \operatorname{tg}\nu = \dfrac{b^2-c^2}{\sqrt{3a^2-\sqrt{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}}}, \\ \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\mu+\nu) = \sqrt{3}\dfrac{b^2-c^2}{2a^2-b^2-c^2}. \end{cases}$$

Si l'on introduit les notations $b/a = p$ et $c/a = q$ il en résulte:

$$(2)\quad \begin{cases} |\bar{A}_d| = \pm\dfrac{a}{\sqrt{6}}\sqrt{1+p^2+q^2+\sqrt{3}\sqrt{2p^2+2q^2+2p^2q^2-1-p^4-q^4}}, \\ |\bar{A}_i| = \pm\dfrac{a}{\sqrt{6}}\sqrt{1+p^2+q^2-\sqrt{3}\sqrt{2p^2+2q^2+2p^2q^2-1-p^4-q^4}}, \\ \delta = \dfrac{1+p^2+q^2+\sqrt{3}\sqrt{2p^2+2q^2+2p^2q^2-1-p^4-q^4}}{2\sqrt{1+p^4+q^4-p^2-q^2-p^2q^2}}, \\ \operatorname{tg}\mu = \dfrac{p^2-q^2}{\sqrt{3}+\sqrt{2p^2+2q^2+2p^2q^2-1-p^4-q^4}}, \\ \operatorname{tg}\nu = \dfrac{p^2-q^2}{\sqrt{3}-\sqrt{2p^2+2q^2+2p^2q^2-1-p^4-q^4}}, \\ \operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3}\dfrac{p^2-q^2}{2-p^2-q^2}. \end{cases}$$

Les relations ont été déduites pour le cas $a > b > c$.

Si l'on exprime les composantes symétriques en fonction des angles formés entre les vecteurs de base (α et β, fig. 4 a) on obtient:

$$
(3)\quad
\begin{cases}
|\bar{A}_d| = \dfrac{\pm a}{\sqrt{3}\,(\sin^2\beta - \sin^2\alpha)} \times \\
\times\sqrt{(\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta)\,[\sin^3\beta\,(\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha) - \sin^3\alpha\,(\cos\beta + \sqrt{3}\sin\beta)]}, \\
|\bar{A}_i| = \dfrac{\pm a}{\sqrt{3}\,(\sin^2\beta - \sin^2\alpha)} \times \\
\times\sqrt{(\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta)\,[\sin^3\beta\,(\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha) - \sin^3\alpha\,(\cos\beta - \sqrt{3}\sin\beta)]}, \\
\delta = \sqrt{\dfrac{\sin^3\beta\,(\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha) - \sin^3\alpha\,(\cos\beta - \sqrt{3}\sin\beta)}{\sin^3\beta\,(\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha) - \sin^3\alpha\,(\cos\beta + \sqrt{3}\sin\beta)}}, \\
\operatorname{tg}\mu = \dfrac{(\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta)^2}{\sqrt{3}\,(\sin^2\beta - \sin^2\alpha) + 2\sin\alpha\sin\beta\,(\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta)}, \\
\operatorname{tg}\nu = \dfrac{(\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta)^2}{\sqrt{3}\,(\sin^2\beta - \sin^2\alpha) - 2\sin\alpha\sin\beta\,(\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta)}, \\
\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\mu + \nu) = \\
= \dfrac{\cos^2\alpha\sin^2\beta - \sin^2\alpha\cos^2\beta}{\sin^2\alpha\cos^2\beta + \cos^2\alpha\sin^2\beta - 2\sin^2\alpha\sin^2\beta + 4\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta}.
\end{cases}
$$

Dans le cas particulier $\alpha = \beta$ (triangle isocèle) on obtient:

$$\delta = \frac{\sqrt{3} - \operatorname{tg}\beta}{\sqrt{3} + \operatorname{tg}\beta}.$$

La vérification des expressions analytiques peut être efectuée aisément si l'on compare les résultats des calculs aux celles mesurés sur le graphique. Ainsi dans la fig. 4 b :

$$a = 12,\ b = 10,\ c = 6\quad \operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3}\,\frac{10^2 - 6^2}{2.12^2 - 10^2 - 6^2} = 0{,}73,\quad \varphi = 36°10',$$

résultat qui est conforme au graphique. Les autres résultats se vérifient d'une manière analogue à l'aide du graphique ou des nomogrammes [2].

4. Si l'on note avec a, b, c les valeurs des trois vecteurs on peut obtenir les situations ci-dessous :

$$\text{A)}\ a > b > c,\quad \text{B)}\ b > c > a,\quad \text{C)}\ c > a > b,$$
$$\text{D)}\ a > c > b,\quad \text{E)}\ b > a > c,\quad \text{F)}\ c > b > a.$$

En considérant trois valeurs constantes quelconques (par ex. 12, 10, et 6) on peut réaliser chacun des cas A, B,..., F en fonction de l'ordre dans lequel on les considère, donc en fonction de l'ordre des vecteurs.

En décomposant par voie graphique le triangle formé par les trois vecteurs dans chacun des six cas séparemment (A, B,..., F) on constate

qu'entre les angles de déphasage des composantes directe et inverse il y a les relations suivantes :

$$(4)\quad \begin{cases} \text{A) } \varphi_A, \quad \text{B) } \varphi_B = 2\pi/3 + \varphi_A, \quad \text{C) } \varphi_C = 4\pi/3 + \varphi_A, \\ \text{D) } \varphi_D = 2\pi - \varphi_A, \quad \text{E) } \varphi_E = 2\pi/3 - \varphi_A, \quad \text{F) } \varphi_F = 4\pi/3 - \varphi_A, \end{cases}$$

Elles peuvent être vérifiées soit par voie graphique soit à l'aide de la relation trouvée pour $\operatorname{tg}\varphi$.

Conclusions

1. Étant donnés trois vecteurs quelconques $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$, dont la résultante est nulle, à l'aide de la décomposition en composantes symétriques par voie graphique on peut déterminer la valeur des composantes directe et inverse, le degré d'asymétrie, de même que les angles de déphasage entre les composantes directe et inverse (φ), l'angle formé par le vecteur de base et la composante directe (μ) ou bien celle inverse (ν).

2. Les expressions analytiques des composantes symétriques sont obtenues en fonction des valeurs des trois vecteurs de base (1), de leurs rapports (2) ou des angles formés par les vecteurs de base (3).

3. La détermination par voie analytique de l'angle de déphasage entre le vecteur de base et la composante directe (μ) permet à mesurer le facteur de puissance dans un réseau triphasé à trois conducteurs à l'aide d'un phasemètre monophasé si l'on connaît les valeurs des courants sur les trois phases.

4. La permutation des valeurs des trois vecteurs de base dans les six manières possibles $(A, B, \ldots, F)$ montre qu'entre l'angle formé par la composante directe et celles inverse ont lieu les relations (4).

Institut Polytechnique de Jassy,
Chaire de Mesures et Machines électriques

BIBLIOGRAPHIE

1. Нейман Л. Р., Калантаров П. Л., *Теоретические основые электротехники.* ГЭИ, М.—Л., 1954.
2. Carabulea A., Arie A., *Metode pentru remedierea nesimetriilor în rețelele electrice.* I.D.T., Buc., 1963.
3 Carabulea A., *Detectarea și remedierea practică a nesimetriei sarcinii electrice.* Electrotehnica, 1965, *12,* pp. 448–461.
4. Baida I., *Curs general de măsurări electrice.* EES, Buc., 1959, (traduit du russe).

ASUPRA DETERMINĂRII COMPONENTELOR SIMETRICE PE CALE ANALITICĂ ÎNTR-O REȚEA TRIFAZATĂ CU TREI CONDUCTOARE

(Rezumat)

Avînd dați trei vectori oarecare, a căror rezultantă este nulă, se stabilesc, pe baza metodei grafice cunoscute, de determinare a componentelor simetrice, expresiile analitice ale mărimilor componentelor directă și inversă, a unghiului de defazaj dintre componenta directă și inversă, a unghiurilor dintre vectorul de bază și componentele directă și inversă, precum și gradul de nesimetrie. Se utilizează mărimile vectorilor dați sau unghiurile dintre ei.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

D. K. 518.3

ÜBER SYMMETRISCHE NOMOGRAMME MIT SICH SCHNEIDENDEN GERADEN

VON

E. DÎMBOIU und V. ȚĂRANU

1. Vorwort

Unter Nomogramm versteht man die graphische Darstellung einer Beziehung zwischen mehreren Grössen. Nomogramme sind Spezialzeichnungen die das schnelle Ausführen von Berechnungen erlauben, die nach anderen Methoden ermüdend sind. Die meistverarbeiteten Nomogramme sind die mit alinierten Punkten, zu denen die Nomogramme mit drei oder mehreren sich schneidenden Geraden gehören.

Die grundlegende Beziehung für Nomogramme mit drei sich schneidenden Geraden ist

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}, \tag{1}$$

wo a, b, c gleichartige Grössen sind (elektrische Kapazität, elektrischer oder magnetischer: Widerstand, Elastizitätskonstante, Starrheit, u. s. w.).

2. Konstruktionsprinzip des Nomogrammes mit drei sich schneidenden Geraden

Gegeben sind zwei sich schneidende Geraden (D_1) und (D_2), die miteinander einen Winkel 2α bilden (Abb. 1). Die Winkelhalbierende ist die Gerade (D). Der Schnittpunkt der drei Geraden wird mit O bezeichnet. Es wird eine Gerade (Δ) gezogen die die Geraden (D_1), (D_2) und (D) in den Punkten B, A und C schneidet. Es werden die Vektoren $\overline{OB} = \bar{a}$, $\overline{OC} = \bar{c}$ $\overline{BA}$ und $\overline{AC}$ angenommen.

Weiter wird folgende Beziehung bewiesen:

$$\frac{2\cos\alpha}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}. \tag{2}$$

Der Vektor $\overline{BA}$ ist parallel mit $\overline{AC}$, also $\overline{BA} = \lambda \overline{AC}$, oder

$$(\bar{a} - \bar{b}) = (\bar{c} - a). \tag{3}$$

Aus dem Lehrsatz der Winkelhalbierenden folgt: $BA/b = AC/c$, daraus $BA = (b/c)\,AC$, also

$$\lambda = \frac{b}{c}. \tag{4}$$

Die Beziehung (3) wird skalar mit $\bar{a}$ multipliziert und λ aus der Beziehung (4) ersetzt:

$$a^2 - \bar{a} \cdot \bar{b} = \frac{b}{c}(\bar{a} \cdot \bar{c} - a^2),$$

woraus $ac - bc\cos\alpha = bc\cos\alpha - ab$, oder $ac + ba = 2bc\cos\alpha$, und schliesslich

$$\frac{2\cos\alpha}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

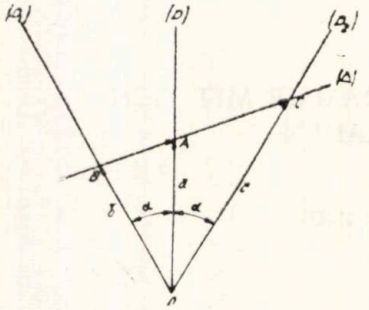


Abb. 1

Ist $\alpha = 60°$, also $2\alpha = 120°$,

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \longrightarrow a = \frac{bc}{b+c}.$$

Für $\alpha = 45°$, also $2\alpha = 90°$,

$$\frac{\sqrt{2}}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \longrightarrow a = \sqrt{2}\frac{bc}{b+c}.$$

Ist $\alpha = 30°$, also $2\alpha = 60°$,

$$\frac{\sqrt{3}}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \longrightarrow a = \sqrt{3}\frac{bc}{b+c}.$$

In den obigen Beziehungen wird für die Grössen a, b und c derselbe Masstab benützt. Selbstverständlich können Nomogramme auch für andere Werte des Winkels α konstruiert werden.

Oft ist es vorteilhafter, gerade auf Grund der Beziehung (1), Nomogramme mit Winkeln $\alpha \neq 60°$ zu konstruieren. In diesem Fall muss der Masstab der Grösse a verschieden von dem der Grössen b und c sein. Dieses kann auf Grund der Beziehung (2) erzielt werden, wenn man $a' = a/2\cos\alpha$ bezeichnet und dabei

$$\frac{1}{a'} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

erhält. Die Grössen a', b und c haben denselben Masstab.

3. Anwendungsbereiche der Nomogramme mit drei sich schneidenden Geraden

Diese Art von Nomogrammen findet in der Elektrotechnik, Optik, sowie bei der Maschinenelemente eine weitgehende Anwendung.

a) *Im Bereich der Elektrotechnik* werden sie wie folgt angewendet:

a_1) zum Berechnen der äquivalenten Kapazität zweier in Reihe geschalteter Kondensatoren:

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2};$$

a_2) zum Berechnen des äquivalenten Widerstandes zweier parallel geschalteter elektrischer oder magnetischer Widerstände:

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \quad \frac{1}{R_{me}} = \frac{1}{R_{m1}} + \frac{1}{R_{m2}};$$

a_3) zum Berechnen der äquivalenten Induktivität zweier parallel geschalteter Induktivitäten:

$$\frac{1}{L_e} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}.$$

b) *In der Mechanik:*

b_1) zum Berechnen der äquivalenten Elastizitätskonstante zweier in Reihe geschalteter Federn:

$$\frac{1}{K_e} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}.$$

c) *Bei der Festigkeitsberechnung einiger Maschinenelemente:*

c_1) zum Berechnen der Steifigkeitszahl zweier verbundener gradliniger Balken, die auf Zug oder Druck beansprucht werden:

$$\frac{1}{C_{pe}} = \frac{1}{C_{p1}} + \frac{1}{C_{p2}};$$

dabei ist $C_p = A_p E_p / l_p$, und A_p – der Querschnitt des Balkens, E_p – das Elastizitätsmodul des Balkens, l_p – die Länge des Balkens;

c_2) zum Berechnen des reduzierten Elastizitätsmoduls der Werkstoffe aus denen der Ritzel und das Zahnrad eines Getriebes hergestellt werden:

$$E = \frac{2 E_p E_r}{E_p + E_r},$$

dabei sind: E_p – das Elastizitätsmodul des zur Herstellung des Ritzels verwendeten Werkstoffes, E_r – das Elastizitätsmodul des zur Herstellung des Zahnrades verwendeten Werkstoffes.

Die obige Beziehung kann unter folgender Form geschrieben werden:

$$\frac{2}{E} = \frac{1}{E'} = \frac{1}{E_p} + \frac{1}{E_r},$$

wobei $E' = E/2$.

d) *In der Optik:*

d_1) zum Berechnen der Brennweite einer Linse:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2},$$

wobei f – die Brennweite der Linse, d_1 – die Entfernung vom Bild zur Linse, d_2 – die Entfernung vom Objekt zur Linse.

Sicherlich erschöpfen die oben erwähnten Bereiche nicht alle Anwendungsmöglichkeiten dieses Nomogrammtypus.

4. Anwendungsprinzip der Nomogramme mit drei sich schneidenden Geraden

Als Beispiel wird das Nomogramm aus Abb. 2 angenommen, wo $\alpha = 30°$ ist; es folgt die Beziehung:

$$a' = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{bc}{b + c}.$$

Wählt man auf den beiden Geraden (D_1) und (D_2) die Einheit 1 cm = 1 μ_2F im Falle der Kapazitäten, 1 cm = 1 Ω im Falle der elektrischen Widerstände u. s. w., so wird auf der Geraden (D), wo man die äquivalente Kapazität, oder den äquivalenten Widerstand erhält, 1 μF = $\sqrt{3}$ cm, 1Ω = $\sqrt{3}$ cm genommen.

Man verbindet mit einer Geraden die Werte der zwei in Reihe geschalteter Kapazitäten (der zwei parallel geschalteten elektrischen Widerstände u. s. w.), die auf den schiefen Skalen des Nomogrammes gelesen werden. Die Gegade schneidet die Zentralskala bei dem äquivalenten Wert der Kapazität (des Widerstandes u. s. w.).

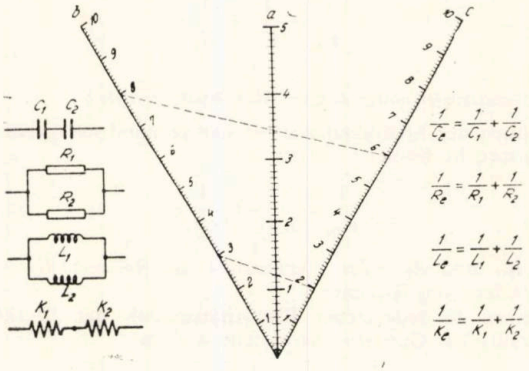


Abb. 2

Soll zum Beispiel die äquivalente Kapazität C_e zweier in Reihe geschalteter Kapazitäten $C_1 = 6\,\mu$F und $C_2 = 8\,\mu$F gefunden werden: so genügt es ein Lineal oder ein gerades Blatt Papier so zu setzen, dass die beiden schiefen Skalen des Nomogrammes in den Punkten *6* und *8* geschnitten werden, um auf der Zentralskala $C_e = 3{,}43$ μF ablesen zu können.

Ein anderes Beispiel: $R_1 = 3\,\Omega$, $R_2 = 2\,\Omega$; es folgt $R_e = 1{,}2\,\Omega$.

Sämtliche Skalenwerte können mit ein und derselben Zahl 10, 10^2, 10^3,..., 10^k multipliziert oder dividiert werden, woraus sich eine weitreichende Anwendbarkeit des Nomogrammes ergibt. Werden die Werte des oben angeführten Beispiels mit 10 multipliziert, so zeigt die unterbrochene Gerade die Reihenschaltung einer Kapazität von 60 μF mit einer von 80 μF, woraus eine äquivalente Kapazität von 34,3 μF folgt.

Das Nomogramm gestattet auch das Berechnen der äquivalenten Kapazität von drei, vier und mehreren in Reihe geschalteten Kapazitäten. In solchen Fällen wird die äquivalente Gesamtkapazität schrittweise, durch stetige Hinzunahme einer neuen Kapazität, bestimmt. Das Nomogramm wird also auch für folgende Beziehungen angewandt:

$$\frac{1}{C_e} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}, \quad \frac{1}{R_e} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i} \text{ u. s. w.}$$

5. Nomogramm mit mehreren sich schneidenden Geraden

Eine Verallgemeinerung der Beziehung (1) kann unter folgender Form geschrieben werden:

$$\frac{1}{X_e} = \frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} + \frac{1}{X_3} + \cdots + \frac{1}{X_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_i}.$$

Man bezeichnet:

$$\frac{1}{X_{e1}} = \frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2}, \quad \frac{1}{X_{e2}} = \frac{1}{X_{e1}} + \frac{1}{X_3} \text{ u. s. w.}$$

Um die äquivalente Grösse X_e zu bestimmen haben die Verfasser das kreisförmige Nomogramm aus Abb. 3 ausgearbeitet.

Es wird ein Kreis angenommen der in sechs gleiche Teile geteilt wird und die 6 Radien haben denselben Masstab, weil $\alpha = 60°$. Im gegebenen Fall hat jeder Radius 10 cm, die Einheiten der zu bestimmenden Grössen entsprechen (1 cm = 1 μF, 1 cm = 1 Ω u. s. w.)

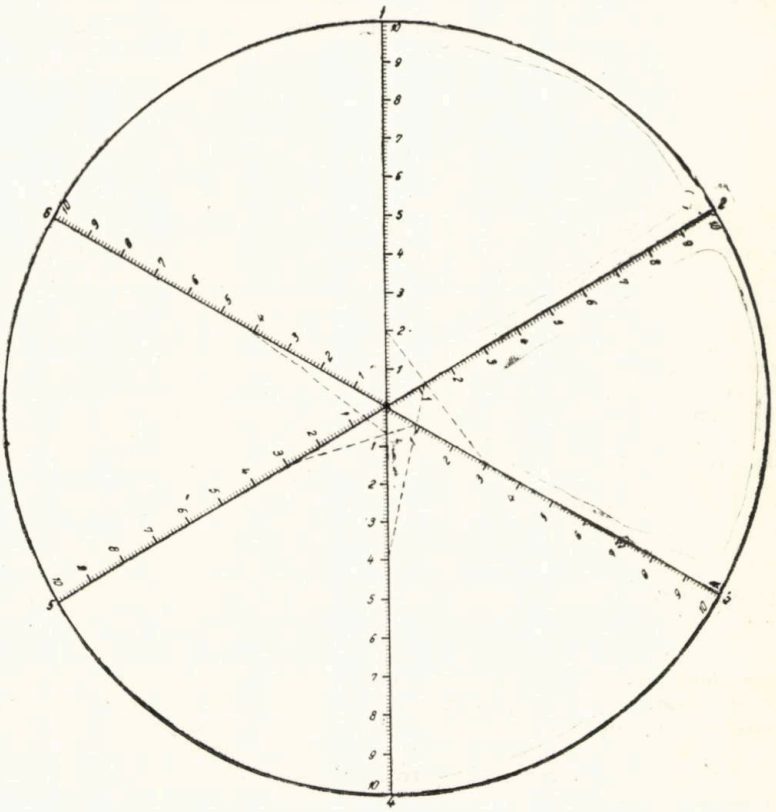


Abb. 3

Auf dem ersten Radius wird X_1 und auf dem dritten X_2 angenommen. Man erhält dabei X_{e1} auf dem zweiten Radius. X_{e1} des zweiten Radius mit X_3 des vierten Radius geben X_{e2} auf dem drittem Radius u. s. w.

Diese Methode führt zur Benützung von 6 Radien, ohne dass ihre Zahl von der Zahl der Glieder beeinträchtigt wird.

Die Benützung des Nomogrammes ist aus folgendem Beispiel klar ersichtlich.

Gegeben seien fünf in Reihe geschaltete Kondensatoren mit den Kapazitäten $C_1 = 2\ \mu F$, $C_2 = 3\ \mu F$, $C_3 = 4\ \mu F$, $C_4 = 2{,}8\ \mu F$, $C_5 = 4{,}2\ \mu F$, verlangt wird die äquivalente Kapazität:

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} + \frac{1}{C_5},$$

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2{,}8} + \frac{1}{4{,}2},$$

$$C_e = 0{,}6\ \mu F.$$

Das Nomogramm bietet den Vorteil schnelle Berechnungen einer grossen Zahl in Reihe geschalteter Kondensatoren, parallel geschalterer Widerstände u. s. w. durchzuführen.

Eingegangen am 10. IV 1967

Technische Hochschule, Brașov

LITERATURVERZEICHNIS

1. Bal L., Radó F., *Lecții de nomografie*. Ed. tehn. Buc., 1956.
2. Crespin R., *Memento Tungsram*. T. **II**, Paris, 1942.
3. Diercks H., Euler H., *Praktische Nomographie*. Verlag Stahleisen, Düsseldorf, 1942.
4. Гаврa Д. Л., *Основы номографии с примерами из машиностроения*. ГИТТЛ, М., 1962
5. Gheorghiu N., *Noțiuni de nomografie*. Gaz. matem. și fiz., seria A, 1961, *5*.
6. Iorga M., Marinescu A., Andrian A., *Diagrame, abace, nomograme*. Ed. tehn. Buc., 1959.
7. Körwien H., *Graphisches Rechnen, Nomographie*. Fachbuchverlag, Leipzig, 1952.
8. Müller A., *Nomographie für die technische Praxis*. Fachbuchverlag, Leipzig, 1952.
9. Невский Б. А., *Справочная книга по номографии*. ГИТТЛ, М-Л., 1951.
10. Pentkovski M. V., *Nomografia*. Ed. tehn., Buc., 1952, (aus russisch übersetzt)
11. Rodionov V. M., *Nomograme in radiotehnică*. Ed. tehn., Buc., 1957, (aus russisch übersetzt).
12. * * * *Nomograme utile*. Radioamatorul, 1957, *6*.

ASUPRA UNOR NOMOGRAME SIMETRICE CU DREPTE CONCURENTE

(Rezumat)

Se prezintă principiul de construcție al nomogramei simetrice cu trei drepte concurente, domeniile de folosire a acestui tip de nomogramă, modul de utilizare a nomogramei, iar în final se prezintă o nomogramă circulară originală cu mai multe drepte concurente. Nomograma circulară prezintă marele avantaj de a permite calculul rapid al mărimii echivalente a unui număr mare de capacități grupate în serie, rezistențe electrice sau magnetice grupate în paralel, constante elastice grupate în serie etc.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

C. D. 621.317.37 2 ; 621.317.7.032.78

POSSIBILITÉS DE MESURE DU FACTEUR DE PUISSANCE AVEC DES INSTRUMENTS MAGNÉTOÉLECTRIQUES

PAR

V. PETRESCU et M. CREȚU

Communication présentée dans la session scientifique de l Institut Polytechnique de Jassy, 28–30 septembre 1967

1. Introduction

On peut mesurer le facteur de puissance directement, à l'aide des phasemètres et des logomètres de courant alternatif, ou bien indirectement, en déterminant séparément la puissance active, respectivement la tension et le courant. Des possibilités supplémentaires pour la mesure de ce paramètre paraissent lorsqu'on emploie des circuits à semiconducteurs, du type redresseurs sensibles à la phase.

Dans ce qui suit on analyse certains aspects concernant la mesure du facteur de puissance à l'aide des montages à semiconducteurs, en employant comme instruments indicateurs un galvanomètre, respectivement un logomètre magnétoélectrique.

2. Méthode en pont pour la mesure du facteur de puissance

Soit un pont de Wheatstone (fig. 1) $ABMN$ constitué par deux résistances de valeurs élevées, R_2 et R'_2, une résistance semi-variable d'ajustage r_2, deux diodes semiconductrices D_2 et D'_2 en série respectivement avec les résistances R_3 et R'_3, ayant des valeurs sensiblement moindres que celles des résistances R_2 et R'_2. Le pont est alimenté dans les noeuds A, B avec une tension alternative $u_2 = ki$, obtenue aux bornes d'une résistance de petite valeur, s_2, en l'alimentant par le courant i. Au noeud M du pont on applique aussi, par l'intermédiaire de la diode D_1, la tension alternative u_2. L'appareil de zéro (le galvanomètre de courant continu) est connecté entre le noeud Q correspondant à la catode de la diode D_2 et le curseur P de la

résistance variable R'_3. La valeur maximum de la résistance variable R_3 est égale à celle de la résistance fixe R_3.

On applique d'abord seulement la tension alternative u_2, le circuit de la tension u_1 étant pour le moment ouvert; en réglant la résistance semi-variable r_2—le curseur P de la résistance R_3 étant dans la position maximum—on obtient le point zéro du galvanomètre. Cette situation correspond à la

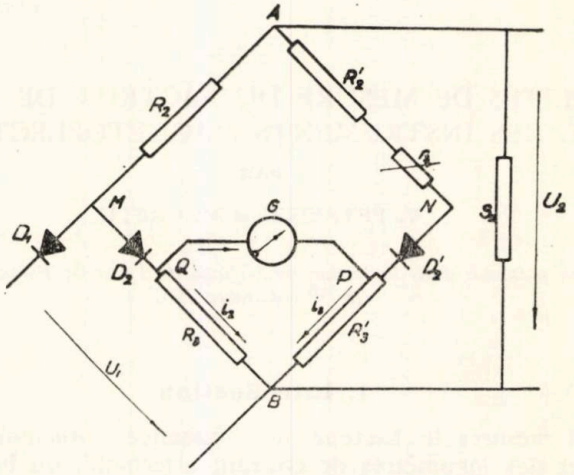


Fig. 1

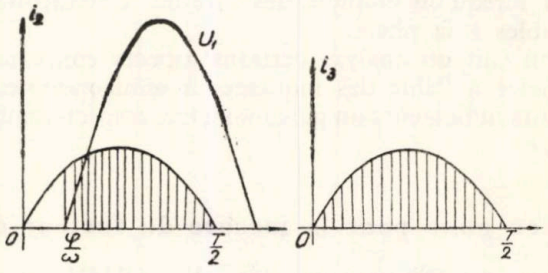


Fig. 2

symétrie des courants pulsatoires i_2 et i_3. Une eventuelle non-symétrie initiale des courants est due aux résistances différentes des bras AMB et ANB. Les résistances de conduction des diodes D_2 et D'_2, choisies initialement avec des caractéristiques les plus rapprochées possibles par rapport à R_2, sont connectées en série, de manière que la petite différence entre les résistances des diodes affecte très peu la symétrie des courants.

Si la différence de phase entre les tensions u_1 et u_2, donc entre u_2 et i est nulle, en appliquant la tension de commande u_1, les courants i_1 et

i_2 continueront à rester égaux, l'appareil de zéro indiquant l'équilibre. S'il y a un déphasage entre les tensions alternatives, la diode D_2 étant commandée par la tension u_1, elle conduira seulement dans les alternances positives de celle-ci, et la valeur moyenne du courant est donnée par:

$$(1) \qquad i_{2\text{moyen}} = \frac{1}{T} \int_{\varphi/\omega}^{T/2} I_{\max} \sin \omega t \, dt = I_{\max} \frac{1 + \cos \varphi}{2\pi},$$

tandis que la valeur moyenne de i_3 reste constante :

$$(2) \qquad i_{3\text{moyen}} = \frac{1}{T} \int_{0}^{T/2} I_{\max} \sin \omega t \, dt = \frac{1}{\pi} I_{\max} .$$

Dans ce cas les composantes continues des chutes de tension sur les résistances R_3 et R'_3 seront respectivement:

$$(3) \qquad R_3 I_{2\text{moyen}} = R_3 I_{\max} \frac{1 + \cos \varphi}{2\pi},$$

$$(4) \qquad R'_{3\max} I_{3\text{moyen}} = \frac{R_3 I_{\max}}{\pi},$$

car $R_{3\max} = R_3$.

Ces chutes de tension diffèrent compte tenu de la différence de phase entre les tensions alternatives; par conséquent l'appareil de zéro n'indiquera plus l'équilibre. Pour obtenir l'équilibre on réglera le curseur P. Soit r la résistance délimitée entre le curseur et le noeud B lorsqu'on réalise l'équilibre

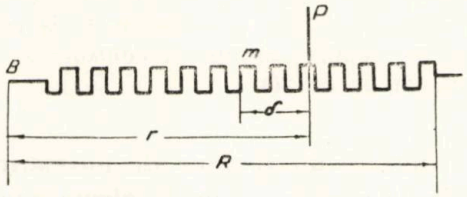


Fig. 3

et δ la valeur de la résistance comprise entre le curseur et le point médian m de la résistance R'_3 (fig. 3). En appliquant la deuxième loi de Kirchhoff au circuit fermé, constitué par les résistances R_3, r et g (la résistance intérieure du galvanomètre), on obtient:

(5) $$R_3 i_2 - r i_3 - g i_g = 0.$$

En intégrant cette relation pour une période du courant alternatif et tenant compte des relations (3) et (4) de même que du fait qu'en cas d'équilibre la valeur moyenne du courant par le galvanomètre este nulle on obtient:

$$R_3 \frac{I_{max}}{2\pi}(1 + \cos\varphi) = \frac{1}{\pi} r I_{max},$$

ou bien:

(6) $$\cos\varphi = \frac{2r}{R} - 1.$$

Entre les résistances R, r et δ il y la relation simple $2r = R \pm 2\delta$ le signe de δ dépendant de la position à droite ou à gauche du curseur par rapport au milieu m.

Il est convenable de choisir les résistances R_3 et R'_3 égales chacune à 200 Ω, la dernière étant variable; dans ce cas le relation (6) devient:

(7) $$\cos\varphi = \pm \frac{\delta}{100},$$

c'est-à-dire la résistance δ représente en centièmes la valeur de $\cos\varphi$.

Pour mesurer par la méthode de zero indiquée ci-dessus le facteur de puissance, on considère comme tension de commande u_1, la tension d'alimentation du consommateur; la tension u_2 d'alimentation du pont sera considérée proportionnelle au courant par l'intermédiaire d'une petite résistance en série avec le consommateur.

Les erreurs de méthode sont dues particulièrement à la commande défectueuse de blocage ou de déblocage de la diode D_2 par la tension de commande. Pour abaisser les valeurs de ces tensions-ci il est nécessaire que l'amplitude de la tension de commande soit de beacoup plus grande que la chute de tension sur la diode, produite par la courant de commande i_2. L'abaissement du courant i_2, par l'augmentation de la résistance R_2, est très avantageux car en même temps diminue la consommation; il est limité par la sensibilité de l'indicateur de zéro.

3. Mesure directe du facteur de puissance à l'aide du logomètre magnétoélectrique

Si l'on prend comme point de départ la méthode préconisée ci-dessus, on peut réaliser un instrument pour la mesure directe du $\cos\varphi$ si les résistances R_3 et R'_3 sont substituées par les enroulements d'un logomètre magnétoélectrique. L'angle de deviation de celui-ci dépend du rapport K_i entre les valeurs moyennes des courants dans les cadres. Si l'on effectue le rapport des relations (1) et (2) on obtient:

$$K_i = \frac{1 + \cos\varphi}{2\pi} = \frac{i_{2\,\text{moyen}}}{i_{3\,\text{moyen}}}, \tag{8}$$

qui représente la relation fondamentale lors de la mesure du facteur de puissance à l'aide du logomètre. Si la dépendance fonctionelle de la déviation du logomètre avec le rapport des courants est linéaire on obtient un phasemètre à échelle linéaire.

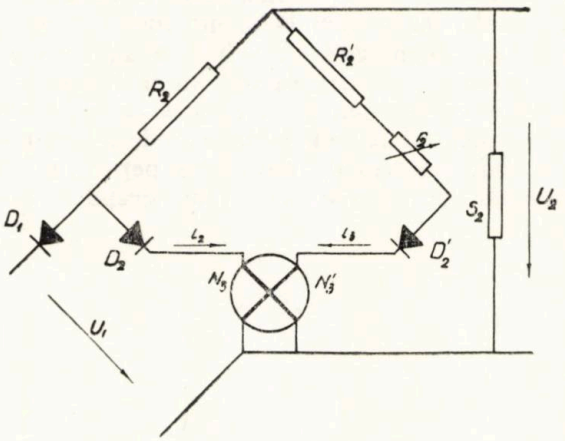


Fig. 4

Les logomètres magnétoélectriques ont d'habitude le rapport des courants (K_i) égal à l'unité pour la position de l'aiguille au milieu de l'échelle graduée. Par conséquent si l'on tient compte que (fig. 2) $i_{2\,\text{moyen}} \leqslant i_{3\,\text{moyen}}$, on emploie pour la mesure de l'angle seulement la moitié de l'échelle. Cet inconvénient peut être éliminé en ajustant les résistances R_2 et R'_2 de manière que la valeur maximum du courant i_3 soit la moitié de la valeur maximum du courant commandé i_2. Pour y aboutir il faudrait que $R'_2 + r_{\log} + r_d = 2(R_2 + r_{\log} + r_d)$, où $r_{\log}$ est la résistance des enroulements du logomètre et r_d la résistance de conduction des diodes. Le caractère non-linéaire des résistances des diodes influence très peu cette condition car $r_d \ll R_2$, R'_2.

Pour un tel arrangement des résistances du pont le rapport des courants est égal à l'unité, donc la position au milieu de l'échelle correspond à un déphasage entre les tensions alternatives, de 90°. Les deux autres positions extrêmes, à gauche et à droite, correspondent respectivement aux déphasages de 0° et 180°.

Lorsque le logomètre a une limite de mesure finie, à l'aide du même montage on obtient un indicateur sensible à la quadrature entre les tensions alternatives u_1 et u_2.

4. Les erreurs de méthode et les résultats expérimentaux

Les erreurs de méthode sont dues dans ce cas aussi, surtout aux défauts de commande ou de blocage des diodes. Dans ce qui suit on établit des relations quantitatives qui permettent à calculer cette erreur.

Dans la fig. 5 on présente la forme du courant commandé lorsqu'il existe un défaut de commande. Pour le déphasage φ entre la tension de commande et le courant commandé i_2, lors de la commande sinusoïdale, le déblocage de la diode D_2 n'aura pas lieu selon la droite ac qui correspond à une commande idéale, mais selon la droite inclinée ab à partir du point b correspondant à un dephasage φ'. Soit δ la différence angulaire entre le début idéal du déblocage, qui correspond au déphasage réel φ et le début réel du déblocage qui correspond à un déphasage φ'. L'abscisse du point b correspond à un potentiel nul de l'anode de la diode commandée. Évidemment, la différence angulaire δ sera d'autant plus petite que l'amplitude de la tension de commande alternative sera plus grande que l'amplitude du courant commandé.

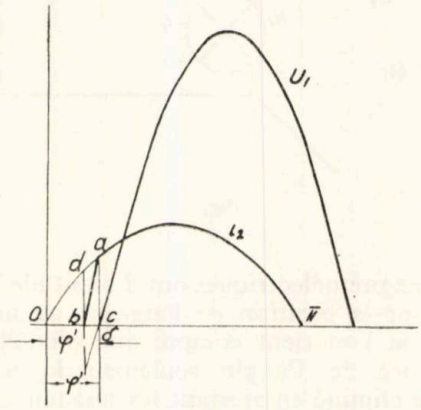


Fig. 5

L'impulsion de courant (fig. 5) peut être représentée d'une manière analytique par la fonction:

$$Y = \begin{cases} 0 \text{ pour } (2k+1)\,\pi \leqslant \omega t \leqslant 2k\,\pi + \varphi - \delta, \\ \dfrac{\sin\varphi}{\delta}\,\omega t - \dfrac{\varphi - \delta}{\delta}\sin\varphi \quad \text{pour} \quad \varphi - \delta \leqslant \omega t \leqslant \varphi, \\ \sin \omega t \quad \text{pour} \quad \varphi \leqslant \omega t \leqslant \pi. \end{cases}$$

On calcule la composante continue de cette fonction en effectuant l'intégrale moyenne pour une période:

$$(9)\qquad i''_{2\,\text{moyen}} = \frac{1}{T}\left[\int_{(\varphi-\delta)/\omega}^{\varphi/\omega}\left(\frac{\sin\varphi}{\delta}\,\omega t - \frac{\varphi-\delta}{\delta}\sin\varphi\right)\mathrm{d}t + \int_{\varphi/\omega}^{T/2}\sin\omega t\,\mathrm{d}t\right] = \frac{\delta}{4\pi}\sin\varphi + \frac{1+\cos\varphi}{2\pi}.$$

L'erreur absolue qu'on commet en considérant cette valeur moyenne au lieu de celle qui correspond à une commande rectangulaire sera:

$$\Delta i = i''_{2\,\text{moyen}} - i_{2\,\text{moyen}}.$$

Si l'on tient compte de (1) et (9) en obtient:

$$(10)\qquad \Delta i = \frac{\delta}{4\pi}\sin\varphi,$$

et l'erreur relative sera

$$(11)\qquad \varepsilon = \frac{i_{2\,\text{moyen}}}{\Delta i} = \frac{\delta}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}.$$

On a vérifié par voie expérimentale la possibilité de mesure d'un déphasage variable entre une tension et un courant à l'aide d'un montage en pont (fig. 1), en employant comme indicateur de zéro un galvanomètre ayant la constante 10^{-8} A/div. Le déphasage variable a été obtenu à l'aide d'un décaleur d'angle du type I.R.M.E. - Bucarest et les diodes employées ont été du type DR 303. Le même déphasage a été mesuré à l'aide d'un phasemètre électrodynamique de precision. La sensibilité maximum de mesure a été obtenue pour des angles compris entre 30° et 150°, lorsque l'erreur relative par rapport à la valeur mesurée à l'aide du phasemètre électrodynamique n'a depassé, elle non plus 0,5%.

Institut Polytechnique de Jassy,
Chaire de Mesures et Machines électriques

BIBLIOGRAPHIE

1. Séguier G., *Mesure électronique directe des composantes active et reactive d'un courant sinusoïdal.* RGÉ, octobre 1958, p. 565.
2. Chimdambaram R., Krishnan S., *Diode Phase Sensitive Detectors with Load.* Electronic Engineering, 1959, *31*, p. 613.
3. Сигорский В. П., *Магнитоэлектрический логометры.* Киев, 1956.
4. Вышенчюк И. М., Котюк А. Ф., *Электромеханические и электронные фазометры.* Ленинград, 1962.
5. Gould H. P., *Phase Angle Measurement.* Electrical Review, July 1963, p. 103.
6. Goagă G., *Tuburi electronice şi dispozitive semiconductoare.* Ed. Tehn., Buc., 1964.

POSIBILITĂȚI DE MĂSURARE ALE FACTORULUI DE PUTERE CU INSTRUMENTE MAGNETOELECTRICE

(Rezumat)

Se analizează unele aspecte privind măsurarea factorului de putere prin intermediul montajelor cu semiconductoare și folosirea ca instrumente indicatoare a unui galvanometru, respectiv a unui logometru magnetoelectric. Se deduc formulele de calcul în cazul măsurării au ajutorul unui montaj în punte Wheatstone cu diode semiconductoare, propus de autori, și în legătură cu acesta se propune de asemenea o metodă pentru măsurarea directă a factorului de putere, instrumentul indicator fiind un logometru magnetoelectric. În acest ultim caz dacă ogometrul are limita de măsurare finită se obține un indicator sensibil de cuadratură între urent și tensiune. Se stabilesc relații cantitative pentru calculul erorilor de metodă datorită efectelor de comandă ale diodelor.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

C. Z. 621.317.761 ; 621.317.7.082.72

FRECVENŢMETRU CU LOGOMETRU ELECTROSTATIC PENTRU DOMENIUL AUDIO

DE

M. ANTONIU şi V. PETRESCU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 28—30 septembrie 1967

1. Introducere

În ultimul timp se intensifică utilizarea curenţilor „tari", de frecvenţe audio, şi odată cu aceasta apare necesitatea frecvenţmetrelor de tablou, mai ales în cazul generatorilor statici. Dintre frecvenţmetrele cunoscute [1]...[3], mai adecvate acestui scop par a fi cele cu diode Zenner [2] dar şi acestea numai pînă la frecvenţe sub 10 kHz.

În cele ce urmează se prezintă un frecvenţmetru de tablou cu logometru electrostatic şi circuit de măsură cu rezonanţă de tensiune. Instrumentul este simplu, ieftin şi dă rezultate satisfăcătoare pînă la frecvenţe de 50 kHz.

Logometrul electrostatic este cunoscut ca idee, fiind utilizat în schemă de ohmmetru [4]. Utilizarea acestuia în schemă de frecvenţmetru, după informaţiile de care se dispune, nu a fost descrisă nicăieri în literatura de specialitate.

2. Principiul de funcţionare

Schema frecvenţmetrului propus este arătată în fig. 1. Circuitul de măsură a frecvenţei, C_M, alcătuit din două circuite cu rezonanţă de tensiune, $R_1L_1K_1$ şi $R_2L_2K_2$, furnizează la ieşire două tensiuni, U_1 şi U_2, puternic dependente de frecvenţa de măsurat f. Aceste tensiuni intrînd în

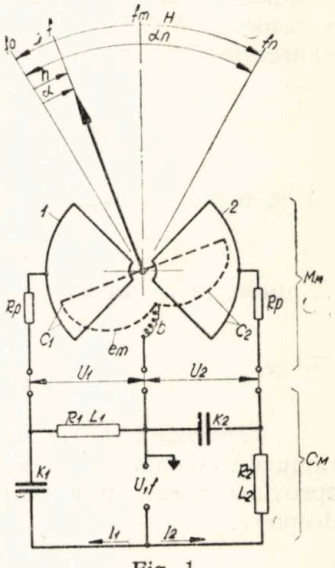


Fig. 1

mecanismul de măsură logometric, M_M, produc o deviaţie α dependentă de f şi independentă faţă de variaţiile (în anumite limite) ale tensiunii de alimentare U. Pentru ca acul indicator să devieze în sensul creşterii unghiului α, este necesar ca la creşterea frecvenţei f, U_1 să crească iar U_2 să scadă.

3. Circuitul de măsură (C_M)

3.1. Ecuaţia de funcţionare

Tensiunile de ieşire din circuitul de măsură sînt date de expresiile:

$$(1)\qquad U_1 = \frac{U\sqrt{R_1^2+\omega^2 L_1^2}}{\sqrt{R_1^2+(\omega L_1 - 1/\omega K_1)^2}}, \qquad U_2 = \frac{U}{\omega K_2\sqrt{R_2^2+(\omega L_2 - 1/\omega K_2)^2}},$$

în care U este tensiunea de intrare, $\omega = 2\pi f$ — pulsaţia acesteia iar R_1, L_1, K_1 şi R_2, L_2, K_2 — rezistenţele, inductivităţile şi respectiv capacităţile elementelor de circuit respective.

Introducînd mărimile auxiliare:

$$(2)\qquad Q_1 = \frac{2\pi f_{1r} L_1}{R_1} = \frac{1}{2\pi f_{1r} K_1 R_1}, \qquad Q_2 = \frac{2\pi f_{2r} L_2}{R_2} = \frac{1}{2\pi f_{2r} K_2 R_2}$$

şi

$$(3)\qquad \lambda_1 = \frac{f}{f_{1r}}, \qquad \lambda_2 = \frac{f}{f_{2r}},$$

— unde Q_1 şi Q_2 sînt factorii de calitate (supratensiune) ai circuitelor $R_1L_1K_1$ şi respectiv $R_2L_2K_2$ iar f_{1r} şi f_{2r} — frecvenţele proprii de rezonanţă ale acestora, expresiile (1) capătă formele:

$$U_1 = \frac{U\sqrt{1+Q_1^2\lambda_1^2}}{\sqrt{1+Q_1^2(\lambda_1 - 1/\lambda_1)^2}}, \qquad U_2 = \frac{UQ_2}{\lambda_2\sqrt{1+Q_2^2(\lambda_2 - 1/\lambda_2)^2}},$$

iar la rezonanţă ($\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$) devin:

$$(4)\qquad U_{1r} = U\sqrt{1+Q_1^2}, \qquad U_{2r} = UQ_2,$$

de unde, prin împărţire, se obţine:

$$(5)\qquad y_1 = \frac{U_1}{U_{1r}} = \frac{\sqrt{1+Q_1^2\lambda_1^2}}{\sqrt{(1+Q_1^2)[1+Q_1^2(\lambda_1 - 1/\lambda_1)^2]}}, \qquad y_2 = \frac{U_2}{U_{2r}} = \frac{1}{\lambda_2\sqrt{1+Q_2^2(\lambda_2 - 1/\lambda_2)^2}}.$$

Reprezentarea grafică a curbelor definite de relaţiile (5) arată că atît ramurile ascendente cît şi cele descendente ale acestora, pot fi considerate aproximativ rectilinii pe porţiunile ale căror centre de simetrie se află pe dreptele:

$$(6)\qquad y_1 = y_2 = 0{,}7.$$

Impunînd condiția ca punctul de funcționare să se afle pe aceste drepte se obține relația:

$$\frac{U_{1m}}{U_{1r}} \approx \frac{U_{2m}}{U_{2r}} = 0{,}7, \tag{6'}$$

în care U_{1m} și U_{2m} reprezintă valorile tensiunilor U_1 și U_2, atunci cînd acul indicator se află la mijlocul scării. Pentru $Q_1 = Q_2 \geqslant 3$, din (4) rezultă $U_{1r} \approx U_{2r}$ și în consecință,

$$U_{1m} = U_{2m}. \tag{7}$$

Îndeplinirea condiției (7) conduce la simetrie în construcția mecanismului logometric și, ca urmare, la dimensiuni radiale minime ale acestuia.

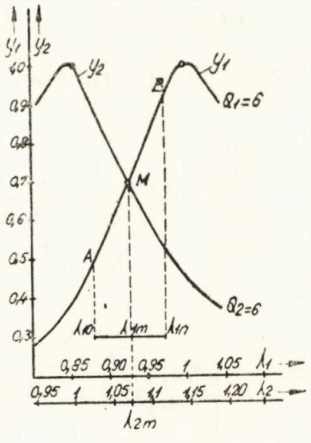


Fig. 2

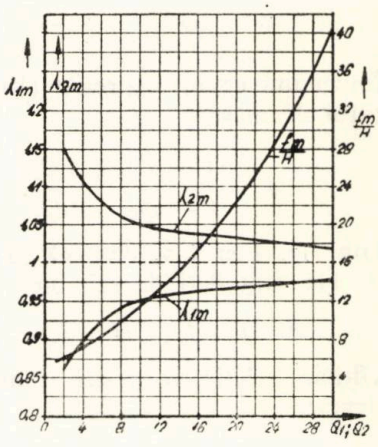


Fig. 3

În fig. 2 s-au reprezentat, pentru $Q_1 = Q_2 = 6$, ramurile ascendentă și respectiv descendentă ale curbelor $y_1(\lambda_1)$ și $y_2(\lambda_2)$ date de (5). Ordonatele punctului de funcționare, M, fiind impuse prin condiția (6), rămîn de determinat abscisele acestuia:

$$\lambda_{1m} = \frac{f_m}{f_{1r}}, \quad \lambda_{2m} = \frac{f_m}{f_{2r}}, \tag{8}$$

raportate la sistemele de axe (λ_1, y_1) și (λ_2, y_2). Aici f_m reprezintă frecvența înscrisă la mijlocul scării (fig. 1). Din asocierea relațiilor (5) și (6) rezultă ecuațiile:

$$\frac{1 + Q_1^2 \lambda_{1m}^2}{(1 + Q_1^2)[1 + Q_1^2(\lambda_{1m} - 1/\lambda_{1m})^2]} \approx 0{,}5, \quad \frac{1}{\lambda_{2m}^2 [1 + Q_2^2(\lambda_{2m} - 1/\lambda_{2m})^2]} \approx 0{,}5, \tag{9}$$

ale căror rădăcini parametrice, $\lambda_{1m}(Q_1)$ şi $\lambda_{2m}(Q_2)$, sînt reprezentate grafic în fig. 3. Aceste curbe servesc la determinarea frecvenţelor proprii de rezonanţă ale circuitelor $R_1L_1K_1$ şi respectiv $R_2L_2K_2$ cînd se cunosc factorii de calitate respectivi.

Curbele tensiunilor de ieşire din circuitul de măsură, stabilite pe baza consideraţilor de mai sus, sînt prezentate în fig. 4. Cu notaţiile de aici şi în ipoteza $Q_1 = Q_2 \geqslant 3$, ecuaţiile segmentelor AB şi CD pot fi scrise sub forma:

$$U_1 = U_{1m}\,[1 + a(\mu - 1/2)], \quad U_2 = U_{2m}\,[1 - a(\mu - 1/2)], \tag{10}$$

unde s-au utilizat substituţile:

$$\mu = \frac{h}{H}, \tag{11}$$

$$a = \frac{U_{1n} - U_{10}}{U_{1m}} \approx \frac{U_{20} - U_{2n}}{U_{2m}}. \tag{12}$$

Împărţind acum expresile (10) se obţine ecuaţia de funcţionare la circuitului de măsură:

$$\rho = \frac{1 + a(\mu - 1/2)}{1 - a(\mu - 1/2)}. \tag{13}$$

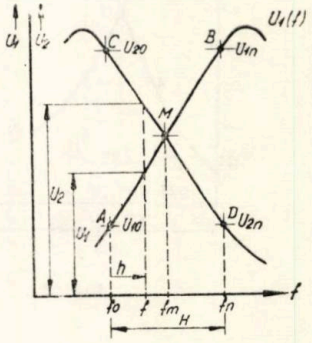


Fig. 4

Din fig. 1 şi 4 se observă că termenii h şi H din (11) sînt daţi de relaţiile:

$$h = f - f_0, \quad H = f_n - f_0. \tag{14}$$

Ultima relaţie se poate pune sub forma echivalentă:

$$\frac{f_m}{H} = \frac{\lambda_{1m}}{\lambda_{1n} - \lambda_{10}}, \tag{15}$$

în care:

$$\lambda_{10} = \frac{f_0}{f_{1r}}, \quad \lambda_{1n} = \frac{f_n}{f_{1r}} \tag{16}$$

reprezintă abscisele punctelor A şi B din fig. 2, iar λ_{1m} este dat de (8). În fig. 3 s-a reprezentat curba definită de (15) pentru $a = 0{,}6$. Termenii λ_{10} şi λ_{1n} au fost calculaţi pe baza a două ecuaţii parametrice, obţinute din prima relaţie (5), similare cu prima ecuaţie (9). Curba definită de (15) serveşte la determinarea factorului de calitate Q_1 cînd ce cunosc frecvenţa la mijlocul scării (f_m) şi domeniul de măsură (H).

Observaţii. a) Partea de circuit la care se obţine tensiunea U_1 (fig. 1) este cu ieşirea pe bobină iar cea la care se obţine U_2 — cu ieşirea pe condensator. S-a ales această soluţie deoarece la factori de calitate egali curbele de funcţionare (fig. 4) sînt aproximativ simetrice faţă de dreapta $f = f_m$.

b) În calculele de mai sus s-a neglijat dependența de frecvență a parametrilor R_1, L_1, K_1, R_2, L_2, K_2, ale elementelor de circuit, deoarece pe de o parte frecvența f_m este joasă (zeci de kHz) iar pe de altă parte variațiile frecvenței f în jurul valorii f_m sînt de cel mult $\pm 10\%$. De asemenea s-a presupus că impedanța generatorului este redusă în comparație cu cea de intrare în circuit.

3. 2. Factori de erori

Erorile proprii ale circuitului de măsură:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta U_1}{U_1} + \frac{\Delta U_2}{U_2} \tag{17}$$

sînt produse de instabilitatea în timp a parametrilor elementelor de circuit precum și de variația lor sub acțiunea mărimilor de influență (temperatură, frecvență etc.).

Pe baza expresiilor (1) termenii membrului drept din relația (17) pot fi puși sub formele:

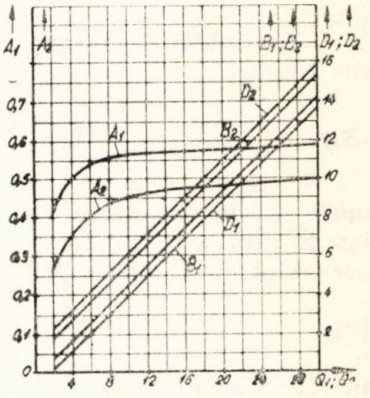


Fig. 5

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta U_1}{U_1} = A_1 \dfrac{\Delta R_1}{R_1} + B_1 \dfrac{\Delta L_1}{L_1} + D_1 \dfrac{\Delta K_1}{K_1}, \\ \dfrac{\Delta U_2}{U_2} = A_2 \dfrac{\Delta R_2}{R_2} + B_2 \dfrac{\Delta L_2}{L_2} + D_2 \dfrac{\Delta K_2}{K_2}, \end{cases} \tag{18}$$

în care termenii:

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{\partial U_1}{\partial R_1} \cdot \dfrac{R_1}{U_1}, \quad B_1 = \dfrac{\partial U_1}{\partial L_1} \cdot \dfrac{L_1}{U_1}, \quad D_1 = \dfrac{\partial U_1}{\partial K_1} \cdot \dfrac{K_1}{U_1}, \\ A_2 = \dfrac{\partial U_2}{\partial R_2} \cdot \dfrac{R_2}{U_2}, \quad B_2 = \dfrac{\partial U_2}{\partial L_2} \cdot \dfrac{L_2}{U_2}, \quad D_2 = \dfrac{\partial U_2}{\partial K_2} \cdot \dfrac{K_2}{U_2}, \end{cases} \tag{19}$$

vor fi denumiți factori de erori. În fig. 5 sînt reprezentați acești factori pentru $f = f_m$. Se observă că factorii de erori ai inductivităților și capacităților sînt mari și cresc liniar cu factorul de calitate. Prin urmare bobinele și condensatoarele utilizate la astfel de circuite trebuie să fie de bună calitate.

4. Mecanismul de măsură (M_M)

Partea principală a mecanismului de măsură o constituie condensatoarele variabile C_1 și C_2, alcătuite din electrodul mobil e_m și electrozii ficși *1* și *2* (fig. 1). Legătura dintre e_m și borna de intrare respectivă se reali-

zează prin bendiţa subţire b (aducător „fără cuplu"). Limitarea curentului în b, în caz de scurtcircuit între electrozii activi, se realizează prin rezistenţele de protecţie R_p.

4.1. Ecuaţia de funcţionare

Tensiunile de intrare în mecanism, U_1 şi U_2, dau naştere la cuplurile rotitoare:

$$M_1 = \frac{1}{2} U_1^2 \frac{dC_1}{d\alpha}, \quad M_2 = \frac{1}{2} U_2^2 \frac{dC_2}{d\alpha}, \tag{20}$$

unde M_1, în sensul creşterii unghiului de rotire, reprezintă cuplul direct, iar M_2, în sens contrar — cuplul oponent. Din condiţia de echilibru a organului mobil ($M_1 = M_2$) rezultă ecuaţia de funcţionare generală:

$$\rho^2 = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}, \tag{21}$$

în care s-au introdus notaţiile:

$$\frac{U_1}{U_2} = \rho, \tag{22}$$

$$\frac{dC_1}{d\alpha} = \varphi_1, \quad \frac{dC_2}{d\alpha} = \varphi_2. \tag{23}$$

Relaţia (18) arată că mecanismul de măsură este definit complet de funcţiile φ_1 şi φ_2 şi că pentru funcţionarea acestuia este obligator ca $\varphi_1 \neq \varphi_2$ şi cel puţin φ_1 sau φ_2 să depindă de α.

Pentru determinarea funcţiilor φ_1 şi φ_2 este necesar a se cunoaşte caracteristica scării gradate a frecvenţmetrului. De obicei se preferă scara liniară (uniformă) adică:

$$\alpha = K(f - f_0), \quad (K = \text{const.}),$$

sau în mărimi raportate:

$$\eta = \mu, \tag{24}$$

unde:

$$\eta = \frac{\alpha}{\alpha_n}, \tag{25}$$

iar μ este definit de (11). Asociind acum expresiile (13) şi (24) se obţine ecuaţia:

$$\sqrt{\frac{\varphi_2}{\varphi_1}} = \frac{1 + a(\eta - 1/2)}{1 - a(\eta - 1/2)},$$

care este satisfăcută şi de soluţiile:

$$\varphi_1 = A\frac{1-a(\eta-1/2)}{1+a(\eta-1/2)}, \quad \varphi_2 = A\frac{1+a(\eta-1/2)}{1-a(\eta-1/2)}, \tag{26}$$

în care A este o constantă. Utilizînd expresia cuplului stabilizant specific $M_s' = \partial(M_1 - M_2)/\partial\alpha$, se obține, abstracție făcînd de semn:

$$A = \frac{\alpha_n M_s'}{2aU_{1m}^2}. \tag{27}$$

Asociind expresiile (20) și (26) se observă că la creșterea lui α, M_1 scade iar M_2 crește, adică este îndeplinită condiția de stabilitate a organului mobil [5].

Substituind pe (26) în (21) se obține ecuația de funcționare a mecanismului:

$$\eta = \frac{(2+a)\rho + a - 2}{2a(\rho+1)}, \tag{28}$$

satisfăcută de frecvențmetrul cu scară liniară. Sensibilitatea mecanismului este:

$$S_M = \frac{2\alpha_n}{a(\rho+1)^2}, \tag{29}$$

și pentru $\mu = 0$, devine maximă.

4. 2. Expresii de calcul

La rotirea electrodului mobil e_m (fig. 6) cu unghiul elementar $d\alpha$, se produc variațiile de capacități:

$$dC_1 = \frac{\varepsilon(r_1^2 - a^2)}{e}d\alpha, \quad dC_2 = \frac{\varepsilon(r_2^2 - a^2)}{e}d\alpha,$$

unde ε reprezintă permitivitatea dielectricului (aerului) dintre electrozi iar e — distanța dintre aceștia. Din asocierea acestor relații cu (26) se obțin expresiile:

$$r_1^2 = a^2 + \frac{e}{\varepsilon}\varphi_1, \quad r_2^2 = a^2 + \frac{e}{\varepsilon}\varphi_2, \tag{30}$$

care definesc curburile la cele două părți ale electrodului mobil.

Pentru $\eta = 0$ și $\eta = 1$, expresiile (30) devin:

$$R_1^2 = a^2 + \frac{e(2+a)}{\varepsilon(2-a)}A = R_2^2 = R^2,$$

sau, deoarece $a^2 \ll R^2$, se obține în final expresia:

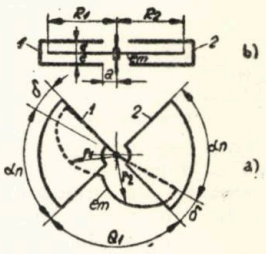


Fig. 6

$$R^2 = \frac{(2+a)^2 \alpha_m M_s'}{4a(2-a)\varepsilon E_L U_{1m}}, \tag{31}$$

în care:

$$E_L = \frac{(2+a)\, U_{1m}}{2e} \tag{32}$$

reprezintă intensitatea admisibilă a cîmpului electric de lucru dintre electrozii activi. Valorile uzuale pentru această intensitate sînt: $E_L = 0{,}4 \ldots 0{,}7$ kV/mm [6].

Termenul $(2+a)^2/(2-a)a$ din (31) devine minim pentru $a = 0{,}67$; în jurul acestei valori, termenul menţionat variază lent, motiv pentru care s-a adoptat valoarea $a = 0{,}6$ utilizată mai sus (§ 3).

În fine, din fig. 6 a rezultă condiţiile restrictive $\alpha_n \leqslant \theta_1$, $\theta_1 + 2(\alpha_n + \delta) \leqslant 2\pi$, care conduc la:

$$\alpha_n \leqslant \frac{2\pi}{3 + 2\delta/\alpha_n}.$$

Pentru $\delta/\alpha_n = 0{,}2 \ldots 0{,}4$, valori obişnuite pentru practică [6], rezultă $\alpha_n \leqslant 94° \ldots 105°$, ceea ce arată că unghiul de scară disponibil este suficient de mare. În expresiile de mai sus δ reprezintă unghiul sub care electrodul mobil rămîne angajat între electrozii ficşi cînd $\alpha = 0$ sau $\alpha = \alpha_n$ (fig. 6a).

4. 3. Influenţa variaţiei tensiunii de alimentare

În afara cauzelor de erori specifice voltmetrelor electrostatice [7], [8], asupra funcţionării logometrelor exercită influenţă şi variaţia tensiunii de alimentare U. La scăderea acesteia cu ΔU faţă de valoarea nominală, eroarea γ_π datorită cuplurilor parazite de sumă M_π, creşte după relaţia:

$$\gamma_\pi = \frac{M_\pi}{\alpha_n M_s' (1 - \Delta U/U)^2}. \tag{33}$$

5. Exemplu de calcul şi construcţie

Fie de realizat un frecvenţmetru de tablou avînd caracteristicile: frecvenţa nominală $f_m = 20$ kHz, domeniul de măsură $H = 2\,000$ Hz, unghiul scării $\alpha_n = 90°$ şi tensiunea de alimentare $U = 200$ V.

Circuitul de măsură. Din datele impuse rezultă $f_m/H = 10$, la care de pe curbele din fig. 3 corespund $Q_1 \approx Q_2 = 8$, apoi $\lambda_{1m} = 0{,}94$ şi $\lambda_{2m} = 1{,}060$. Pentru acestea din urmă din (8) se obţine $f_{1r} = 21{,}3$ kHz şi respectiv $f_{2r} = 18{,}7$ kHz. Admiţînd 25 mA pentru valorile de rezonanţă ale curenţilor I_1 şi I_2 (fig. 1) rezultă $R_1 = R_2 = 200/0{,}025 = 8$ kΩ. Pentru datele astfel determinate din (2) se obţine: $L_1 = 0{,}475$ H, $K_1 = 116$ pF, $L_2 = 0{,}545$ H, $K_2 = 133$ pF.

Mecanismul de măsură. Adoptînd $\alpha_n M_s' = 5\ \mu$Nm, $E_L = 0{,}6$ kV/mm, din (31) şi (32) rezultă $R = 42$ mm şi respectiv $e = 2{,}5$ mm.

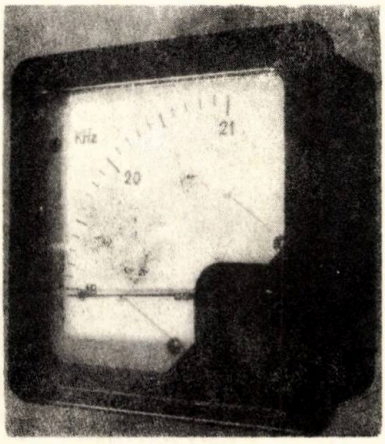


Fig. 5

Frecvențmetrul construit pe baza calculelor de mai sus și cu o tehnologie obișnuită pentru aparatele de tip industrial, este arătat în fig. 7. Instrumentul funcționează satisfăcător ca aparat de tablou, se încadrează în clasa de precizie 0,5 (raportată la f_m) și are un consum de 5 VA.

5. Concluzii

Logometrul electrostatic, asociat cu un circuit de măsură prin rezonanță de tensiune, funcționează satisfăcător ca frecvențmetru de tablou pentru domeniul audio. Față de aparatele existente, frecvențmetrul propus prezintă avantajul de a fi mai simplu și mai ieftin precum și dezavantajul de a fi mai sensibil la suprasarcini.

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de măsuri și mașini electrice

BIBLIOGRAFIE

1. Sattelberg K., *Anzeigende Frequenzmesser*. Karlsruhe, 1965.
2. Sangl M., *Zeigerfrequenzmesser mitt Zennerdioden*. ATM, 1962, *315*, S. 73.
3. Popescu R., *Frecvențmetre electronice*. Buc., 1967.
3. Palm A., *Sonderanwendungen des Elektrostatisches Messprinzip*. ATM, Sept. 1935.
5. Арутюнов В. О., *Электромеханические логометры*. М., 1956.
6. Drysdale C. V. ș. a., *Electrical Measuring Instruments*. London, 1952, Ch. **10**.
7. Langbein R. ș. a., *Elektrische Messgeräte*. Leipzig, 1943, Kap. **5**.
8. Pighin S. M., *Aparate de măsurat electrostatice de laborator*. ATM (Buc.), 1964, *2*, p. 89.

FRÉQUENCEMÈTRE À LOGOMÈTRE ÉLECTROSTATIQUE POUR AUDIO-FRÉQUENCES

(Résumé)

On étudie le fonctionnement du logomètre électrostatique, associé avec des circuits de mesure à résonance de tension, dans une schéma de fréquencemètre. On établit les principalles expressions de calcul et on donne un exemple de calcul et de construction pour un fréquencemètre de tableau ayant la fréquence nominale 20 kHz, les limites de mesure 2 kHz, la classe de précision 0,5.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

D. K. 621.316.925 ; 621.316.1 ; 512. 9

BEITRÄGE ZUR ANALYSE UND SYNTHESE EINIGER RELAISSCHUTZSCHEMAS AUF GRUND DER ALGEBRAISCHEN BERECHNUNG

VON

N. V. BOŢAN, EUGEN BALABAN, GERGHINA BALABAN
und SIMONA CABA

Mitteilung an der wissenschaftlichen Tagung der Technischen Hochschule, Jassy, 28—30. September 1967

Die der Relaisschutzschemas vorgeschriebenen Betriebssicherheits, Selektivitäts und Empfindlichkeitbedingungen, haben zur Verwicklung dessen Struktur geführt, so das die Analyse und Synthese dieser Schemas durch Erkenntnis und direkte Beobachtung schwieriger wurde. So ist die Notwendigkeit einer systematischen auf Berechnung gestützten Methode, für die Analyse und Synthese der Schutzschemas, erschienen.

Da in der Mehrheit der praktischen Fälle die Arbeit der Schutzschemas durch die Phasen Strom- und Spannungswerte der geschützten Elementen bestimmt ist, werden zu Beginn nur diese Grössen, als unabhängige Variable, gerechnet.

Obwohl die Ströme und Spannungen der elektrischen Anlagen verschiedene Werte haben können, sind von besonderer Wichtigkeit die normalen und betriebsstörenden Grenzfälle, an die man binare Variable, im Bereich 2 (0, 1), zustellen kann.

Da die geschützten Elemente dreiphasig sind muss man 6 variable bivalente und zwar $i_1, i_2, i_3, u_1, u_2, u_3$ beim Rechnen betrachten. Zur Vereinfachung der Rechnungen und da in den drei Phasen vier verschiedene Zustände bestehen können (Normaler Betrieb, ein-, zwei- und dreiphasige Störungen) wird in dieser Arbeit das System mit nur zwei Variablen, aber im Körper 2^2, angenommen.

Es wird das die vier Werte des Körpers 2^2: $00 = 0$, $01 = 1$, $10 = \varepsilon$, $11 = \varepsilon + 1 = \varepsilon^2$, sind und das die algebraischen Operationen mit diesen vier Werten die folgenden sind, ins Gedächtniss gerufen:

+	0	1	ε	ε^2
0	0	1	ε	ε^2
1	1	0	ε^2	ε
ε	ε	ε^2	0	1
ε^2	ε^2	ε	1	0

,

.	0	1	ε	ε^2
0	0	0	0	0
1	0	1	ε	ε^2
ε	0	ε	ε^2	1
ε^2	0	ε^2	1	ε

Ebenfalls kann eine Funktion von zwei Variablen im Körper 2^2 in volgender Formgeschrieben werden:

$$f(i,u) = \sum_{\alpha_i,\, \alpha_u = 0,1,\varepsilon,\varepsilon^2} f(\alpha_i, \alpha_u)\, L_{\alpha_i}(i)\, L_{\alpha_u}(u),$$

in welcher die Polynomen von Lagrange die folgenden sind:

$$L_0(i) = i^3 + 1, \quad L_\varepsilon(i) = i^3 + \varepsilon i^2 + \varepsilon^2 i,$$
$$L_1(i) = i^3 + i^2 + i, \quad L_{\varepsilon^2}(i) = i^3 + \varepsilon^2 i^2 + \varepsilon i.$$

Man bemerkt das die vier betrachteten Werte, die Spitzen und den Nullpunkt eines in Stern angeordneten, von drei einheitliche Vektoren gegründeten Systems, oder Komplexe Zahlen wie $x = x_1 + \varepsilon x_2$ bilden kann [1].

In dieser Arbeit werden an x_1 der Strom- oder Spannungswert einer Phase und an x_2 diese der anderen zwei Phasen zugestellt. Unter Berücksichtigung dieses Abkommens wird weiter folgende Korrespondenz genutzt:

00 — kleine Ströme oder Spannungen in allen drei Phasen,
10 — grosse Ströme oder Spannungen nur in einer Phase,
01 — grosse Ströme oder Spannungen in den anderen zwei Phasen,
11 — grosse Ströme oder Spannungen in allen drei Phasen.

Es wird, das man als grosse die überlast- und betriebsstörenden Ströme und als kleine, die durch den Störungen gesunkenen Spannungen rechnet, angegeben.

Es ist, das die Schutzbetätigung nur für gewissen Werten der Variablen i, u, stattfindet offenbar, oder anders gesagt, ist sie eine Funktion der zwei Variablen $z = f(i,u)$.

Nach den Vorschreiben der, bei verschiedenen Störungszuständen, gewünschten Schutzbedingungen werden die Werte der Funktion z und dann, unter Benützung der Interpolation von Lagrange, der analytische Ausdruck des notigen Schutzsystems getroffen.

Für die Operativität der Analyse und Synthese der Schutzschemas ist schicklich die analytischen Ausdrücke der für den selben Wertekörper 2^2 bestimmten elementaren Schützen, zu kennen.

So wird der analytische Ausdrucke des Maximalschutzes auf folgender Weise erläutert.

Man betrachtet die vier möglichen Werte des Stromes, und wissend das der Schutz, falls der Strom in wennigstens einer Phase gross ist, arbeitet, kann man schreiben:

$$f(R_{i\max}) = 1 \cdot L_1(i) + 1 \cdot L_\varepsilon(i) + 1 \cdot L_{\varepsilon^2}(i)$$

weil

$$f(1) = f(\varepsilon) = f(\varepsilon^2) = 1 \text{ und } f(0) = 0.$$

Nach der Entwicklung des obrigen Ausdruckes erhält man

$$f_1(R_{i\max}) = i^3.$$

In gleicher Weise werden die analytischen Ausdrücke der anderen elementaren Schütze, welche weiter angegeben sind, erlautert:

1. Vollständiger Maximalstromschutz: $f(R_{i\max}) = i^3$;
2. Vollständiger Maximalspannungschutz: $f(R_{u\max}) = u^3$;
3. Minimaler Spannungsschutz: $f(R_{u\min}) = u^3 + \varepsilon^2 u^3 + \varepsilon u + 1$;
4. Spannungsrelais gegenläufiger Folge: $f(R_{u\,\mathrm{inv}}) = \varepsilon^2 u^2 + \varepsilon u$;
5. Stromrelais gegenläufiger Folge: $f(R_{i\,\mathrm{inv}}) = \varepsilon^2 i^2 + \varepsilon i$;
6. Unfolständiger Maximalstromschutz: $f(R_{i\max}) = i_2^2 + i$;
7. Homopolarer Stromschutz $f(R_{ih}) = i^3 + i^2 + i$;
8. Homopolarer Spannungsschutz $f(R_{uh}) = u^3 + u^2 + u$;
9. Maximalstromschutz bei symmetrischen Störungen: $f(R_{i3}) = i^3 + \varepsilon^2 i^2 + \varepsilon i$;
10. Minimalspannungsschutz bei symmetrischen Störungen: $f(R_{u3}) = u^3 + 1$.

Weiter werden die analytischen Ausdrücke der als einheitliches physikalisches Schutzelement gerechneten Wattmeterrelais oder Scheinwiderstandrelais festgestellt.

Es ist bekannt das ein Wattmeterrelais nur fals die Leistung in wenigstens einer Phase gross ist, arbeitet. So wird die folgende lagrangesche Entwicklung des analytischen Ausdruckes des Wattmeterrelais erziehlt:

$$f(R_w) = L_1(i) L_1(u) + L_\varepsilon(i) L_\varepsilon(u + L_1(i) L_{\varepsilon^2}(u) + L_\varepsilon(i) L_{\varepsilon^2}(u) + \\ + L_{\varepsilon^2}(i) L_\varepsilon(u) = i^3 u^3 + i^2(\varepsilon^2 u^3 + \varepsilon u^2) + i(\varepsilon u^3 + \varepsilon^2 u).$$

Das Scheinwiderstandrelais arbeitet fals wenigstens in einer Phase das Verhältnis u/i, klein ist.

Nach diesen Bedingungen erfolgt:

$$f(R_z) = L_1(i) L_0(u) + L_\varepsilon(i) L_0(u) + L_{\varepsilon^2}(i) L_0(u) + L_1(i) L_\varepsilon(u) + \\ + L_\varepsilon(i) L_1(u) + L_{\varepsilon^2}(i) L_1(u) + L_{\varepsilon^2}(i) L_\varepsilon(u) = \\ = i^3(u^3 + 1) + i^2(\varepsilon^2 u^3 + \varepsilon u^2) + i(\varepsilon u^3 + \varepsilon^2 u).$$

Um die Notwendigkeit dieser Methode zu erläutern werden praktische Beispiele der Synthese einiger Schutzschemas betrachtet.

a) Man behauptet dass es nötig ist den Schutz einer Anlage, für den Zustand in welchem die Ströme in einer, oder in mehreren Phasen gross sind, und die Spannungen, ebenfalls wenigstens in einer Phase, unter den zulässigen Wert sinken, durchzuführen.

Der analytische Ausdruck dieses Schutzes kann also in folgender Art geschrieben werden:

$$z = f_a'(i, u) = L_1(i) L_0(u) + L_\varepsilon(i) L_0(u) + L_{\varepsilon^2}(i) L_0(u) + L_1(i) L_1(u) + \\ + L_1(i) L_\varepsilon(u) + L_\varepsilon(i) L_1(u) + L_{\varepsilon^2}(i) L_1(u) + L_\varepsilon(i) L_\varepsilon(u) + L_{\varepsilon^2}(i) L_\varepsilon(u) = \\ = i^3(u^3 + \varepsilon^2 u^2 + \varepsilon u + 1).$$

Durch Vergleichung dieses Ausdruckes mit den in der Tafel dargestellten analytischen Ausdrückender elementaren Schütze, bemerkt man das der nötige Schutz ans der Reihenschaltung eines Maximalstrom- und Minimalspannungsschutzes ausgeführt werden kann, also:

$$z = (i_1 \cup i_2 \cup i_3)(\overline{u_1} \cup \overline{u_2} \cup \overline{u_3}).$$

Es wird noch eine andere Lösungsmöglichkeit zur Ausführung dieses Schutzes, welche nach der volgendere Gruppierung der Glieder ersichtlich wird, bemerkt:

$$f_a''(i,u) = i^3(u^3+1) + (\varepsilon^2 u^2 + \varepsilon u) = (i_1 \cup i_2 \cup i_3)(R_{u3} \cup R_{u\,\mathrm{inv}}).$$

b) Wollen wir jetzt die Nötigkeit der Gewährleistung des Schutzes einer Anlage gegen drei-, zwei- oder einphasigen deutlichen Kurzschlüssen, behaupten.

Der analytischen Ausdruck dieses Schutzes kann in folgendes weise geschrieben werden

$$z = f_b(i,u) = L_1(i)L_0(u) + L_\varepsilon(i)L_0(u) + L_{\varepsilon^2}(i)L_0(u) + L_1(i)L_1(u) +$$
$$+ L_\varepsilon(i)L_1(u) + L_1(i)L_\varepsilon(u) + L_\varepsilon(i)L_\varepsilon(u) + L_1(i)L_{\varepsilon^2}(u) +$$
$$+ L_\varepsilon(i)L_{\varepsilon^2}(u) = (i^3 + \varepsilon^2 i^2 + \varepsilon i)(u_3 + 1) \cup (\varepsilon^2 i^2 + \varepsilon i).$$

Durch Vergleichung des erhaltenen Ausdruckes mit der Tafel der analytischen Ausdrück der elementaren Schütze wird, das der nötige Schutz durch volgende Strukturalformel durch geführt werden kann, ersichtlich:

$$f_b(i,u) = R_{i3}\overline{(u_1 \cup u_2 \cup u_3)} \cup R_{i\,\mathrm{inv}} = R_{i_3}\overline{u} \cup R_{i\,\mathrm{inv}}.$$

Aus den dargestellten Beispielen wird die Nützlichkeit der algebraischen Berechnung in der Analyse und Synthese der Relaisschutzschemas ersichtlich. Diese Berechnung bietet den Vorteil das beim Ausgang von den von Schemas erziehlen kann, dar.

Technische Hochschule, Jassy,
Lehrstuhl für Elektrische Verwendungen
und Automatisierung

LITERATURVERZEICHNIS

1. Moisil Gr., *Teoria algebrică a mecanismelor automate.* Ed. Tehn., Buc., 1959.
2. Călin S., Mihoc D., *Protecția prin relee.* EDP, Buc., 1966.

CONTRIBUȚII LA ANALIZA ȘI SINTEZA UNOR SCHEME DE PROTECȚIE PRIN RELEE PE BAZĂ DE CALCUL ALGEBRIC

(Rezumat)

Se prezintă unele posibilități de aplicare a calculului algebric în analiza și sinteza schemelor de protecție prin relee.

Se consideră drept variabile curenții și tensiunile de defect, fiecare variabilă luînd valori în corpul 2^2. Cele patru valori considerate se refer ă la regimul normal, la scurtcircuite mono-, bi- și trifazate.

Pe baza cunoașterii funcționării releelor singulare folosite în protecția prin relee se stabilesc funcțiile analitice ale acestora Impunînd apoi anumite condiții pe care trebuie să le realizere protecția, se stabilește expresia analitică a acesteia și se găsește posibilitatea realizării ei prin releele cunoscute.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

C. D. 621—52

SUR L'UTILISATION DU CONSENSUS DANS LA SYNTHÈSE LOGIQUE STRUCTURALE DES AUTOMATES FINIS COMBINATOIRES À UNE SORTIE

PAR

D. SANDU

Communication présentée dans la session scientifique de l'Institut Polytechnique de Jassy, 28—30 septembre 1967

I. Introduction

1. La synthèse logique structurale consiste dans la réalisation d'un dispositif logique réel (automate fini) qui corresspond à un énoncé de conditions techniques. On distingue trois etapes :

a) Écriture des relations mathématiques, suivant l'énoncé des conditions techniques ; ces relations sont des fonctions logiques, souvant appelées fonctions propres du dispositif logique.

b) Élaboration du schéma fonctionnel (réseau logique), correspondant au système de fonctions propres.

c) Réalisation du schéma fonctionnel sous la forme d'un schéma de principe, et d'un dispositif en utilisant une classe donnée d'éléments physiques.

L'étape b) peut être complètement algorithmisée et joue un rôle particulier dans la synthèse optimale, qui a le but d'élaborer des réseaux logiques avec minimum d'éléments fonctiennels, c'est-à-dire des réseaux qui seront réalisés avec minimum d'éléments physiques donnés. Les réseaux logiques avec minimum d'éléments fonctionnels correspondent aux expressions minimisées (simplifiées) des fonctions propres ; une expression simplifiée constitue une couverture irrédondante (équivalent irrédondant) de la fonction donnée.

2. Il y a beaucoup de méthodes de minimisation séparée des fonctions logiques, décrivant les automates finis à une seule sortie ; elles peuvent être divisées en trois catégories : méthodes tabellaires, méthodes topologiques (géometriques), méthodes algébriques. Toutes ces méthodes sont basées directement ou indirectement sur la notion d'implicant premier proposée par Quine [1]...[3]. La majorité de ces méthodes considère les fonctions données sous les formes canoniques : somme de produits (forme canonique disjonctive FCD) et produit de sommes (forme canonique conjonctive FCC) de sorte que les réseaux logiques soient formées d'élements fonctionnels ET, OU, disposés en deux niveaux ; évidemment on suppose qu'à l'entrée on dispose des variables binaires x_1, x_2, x_n, et de leurs négations $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots \bar{x}_n$.

Ajutons qu'il existe encore d'autres méthodes de synthèse : la méthode des „tree circuits" où les éléments fonctionnels ET, OU sont à deux entrées seulement et disposés en plusieurs niveaux ; les méthodes utilisant comme éléments fonctionnels soit la fonction de Pierce (NOR), soit la fonction de Sheffer (NAND).

3. Dans ce travail on apporte quelques contributions à la méthode du consensus itératif [2], [5]...[7], [9], [14]...[16], en supposant que les fonctions logiques sont données sous les formes canoniques. Les contributions se réfèrent à l'utilisation de la notion de coût pour évaleur les réseaux logiques minimaux et à la systématisation de l'algorithme de recherche des bases premières (couvertures irrédondantes) d'une fonction logique.

II. Questions préliminaires

La méthode classique des implicants premiers de Quine-Mc Clauskey [1], [4], est largement utilisée avec de bons résultats, mais l'algorithmes d'élimination des implicants premiers redondants pour obtenir les couvertures irrédondantes minimalles est assez compliqué et nécessite des calculs laborieux. Dans [5]...[7], [9] on propose certaines améliorations de cet algorithme; une contribution très importante à la systématisation de l'algorithme est apportée par Tison [14]...[16] par l'introduction du consensus de classe supérieure. En même temps Tison améliore la méthode de recherche des implicants premiers par l'introduction de certaines règles pendant l'écriture des relations de consensus itératif.

Consensus. Soit deux monômes booléens

$$M_1 = X_1 x_i, \quad M_2 = X_2 \bar{x}_i, \tag{1}$$

ou X_1, X_2 sont des monômes contenant des variables binaires monoformes x_i est la variable binaire biforme. On appèle *consensus de classe* 2 (simple l'opération logique qui fait correspondre aux monômes M_1, M_2 le terme $X_1 X_2$, appelé *terme conséquent* [8]. On écrit

$$A_0 = X_1 X_2 = \mathcal{C}(M_1, M_2). \tag{2}$$

Si X_1 et X_2 contiennent les mêmes variables monoformes on a un *consensus simple homogène.* Ce tipe de consensus est utilisé dans la méthode classique de Quine-Mc Cluskey pour la recherche des implicants premiers.

Dans les travaux [14]...[16] on utilise le *consensus de classe supérieure,* à savoir, étant donnés p monômes $X_1, X_2, \ldots, X_p$, le produit A_0 des variables monoformes représente le terme conséquent du consensus de classe p, à condition que la somme logique des variables biformes de ces monômes constitue une égalité à 1 irrédondante; cette égalité irrédondante est dite *égalité caractéristique.* Pour le consensus de classe p on écrit

$$A_0 = \mathcal{C}(X_1, X_2, \ldots, X_p). \tag{3}$$

L'ensemble $X_1, X_2, \ldots, X_p$ est nommé *génération* du terme conséquent A_0.

Le consensus de classe p peut être considéré comme un consensus de classe 2 de deux monômes N_1, N_2, chacun étant lié aux monômes initiaux $X_1, X_2, \ldots, X_p$ par relations de consensus de classe inférieure à p:

$$(4) \qquad \begin{cases} N_1 = \mathcal{C}_1(X_1, X_2, \ldots, X_m), \\ N_2 = \mathcal{C}_2(X_{k+1}, X_{k+2}, \ldots, X_p) \end{cases}$$

et

$$(5) \qquad A_0 = \mathcal{C}(N_1, N_2).$$

On y a $m \geqslant k+1$, c'est-à-dire chacun des monômes $X_1, X_2, \ldots, X_p$ doit participer d'une manière obligatoire soit dans la génération du consensus N_1, soit dans la génération du consensus N_2. Par conséquent à partir du consensus de classe p on peut aboutir aux consensus de classe 2 par l'utilisation répétée des formules (4), (5); inversement, par l'application répétée du consensus de classe 2 aux termes initiaux et aux termes conséquents résultés, on aboutit au consensus de classe p.

III. Recherche des implicants premiers par relations de consensus

Les relations de consensus peuvent être utilisées pour la recherche des implicants premiers d'une fonction logique compte tenu d'un théorème important [2], [7], concernant la liaison entre le consensus et l'implication logique.

Théorème 1. *Si l'ensemble de monômes* $X_1, X_2, \ldots, X_p$ *constitue une couverture de la fonction logique* F (c'est-a-dire $X_1, \ldots, X_p$ sont les minterms de la fonction F) *et si a lieu la relation de consensus*

$$(6) \qquad A_0 = \mathcal{C}(X_1, X_2, \ldots, X_l), \quad \text{avec } l \leqslant p,$$

alors est vraie l'implication

$$(7) \qquad A_0 \to X_1 + X_2 + \ldots + X_l.$$

Le théorème se verifie directement utilisant le tableau de vérité. Si l'on suppose que l'ensemble $X_1, X_2, \ldots, X_l$ est aussi une couverture de la fonction F, il en résulte

$$(8) \qquad A_0 \to F;$$

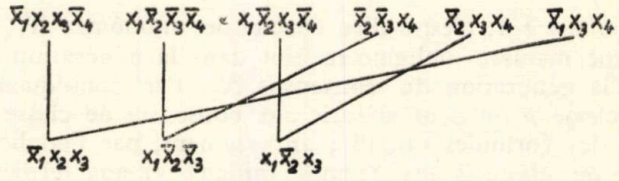
mais chaque A_0 qui satisfait la relation (8) constitue un implicant premier de la fonction donnée.

En partant des mintermes (termes) initiaux, on trouve tous les implicants premiers par l'utilisation des relation de consensus. La procédure classique est donnée en [2], [7], [14]. Cette procédure étant laborieuse on a proposé [16] une systématisation importante, à savoir les consensus sont recherchés par étapes. Chaque étape concerne une seule variable biforme contenue dans la fonction et à la fin de chaque étape on élimine les termes redondants (inclus).

Exemple 1. Soit la fonction

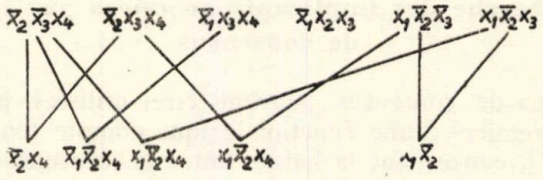
$$F_1 = \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 + \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 + \bar{x}_2 x_3 x_4 + \bar{x}_1 x_3 x_4 . \tag{9}$$

Toutes les variables sont biformes ; commençons par x_4 :



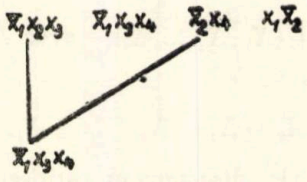
On élimine le terme $\bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4$ étant inclus dans $\bar{x}_1 x_2 x_3$; on élimine le terme $x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$ étant inclus dans $x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$; on élimine le terme $x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4$ étant inclus dans $x_1 \bar{x}_2 x_3$.

L'étape relative à la variable x_3 :



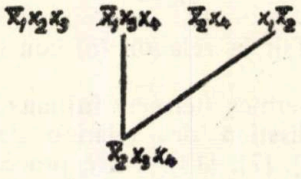
On élimine les termes $\bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4$, $\bar{x}_2 x_3 x_4$, $\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_4$, $x_1 \bar{x}_2 x_4$ étant inclus dans $\bar{x}_2 x_4$; on élimine les termes $x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$, $x_1 \bar{x}_2 x_3$ étants inclus dans $x_1 \bar{x}_2$.

L'étape relative à la variable x_2 :



Le terme conséquent $\bar{x}_1 x_3 x_4$ est déjà contenu dans l'ensemble existant, donc on l'élimine.

L'étape relative à la variable x_1 :



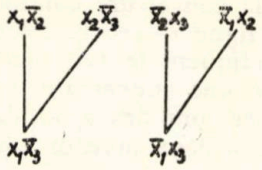
Le terme $\bar{x}_2 x_3 x_4$ est inclus dans $\bar{x}_2 x_4$, donc on l'élimine.

Par conséquent les implicants premiers de la fonction donnée sont les suivants : $\bar{x}_1 x_2 x_3$, $\bar{x}_1 x_3 x_4$, $\bar{x}_2 x_4$, $x_1 \bar{x}_2$.

Exemple 2. Soit la fonction

$$F_2 = x_1 \bar{x}_2 + x_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_2 x_3 + \bar{x}_1 x_2 . \tag{10}$$

On peut établir les relations de consensus par rapport à la variable x_2 seulement



Par conséquent les implicants premiers de la fonction (10) sont les suivants : $x_1 \bar{x}_2$ $x_2 \bar{x}_3$, $\bar{x}_2 x_3$, $\bar{x}_1 x_2$, $x_1 \bar{x}_3$, $\bar{x}_1 x_3$.

De ces exemples on conclut que la méthode du consensus itératif est très rapide et systématique, et n'impose pas des conditions quant à la forme sous laquelle est donnée la fonction logique.

IV. Recherche des couvertures irrédondantes par l'utilisation du consensus de classe supérieure

Par couverture irrédondante (ou base première) de la fonction logique F on entend un ensemble d'implicants premiers, tel que par l'élimination d'un implicant quelconque, l'ensemble qui reste ne constitue plus un équivalent Φ de la fonction donnée F. L'ensemble des implicants premiers trouvé par consensus (ou par une autre méthode), contient des implicants premiers rédondants ; il faut les éliminer pour en obtenir la converture irrédondante.

a) *Coût d'un réseau logique à deux niveaux*

La synthèse optimale a pour but l'élaboration des schémas fonctionnels avec minimum d'éléments fonctionnels, de sorte que l'automate fini ait minimum d'éléments physiques donnés. La recherche des couvertures irrédondantes constitue un problème de programmation linéaire, qu'on peut le résoudre rigoureusement, en introduisant le coût du réseau logique à deux niveaux.

Soit X_1, X_2 ,..., X_p les mintermes de la fonction logique F et soit A_1, A_2 ,..., A_n les implicants premiers de cette fonction. En supposant que tous les implicants premiers ont le même coût (le même nombre de variables) et que ces implicants sont rangés dans un tableau de Quine, on peut formuler le problème de programmation linéaire comme suit [21] : minimiser l'expression

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \tag{11}$$

avec les contraintes

$$\sum_{i=1}^{n} s_{ij}\, a_i \geqslant 1, \quad (a_i = 1,\ 0;\ s_{ij} = 1,\ 0;\ j = 1,\ 2,...,p), \tag{12}$$

où : a_j est une variable binaire associée à l'implicant premier A_i (c'est-à-dire à chaque ligne du tableau), qui indique la présence ou l'absence de cet implicant premier dans la couverture considérée, S_{ij} est la notation du carreau d'intersection de la ligne i avec la colonne j du tableau du Quine.

Les contraintes (12) indiquent le fait que l'ensemble considéré des implicants premiers doit être une couverture de F.

Si les implicants premiers ont des coûts différents, on peut écrire le coût total du réseau logique à deux niveaux sous la forme suivante :

$$W_k = \sum_{A_i \in G_k}{}_k w(A_i) + \sum_k \alpha(a_i),$$

où : k est le nombre maximum des couvertures, $\sum_k w(A_i)$ est le coût des circuits ET de la couverture k, $\sum_k \alpha(a_i)$ est le coût du circuit OU de la couverture k, G_k est l'ensemble d'implicants premiers, formant la couverture k.

Dans ce cas le problème de programmation linéaire peut être formulée de la façon suivante : minimiser l'expression

$$W_k, \quad (k = 1, 2, ..., h), \tag{14}$$

avec les contraintes

$$\sum_{i \in k;\ A_i \in G_k} s_{ij} a_i \geqslant 1, \quad (i = 1, 2, ..., n;\ j = 1, 2, ..., p). \tag{15}$$

Dans le cas des relations (11), (12) le problème de programmation linéaire opère avec un coût relatif, tandis que les relations (14), (15) opèrent avec un coût absolu.

Le nombre total des contraintes est égal au nombre maximum des couvertures. Souvent ce nombre est suffisamment grand, surtout pour les fonctions à un grand nombre de variables binaires, ce qui a pour effet l'occupation d'une portion très importante de la mémoire de la calculatrice et l'augmentation de la durée de résolution du problème. Pour la diminution de „l'aire de recherche" de la couverture minimale, à qui correspond le réseau logique de coût minimal, on a proposé différentes méthodes pour la recherche des couvertures irrédondantes, parmi lesquelles on choisit la couverture minimale.

b) *Recherche des couvertures irrédondantes (bases premières) par consensus de classe supérieure*

Selon ce procédé [5]...[7], [14], [16] les couvertures irrédondantes peuvent être obtenues directement à partir de l'ensemble initial d'implicants premiers et des termes obtenus par consensus de classe supérieure sans tenir compte des mintermes de la fonction F. Nous développerons ce procédé, qui est basé sur deux théorèmes importants.

Théorème 2. *Soit* $A = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ *l'ensemble d'implicants premiers de la fonction* F ; *on sépare un sousensemble* φ_1 *qui ne contient pas l'implicant* A_i . *A lieu la relation*

(16) $$A_i \rightarrow \varphi_1$$

si, et seulement si, A_i peut être retrouvé dans l'ensemble des relations de consensus, effectués avec les implicants du sousensemble φ_1 .

Ce théorème peut être considéré comme réciproque du théorème 1 ; il se vérifie directement par le tableau de vérité.

En posant $\varphi_1 = \{A_u, ..., A_v\}$ a lieu la relation irrédondante :

(17) $$A_i \rightarrow A_u + ... + A_v .$$

De (17) il s'en suit

(18) $$A_i = \mathcal{C}(A_u, ..., A_v).$$

La relation (17) peut être généralisée sous la forme

(19) $$A_i \rightarrow \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + ...,$$

où φ_2, φ_3,... sont aussi des sousensembles d'implicants premiers, satisfaisant des relations du type (16), (18), c'est-à-dire sont des générations possibles de A_i. On peut établir ensuite des relations généralisées du type (19) pour tous les implicants premiers de l'ensemble A.

Théorème 3. *Dans une couverture irrédondante* (base première) B_i, *contenant A_i, cet implicant peut être pris lui même, ou remplacé par $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + ...$ selon la relation* (19).

La valabilité du théoreme découle des propriétés de l'implication logique.

D'après le théorème 3 doivent être satisfaites les égalités du type

(20) $$a_i + a_u ..... a_v + a_x ..... a_y + ... = \sum_i = 1.$$

On voit que $\sum_i$ est constitué par la somme logique de toutes les générations possibles de A_i. Pour déterminer toutes les bases premières de F on introduit une nouvelle fonction [14] $\mathcal{B}(F)$, nommée fonction base :

(21) $$\mathcal{B}(F) = \sum_1 \cdot \sum_2 ..... \sum_n = 1.$$

Tout implicant premier A_k, dont la somme $\sum_k$ contient la variable a_k seulement, ne peut pas être retrouvé par relations de consensus ; il constitue un implicant essentiel, et on le trouvera dans toute base première.

Étant donné l'ensemble d'implicants premiers, la recherche des couvertures irrédondantes (bases premières) contient trois étapes :

a) On forme toutes les relations de consensus avec les implicants premiers trouvés par la méthode décrite au § **III.**

b) On forme toutes les implications irrédondantes du type (19) et toutes les sommes du type (20).

c) On cherche les implicants premiers de la fonction $\mathcal{B}(F)$ de variables a_1, a_2,..., a_n ; les implicants premiers de $\mathcal{B}(F)$ représentent les couvertures irrédondantes cherchées. Ensuite on choisit la couverture minimale.

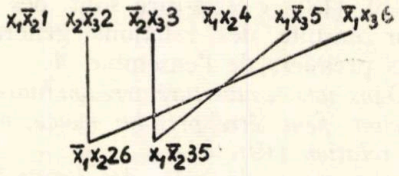
Pour éviter les implications du type (19) rédondantes, Tison utilise certaines systematisations dans l'étape a). Tous les implicants premiers sont numérotés avec des chiffres (considérés comme des nouvelles variables booléennes) de sorte que chaque implicant soit constitué de variables binaires proprement dites et de chiffres. Un terme conséquent obtenu par consensus $A_j I_j$ est inutile et l'on élimine s'il existait déjà un implicant premier $A_i I_i$ et ont lieu les relations d'ordre

$$A_j \leqslant A_i, \quad I_j \leqslant I_i, \tag{22}$$

où A_1, A_2 contiennent des variables binaires et I_1, I_2 des chiffres. Les relations d'ordre (22) sont satisfaites lorsque $A_j = A_i A_k$ et $I_j = I_i I_k$.

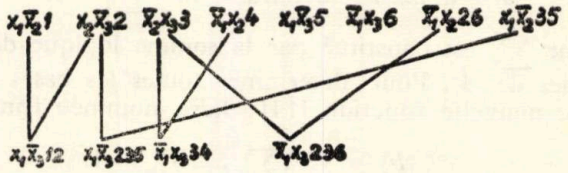
Exemple 3. On considère la fonction F_2 de l'exemple 2 avec les implicants premiers: $A_1 = x_1\bar{x}_2$, $A_2 = x_2\bar{x}_3$, $A_3 = \bar{x}_2 x_3$, $A_4 = \bar{x}_1 x_2$, $A_5 = x_1\bar{x}_3$, $A_6 = \bar{x}_1 x_3$. Après le numérotage, les implicants premiers s'écrivent: $x_1\bar{x}_2 1$, $x_2\bar{x}_3 2$, $\bar{x}_2 x_3 3$, $\bar{x}_1 x_2 4$, $x_1\bar{x}_3 5$, $\bar{x}_1 x_3 6$.

a) On établit les relations de consensus par étapes. L'étape relative à la variable x_3:



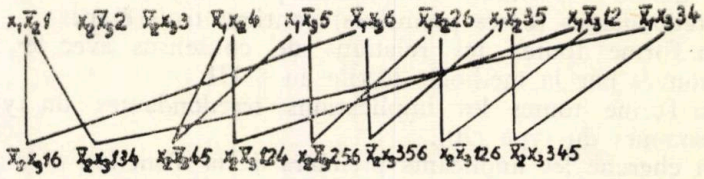
Les termes conséquents nouveaux obtenus par relations de consensus correspondent aux implications irrédondantes, donc on les ajoute aux implicants premiers initiaux.

L'étape relative à la variable x_2:



Les termes conséquents $x_1\bar{x}_3 235$ et $\bar{x}_1 x_3 236$ correspondent à des implications rédondantes: $A_5 \to A_2 + A_3 + A_4$, $A_6 \to A_2 + A_3 + A_4$, donc on les élimine (l'élimination correspond aux relations d'ordre).

L'étape relative à la variable x_1:



On élimine les termes conséquents $\bar{x}_2 x_3 134$, $x_2\bar{x}_3 124$ $x_2\bar{x}_3 256$, $\bar{x}_2 x_3 356$, $x_2\bar{x}_3 126$, $\bar{x}_2 x_3 345$, vu qu'ils correspondent à des implications rédondantes.

b) On forme les implications irrédondantes et les sommes Σ_i :

$$A_1 \to A_3 + A_5,\ A_2 \to A_4 + A_5,\ A_3 \to A_1 + A_6,\ \Sigma_1 = a_1 + a_3 a_5,\ \Sigma_2 = a_2 + a_4 a_5,\ \Sigma_3 = a_3 + a_1 a_6,$$

$$A_4 \to A_2 + A_6,\ A_5 \to A_1 + A_2,\ A_6 \to A_3 + A_1,\ \Sigma_4 = a_4 + a_2 a_6,\ \Sigma_5 = a_5 + a_1 a_2,\ \Sigma_6 = a_6 + a_3 a_4.$$

c) Recherche des implicants premiers de la fonction $\mathcal{B}(F)$:

$$\mathcal{B}(F) = \Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_3 \Sigma_4 \Sigma_5 \Sigma_6 = (a_1 + a_3 a_5)(a_2 + a_4 a_5)(a_3 + a_1 a_6)(a_4 + a_2 a_6)(a_5 + a_1 a_2)(a_6 + a_3 a_4) =$$
$$= a_1 a_2 a_6 + a_3 a_4 a_5 + a_1 a_4 a_5 a_6 + a_2 a_3 a_5 a_6 = B_1 + B_2 + B_3 + B_4.$$

Les termes B_1, B_2, B_3, B_4 sont les implicants premiers de $\mathcal{B}(F)$, donc sont les bases premières cherchées. Étant donné que les implicants premiers ont le même coût, il en résulte que B_1 et B_2 sont des couvertures minimales, donc F_3 a deux équivalents irrédondants minimaux

$$\Phi_1 = x_1 \bar{x}_2 + x_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_3,\ \Phi_2 = \bar{x}_2 x_3 + \bar{x}_1 x_2 + x_1 \bar{x}_3.$$

Le schéma fonctionnel correspondant à Φ_1 est donné dans la fig. 1.

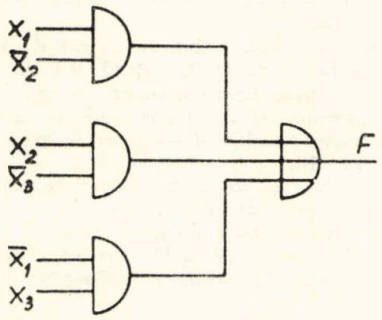


Fig. 1

V. Conclusions

1. L'utilisation des relations de consensus itératif dans la synthèse logique structurale conduit à l'élaboration d'un algorithme rigoureux et systématique pour la recherche des implicants premiers et des couvertures irrédondantes. Cet algorithme peut être aisément programmé sur une calculatrice électronique.

2. Par l'utilisation du coût du réseau logique à deux niveaux, on introduit un critère rigoureux de choix de la couverture „absolument" minimale.

Université „Al. I. Cuza", Jassy,
Laboratoire de Tubes Électroniques

BIBLIOGRAPHIE

1. Quine W. V., *The Problem of Simplifying Truth Functions.* Amer. Math. Monthly, 1952, **93**, pp. 521–531.
2. — *A Way to Simplify Truth Functions.* Amer. Math. Monthly, 1955, **62**, pp. 627–631.

3. Quine W. V., *On Cores and Prime Implicants of Truth Functions.* Amer. Math. Monthly, 1959, **81**, pp. 755–760.
4. Mc Cluskey E. J., *Minimization of Boolean Functions.* Bell Syst. Techn. J., 1956, **35**, pp. 1417–1444.
5. Ghazala M. J., *Irredundant Disjunctive and Conjunctive Forms of a Boolean Functions.* I.B.M. J. of Res. and Devel., 1957, april, pp. 171–176.
6. Petrick S. R. *On the Minimization of Boolean Functions.* Sympozium on Switching Algebra, ICIP, Paris, 1959.
7. Mott Th. H., *Determination of the Irredundant Normal Forms of a Truth Function by Iterated Consensus of the Prime Implicants.* IRE, Trans. on Electronic Computers, **EC-4**, June, 1960.
8. Malgrange Y., A. *Recherche des sous-matrices premières d'une matrice à coefficients binaires. Application à certains problemes de graphes.* B. *Recherche des formes normales minimales d'une fonction booléene.* C. r. du deuxiéme Congres AFCALTI, Paris, 1961, pp. 231–242.
9. Pinet M. A., *Système de circuits logiques à élément de base unique.* L'onde électrique, 1961, novembre, pp. 905–103.
10. Moisil Gr. C., *Teoria algebrică a circuitelor cu tranzistoare.* Autom. şi electron., 1961, V, *3*, pp. 101–104.
11. — *Circuite cu tranzistori.* Vol. **I**, Ed. Acad. R.P.R., Buc., 1961.
12. — *Circuite cu tranzistori.* Vol. **II**, Ed. Acad. R.P.R., Buc., 1962.
13. — *Teoria algebrică a circuitelor cu contacte şi relee.* Ed. Tehn., Buc., 1965.
14. Tison P., *Théorie des consensus.* C. r. du quatrième Congrés AFIRO, Paris.
15. — *Recherche des termes premiers d'une fonction booléene. Application.* Automatisme, 1964, **IX**, pp. 15–18.
16. — *Théorie des consensus. Recherche des bases premières d'une fonction booléene.* Automatisme, 1965, **X**, pp. 229–234.
17. Kuntzman J., *Un théorème sur les composants premiers d'une fonction booléene et ses applications.* Automatisme, 1964, **IX**, pp. 18–19.
18. Naslin P., *Question de langage. Vocabulaire de l'algèbre logique.* Automatisme, 1964, **IX** p. 19.
19. Поспелов Д. А., *Логические методы анализа и синтеза схем.* Изд. Энергия, М., 1964.
20. Constantinescu V., *O metodă tip de simplificare a schemelor cu elemente de comutaţie statică.* Probl. de automat., 1964, **IV**, Edit., Acad. R.P.R., Buc.
21. Luccio F., *A Method for Selection of Prime Implicants.* IEEE, Trans. on Electronic Comptures, **EC-15**, april, 1966, pp. 205–212.
22. Sandu D., *Utilisation des graphes linéaires dans la synthèse logique structurale.* An. şt. Univ. „Al. I. Cuza", Iaşi, S. I, b) Fizică, 1967, pp. 89–102.

UTILIZAREA CONSENSULUI LOGIC ÎN SINTEZA STRUCTURALĂ A AUTOMATELOR FINITE COMBINAŢIONALE CU O SINGURĂ IEŞIRE

(Rezumat)

Se abordează sinteza structurală a automatelor finite combinaţionale cu o singură ieşire În acest scop se utilizează consensul logic, la care se aduc unele contribuţii. Principalele contribuţii se referă la elaborarea unui algoritm riguros şi sistematizat de găsire a acoperirilor iredondante ale funcţiei logice F şi la introducerea noţiunii de cost al reţelei logice cu două nivele, atunci cînd implicanţii primi au costuri diferite. Algoritmul este uşor programabil pe calculatorul electronic şi conduce la găsirea acoperirii absolut minimale.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

УДК 62—50

ОБ ОДНОМ ПУТИ ПОВЫШЕНИЯ КАЧЕСТВА ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ СИСТЕМ

И. С. ЕРЕМЕЕВ

1. Известно, что введение в систему вынужденных колебаний высокой частоты и малой амплитуды позволяет реализовать пропорциональное регулирование с помощью существенно нелинейных элементов [1]...[5]. Подобная „вибрационная" линеаризация перебрасывает своего рода мост между релейными и импульсными системами. Еще одним шагом в сторону стирания грани между указанными типами систем является описываемый ниже способ линеаризации, позволяющий повысить качество систем регулирования [6].

2. Рассмотрим для простоты случай, когда на вход релейного устройства подается сигнал вида

$$x(t) = E_0 \sin \omega_b t + kE_0 \sin \omega t, \tag{1}$$

где E_0, k, ω_b и ω — постоянные величины.

Первое слагаемое правой части выражения (1) характеризует собой вынужденные колебания („вибрацию") системы частоты ω_b, а второе слагаемое — приложенный входной сигнал. Сигнал на выходе системы, соответствующий входному сигналу (1), при этом можно представить в виде

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nm} \sin (m\omega_b + n\omega) t, \tag{2}$$

где коэффициенты a_{nm} не зависят от времени.

При $k = 0$, т. е. когда собственно входное (управляющее) воздействие на систему отсутствует и выход системы представляет собой чисто синусоидальную функцию частоты ω_b, выходная переменная релейного устройства изменяется по закону непрерывной прямоугольной волны периода $\omega_b/4\pi$, причем абсолютные величины высот положительных и отрицательных волн равны общей постоянной A. Амплитуда первой гармоники в разложении этой прямоугольной волны в ряд Фурье равна

$$a_{01} = \frac{4A}{\pi}.$$

В обычной релейной системе с вибрационной линеаризацией при $k \neq 0$, т. е. при наличий управляющего воздействия, выходная переменная имеет вид как на рис. 1 *а*. Здесь разность между значениями выходных переменных реле, отвечающих случаям $k \neq 0$ и $k = 0$, пред-

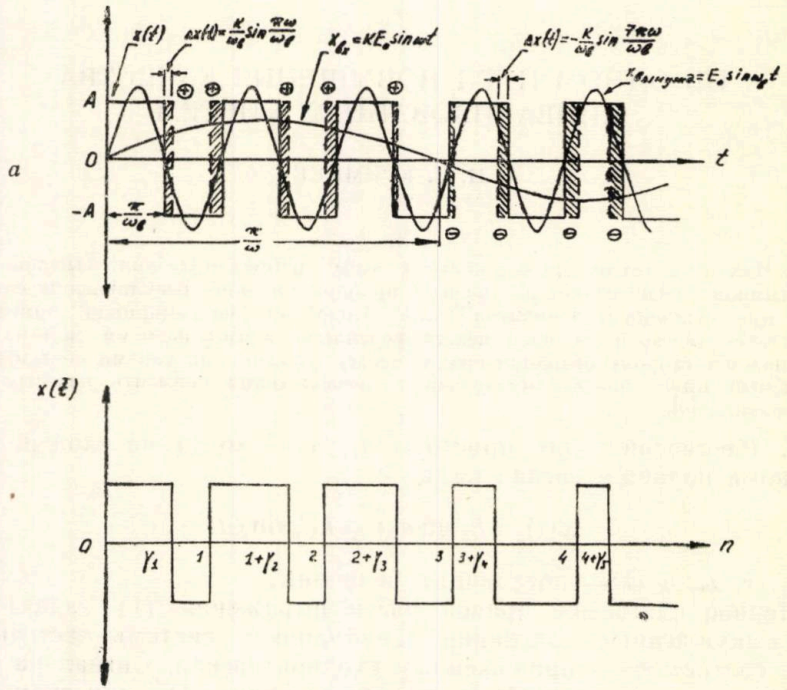


Рис. 1. — Значения сигналов на выходе обычной релейной системы с вибрационной линеаризацией: *а* — кривые на выходе релейного элемента при отсутствии управляющего воздействия, т. е. $x(t)$ при $k = 0$, и при ращения (заштрихованные площади) величины на выходе реле $\Delta x(t)$ при $x_{\text{вх}} = kE_0 \sin \omega t$; *б* — результирующая форма кривой на выходе релейного элемента при $k \neq 0$.

ставлена в виде заштрихованных прямоугольников. Как видно из рис. 1 *б*, при наличии управляющего воздействия происходит широтно-импульсная модуляция II рода, где

$$x(\bar{t}) = \begin{cases} A \text{ при } n \leqslant \bar{t} \leqslant n + \gamma, \\ -A \text{ при } n + \gamma \leqslant \bar{t} \leqslant n + 1. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь $\bar{t} = t/T$ — относительное время, $T = 2\pi/\omega_b$ — период вынужденных колебаний системы,

$$\gamma = \frac{\pi/\omega_b \pm (k/\omega_b)\sin(m\pi\omega/\omega_b)}{T} = 0{,}5 \pm \frac{k}{2\pi}\sin\frac{m\pi\omega}{\omega_b}$$

— относительная длительность включения реле ($\gamma \leqslant 1$), $k \leqslant \pi$ — коэффициент модуляции.

При использовании вибрационной линеаризации необходимо иметь в виду, что для срыва автоколебаний системы и вовлечения ее в колебательное движение с частотой ω_b амплитуда внешнего периодического воздействия должна превышать некоторое пороговое значение [1]. Однако значительное превышение этой амплитуды над пороговым значением нежелательно из-за больших потерь в системе при отсутствии управляющего воздействия. В то же время малая величина амплитуды снижает быстродействие и ухудшает качество системы. В связи с этим целесообразно применить комбинированное управление, сочетающее в себе сумму двух воздействий: сигнала вынужденных колебаний частоты ω_b с амплитудой, равной пороговому значению, и сигнала той же частоты ω_b, но значительно большей амплитуды являющегося результатом широтноимпульсной модуляции I рода. Принцип работы системы виден из рис. 2. При $k = 0$ в система существуют вынужденные колебания пороговой амплитуды $x_{\text{порог}}$, компенсирующие влияние люфтов, зон нечувствительности и других подобного рода нелинейностей. При $k \neq 0$ на эти колебания накладываются синфазно с задними фронтами импульсов или, что то же, с моментами выключения реле, модулированные по ширине импульсы большой амплитуды $x_{\text{макс}}$. Раздельные сигналы на выходе системы при этом имеют вид

$$x_1(\bar{t}) = \begin{cases} x_{\text{порог}} & \text{при } n \leqslant \bar{t} \leqslant n + 0{,}5, \\ -x_{\text{порог}} & \text{при } n + 0{,}5 \leqslant \bar{t} \leqslant n + 1, \end{cases} \tag{4}$$

при $k = 0$ и $k \neq 0$;

$$x_2(\bar{t}) = \begin{cases} x_{\text{макс}}\,\operatorname{sgn} U_\Sigma(n) & \text{при } 0{,}5n + \beta \leqslant \bar{t} \leqslant 0{,}5(n+1), \\ 0 & \text{при } 0{,}5n \leqslant \bar{t} \leqslant 0{,}5n + \bar{\beta}, \end{cases}$$

при $k \neq 0$.

Здесь $\bar{\beta} = \beta/T$, $\beta = \pi/\omega_b - \alpha$, $\alpha = \text{const.}\, U_\Sigma(n)$.

Суммарный сигнал на выходе системы при наличии управляющего воздействия ($k \neq 0$) равен

$$x_{\Sigma}(\bar{t}) = x_1(\bar{t}) + x_2(\bar{t}) =$$

$$(6) \quad = \begin{cases} x_{\text{порог}} \operatorname{sgn} U_b(n) & \text{при } 0{,}5n \leqslant \bar{t} \leqslant 0{,}5n + \bar{\beta}, \\ x_{\text{макс}} \operatorname{sgn} U_{\Sigma}(n) + x_{\text{порог}} \operatorname{sgn} U_b(n) & \text{при } 0{,}5n + \bar{\beta} \leqslant \bar{t} \leqslant 0{,}5(n+1). \end{cases}$$

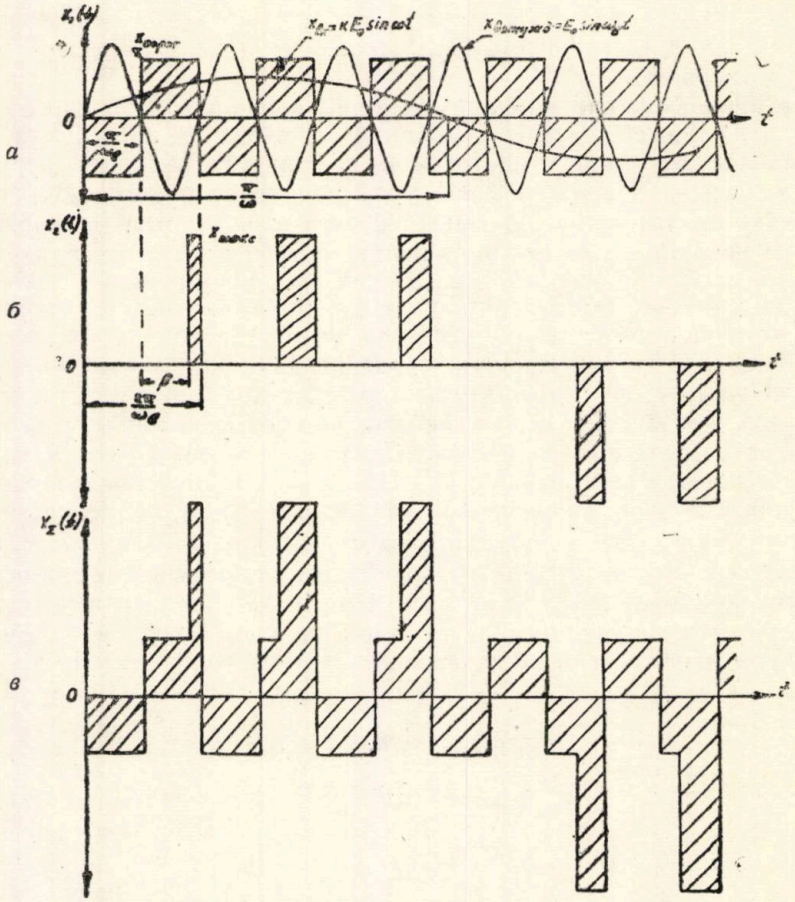


Рис. 2. — Значения сигналов на выходе системы с улучшенным качеством: *а* и *б* — соответственно значения раздельно действующих порогового сигнала (при $k=0$ и $k \neq 0$) и модулированного по ширине максимального сигнала (при $k \neq 0$); *в* — значения суммарного сигнала на выходе релейного устройства при $k \neq 0$.

Нетрудно убедиться, что при описанном выше способе управления потери при $k = 0$ будут минимальными, а быстродействие при наличии управляющего сигнала ($k \neq 0$) значительно выше, чем у обычных

вибрационных релейных систем. Качество систем регулирования будет улучшаться также за счет применения широтно-импульсной модуляции I рода.

Релейные системы с предлагаемым законом изменения выходного сигнала могут быть реализованы с помощью двухтактных однополупериодных магнитных усилителей с самонасыщением [6]. Следует лишь помнить, что эти усилители вносят запаздывание в систему. Величина запаздывания колеблется от половины периода питающего напряжения (т. е. от половины периода вынуждающих колебаний) для быстродействующих схем (см. рис. 2) и до десяти и более периодов для обычных схем. В случае инерционных объектов этими запаздываниями можно пренебречь. В противном же случае запаздывание нужно учитывать при рассмотрении передаточной функций системы регулирования.

Учитывая, что магнитные усилители получают все более широкое применение в автоматических системах благодаря своей простоте и высокой надежности, а также принимая во внимание достоинства предложенного способа управления с точки зрения быстродействия и экономичности, можно выразить надежду, что этот способ найдет довольно широкое использование в системах автоматического регулирования.

Поступила 10 VI 1967 г.

Научно-исследовательский и конструкторско-технологический институт городского хозяйстве, Киев, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов Е. П., *Динамика систем автоматического регулирования.* ГИТТЛ, М., 1954.
2. Цыпкин Я. З., *Теория релейных систем автоматического регулирования,* Гостехиздат, М., 1955.
3. Цянь Сюэ-сэнь, *Техническая кибернетика.* ИЛ, М., 1956, (пер. с англ.).
4. Жиль Ж., Пелегрен М., Декольн П., *Теория и техника следящих систем.* Машгиз, М., 1961, (пер. с франц.).
5. Смит О. Дж., *Автоматическое регулирование.* Физматгиз, М., 1962, (пер. с англ.).
6. Еремеев И. С., *Устройство для управления вибрирующими рулями (спойлерами)* Авт. свид. № 164 206, Бюллетень изобретений, 1964, *14.*

ASUPRA UNEI METODE DE ÎMBUNĂTĂŢIRE A CALITĂŢII SISTEMELOR DE CONTROL LINIARIZATE

(Rezumat)

Se descrie o metodă cu răspuns rapid şi eficienţă mărită de liniarizare a sistemelor de control cu acţiune discretă prin combinarea a două semnale de ieşire — oscilaţii de mică amplitudine şi impulsuri cu modulaţie de durată.

Explicația figurilor

Fig. 1. — Valoarea semnalelor la ieșirea sistemului direct cu liniarizare vibrațională : *а* — curbele de la ieșirea elementului discret în lipsa semnalului de comandă $x(t)$ în cazul $k=0$ și variațiile mărimii $\Delta x(t)$ (suprafețele haşurate) în cazul $x_{intr}=kE\sin\omega t$; *б* — forma curbei rezultate la ieșirea elementului discret pentru cazul $k\neq 0$.

Fig. 2. — Valoarea semnalelor la ieșirea sistemului cu calitate imbunătățită : *а* — valoarea semnalului prag acționînd separat în cazurile $k=0$ și $k\neq 0$; *б* — amplitudinea maximă a semnalului impuls cu modulație de durată în cazul $k\neq 0$; *в* — valoarea semnalului total la ieșirea dispozitivului cu acțiune discretă, în cazul $k\neq 0$.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

C. Z. 621.396. 645.1

CONTRIBUȚII LA STUDIUL ȘI REALIZAREA AMPLIFICATOARELOR CU CARACTERISTICĂ DE AMPLITUDINE COMANDATĂ

DE

VIANOR BOICIU și C. ONU

Comunicare prezentată în sesiunea științifică a Institutului politehnic din Iași, din 28—30 septembrie 1967

1. Introducere

Amplificatoarele la care se realizează reglarea automată a factorului de amplificare sînt cunoscute sub denumirea de amplificatoare cu caracteristică de amplitudine comandată.

Reglarea automată a factorului de amplificare se poate realiza, în cazul amplificatoarelor cu tranzistoare, prin mai multe metode:

a) Reglarea factorului de amplificare prin șuntarea etajului amplificator cu elemente neliniare ca: diode semiconductoare, tranzistoare suplimentare, varistoare.

b) Reglarea factorului de amplificare prin folosirea elementelor neliniare la modificarea legăturii de reacție negativă de curent sau tensiune.

c) Modificarea regimului de funcționare în curent continuu prin variația: curentului de bază, curentului de emitor sau a tensiunii de colector.

Din categoria amplificatoarelor prevăzute cu reglarea automată a factorului de amplificare cele mai răspîndite sînt amplificatoarele logaritmice, adică acele amplificatoare la care există o dependență logaritmică între tensiunea de intrare și cea de ieșire.

Obținerea caracteristicii logaritmice se poate realiza fie prin utilizarea de cuadripoli constituiți din rezistențe și diode semiconductoare polarizate corespunzător, fie prin utilizarea tranzistoarelor suplimentare.

În literatură [2] este tratată problema realizării caracteristicilor logaritmice.

Pornind de la amplificatoarele logaritmice și utilizarea șuntării cu tranzistoare suplimentare pentru obținerea caracteristicilor logaritmice, s-a pus problema realizării amplificatoarelor cu caracteristici de amplitudine de altă formă.

Această problemă constituie de fapt obiectului studiului efectuat în cele ce urmează.

2. Consideraţii teoretice

Considerînd un etaj de amplificare (fig. 1) constituit din tranzistorul T_2, la care în circuitul de intrare se montează în paralel tranzistorul T_1, se realizează un amplificator cu impedanţă de intrare variabilă.

Orice modificare a tensiunii de bază U_{b1} conduce la modificarea curentului prin tranzistorul T_1 şi deci, în cazul cînd s-a aplicat un semnal de intrare U_i, se va produce o modificare a factorului de amplificare al etajului. Anume, pentru T_1 conductor factorul de amplificare al etajului va fi minim, iar pentru T_1 blocat va fi maxim.

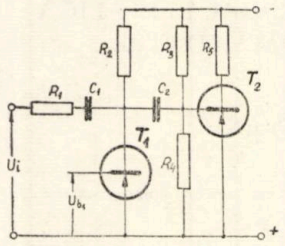


Fig. 1

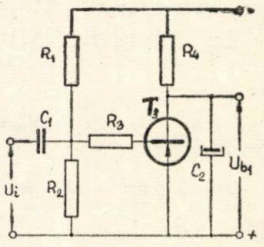


Fig. 2

Modul de variaţie a factorului de amplificare va depinde exclusiv de modul de variaţie a tensiunii U_{b1}.

Pentru reglarea automată a factorului de amplificare este necesar ca U_{b1} să varieze cu nivelul semnalului la intrare. Acest deziderat se realizează cu ajutorul montajului din fig. 2, conţinînd tranzistorul T_3, care lucrează în regim neliniar.

Prin introducerea rezistenţei R_3 în circuitul bazei se fixează punctul de funcţionare în regiunea neliniară, în aşa fel încît semnalul ce urmează a fi amplificat să aibă una din alternanţe puternic deformată. Semnalul deformat va prezenta o componentă continuă a cărei valoare va depinde de nivelul semnalului de intrare.

Dacă la ieşire se introduce capacitatea C_2, semnalul U_{b1} va urmări variaţiile componentei continue a semnalului deformat şi deci şi semnalul la intrare. Creşterea sau descreşterea tensinunii U_{b1} va avea loc după o lege neliniară, datorită neliniarităţii caracteristicii de intrare.

Modul de variaţie a semnalului la ieşire depinde de valorile elementelor din circuit şi de numărul tranzistoarelor etajului de polarizare.

3. Montaje experimentale realizate

Pe baza consideraţiilor teoretice şi încercărilor experimentale s-a realizat montajul din fig. 3, care permite obţinerea datelor necesate ridicării caracteristicilor de amplitudine $U_e = F(U_i)$, reprezentate în fig. 6.

Tensiunea U_{b1} va varia în sens invers cu tensiunea de intrare U_i deoarece etajul de polarizare este realizat cu două tranzistoare.

Potenţiometrul R_7 permite fixarea nivelului la care variază U_{b1} cu U_i. Rezistenţa R_{10} asigură fixarea corectă a punctului de funcţionare pe caracteristica de intrare a tranzistorului T_3.

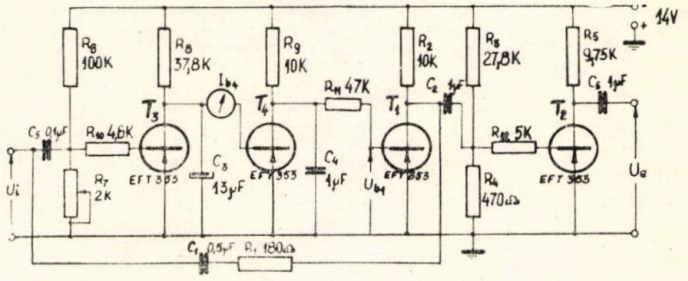


Fig. 3

Pentru obţinerea caracteristicilor de amplitudine reprezentate în fig. 10 este necesar ca în schema de polarizare să se introducă tranzistorul T_5 (fig. 4).

Tensiunea U_{b1} va varia în acelaşi sens cu tensiunea U_i, deoarece etajul de polarizare este realizat cu trei tranzistoare.

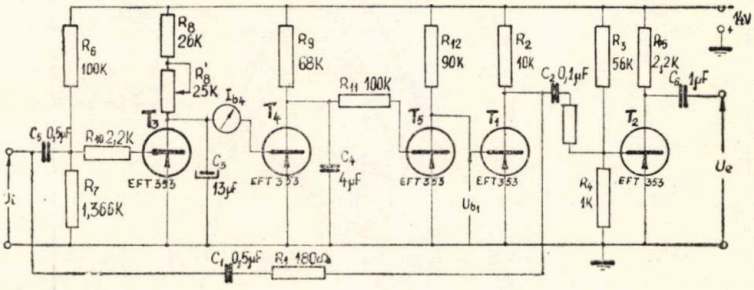


Fig. 4

Potenţiometrul R'_8 permite fixarea nivelului la care variază tensiunea U_{b1} cu semnalul U_i. Rezistenţa R_{10} asigură fixarea corectă a punctului de funcţionare pe caracteristica de intrare a tranzistorului T_3.

Determinarea valorilor elementelor schemelor s-a efectuat pe cale teoretică, folosind familiile de caracteristici date în catalog pentru tranzistoarele respective, valori verificate şi ajustate apoi experimental.

4. Verificarea amplificatoarelor

În fig. 5 şi 6 sînt reprezentate caracteristicile $U_{b1} = F(U_i)$ şi $U_e = F(U_i)$, pentru amplificatorul din fig. 3.

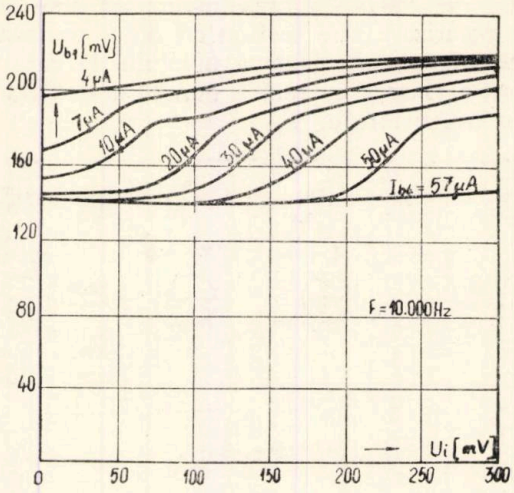

240
200
160
120
80
40
U_{bf}[mV]
4μA
7μA
10μA
20μA
30μA
40μA
50μA
I_{bf} = 57μA
f = 10.000Hz
Ui [mV]
0
50
100
150
200
250
300

Fig. 5

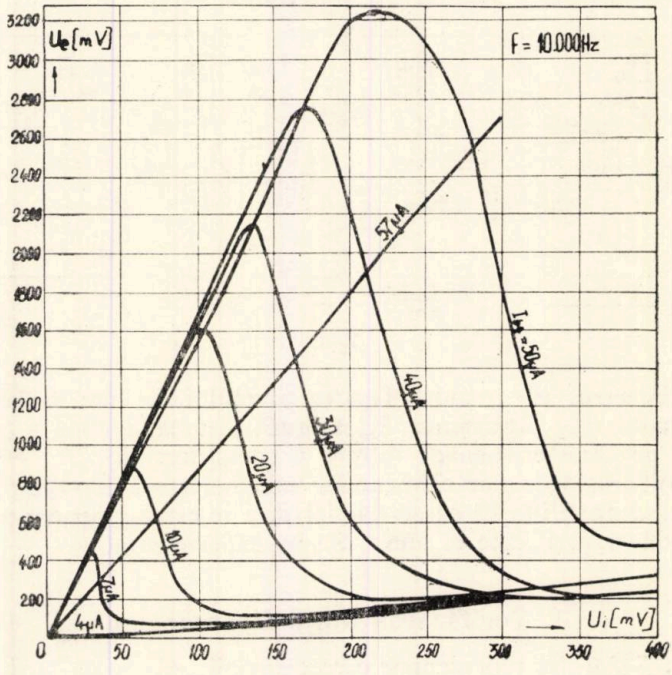

U_e[mV]
f = 10.000Hz
57μA
I_{bf}=50μA
40μA
30μA
20μA
10μA
7μA
4μA
Ui[mV]
0
50
100
150
200
250
350
400

Fig. 6

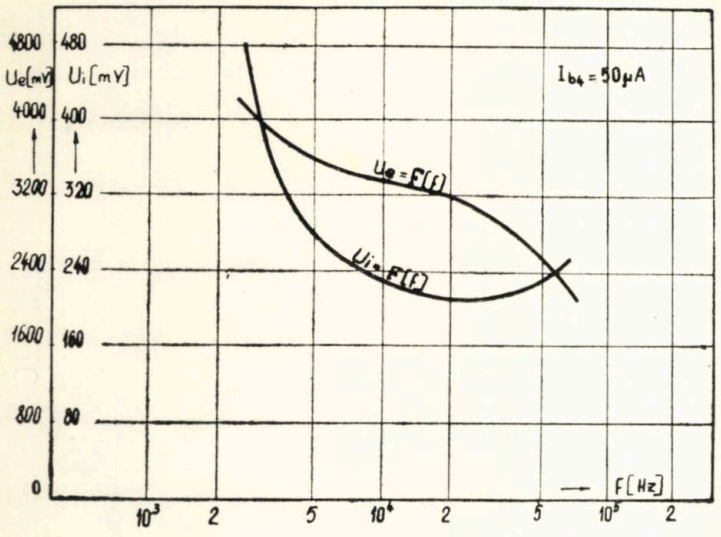


Fig. 7

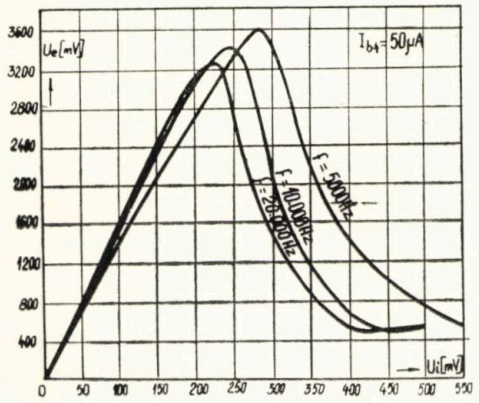


Fig. 8

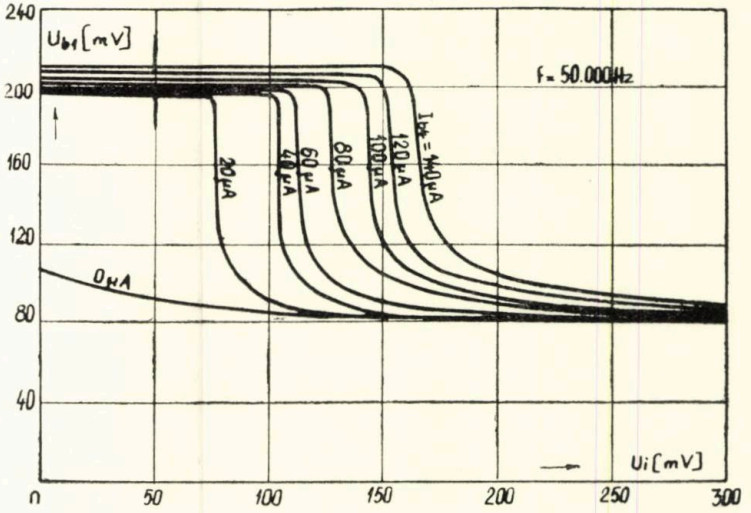


Fig. 9

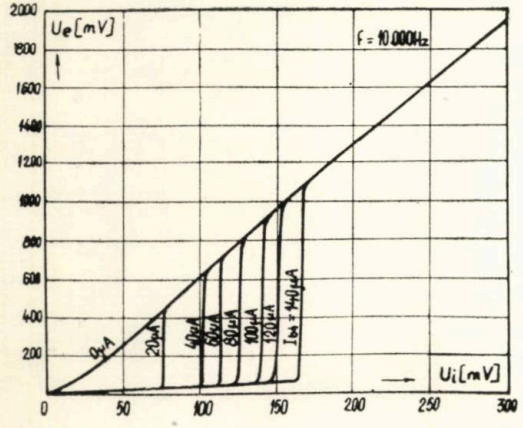


Fig. 10

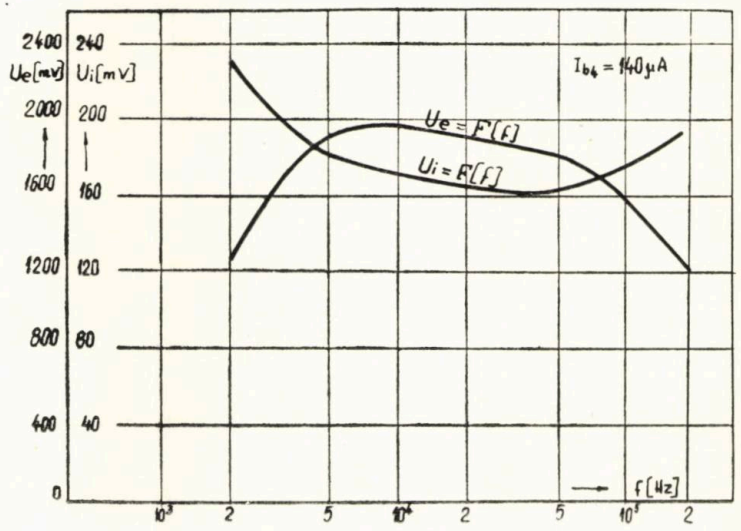


Fig. 11

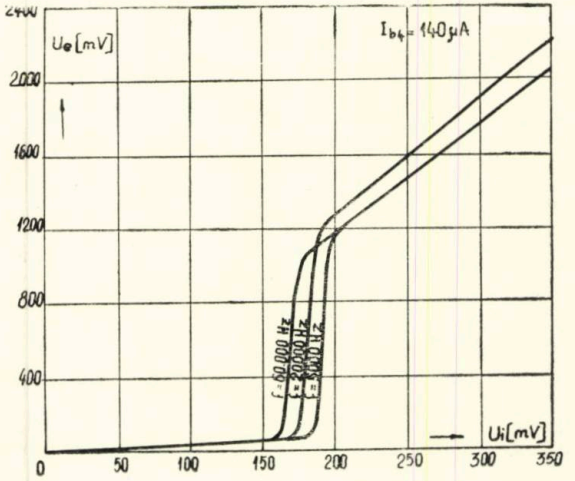


Fig. 12

Pentru valoarea minimă a tensiunii U_{b1} ($I_{b4} = 57$ μA), tensiunea la ieşire U_e variază proporţional cu semnalul U_i, adică în acest caz atît amplificatorul cît şi etajul de polarizare lucrează într-un regim liniar.

Prin reducerea curentului I_{b4} tensiunea U_{b1} variază cu semnalul U_i, făcînd posibilă apariţia regiunii cu factor de amplificare variabil. Totodată, prin variaţia curentului de bază I_{b4} se obţin caracteristicile care au valorile maxime ale tensiunii la ieşire U_e şi regiunea cu factor de amplificare variabil deplasate spre semnale de intrare U_i mai scăzute.

Caracteristica de frecvenţă a fost ridicată pentru valorile maxime ale tensiunii de ieşire U_e. În fig. 7 este redată variaţia valorii maxime a tensiunii de ieşire (U_e) şi a tensiunii de intrare corespunzătoare (U_i) funcţie de frecvenţă.

Din analiza caracteristicii de frecvenţă rezultă că în banda de frecvenţe cuprinsă între 5000...20000 Hz, valoarea maximă a tensiunii la ieşire (U_e) se menţine în limitele admise (fig. 8).

În fig. 9 şi 10 sînt reprezentate caracteristicile $U_{b1} = F(U_i)$ şi $U_e = F(U_i)$ pentru amplificatorul din fig. 4.

În acest caz la valori reduse ale tensiunii de intrare U_i, tensiunea U_{b1} este maximă şi deci amplificatorul va avea factorul de amplificare redus. Factorul de amplificare va creşte pînă la valoarea nominală funcţie de tensiunea U_{b1}.

Scăderea curentului de bază I_{b4} are drept efect deplasarea regiunii cu factor de amplificare variabil a caracteristicilor $U_e = F(U_i)$ spre valori mai reduse ale semnalului la intrare U_i.

Caracteristica de frecvenţă a fost ridicată pentru valorile U_e şi U_i, la care are loc saltul de la un factor de amplificare minim la unul maxim.

Se poate considera că banda de frecvenţe este cuprinsă între 5000... ...60000 Hz. Caracteristicile $U_e = F(U_i)$ pentru 5000, 20000, 60000 Hz sînt reprezentate în fig. 12.

5. Concluzii

S-au realizat două amplificatoare cu factor de amplificare reglabil funcţie de nivelul semnalului de la intrare.

Amplificatorul reprezentat schematic în fig. 3 realizează amplificarea liniară a semnalelor mici şi atenuează mult semnalele mari.

Prin alegerea convenabilă a elementelor circuitului se poate realiza fie o reducere bruscă a factorului de amplificare, fie o reducere mai lentă.

Amplificatorul reprezentat în fig. 4 realizează amplificarea liniară a semnalelor de nivel mare şi atenuează mult semnalele de nivel redus.

Nivelul semnalului de la intrare, la care cele două amplificatoare produc atenuarea semnalelor de la ieşire, poate fi modificat.

Există deci posibilitatea ca aceste amplificatoare să poată fi utilizate la realizarea unor relee care să acţioneze fie la creşterea tensiunii sau curentului (amplificatorul din fig. 3), fie la reducerea tensiunii sau curentului

(amplificatorul din fig. 4). De asemenea se poate realiza un releu care să acţioneze atît la creşterea cît şi la descreşterea tensiunii sau curentului faţă de valorile impuse.

Institutul politehnic, Iaşi.
Catedra de utilizări electrice,
Laboratorul de electronică industrială

BIBLIOGRAFIE

1. * * * Electronică industrială-Radio-Televiziune, 1966, *1.*
2. Волков В. М., *Логарифмические усилители на транзисторах.* Изд. Техника, Киев, 1965.
3. Tănăsescu T., *Circuite cu tranzistoare.* Ed. Tehn., Buc., 1961.
4. * * * *Procese electronice în dispozitive semiconductoare de circuit.* Ed. Acad. R. P. R., Buc., 1962.
5. * * * *Circuite cu tranzistoare în industrie.* Ed. Tehn., Buc., 1963.

BEITRÄGE ZUM STUDIUM UND ZUR AUSFÜHRUNG DER VERSTÄRKER MIT GESTEUERTER AMPLITUDENKENNLINIE

(Zusammenfassung)

Es werden einige Erwägungen über die Möglichkeit der Ausführung von Verstärkern, deren Verstärkungsfaktor sich mit der Amplitude des Eingangssignal verändern kann, gemacht.

In der vorliegenden Arbeit hat man die Methode der Nebenschliessung des Eingangskreises einer Verstärkerstufe durch einen zusätzlichen Transistor, der die Rolle einer veränderlichen Impedanz spielt, angewendet. Der Leitungs- oder Sperrungszustand dieses zusätzlichen Transistors T_1 wird ein Minimum- oder Makimumverstärkungsfaktor dieser Stufe sichern.

Die Veränderungsweise des Verstärkungsfaktors wird von der Basisspannungsveränderung des zusätzlichen Transistors (U_{b1}) abhängen.

Bei automatischer Regelung des Verstärkungsfaktors ist es nötig dass die Spannung U_{b1} sich auf der Höhe des Eingangssignals verändert, zu welchem Zwecke eine Polarisierungsstufe eingebaut wurde, die im nichtlinearen Betrieb arbeitet (T_3, T_4). Die Veränderungsweise des Ausgangssignals hängt von den Werten der Stromkreiselemente und von der Anzahl der die Polarisationsstufe bildenden Transistoren ab.

Es wurden zwei Verstärkerschaltungen ausgeführt, eine (Abb. 3) die für kleine Signale und für die Dämpfung der starken gebraucht werden kann und eine andere (Abb. 4) die in linearem Betrieb die starken Signale verstärkt und die kleinen dämpft.

Gestützt auf die beschriebenen Vorteile können diese Schaltungen im Relaisbetrieb zur Strom- oder Spannungserhöhung (Abb. 3), ebenso zur Strom- oder Spannungsverminderung (Abb. 4), oder schliesslich zur gleichzeitigen Regelung dieser beiden Werte gebraucht werden.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4 1968

D. K. 621.313.36; 621—83

ERFAHRUNGMÄSSIGES STUDIUM DES ELEKTRISCHEN ANTRIEBES MIT EINEN VON EINEN SELBSTERREGTEN DREHSTROM-STROMWENDERGENERATORS GESPEISTEN ASYNCHRONMOTOR (I)

VON

IOSIF BERGMAN

Mitteilung an der wissenschaftlichen Tagung der Technischen Hochschule Jassy, 28–30. September 1967

1. Vorwort

In der Dissertation des Verfassers zur Erlangung der Doktorwürde [1] wird die Benützungsmöglichkeit des mit kostanter Drehzahl angetriebenen selbsterregten Drehstrom-Stromwendergenerators, als Quelle von Spannungen veränderlicher Frequenz für einen durch Frequenzgesteuerten elektrischen Antrieb, erforscht.

Die gegenwärtig benützten Generatoren der Spannungen steuerbarer Frequenz müssen mit veränderlicher Drehzahl angetrieben werden (die Synchronen und Asynchronen) oder mit Ströme veränderlicher Frequenz erregt werden (die Stromwendergeneratoren), was Schwierigkeiten bei dessen Anwendung im regelbaren elektrischen Antrieb verursacht.

In [2] und [3] wurden einige Probleme des Betriebes des selbsterregten Drehstrom-Stromwendergenerators theoretisch behandelt.

Der Einfluss des Schlupfes des Asynchronmotors auf der vom selbsterregten Drehstrom-Stromwendergenerator erzeugten Spannung und auf dessen Frequenz wird rechnerisch in [4] erforscht und dort erfahrungsmässig geprüft.

Das Verhalten der selbsterregten Drehstrom-Stromwendermaschine bei verschiedenen Drehzahlen wurde in [5] und bei verschiedenen in parallelgeschalteten Lasten in [6] erfahrungsmässig erforscht.

In der vorliegenden Arbeit wird der Teil des in [1] vorgelegten erfahrungsmässigen Studium der vom Asynchronmotor und den selbsterregten Drehstrom-Stromwendergenerator gegründeten Gruppe, die den Fall der Regelung der Frequenz der erzeugten Spannung durch die Bürstenverschiebung des Generators behandelt, dargestellt.

2. Schaltschema und Arbeitsverfahren

Für das erfahrungsmässige Studium der Anwendungsmöglichkeit des selbsterregten Drehstrom-Stromwendergenerators in den regelbaren elektrischen Antrieb durch Frequenzsteuerung der Asynchronmotoren, wurde das in Abb. 1 dargestellte Schema benützt. Als selbsterregter Drehstrom-Stromwendergenerator wurde eine Drehstrom-Stromwendermaschine mit einfachem Bürstensatz von 1/1,5/3,1 kW, 1 750/1 500/800 U/min, bei 50 Hz und $2p = 4$, verwendet. Der Zwischentransformator der bei der Primärspannung von 380 V. 6 kVA übertragen kann, ist mit regelbaren Anzapfungen an der Sekundärwicklung, die sämtliche Übersetzungsverhältnisse K zwischen 0,5 und 10 erreichbar machen, vorgesehen.

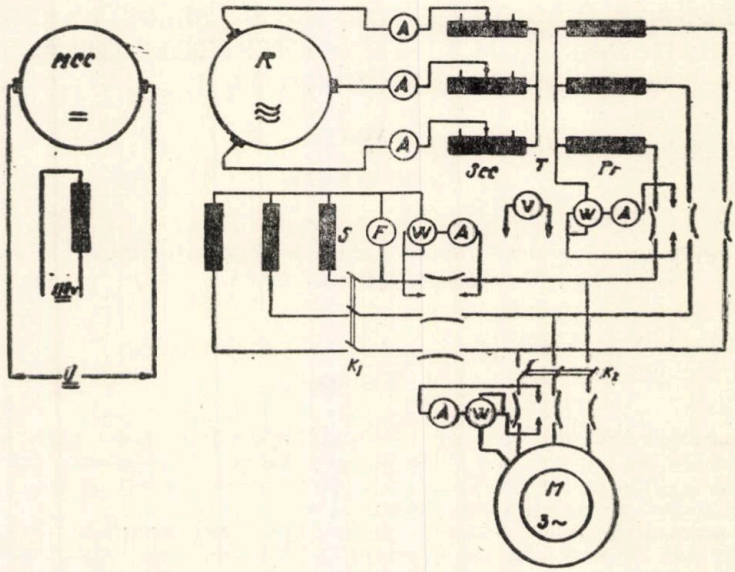


Abb. 1

Im Schaltschema sind auch die Messgeräte dargestellt. Mit S und R wurden der Ständer und Läufer des Drehstrom-Stromwendergenerators und mit *Pr* und *Sec* die Primär- und Sekundärwicklung des Zwischentransformators T, bezeichnet.

Der selbsterregte Drehstrom-Stromwendergenerator ist vom Pendelgleichstrommotor *MCC*, dessen Nutzdrehmoment direkt gemessen wird, angetrieben. Der Ankerkreis diesses Motors ist zu einen Gleichstromgenerator dessen Spannung in weiten Grenzen geregelt werden kann, geschaltet, und dessen Erregerkreis ist mit der konstanten Spannung von 110 V, gespeist.

An den Ständerklemmen des Drehstrom-Stromwendergenerators ist der Asynchronmotor M, von 0,6 kW, 380 V, 1,72 A, 1 440 U/min, $\cos\varphi = 0{,}8$

bei $f = 50$ Hz, dessen Drehzahl geregelt wird, geschaltet. Die Arbeitswelle dieses Motors trägt eine elektromagnetische Bremse welche dessen Belastung ermittelt.

Zur Vereinfachung der Zeichnung wurden in Abb. 1 die elektromagnetische Bremse und der Gleichstromgenerator für veränderliche Spannung nicht dargestellt.

Die vom selbsterregten Drehstrom-Stromwendergenerator erzeugte Frequenz wurde mit einen Frequenzmesser, der im Messbereich 20 bis 100 Hz den Genauigkeitsgrad 0,2 hat, gemessen.

Die Selbsterregungsverfahren wurden in [1] und in [5] erläutert. Während den Studium wurde die Selbsterregung ohne Vormagnetisierung erziehlt.

Die Erfahrung zeigt das einige Schwierigkeiten weil die Bürstenverschiebung durch einem Zahnradgetriebe erfolgt und die verschiedenen Übersetzungsverhältnisse durch Umschalten der Anzapfungen an der Sekundärwicklung erziehlt werden, erscheinen. Diese Schwierigkeiten können durch Benützung eines Phasen- und eines Drehreglers, was natürlich die Anlage verteuert, komplet überschritten werden.

Das Schaltschema wurde um die streng konstante Beibehaltung der Drehzahl des Generators—in unserem Fall 1 500 U/min—zu erziehlen, entworfen.

Die sämtlichen erfahrungsmässigen Daten wurden im stabilen Betriebszustand und bei gutter Stromwendung des Generators erziehlt. Die thermische Überlastung der Maschinen wurde vermieden.

Der Schalter K_1, der im Schema aus Abb. 1 vorgesehen ist, bleibt ständig geschlossen. Durch dessen Öffnung kann man die Entregung des Generators erziehlen.

Weil der Betrieb der Motoren mit konstantem Lastmoment im Studium der elektrischen Antriebe sehr verbreitet ist, wird er hier, sowie in [1], als wichtigster Betriebzustand gerechnet.

3. Der Betrieb des mit konstantem Moment belasteten Asynchronmotors der vom mit Bürstenverschiebung vorgesehenen selbsterregten Drehstrom-Stromwendergenerator gespeist ist

Es werden die erfahrungsmässigen Daten die beim Betrieb des mit Bürstenverschiebung und mit konstantem sämtlichen Übersetzungsverhältnis $K = 4{,}06$ vorgesehenen selbsterregten Drehstrom-Stromwendergenerator erziehlt worden sind, dargestellt. Der Generator wird mit der konstanten Drehzahl ($n = 1500$ U/min) angetrieben und seine Last sei der mit festbleibenden Lastmoment arbeitende Asynchronmotor M.

Bei den hier gewählten Werte für n und K, kann die Veränderung der Betriebsparameter des Generators und des Asynchronmotors für den ganzen Regelbereich des Bürstenverdrehwinkels α des Generators, von den kleinsten bis zu den grössten, bei welchen er erregt bleibt, verfolgt werden.

Bei kleineren Übersetzungsverhältnissen, erreichen die in den Kreisen des Generators flüssenden Ströme schnell unzulässige Werte was nicht mehr einen Gesamtüberblick der Erscheinungen zulässt.

Aus der theoretischen Analyse [2], [3] ist, das die bei gleichbleibender Drehzahl des Generators, durch Bürstenverschiebung erlangte grösste Regelbereiche der Frequenz für sämtliche Übersetzungsverhältnisse $K = 1{,}5...2$ erziehlt werden, ersichtlich. In den hier vorliegenden Fall würden bei $n = 1\,500$ U/min die Ströme die in den Kreisen des Generators, bei $K = 1{,}5...2$, flüssen, unzulässig gross.

In den folgenden Abbildungen wurden mit *1* die beim Leerlauf des selbsterregten Drehstrom-Stromwendergenerators, mit *2* die bei Zuschaltung des leerlaufenden Asynchronmotors und mit *3* und *4* die beim Betrieb des Asynchronmotors mit konstanten Lastmoment $M = 2{,}2$ bzw. 5,45 Nm erziehlten Kurven bezeichnet. Das Nennlastmoment des Motors ist $M = 3{,}83$ Nm.

Abb. 2 stellt den Verlauf der Frequenz der erzeugten Spannung dar. Mit Linie-Punkt wurden die mit der Gleichung (60) aus [2]

$$f = \frac{pnK\,(K + \cos\alpha)}{60\,(1 + 2K\cos\alpha + K^2)} \tag{1}$$

berechneten Frequenzwerte, beim Leerlauf des Generators, und mit vollen Linien die erfahrungsmässig erziehlten Frequenzen dargestellt. Die Kurve *3*, die praktisch die Kurve *2* überlagert, wurde nicht mehr gezeichnet. Die Differenzen zwischen den rechnerisch mit Gleichung (1) und den erfahrungsmässig erziehlten Daten werden durch die Vernachlässigung des Leerlaufstromes des Transformators, sowie dessen und des Generators Blindwiderstände, erklärt.

Die Leerlauffrequenz wurde durch Bürstenwinkelverschiebung von 45° bis 161° zwischen 42 und 59 Hz geregelt (Kurve *1*). Falls der Motor das Lastmoment $M = 5{,}45$ Nm trägt, so kann der Bürstenwinkel α nur zwischen 70° und 141° verschoben werden was nur einer Frequenzregelung zwischen 43,5 und 53,5 Hz entspricht.

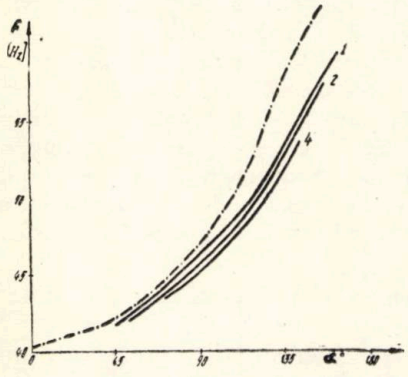
Man bemerkt also das die Regelungsgrenzen des Bürstenwinkels α durch Anwachsen der Last sich verschmälern.

Die Verminderung der Frequenz mit den Anwachsen des Schlupfes des Asynchronmotors wurde theoretisch in [1] und [4] erläutert. Diese ist aber klein (maximum 1,5 Hz, also 3 %) was nur eine unbedeutende „Erweichung" der mechanischen Kennlinie des Asynchronmotors, verursacht.

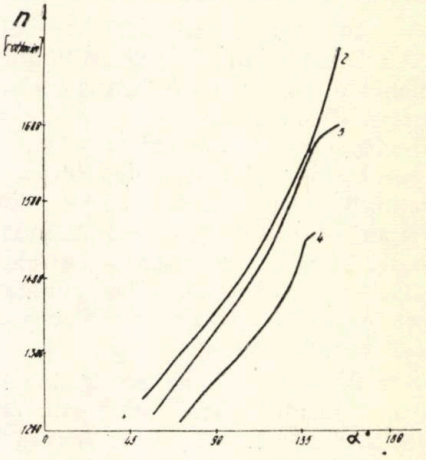
In Abb. 3 werden die Drehzahlkennlinien und in Abb. 4 die Kennlinien des relativen und des absoluten Schlupfes des Asynchronmotors dargestellt. Man bemerkt das die Leerlaufdrehzahl des Motors sich mit bis $\pm$ 15 % der Synchrondrehzahl ($n = 1\,500$ U/min) verändert hat, während beim Lastmoment $M = 5{,}45$ Nm dessen Drehzahl bis auf 20 % unter seiner Synchrondrehzahl sinkt.

Die relativ engen Drehzahl-Regelungsgrenzen bei der Bürstenwinkelverschiebung zwischen 45° und 161° werden, damit das man ein grosses sämtliches Übersetzungsverhältnis K, bei welchen der Einfluss der Bürstenverschiebung auf die Frequenz klein ist, benützt hat, erklärt [3].

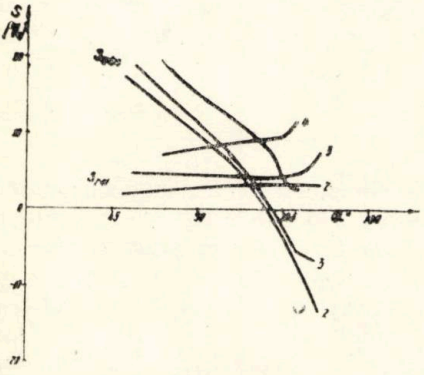
Abb. 5 stellt den Verlauf der Ständerphasenspannung U_1 als Funktion des Bürstenverdrehwinkels α, dar. Diese Spannung wird an einer Phase des als Last genützten Asynchronmotors, aufgedrückt.



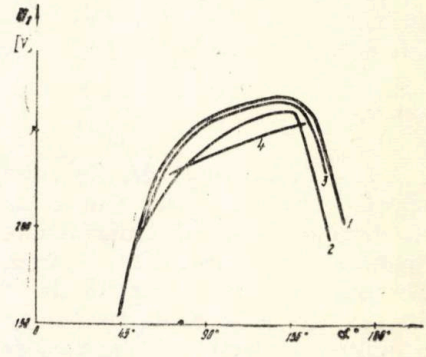
Ab. 2



Ab. 3



Ab. 4



Ab. 5

Mit der Vergrösserung des Bürstenverschiebungswinkels α geht der Spannungswert durch ein Maximum, der in diesem Fall für $\alpha > 90°$ stattfindet, vorbei.

Für den selben Bürstenwinkel α hat die Spannung ihren Höchstwert beim leerlaufenden Generator, aber durch das Zuschalten des leerlaufenden

Asynchronmotors, sinkt sie häftig. Bei Vergrösserung der Last des Motors steigt die Generatorspannung bis zu einen maximum an, um danach, bei grösseren Belastungen, wieder kleiner zu werden. Die wichtigere Herabsenkung der Spannung beim Einschalten des leerlaufenden Asynchronmotors wird durch dessen kleinen Leistungsfaktor ($\cos \varphi_0 < 0{,}2$), wie theoretisch in [1] und [4] bewiesen wird, erklärt. Beim Lastmoment $M = 5{,}45$ Nm konnte man nicht mehr den sinkenden Teil der Kurve $U_2 = f(\alpha)$ erziehlen.

In Abb. 6 wird der Verlauf des Ständerstromes I_1 in Abhängung vom Bürstenwinkel α, dargestellt. Alle Kurven überschreiten deren Maximalwert für $\alpha = 90°$. Im Leerlauf bleibt der Generator für den Ständerstrom $I_1 = 1{,}1$ A bei $\alpha = 45°$ und für 2,1 A bei $\alpha = 161°$ erregt; der Höchstwert des Stromes $I_1 = 9{,}5$ A wird bei $\alpha = 90°$ (Kurve *1*), erreicht. Durch das Zuschalten des leerlaufenden Asynchronmotors *M*, an den Generatorklemmen (Kurve *2*) wird der Strom I_1 kleiner. Die Kurven *3* und *4* zeigen das zwischen den Ständerstrom I_1 und der Last des Generators, keine liniare Abhängigkeit besteht. Es wird die theoretisch in [1] und [4] angedeutete Tatsache, das zugleich mit den Anwachsen des Lastmomentes des Asynchronmotors der Strom I_1 in der Ständerwicklung des Generators sich vergrössert, geprüft.

Abb. 7 stellt in den gleichen Bedingungen die Kennlinien des in der Primärwicklung des Transformators flüssenden Stromes I_{1t} dar. Die Kurve *1* ist die selbe in den Abb. 6 und 7 und wurde hier wieder gezeichnet um das Vergleichen der Daten zu erleichtern. Bei gleichbleibender Spannung wachsen die Ströme I_1 und I_{1t} mit der Last des Motors an. Der Strom I_1 vergrössert sich schneller als I_{1t}, um den Laststrom I_d zugleich leisten zu können. Zwischen den drei hier genannten Strömen findet die phasorielle Gleichung (4) aus [2] statt:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{1t} + \underline{I}_d \,. \tag{2}$$

In Abb. 8 sind die Kennlinien des Ständerstromes des Asynchronmotors I_d gezeichnet. Die Kurven *2* und *3* haben Höchstwerte, sowie die der Spannungen, während die Kurve *4* einen Kleinstwert der einer grösseren Spannung U_1 entspricht, besitzt. Die ersten zwei Kurven wurden beim Leerlauf oder beim Betrieb des Asynchronmotors mit kleiner Last, also bei kleinen Relativschlupf des Motors aufgenommen. In solchen Fällen ist der Strom I_d in erster Reihe von der Spannung U_1, beeinflusst. Im Fall der bei grosser Last und bei kleineren Spannungen aufgenommenen Kurve *4*, kann der Arbeitspunkt des Motors sich dessen Kippmoment nähern, oder sogar seine Stabilitätsgrenze überschreiten, wofür ein grösserer vom Motor aufgenommener Strom nötig ist. Der vom Motor aufgenommene Strom I_d beim Lastmoment $M = 5{,}45$ Nm ist viel grösser als in den anderen zwei Fällen auch weil die Spannung mit zunehmender Last sinkt.

Die Sekundärströme des Generators, I_2, sind in Abb. 9 dargestellt.

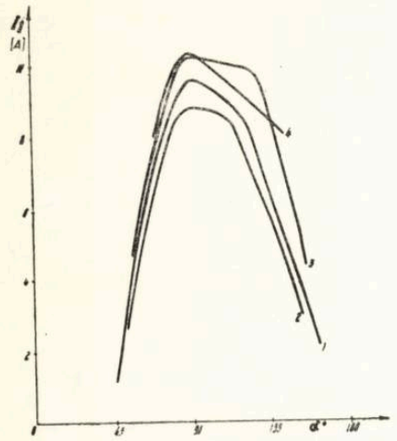


Abb. 6

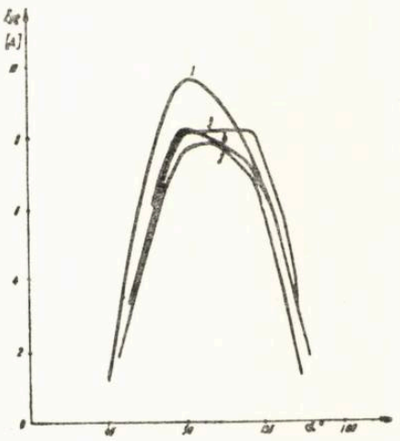


Abb. 7

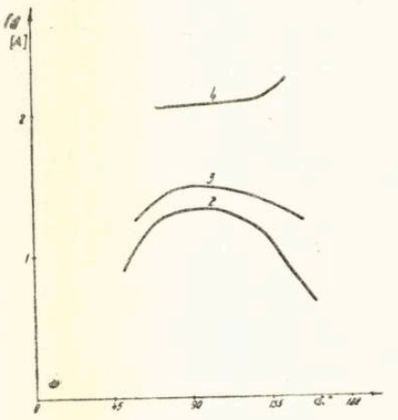


Abb. 8

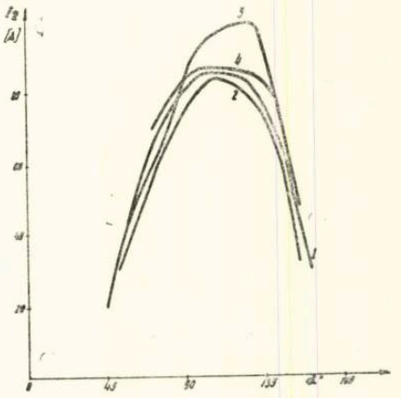


Abb. 9

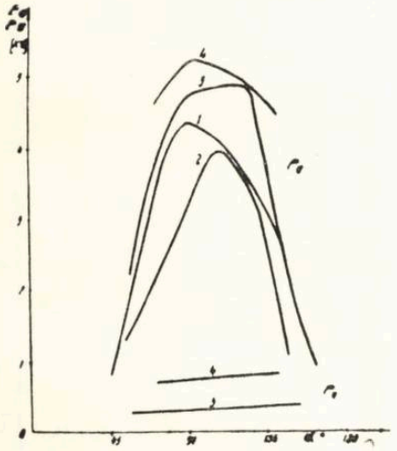


Abb. 10

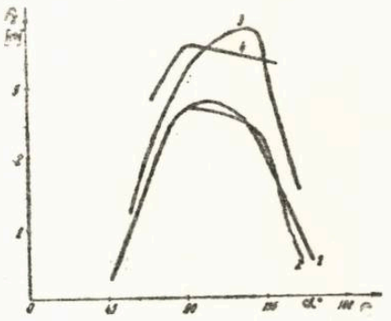


Abb. 11

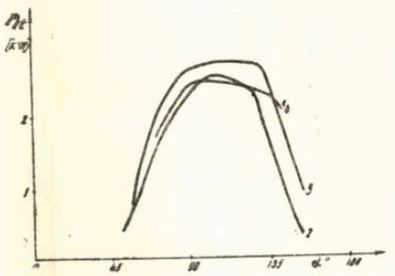


Abb. 12

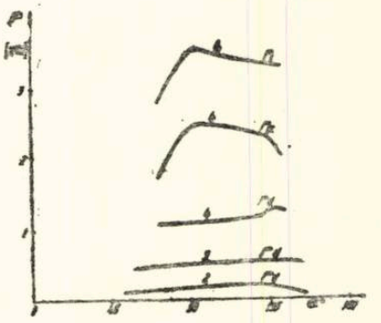


Abb. 13

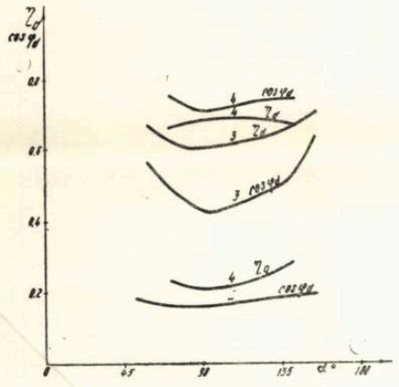


Abb. 14

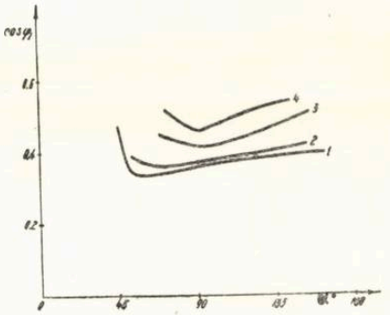


Abb. 15

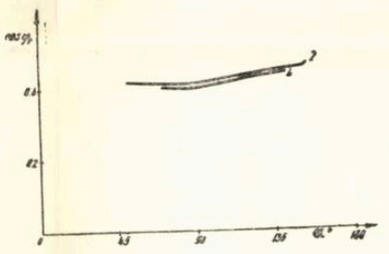


Abb. 16

Die Kurven der Ströme I_1, I_{1t} und I_2 haben bei der selben Last sehr ähnliche Formen.

Im theoretischen Studium [2] und [3] wurde

$$I_2 = -K_t I_{1t} \tag{3}$$

betrachtet, also der Magnetisierungsstrom des Zwischentransformators T wurde vernachlässigt.

Das Übersetzungsverhältnis des Transformators, das als Verhältnis der Primär- und Sekundär-Windungszahlen, mit der Gleichung (13) aus [2] berechnet wurde, hat bei $K = 4{,}06$ den Wert $K_t = 30$.

Die Werte von K_t die als Verhältnis der Strome I_2 zu I_{1t}, beim Leerlauf des Generators, mit der Gleichung (3) berechnet wurden, sind in der folgenden Tafel angegeben worden:

α	45°	60°	90°	120°	135°	161°
$K_t = I_2/I_{1t}$	17,4	9,5	8,6	10,1	11,1	14,4

Die Verminderung des als Verhältnis des Ströme I_2 zu I_{1t} berechneten Übersetzungsverhältnis K_t insbesondere in der Mitte des Verlaufbereiches des Bürstenwinkels α, ist den grossen Magnetisierungsstrom des Zwischentransformators, bei den grösseren Spannungen und den kleineren Frequenzen, zu verdanken.

Die Tatsache das I_2 kleiner als der aus Gleichung (3) erfolgte Wert, ist dadurch das ein Teil des Stromes I_{1t} zum magnetisieren des Transformators verbraucht wird, erklärt.

Die Beanspruchung des Bürsten-Stromwendersystems ist zu Folge der Magnetisierung des Transformators von der Ständerseite, kleiner.

Die Feststellung das die gemessene Frequenz hier kleiner als die berechnete ist, wird Teilweise auch durch die Differenz zwischen den erfahrungsmässigen und den rechnerischen Werten des Transformator-Übersetzungsverhältnisses K_t, erklärt.

In einer folgenden Arbeit wird ein Zustand bei den der gemessene Wert des Übersetzungsverhältnisses K_t grösser als der berechnete ist, dargestellt.

Um den Leistungsfluss im selbsterregten Drehstrom-Stromwendergenerator erläutern zu können, werden in Abb. 10 die Kurven der vom Generator aufgenommenen Leistung P_a und der Nutzleistung an der Welle des regelbaren Asynchronmotors P_u, dargestellt.

In den Abb. 11 und 12 sind die Kennlinien der Leistungen die in der Ständerwicklung des Generators P_1 und in der Primärwicklung des Transformators P_{1t} fliessen, gezeichnet.

Die in der Primärwicklung des Transformators fliessende Leistung P_{1t} ist, ebenso wie bei den Strömen, kleiner als die vom Ständer durchflossene Leistung P_1. Bei Vergrösserung der vom Asynchronmotor aufgenommenen Leistung P_d, wird die Differenz zwischen den Leistungen, $P_1 - P_{1t}$, grösser.

Zwischen den durch die Ständerwicklung des Generators fliessende Leistungen P_1 beim Leerlauf und bei Speisung des leerlaufenden Asynchronmotors ist der Unterschied, weil im zweiten Fall die Spannung und die Ströme in den Generatorkreisen sich vermindern, klein. Durch die Zuschaltung des leerlaufenden Asynchronmotors werden die vom Generator aufgenommene Leistung P_a (Abb. 10) und die durch die Primärwicklung des Transformators fliessende Leistung P_{1t} (Abb. 12), im Vergleich zu die beim leerlaufenden Generator, kleiner. Beim Anwachsen des Lastmomentes werden die Leistungen P_a, P_1, P_{1t} und die Differenz $P_1 - P_{1t}$, grösser.

In Abb. 13 wurden die Kennlinien der vom Asynchronmotor aufgenommenen Leistung P_d gezeichnet. Für das Lastmoment $M = 5{,}45$ Nm wurden wieder die Kurven $P_1 = f(\alpha)$ und $P_{1t} = f(\alpha)$, um den Leistungsbilanz [1] prüfen zu können, dargestellt. Der Höchstwert der Leistung P_d wird durch das Anwachsen der Verluste des Motors bei grösserer Spannung und Frequenz, erklärt.

In Abb. 14 wird der Verlauf des Leistungsfaktors $\cos\varphi_d$ und des Wirkungsgrades η_d des Asynchronmotors mit der Bürstenverschiebung des Generators, dargestellt. In der selben Abbildung ist die Wirkungsgradkennlinie des Generators $\eta_g = f(\alpha)$ falls der Asynchronmotor mit den Lastmoment $M = 5{,}45$ Nm (Kurve *4*) arbeitet, gezeichnet.

Mit der Bürstenwinkelverschiebung α überschreiten die Leistungfaktor-Kennlinien $\cos\varphi_d = f(\alpha)$ einen Kleinstwert, der den Anwachsen des Magnetisierungsstromes des Asynchronmotors bei Spannungserhöhung zu verdanken ist. Weil bei den Grenzwerten des Bürstenwinkels α, für welchen der Generator erregt bleibt, die Spannung sinkt, wird der Leistungsfaktor $\cos\varphi_d$ grösser. Die Tatsache das der Kleinstwert der Kennlinie $\cos\varphi_d = f(\alpha)$, im Vergleich zum Höchstwert der Kurve $U_1 = f(\alpha)$, zu den Bereich der kleinen Bürstenwinkel verschoben ist, wird durch die Frequenzverminderung, erklärt.

Aus der selben Abbildung ist, das der Wirkungsgrad des Motors η_d sowie dessen Leistungsfaktor $\cos\varphi_d$ beim Lastmoment $M = 5{,}45$ Nm grössere Werte hat, ersichtlich. Der Kleinstwert der Wirkungsgradkennlinie $\eta_d = f(\alpha)$ beim Lastmoment $M = 2{,}2$ Nm (Kurve *2*) wird durch das Anwachsen der Verluste mit der Spannungsvergrösserung erklärt. Dagegen erweist die Kurve *4* des Wirkungsgrades $\eta_d = f(\alpha)$, die beim grösseren Lastmoment aufgenommen wurde ($M = 5{,}45$ Nm), einen Höchstwert, der sich durch den relativ grossen Schlupf, beim Absinken der Spannung, erklärt.

Die Wirkungsgrad- und Leistungsfaktorwerte des Asynchronmotors sind für Maschinen solcher Nennleistung, die Normalen.

Im hier vorgestellten Fall überschreitet der Wirkungsgrad des Gene-

rators nicht 0,28, was sehr wenig ist. Der kleine Wirkungsgrad des Generatos wird durch den grossen Strömen die durch seine Wicklungen, um die Selbsterregung bei zu behalten, fliessen und durch die grossen Verluste die beim Bürsten-Stromwenderkontakt erscheinen, erklärt. Die Wirkungsgrad Vergrösserungs nöglichkeiten wurdeu in [1] erläutert und werden in einer folgenden Arbeit veröffentlicht werden.

Als dieser Generator einen Aktiven Widerstand gespeist hat, konnte mau den Wirkungsgrad 0,7 [6], erreichen.

Die Abb. 15 und 16 stellen die Leistungsfaktor-Kennlinien in der Ständerwicklung des Generators ($\cos\varphi_1$) und in der Primärwicklung des Transfoe nators ($\cos\varphi_t$) dar. Der Leistungsfaktor $\cos\varphi_1$ wird mit den Anwachsen der Last grösser, während $\cos\varphi_t$ eine Neigung zur Verkleinerung vorweist.

4. Schlussfolgerungen

Aus den hier vorgelegten erfahrungemässigen Studium werden die Folgenden wichtigsten Schlüsse gezogen:

a) Die Frequenz der vom mit konstanter Drehzahl angetriebenent seabsterregten Drehstrom-Stromwendergenerator erzeugten Spannung, wächszugleich mit dessen Bürstenwinekel α falls sein sämtliches Übersetzungs, verhältinis univerändert bleibt, an.

b) Die hier vorkommenden verhä'tinismässig en-en Regelungsgrenzen der Frequenz und folglich der Drehzahl des Asynchronmotors, werden, durch den relativ grossen sämtlichen Übersetzungsverhältinis K, der von den in die Kreise des Generators fliessende Stromwerte bestim nt ist, erklärt.

c) Die Spannung sowie die in den Kreisen des selbsterregten Generatots fliessenden Ströme und Leistungen, gehen durch Höchstwerte, falls der Bürstenverdrehwinkel anwächst.

d) Die Betriebsparameter des mit Hilfe des selbsterregten Drehstrom-Stromwendergenerators frequenzgesteuerten Asynchronmotors, bleiben in annehmbaren Grenzen.

e) Durch die Vernrösserung der Last des Asynchronmotors wird die Frequenz der vom Generator erzeugten Spanung, kleiner.

f) Durch die Schaltung des leerlaufenden Asynchronmotors zu den Klemmen des selbsterregten Drenstrom-Stromwendergenerators, vermindern sich wesentlich dessen Spannungen und Ströme.

g) Mit den Anwachsen der Last des Asynchronmotors werden in gewissen Mass die Suannung und die durch den Kreisen des Generators fliessende Ströme, grösser.

n) Es wird der Einfluss des Magnetisierungsstromes des Zwischentransformators auf der von Generator erzeugten Frequenz, erläutert.

i) Die Selbsterregung erscheint ohne Schwierigkeiten sogar bei den Mascninen dessen magoetischer Kreis nicht aus Eisen mit grosser Remanenz gebaut wurde.

j) Der Selbsterregungsbereich des Generators wird bei dessen Lastvergrösserung, enger.

k) Durch die in diesen Aufsatz veröffentlichen erfahrungsmässigen Ergebnisse werden, die in den zitierten Arbeiten erläuterten theoretischen Schlussfolgerungen, bestätigt.

l) In den zweiten Teil dieser Arbeit werden erfahrungsmässige Daten betreffend den Betrieb der vom selbsterregten Drehstrom-Stromwendergenerator und Asynchronmotor gebildeten Gruppe falls das Übersetzungsverhältnis des Generators verändert wird, dargestellt.

Technische Hochschule, Jassy,
Lehrstuhl der elektrischen Maschinen und Messkunde

LITERATURVERZEICHNIS

1. Bergman I., *Cu privire la posibilitatea utilizării generatorului trifazat cu colector autoexcitat la acționarea electrică reglabilă cu comanda prin frecvență.* Teză de doctorat, Iași, 1967.
2. — Bul. Inst. polit. Iași, 1965, **XI (XV)**, *1—2*, pp. 281—274.
3. — Bul. Inst. polit. Iași, 1967, **XIII (XVII)**, *3—4*, pp. 391—402.
4. — Bul. Inst. polit. Iași, 1968, **XIV (XVIII)**, *1—2*, pp. 409—416.
5. Corlățeanu V., Bergman I., Șerban Gh., Leonte P., Știrbu V., Bul. Inst. polit. Iași, 1961, **VII (XI)**, *3—4*, pp. 207—220.
8. Bergman I., Corlățeanu V., Șerban Gh., Leonte P., Știrbu V., St. și cerc. șt., Fiz. și șt. tehn., Acad. R.P.R., filiala Iași, 1961, **XII**, *2*, pp. 375—382.

STUDIUL EXPERIMENTAL AL ACȚIONĂRII ELECTRICE CU UN MOTOR ASINCRON ALIMENTAT DE LA UN GENERATOR TRIFAZAT CU COLECTOR AUTOEXCITAT (I)

(Rezumat)

Din studiul experimental prezentat rezultă posibilitatea reglării vitezei motorului asincron prin alimentarea sa de la un generator trifazat cu colector autoexcitat, care are unghiul de decalaj al periilor variabil iar raportul de transformare și viteza de rotație sînt constante.

Frecvența tensiunii produse de generator crește odată cu unghiul de decalaj al periilor iar curenții care circulă prin circuitele generatorului și tensiunea pot căpăta valori maxime.

Parametrii motorului asincron se mențin în limite acceptabile, la comanda prin frecvență cu ajutorul generatorului trifazat cu colector autoexcitat.

Se studiază influența curentului de magnetizare al transformatorului intermediar asupra valorii frecvenței produse de generator.

Datele experimentale prezentate confirmă concluziile teoretice deduse de autor în lucrările sale anterioare [1]...[6].

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

D. C. 621.313.333.021.2

THE OPERATING CHARACTERISTICS OF TWO-PHASE DRAG-CUP INDUCTION MOTOR CONTROLLED BY VARYING THE ANGLE BETWEEN THE AXES OF THE STATOR WINDINGS

BY

VICTOR D. SAVIUC and M. T. LUCANU

1. Introduction

The two-phase drag-cup induction motor (TPDCIM) enjoys a large use as servo-motor in modern automatic and telemechanic schemes.

This motor is constituted of two-stators, an interior one and an exterior one, between which there is the rotor made of nonferromagnetic material in the shape of a cup. By placing the control and exciting windings on different stators [1], there appears the possibility to vary the angle between the axes of the two windings. Thus, it is likely to find a new mode of control of TPDCIM, besides the three well known ones for the motors with quadrature windings, used also by the controlled motors with squirrel-cage rotor or solid ferromagnetic rotor [2]...[4], namely by rolling of one stator in relation with the other.

This method of control has been proposed only recently [5], being less studied up to now. In [5], the hypotheses of calculation are very far from reality, leading to the conclusion that the control by varying the angle between the axes of windings, which bring about fields dephased in time at 90°, has one identic effect alike the control by varying the phase difference between control and exciting voltages, the axes of windings being in quadrature; this — as it will be shown in this paper — does not correspond to reality.

To emphasise the peculiarities of the new mode of control, this paper deals with the operating characteristics of the TPDCIM by varying the angle between the axes of the control and the exciting windings by supplying them with two voltages dephased in time at 90° ($\underline{U}_{con} = j\underline{U}_{ex}$); the characteristics are compared with those obtained by control through phase difference between control and exciting voltages $\underline{U}_{con} = \underline{U}_{ex}e^{j\beta}$, $\beta = var.$, the axes of windings being placed in the quadrature space.

2. The Operating Characteristics of TPDCIM by varying the Angle between the Axes of Stator Windings

The calculation of the two-phase motor characteristics with the unsymmetrical stator windings is more complicated than that of the symmetrical motors owing to mutual induction between the two stator windings.

By using for this motor (Fig. 1) the theory of the revolving magnetic fields [6], [7], according to usual calculation hypotheses [1], one gets the following relationships between voltages, currents and motor parameters:

$$(1)\quad \begin{cases} \underline{U}_{ex} = \underline{I}_{ex}(R_{1ex} + jX_{1ex} + R' + jX' + R'' + jX'') + \\ \quad + k\underline{I}_{con}[(R' + jX')e^{-j\theta} + (R'' + jX'')e^{+j\theta}], \\ \underline{U}_{con} = j\underline{U}_{ex} = \underline{I}_{con}[R_{1con} + jX_{1con} + k^2(R' + jX' + R'' + jX'')] + \\ \quad + k\underline{I}_{ex}[(R' + jX')e^{+j\theta} + (R'' + jX'')e^{-j\theta}], \end{cases}$$

in which: $\underline{U}_{ex}$, $\underline{U}_{con}$ are respectively exciting and control voltages, $\underline{I}_{ex}$, $\underline{I}_{con}$ — the exciting and control currents, R_{1ex}, R_{1con}, X_{1ex}, X_{1con} — the resistances and leakage reactances of the exciting and control windings, $k = w_{con}k_{wcon}/w_{ex}k_{wex}$ is the transformation ratio, in which w_{ex}, w_{con} represents the number of turns and k_{wex}, k_{wcon} the winding factors;

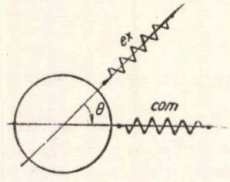


Fig. 1

$$(2)\quad \begin{cases} R' + jX' = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{(R_m + jX_m)(R_2/s + jX_2)}{R_m + R_2/s + j(X_m + X_2)}, \\ R'' + jX'' = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{(R_m + jX_m)[R_2/(2-s) + jX_2]}{R_m + R_2/(2-s) + j(X_m + X_2)} \end{cases}$$

where: R_m, X_m are magnetizing resistance and reactance, R_2, X_2 the rotor parameters reported to exciting winding and s is the slip (in the case of the TPDCIM $X_2 \approx 0$), θ is the angle between the axes of the exciting and control windings.

With these symbols, for the expression of the electromagnetic torque one has:

$$(3)\quad M = (I_{ex}^2 + k^2 I_{con}^2)(R'' - R') + 2kI_{ex}I_{con}[R'\cos(\theta - \varphi) - R''\cos(\theta + \varphi)],$$

in which φ is the angle between $\underline{I}_{ex}$ and $\underline{I}_{con}$.

The characteristics of TPDCIM with the following parameters were determined [2]: $k = 1$, $R_{1ex} = R_{1con} = 75\ \Omega$, $X_{1ex} = X_{1con} = 75\ \Omega$, $R_m = 0$, $X_m = 150\ \Omega$, $R_2 = 300\ \Omega$, $X_2 = 0$.

The results shown in figures for electromagnetic torque and powers were reported respectively to electromagnetic torque and electromagnetic power by $s = 1$ and $\theta = 90°$.

For comparison with the characteristics obtained by control through phase difference between control and exciting voltages, the currents were calculated with the relationships [3]:

$$(4)\quad \begin{cases} \underline{I}_{ex} = \dfrac{\underline{U}_{ex}}{2k^2}\left\{\dfrac{1}{\underline{Z}_{exd}}[(1+\sin\beta)+j\cos\beta]+\dfrac{1}{\underline{Z}_{exi}}[(1-\sin\beta)-j\cos\beta]\right\}, \\ \underline{I}_{con} = j\dfrac{\underline{U}_{ex}}{2k}\left\{-\dfrac{1}{\underline{Z}_{exd}}[(1+\sin\beta)+j\cos\beta]+\dfrac{1}{\underline{Z}_{exi}}[(1-\sin\beta)-j\cos\beta]\right\}, \end{cases}$$

in which

$$(5)\quad \underline{Z}_{exd} = R_{1ex} + jX_{1ex} + 2(R' + jX'), \qquad \underline{Z}_{exi} = R_{1ex} + jX_{1ex} + 2(R'' + jX'')$$

while the relative electromagnetic torque, with the relationship:

$$(6)\quad m(s) = \frac{1+\sin\beta}{2}\cdot\frac{R'(s)}{R'(1)}\cdot\frac{[R_{1ex}+2R'(1)]^2+[X_{1ex}+2X'(1)]^2}{[R_{1ex}+2R'(s)]^2+[X_{1ex}+2X'(s)]^2} - \frac{1-\sin\beta}{2}\cdot\frac{R''(s)}{R''(1)}\cdot\frac{[R_{1ex}+2R''(1)]^2+[X_{1ex}+2X''(1)]^2}{[R_{1ex}+2R''(s)]^2+[X_{1ex}+2X''(s)]^2}.$$

The obtained results are represented by continuous lines for control by varying the angle between the winding axes, and by dotted lines for control by varying the phase difference between control and exciting voltages.

The relative electromagnetic torque, m, is represented in Fig. 2 as a function of slip for some values of the angles β, θ: 0°; 15°; 30°; 60° and 90°. Only the interval $\theta \in [0° \ldots 90°]$ was studied because of for $k = 1$ and $\underline{U}_{con} = j\underline{U}_{ex}$ results $\underline{I}_{ex}(\theta) = -j\underline{I}_{con}(\pi - \theta)$, $\underline{I}_{con}(\theta) = +j\underline{I}_{ex}(\pi - \theta)$ and $m(\theta) = m(\pi - \theta)$.

The relative mechanical power $p_{mec} = m\nu$, $\nu = 1 - s$, is represented in Fig. 3; in Fig. 4 the variation of the maximal relative mechanical power p_{max} is represented as a function of signal coefficient $\sin\beta$, respectively $\sin\theta$, while Fig. 5 shows the relative ideal no-load speed ν_0 and the speed corresponding to maximal mechanical power ν_{max}. The regulating characteristics for $m = 0$; 0,1; 0,2;... and 0,9 is represented in Fig. 6.

The active P_{ex}, P_{con}, the reactive Q_{ex}, Q_{con}, the apparent S_{ex}, S_{con} relative powers and the power factors $\cos\varphi_{ex}$, $\cos\varphi_{con}$, as functions of slip for the two windings are shown in Fig. 7 ... 14.

Efficiency of the motor $\eta = m\nu/(P_{ex} + P_{con})$, as a function of the slip, is represented in Fig. 15, while the variation of the maximal efficiency with the signal coefficient $\sin\beta$ respectively $\sin\theta$, in Fig. 16.

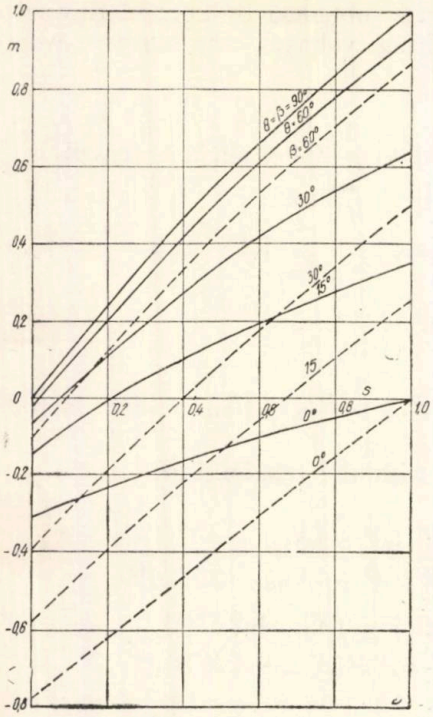


Fig. 2

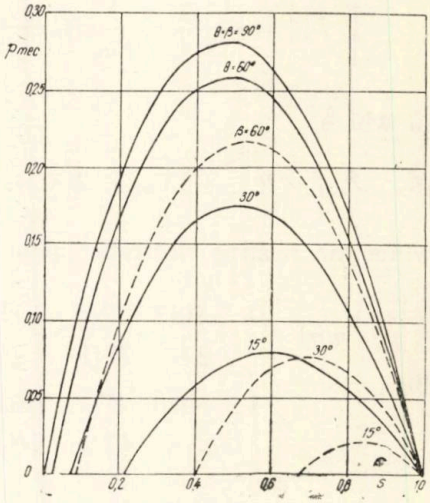


Fig. 3

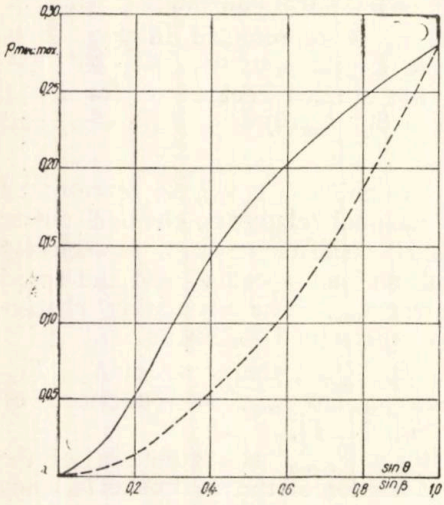


Fig. 4

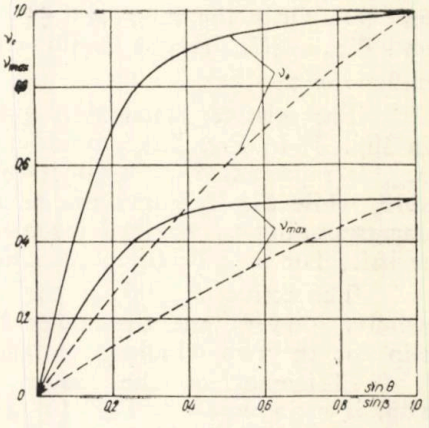


Fig. 5

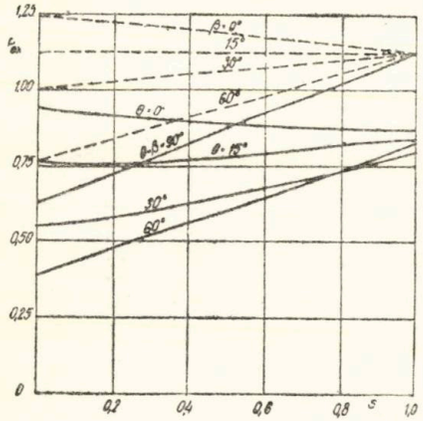


Fig. 7

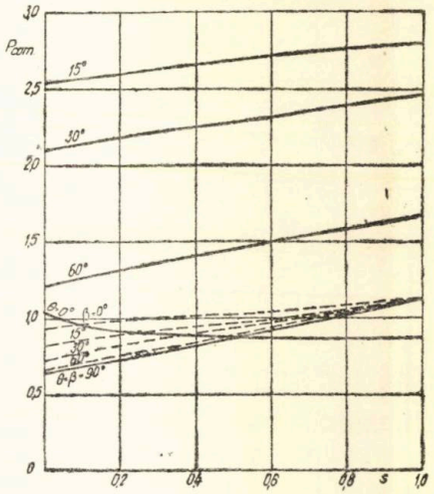


Fig. 8

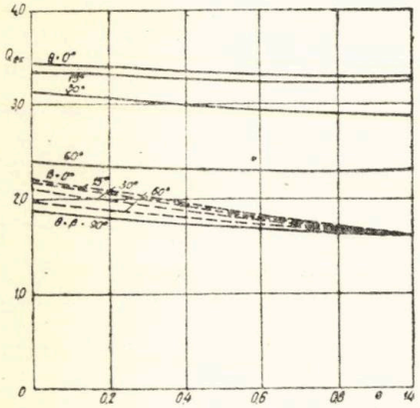


Fig. 9

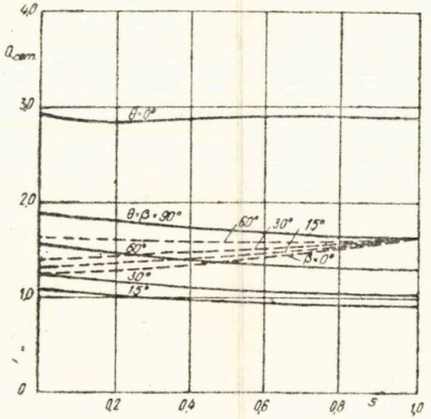


Fig. 10

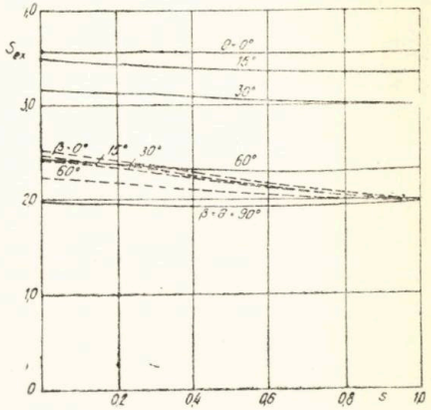


Fig. 11

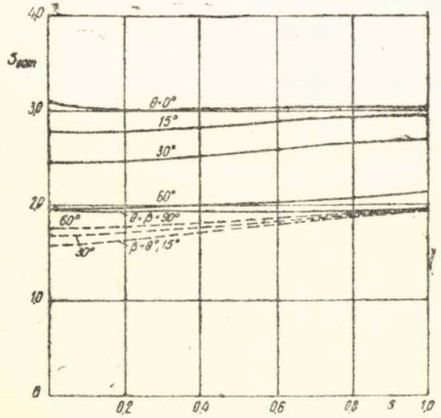


Fig. 12

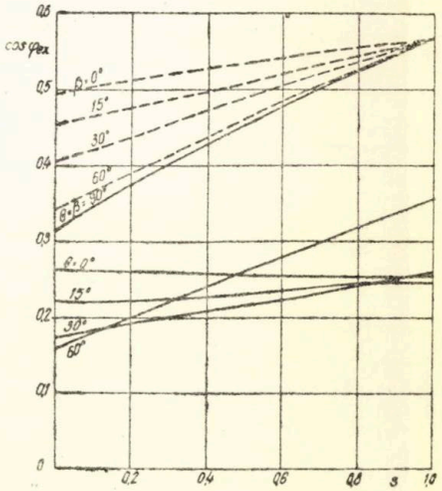


Fig. 13

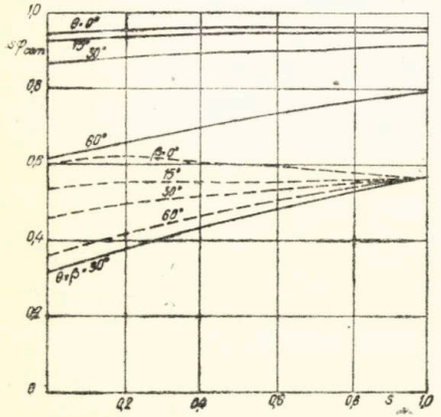


Fig. 14

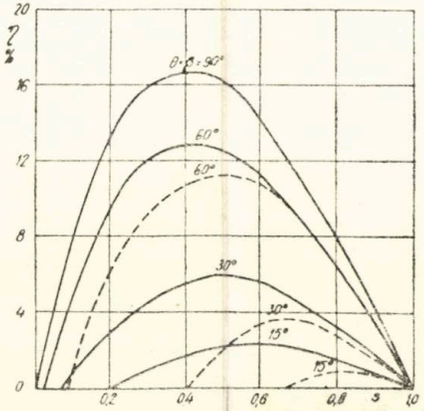


Fig. 15

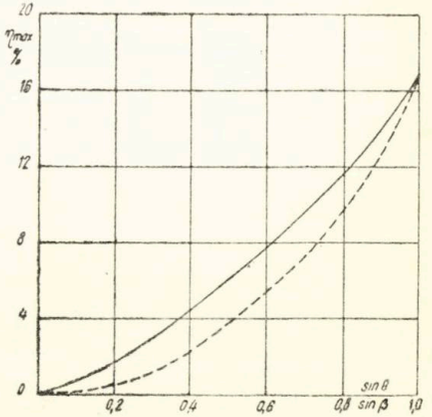


Fig. 16

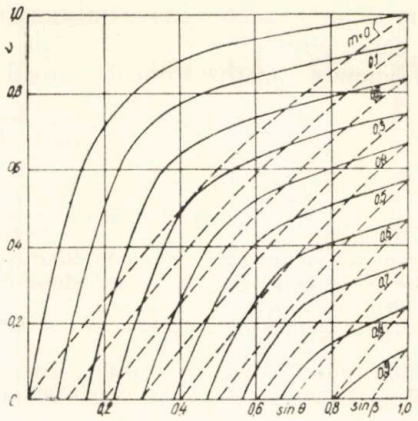


Fig. 6

3. Conclusions

By comparing the motor operating characteristics for the two control modes, it results the following advantages and disadvantages of the studied control mode:

a) The mechanical characteristics $m(s)$ for the studied control have a smaller linearity, $\partial m/\partial s$ is also smaller and the starting torque $m(1)$ larger for $\beta = \theta$, $\beta, \theta \in (0° \ldots 90°)$.

b) For the same motor parameters and signal coefficients, the maximal mechanical power is larger for $\sin\beta$, $\sin\theta \in (0 \ldots 1)$. The relative speeds ν_0 and ν_{max} are sensible greater in the interval $\sin\beta$, $\sin\theta \in (0 \ldots 1)$.

c) The regulating characteristics have a smaller linearity, having in the initial domain a larger slope. For the same m the regulating characteristics cut the axis $\nu = 0$ by a smaller signal coefficient.

d) The control apparent power is larger, varying little with s and decreasing with the signal coefficient. The exciting apparent power is also larger, decreasing sensibly with the signal coefficient and varying little with s. Taking into account that for the studied control mode the windings are not supplied by amplifiers, this is not an essential disadvantage.

e) The control active power is larger, having a maximum depending upon the signal coefficient, while the exciting active power is smaller, having a minimum depending upon the signal coefficient.

The control reactive power varies a little with s, presenting a minimum depending upon the signal coefficient. The exciting reactive power varies also little with s, being larger and decreasing sensibly with the signal coefficient.

The power factor of the control winding is larger, while that of

the exciting winding is smaller, presenting a minimum depending upon the signal coefficient for small slips.

f) The motor efficiency for the studied control mode is higher.

Received the 5 VII 1968

Academy of the Socialist Republic of Romania,
Center of Technical Researches

REFERENCES

1. Saviuc V. D., *Considerații asupra calculului motorului asincron cu rotor neferomagnetic în formă de pahar.* St. și cerc. șt., Fiz. și șt. tehn., Acad. R. P. R., filiala Iași, 1962, **XIII**, *2*, pp. 213–231.
2. Чечет Ю. С., *Управляемый асинхронный двигатель с полым ротором.* ГЭИ, М.—Л., 1955.
3. Каасик П. Ю., Несговорова Е. Д., *Управляемые асинхронные двигатели с беличьей клеткой на роторе в системах автоматики.* Изд. Энергия, М.—Л., 1965.
4. Савюк В. Д., Лукану М. Т., *Характеристики управляемого асинхронного двигателя с массивным ферромагнитным ротором.* Бесконтактные электрические машины, *8*, АН Латв. ССР, Рига, 1968.
5. Connelly D., *The two-phase Induction Motor used as a Servo Motor.* Proc. IEE, part A (Power Engineering), 1960, **107 A**, *34*, pp. 366–374.
6. Morill W. J., *The Revolving Field Theory of the Capacitor Motor.* Trans. AIEE, 1929 **48**, pp. 614–629.
7. Puchstein A. F., Lloyd T. C., *Capacitor Motors with Windings not in Quadrature* Trans. AIEE, 1935, **54**, pp. 1235–1239.

CARACTERISTICILE DE FUNCȚIONARE ALE MOTORULUI ASINCRON DIFAZAT CU ROTOR NEFEROMAGNETIC ÎN FORMĂ DE PAHAR, COMANDAT PRIN VARIAȚIA UNGHIULUI DINTRE AXELE ÎNFĂȘURĂRILOR STATORULUI

(Rezumat)

Execuția specială a motorului asincron cu rotor neferomagnetic în formă de pahar cu două statoare, unul interior prevăzut cu o înfășurare și altul exterior prevăzut cu o a doua înfășurare, permite un nou mod de comandă al acestuia prin variația unghiului spațial dintre axele înfășurărilor, rotindu-se unul din statoare față de celălalt, menținut imobil.

Se studiază caracteristicile motorului asincron cu rotor neferomagnetic în formă de pahar la variația unghiului spațial dintre axele înfășurărilor de comandă și excitație de pe cele două statoare, în cazul alimentării acestora cu două tensiuni defazate în timp la 90° ($\underline{U}_{con} = j\underline{U}_{ex}$).

Se compară caracteristicile obținute în acest caz cu cele din cazul comenzii binecunoscute a motorului cu înfășurările dispuse în spațiu la 90° și alimentate respectiv cu tensiunile $\underline{U}_{ex}$ și $\underline{U}_{con} = \underline{U}_{ex}\, e^{j\beta}$, β = var., arătîndu-se avantajele noului mod de comandă.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

D. F. 621.313.333

ÜBER DEN EINFLUSS DER VON DEN HÖHEREN HARMONISCHEN DER DURCHFLUTUNG GEBILDETEN ZUSÄTZLICHEN DREHMOMENTE AUF DER ASYNCHRONMASCHINE MIT BOGENFORMIGEM STÄNDER

VON

P. LEONTE und IOSIF BERGMAN

Mitteilung an der wissenschaftlichen Tagung der Technischen Hochschule, Jassy, 28—30. September 1967

1. Vorwort

Die Asynchronmaschinen mit bogenformigen und linearen Ständer haben in den verschiedenen elektrischen Antrieben Anwendung gefunden [1].

In [2] wurden einige Schwierigkeiten, die beim Betrieb der bogenformigen Asynchronmaschinen erscheinen, erforscht.

Um den Einfluss der zusätzlichen Momente erläutern zu können, wurde in [3] der besondere Fall der Asynchronmaschine mit vollständigen magnetischen Kreis, dessen Ständer nur Teilweise bewickelt wurde, analysiert. Von der normalen Ständerwicklung wurden nur $p - 1$ Polpaare ausgeführt, also es wurde der den letzen Polpaar angehörige Teil des Ständers unbewickelt gelassen. Die wichtigste, aus [3] gezogene Schlussfolgerung ist, das der Hauptbereich des stabilen Motor- oder Generatorbetriebs mit den der $2p$ -poligen normalen Maschine dessen Ständer ganz bewickelt ist, übereinstimmt.

In der vorliegenden Arbeit wollen wir diese Schlussfolgerung erweitern und einige Ausführungsmöglichkeiten, der bogenformigem Asynchronmotoren bei welchen man die Zahl und Grösse der zusätzlichen Momente kleiner machen kann, vorstellen.

2. Theoretische Betrachtungen

Hier werden einige Ausführungsmöglichkeiten der bogenformigen Asynchronmaschine theoretisch erforscht.

2.1. Von der $2p$-poligen Ständerwicklung fehlen $2m$ Pole

Das ist eine Verallgemeinerung des in [3] vorgestellten Zustandes in der von der $2p$-poligen Ständerwicklung der Asynchronmaschine auf einer Stelle $2m$ Pole fehlen.

Man wird den Durchflutungsverlauf längs einer Polteilung als sinusformig denken. Die Durchflutungskurve ist in Abb. 1 gezeichnet und kann durch volgende Funktion ausgedrückt werden:

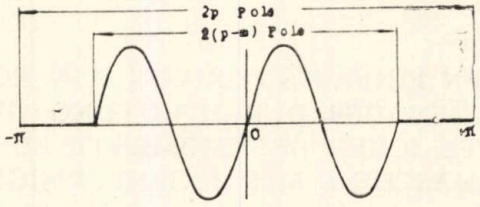


Fig. 1

$$y = Y_M \sin p\alpha \quad \text{für} \quad -\frac{p-m}{p} < \alpha < \frac{p-m}{p}\pi \quad \text{und}$$

$$y = 0 \quad \text{für} \quad -\pi < \alpha < -\frac{p-m}{p}\pi \quad \text{und} \quad \frac{p-m}{p}\pi < \alpha < \pi.$$

Die Fouriersche Reihe die dieser Durchflutungskurve entspricht enthält nur Glieder in sinus.

Der Koeffizient des allgemeinen Gliedes ist:

$$A_k = \frac{Y_M}{\pi(p-k)} \sin\frac{(p-k)(p-m)}{p}\pi - \frac{Y_M}{\pi(p+k)} \sin\frac{(p+k)(p-m)}{p}\pi,$$

und also, der Koeffizient des Gliedes, der den Rang $k = p$ hat, folgt

$$A_p = \frac{p-m}{p} Y_M,$$

während die der Glieder dessen Rang $k \neq p$ den Ausdruck haben

$$A_k = (-1)^{p-k+m} \frac{Y_M}{\pi} \cdot \frac{2p}{p^2-k^2} \sin\frac{km}{p}\pi.$$

Die Fouriersche Reihe kann also folgender Weise geschrieben werden:

$$(1) \qquad y = \frac{p-m}{p} Y_M \sin p\alpha + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq p}}^{\infty} (-1)^{p-k+m} \frac{Y_M}{\pi} \cdot \frac{2p}{p^2-k^2} \sin\frac{km}{p}\pi \sin k\alpha.$$

Man bemerkt das alle Harmonischen dessen Rang $k = gm/p$ ist, null sind. Falls p sich nicht durch m dividiert, anullieren sich nur die Harmonischen dessen Rang der vielfache der Polpaarzahl p ist. Dividierte sich p durch m so sind alle Harmonischen, dessen Rang p/m oder der vielfache dieses Wertes, null. Um eine gewünschte Harmonische beseitigen zu können, müsste man p und m, so, das dessen Rapport oder das vielfache desselben, gleich mit ihrem Rang sein soll, wählen.

Die Harmonischen dessen Rang $k \neq p$, für welche die Gleichung $\sin[(km/p)\pi] = \pm 1$ statt findet, haben die grössten Scheitelwerte.

Die Harmonische mit den Rang $k = p$ hat den grössten Scheitelwert von allen anderen, falls die folgende Ungleichheit erfüllt ist:

$$\frac{p-m}{p} > \frac{2p}{\pi(p^2-k^2)} \sin\frac{km}{p}\pi. \tag{2}$$

Der ungünstigste Zustand findet für die Harmonische $k = p - 1$ statt. In diesen Fall ist die Ungleichheit (2) erfüllt falls $m < 2p/3$ ist.

Aus den hier vorgestellten, wird die Schlussfolgerung das die Synchrondrehzahl des Asynchronmotors der Harmonischen dessen Rang $k = p$, ist weil diese den grössten Scheitelwert hat entspricht, gezogen.

Die von den anderen Harmonischen erzeugten Drehmomente verunstalten die Anlaufskennlinie des Motors, was oft die Erlangung der Betriebsdrehzahl die sich der Synchrondrehzahl, die den $2p$ Polen enspricht, annähert, unmöglich macht.

Falls $2p/3 < m < p$ ist, erscheint die Möglichkeit das die Harmonische $k = p - 1$ den Höchstwert haben soll, also der Motor soll mit einer grösseren Drehzahl als die für $k = p$ arbeiten könnnen.

Für $m = p/2$ besitzen alle ungeradzahlige Harmonische Höchstwerte während die Geradzahligen, null sind.

Weil der Scheitelwert der Fundamentale sich bei zunehmender Zahl der fehlenden Pole $2m$ verkleinert, muss man um die Wirkung der zusätzlichen Drehmomente zu vermindern für m den möglichst kleinen Wert wählen.

2.2. Der Ständer besitzt zwei symmetrisch angeordnete bewickelte Teile

Setzen wir voraus das aus jeden π geometrischen Graden der sinusformigen Durchflutungswelle des Ständers je m_1 Halbwellen fehlen (Abb. 2).

Also kann man schreiben:

$$y = Y_M \sin p\alpha \text{ für } 0 < \alpha < \frac{p-m_1}{p}\pi;$$

$$y = 0 \text{ für } \frac{p-m_1}{p}\pi < \alpha < \pi \text{ und } \frac{p-m_1}{p}2\pi < \alpha < 2\pi;$$

$$y = -Y_M \sin p\alpha \text{ für } \pi < \alpha < \frac{p-m_1}{p}2\pi.$$

Die dieser Funktion entsprechende Fouriersche Reihe wird nur ungeradzahlige Harmonische in sinus und cosinus besitzen [4].

Der Koeffizient des Gliedes mit den Rang $k = p$ ist:

$$A_p = \frac{p - m_1}{p} Y_M; \quad B_p = 0$$

und die allen anderen $(k \neq p)$ sind:

$$A_{2k+1} = (-1)^{m_1-p} \frac{Y_M}{\pi} \cdot \frac{2p}{(2k+1)^2 - p^2} \sin \frac{(2k+1)m_1}{p} \pi,$$

$$B_{2k+1} = \frac{Y_M}{\pi} \cdot \frac{2p}{(2k+1)^2 - p^2} \left[(-1)^{p-m_1+1} \cos \frac{(2k+1)m_1}{p} \pi - 1 \right].$$

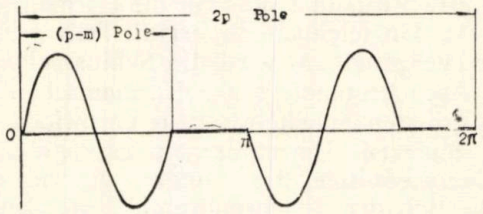


Fig. 2

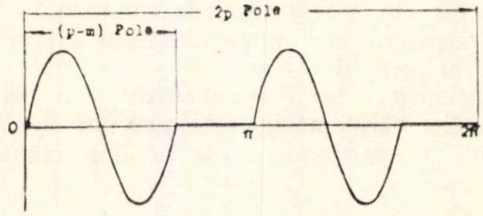


Fig. 3

Die Fouriersche Reihe kann folgender Weise ausgedrückt werden:

$$y = \frac{p - m_1}{p} Y_M \sin p\alpha +$$

$$+ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq p}}^{\infty} \frac{Y_M}{\pi} \cdot \frac{2p}{(2k+1)^2 - p^2} \sqrt{2 - 2(-1)^{p-m_1+1} \cos \frac{(2k+1)m_1}{p} \pi} \sin[(2k+1)\alpha + \psi_{2k+1}],$$

wo der Phasewinkel $\psi_{2k+1} = \operatorname{arc\,tg} B_{2k+1}/A_{2k+1}$ in unserem Studium nicht von Bedeutung ist. Weil die geradzahligen Harmonischen der Durch-

flutung fehlen, wird sich die Zahl der zusätzlichen Drehmomente entsprechender Weise vermindern. Natürlich wird, falls p eine gerade Zahl ist, der Stabile Betrieb des Motors nicht für der zu p entsprechenden Synchrondrehzahl statt finden, können.

Wenn p eine ungerade Zahl ist, werden die grössten zusätzlichen Drehmomente von den Harmonischen, dessen Rang $k = p - 2$ oder $k = p + 2$, die kleinere Werte haben, erzeugt werden. Diese werden also einen kleineren störenden Einfluss auf den Betrieb des Motors vorweisen.

Die in diesen Fall erscheinenden zusätzlichen Momente wirken ungünstiger als in den im vorigen § erforschten, weil hier die Scheitelwerte der Harmonischen grösser sind.

Falls die fehlenden Pole wie in Abb. 3 verteilt sind, wird die Fouriersche Reihe der Durchflutungskurve alle Harmonische enthalten, also es werden alle möglichen zusätzlichen Drehmomente, erscheinen.

2.3. Der Ständer besitzt zwei nicht symmetrisch angeordnete bewickelte Teile

Nehmen wir an das zwischen den zwei Spulengruppen des $2p$-poligen Ständers sich zwei unbewickelte Teile, eine mit m und die andere mit $2m$ fehlenden Polpaare befinden (Abb. 4). Die entsprechende Funktion ist

$$y = 0 \text{ für } 0 < \alpha < \frac{2m}{p}\pi, \quad \frac{p-m}{p}\pi < \alpha < \frac{p+m}{p}\pi, \quad \frac{p-m}{p}2\pi < \alpha < 2\pi,$$

$$y = Y_M \sin p\alpha \text{ für } \frac{2m}{p}\pi < \alpha < \frac{p-m}{p}\pi, \quad \frac{p+m}{p}\pi < \alpha < \frac{p-m}{p}2\pi.$$

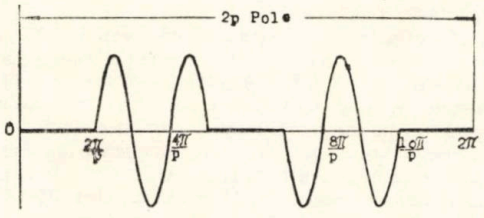


Fig. 4

Die entsprechende Fouriersche Reihe wird nur Glieder in sinus dessen Koeffizienten

$$A_p = Y_M \frac{p-3m}{p} \text{ und}$$

$$A_{k(k\neq p)} = \frac{Y_M}{\pi} \cdot \frac{2p}{p^2 - k^2} \sin\frac{km}{p}\pi \left[2\cos\frac{km}{p}\pi + (-1)^{p-m-k}\right]$$

sind, enthalten.

Die Koeffizienten A_k werden null falls:

a) $\frac{km}{p} = \frac{1}{3} + 2g$ und $p - m - k$ eine ungerade Zahl ist;

b) $\frac{km}{p} = \frac{2}{3} + 2g$ und $p - m - k$ eine gerade Zahl ist.

Also auch in diesem Fall können einige zusätzliche Drehmomente verschwinden.

Aus einer weiteren Erforschung kann die Schlussfolgerung das nur für $p > 15$ die Harmonische dessen Rang $k = p$ ist, immer den Höchstwert haben wird, gezogen werden.

3. Erfahrungsmässige Bertrachtungen

Die erfahrungsmässigen Versuche wurden auf einen Asynchronmotor des Typus AO-73-6, von 20 kW, 975 U/min, durchgeführt. Ein drittel dessen Ständerperipherie wurde ausgeschnitten. Also von den 54 Ständernuten sind nur 40 nützlich geblieben, in welchen 36 Spulen mit 13 Windungen je Spule untergebracht wurden. Für diese in zwei Schichten ausgeführte Wicklung wird mit Baumwolle isoliertes Kupferdraht dessen Durchmesser 2 mm hat, genützt. Der Spullenschritt war $y = 4$, also die ganze Peripherie des Ständers hat $2p = 12$ Pole gehabt. Alle Spulenenden wurden zu einer Schaltplatte geleitet, um so verschiedene Wicklungsschemen ausführen zu können.

Der Asynchronmotor wurde mit einer Gleichstrommaschine die 10 kW, 1 400 U/min und den Läufer mit regelbarer Spannung gespeist hat, gekoppelt. So konnte man die Drehzahl der Anlage in weiten Grenzen regeln.

Die Ständerwicklung der Asynchronmaschine wurde zu einer regelbaren dreiphasigen Spannungsquelle, mit $f = 50$ Hz, geschaltet.

In Abb. 5 werden die Kurven der in der Ständerwicklung des Asynshronmotors fliessenden elektrischen Leistung P_e, und der an dessen Welle gemessene mechanische Leistung P_a, als Funktion der Drehzahl n, gezeichnet.

Die an der Phase A aufgedrückte Spannung war von 90 V. An den anderen zwei Phasen wurden Spannungwerte die, dank der verschiedenen Blindwiderständen der Phasenwicklungen sich nicht mit mehr als $\pm$ 10 % von 90 V, entfernten. Differenzen zwischen den Phasenwerte der Spannungen, Ströme und Leistungen was ein grosser Nachteil für den Betrieb der bogenformigem Asynchronmaschinen ist, wurden auch in [3] bemerkt. In diesen Fall wurde die ganze Ständerwicklung der bogenartigen Maschine gespeist, also von den $2p = 12$ Polen der Peripherie fehlten $2m = 4$ Pole. Also wird die Synchrondrehzahl um der die Maschine im normalen Betrieb arbeitet n=500 U/min (für $2p$=12, bei f=50 Hz), sein.

Es wurden grosse Differenzen zwischen den Leistungen P_e und P_a erlangt, also war der Wirkungsgrad der Energieumformung klein. Nur um die Drehzahl $n = 500$ U/min vermindert sich bemerkenswert diese Differenz, also der nutzbare Betriebsbereich wird um dieser Drehzahl gerechnet. Die Inflexionen der Leistungskurven wurden durch die Anwesenheit der verschiedenen Durchflutungsharmonischen erklärt. Die wichtigsten Inflexionen werden wie aus Abb. 5 ersichtlich ist in der Nähe der Betriebsdrehzahl $n = 500$ U/min ($2p = 12$), und zwar um die Drehzahlen $n = 428$ U/min ($2p = 14$) im Motorbetrieb und $n = 600$ U/min ($2p = 10$) im Generatorbetrieb, erzielt. So wird die Tatsache das auch beim klassischen bogenartigen Asynchronmotor die gefährlichsten zusätzlichen Drehmomente für $k = p + 1$ statt finden, geprüft.

Das Erforschen der erfahrungsmässigen Ergebnisse weist keine wichtige Unterschiede zwischen der Maschine mit vollständigen magnetischen Kreis, die in [3] studiert wurde, und diese mit den unterbrochenen Ständer an. Dadurch das von der Peripherie des Ständers mehrere Polpaare fehlen ($m > 1$) (in den in Abb. 5 dargestelten Fall, $m = 2$), wird das

Kippmoment der fundamentalen Harmonischen (die den Rang p hat) kleiner, während die zusätzlichen Drehmomente sich nicht wesentlich ändern.

Um diese Tatsache erläutern zu können werden in Abb. 6 dieselben Kurven wie in Abb. 5, aber für $2m = 8$ fehlenden Polen, dargestellt. Diese Kennlinien wurden für die Spannung $U = 60$ V, an der Ständerphase A aufgenommen, wobei die selben Unterschiede zwischen den Phasenspanungen bemerkt wurden. Weil die an einer Spule der Ständerwicklung aufgedrückte Spannung mit 25 % grösser als im vorigen Fall ist, vertiefen sich die Inflexionen in den Leistungskurven, also steigert der Einfluss der zusätzlichen Drehmomente an.

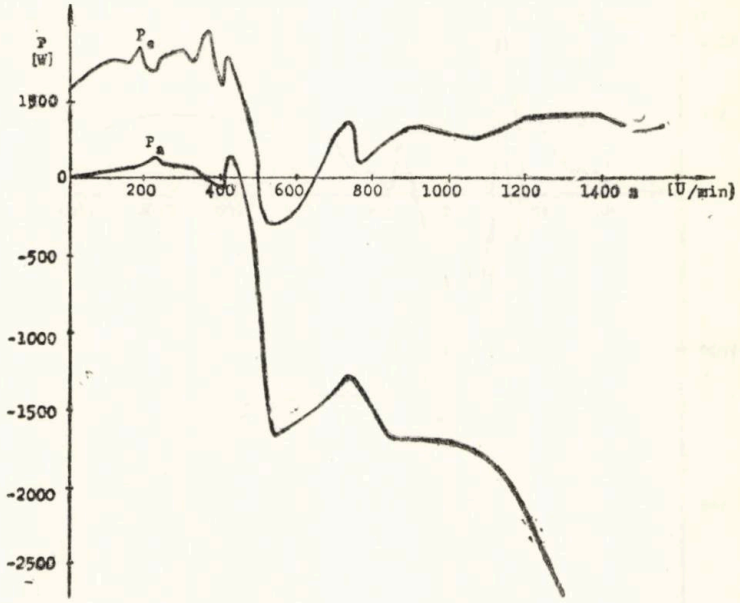


Fig. 5

Es wurden erfahrungsmässige Versuche für den Fall $2p = 12$ und $2m = 8$, falls die benützten Spulen sich beim Eingang, in der Mitte oder beim Ausgang des Läufers von unter dem Ständerbogen sich befinden, durchgeführt. Die in diesen drei Zuständen erlangten Ergebnisse unterscheiden sich wenig einander. Abb. 6 stellt den Zustand falls die benützten Spulen sich beim Eingang des Läufers unter dem Ständerbogen befinden, dar.

Bei einer geraden Polpaarzahl (hier $p = 6$), wird das Drehmoment das der fundamentalen ($k = p$) entspricht, falls man die Ständerwicklung wie in § 2. 2 beschrieben ist ausführt, fehlen. Diese Tatsache ist klar aus Abb. 7 wo die Kennlinien $P_e = f(n)$ und $P_a = f(n)$ für den Fall $2p=12$ und $m_1=4$ gezeichnet sind, ersichtlich. Um die Vergleichung zu ermöglichen wurden in der selben Abbildung die Kurve $P_a = f(n)$ falls die Ständerwicklung wie in Abb. 3 geschaltet ist, mit unterbrochener Linie dargestellt. Die Maschine kann als Motor, bei einer Drehzahl die etwas kleiner als 428 U/min ist, ($k = p + 1 = 7$), stabil arbeiten. Es wird also damit die Arbeitsmöglichkeit einer bogenartigen Asynchronmaschine, um einer Drehzahl die nicht der Synchrondrehzahl die der Polpaarzahl p entspricht, hier bewiessen.

Das Schaltschema aus Abb. 2, kann zur Verminderung der Zahl und den Einfluss der zusätzlichen Drehmomente, nur falls p eine ungerade Zahl ist, führen.

In den Abb. 8 und 9 werden die Kennlinien der Ströme und der Leistungen, falls die an der Phase A, aufgedrückte Spannung 200 V ist, dargestellt. In der Abb. 8 ist auch

die Drehzahlkennlinie $n = f(P_a)$ und in Abb. 9, die Kurve der totalen elektrischen Leistung $P_e = P_1 + P_2 + P_3 = f(P_a)$ dargestellt. Es werden als positiv die vom Netz abgenommenen elektrischen und die an der Welle erzielten mechanischen Leistungen, gerechnet. Aus den hier dargestellten Kennlinien ist der Schluss, das im Motorbetrieb die Ströme und die elektrischen Leistungen schnell mit der mechanischen Leistung anwachsen, ersichtlich. Falls die mechanische Leistung 0,8 kW überschreitet, sinkt die Drehzahl stark ab, zugleich mit den Anwachsen der Ströme und der Leistungen, was durch den Einfluss der Durchflutungsharmonischen dessen Rang $k = 7$, sich erklärt.

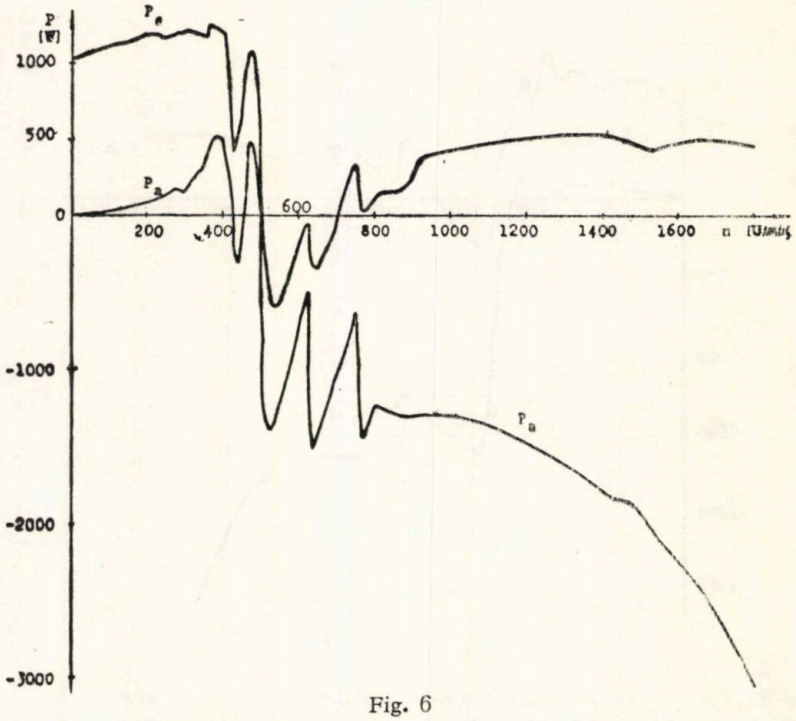


Fig. 6

Also bei einer grösseren Polpaarzahl (in unserem Fall $p = 6$), können die Harmonischen dessen Rang $k = p + 1$ ist, die einwandfreihe Arbeit auch in der Nähe der Synchrondrehzahl stören. Diese Tatsache wurde in [3], wo $p = 3$ war, nicht bemerkt.

Aus den Abb. 8 und 9 sind auch grosse Unterschiede zwischen den Phasen-Strömen und Leistungen, insbesondere im Generatorbetrieb, ersichtlich. Es wird schnell der Zustand bei welchen zwei Phasen Energie den Netz entnehmen, während die dritte Energie ins Netz liefert, erlangt. Natürlich sind diese Unterschiede zwischen den Phasen-Strömen und Leistungen weil sie Störungen im Netz hervorrufen nicht, erwünscht.

4. Schlussfolgerungen

1. Die Asynchronmaschine mit bogenartigem Ständer, wird in den meisten Fällen, mit brauchbaren Kennlinien in der Nähe der Synchrondrehzahl die der Polpaarzahl p der Maschine mit vollständiger Ständerwicklung entspricht, arbeiten.

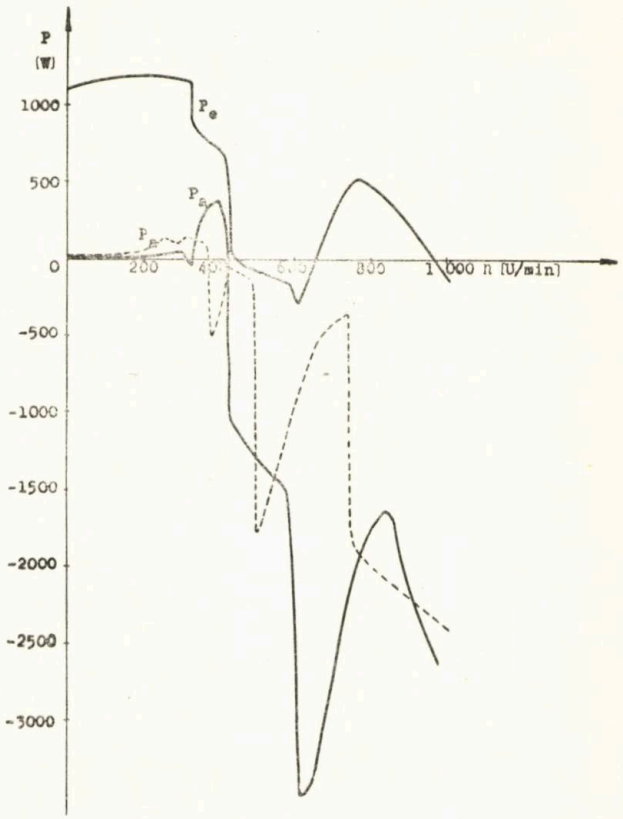

P
(W)
1000
500
0
-500
-1000
-1500
-2000
-2500
-3000
200
400
600
800
1 000 n (U/min)
P_e
P_a
P_m

Abb. 7

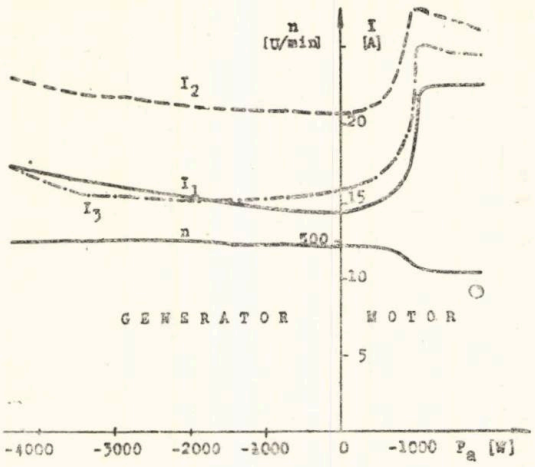

n
[U/min]
I
[A]
I2
I1
I3
n
500
20
15
10
5
GENERATOR
MOTOR
-4000
-3000
-2000
-1000
0
-1000
Pa [W]

Abb. 8

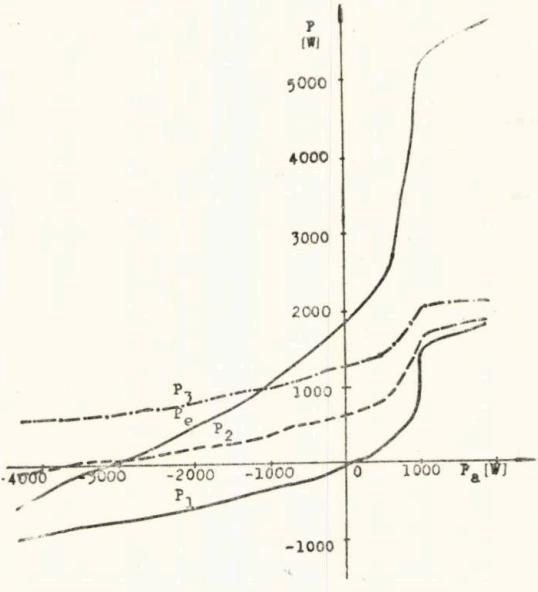

P
[W]
5000
4000
3000
2000
1000
-1000
P1
Pe
P2
P1
-4000
-3000
-2000
-1000
0
1000
Pa [W]

Abb. 9

2. Die von den Harmonischen der Durchflutungskurven erzeugten zusätzlichen Drehmomente stören den normalen Betrieb der Maschine. In gewissen Fällen können diese zusätzlichen Drehmomente die Einstellung der Maschine in ihrer Regimdrehzahl verhindern. Diese Zustände können durch eine rationelle Wahl der Polpaarzahl der Ständerwicklung p und der Zahl der fehlenden Pole $2m$ teilweise vermieden werden. Mann muss die Lösung dieser Frage, bei der m den Kleinstwert hat, vorziehen.

3. Einige zusätzliche Drehmomente können durch die Verteilung der Ständerwicklung in zwei Zonen, beseitigt werden. Es wird eine Schaltungmöglichkeit bei der die Harmonische dessen Rang $k = p$ ist, nicht erscheinen kann, dargestellt.

4. Zwischen den Kennlinien der Maschine mit den vollständigen und mit den unterbrochenen magnetischen Kreis sind keine qualitative Unterschiede bemerkt worden.

5. Die Ströme und die Leistungen bilden, besonders in der Nähe der Synchrondrehzahl, die der Polpaarzahl p entspricht, Systeme mit grossen Unsymmetriegrad, was zur schwachen Ausnützung der aktiven Materialen führt.

6. Die Betriebskennlinien der bogenartigen Asynchronmaschine sind minderwertiger als die der normalen.

7. Durch Anwachsen der Spannung wird die ungünstige Wirkung der zusätzlichen Drehmomente bemerkbarer, aber die Energieübertragungsmöglichkeit verbessert sicht.

8. Bei einer grösseren Polpaarzahl p, wirken die Harmonischen dessen Rang, $k = p \pm 1$ ist, auch beim Betrieb der Maschine in der Nähe der Synchrondrehzahl, störend.

Die erfahrungsmässigen Ergebnisse stimmen mit den theoretischen gutt überein.

Bedeutung der wichtigsten Formelzeichen

A_k, B_k – die Koeffizienten der Harmonischen der Fourierschen Reihe; f — die Frequenz; g — irgendeine ganze Zahl; I_1, I_2, I_3 — die Phasenströme der Maschine; k — der Rang der Harmonische der Fourierschen Reihe; m — die Zahl der fehlenden Polpaare; m_1 — die Zahl der fehlenden Pole in Fall § 2.2; n —die Drezahl; p — die Polpaarzahl; P_e — die elektrische Leistung; P_a — die mechanische Leistung an der Welle; y — der Wert der Durchflutung in einen Punkt der Peripherie des Ständers; Y_M — der Scheitelwert der Durchflutung; α — der Verschiebungswinkel.

Technische Hochschule, Jassy,
Lehrstuhl der elektrischen Maschinen und Messkunde

LITERATURZEICHNIS

1. Laithwaite E. R., *Induction Machines for Special Purposes.* G. Newnes Lim., London, 1966.
2. Штурман Т. И., Аронов Р. Л., Электричество, 1946, *7*, стр. 54—59.
3. Şerban Gh., Vasilciciuc M., Bergman I., Leonte P., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1962, **VIII (XII)**, *3—4*, pp. 237—246.
4. Antoniu I. S., *Chestiuni speciale de electrotehnică.* Ed. Acad. R.P.R., Buc., 1956.

CU PRIVIRE LA INFLUENȚA CUPLURILOR PRODUSE DE ARMONICILE SUPERIOARE ALE SOLENAȚIEI ASUPRA FUNCȚIONĂRII MAȘINII ASINCRONE CU STATORUL ÎN FORMĂ DE ARC

(Rezumat)

Din studiul teoretic și experimental al unei mașini asincrone cu statorul în formă de arc rezultă că aceasta va funcționa în majoritatea cazurilor, cu caracteristici utilizabile, în jurul vitezei de sincronism corespunzătoare numărului de poli $2p$ al mașinii complete, indiferent dacă circuitul magnetic este sau nu întrerupt.

Dacă înfășurarea statorului este dispusă în două porțiuni distincte pe periferie și numărul perechilor de poli este par, există posibilitatea ca viteza de sincronism corespunzătoare numărului de poli $2p$ să nu poată fi obținută.

Cuplurile suplimentare produse de armonicile superioare ale curbei solenației influențează negativ funcționarea mașinii asincrone cu statorul în formă de arc. Se prezintă unele procedee care permit înlăturarea parțială a acestor cupluri suplimentare.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

C. D. 621.313.2

SUR LE CALCUL DES MACHINES ÉLECTRIQUES À COURANT CONTINU BASÉES SUR LE PRINCIPE DES CIRCUITS IMPRIMÉS

PAR

AUREL DOBRANIŞ

Communication présentée dans la session scientifique de l'Institut Polytechnique de Galatz, 19—21 mai 1967

1. Introduction

Depuis quelque temps, dans la construction des machines électriques rotatives, on accorde une attention accrue à l'utilisation des schémas imprimés [1]...[4].

L'utilisation des circuits imprimés présente de nombreux avantages quant à la réalisation des bobinages des machines électriques ; par exemple : a) la possibilité d'automatiser complètement le processus de fabrication des machines électriques ; b) la possibilité d'obtenir des constructions compactes pour ces machines.

Il faut ajouter aussi, que, du point de vue de l'exploitation cette méthode de construction présente de nombreux avantages, à savoir : a) le moment d'inertie du rotor est petit et, par conséquent, la constante mécanique de temps est aussi petite ; b) la self-induction du circuit du rotor est petite, et donc, la constante électromagnétique est petite ; c) compte tenu des bonnes conditions du refroidissement, on peut réaliser des densités de courant élevées dans l'enroulement — de l'ordre de 40...50 A/mm^2 dans le régime de fonctionnement de longue durée et de 100 A/mm^2 dans le régime de courte durée ; d) ici, la commutation — qui constituait chez les machines de courant continu classiques un problème difficile dans leur construction et exploitation — est beaucoup facilitée, car les sections des bobinages ont une seule spire, et la self-induction du bobinage est réduite ; e) le poids des machines de ce type est sensiblement réduit par rapport à celui des machines classiques, d'environ 8...10 fois ; f) les traits caractéristiques mécaniques des motours sont linéaires, les moteurs pouvant fonctionner d'une manière stable vitesses de rotation, petites, etc.

Il faut mentionner qu'il y a cependant des désavantages, concernant l'augmentation de l'entrefer, imposée par l'épaisseur du disque du rotor, ce que demande l'augmentation de la longueur des aimants permanents de l'inducteur.

Un autre désavantage c'est celui de la limitation de la tension par le nombre des spires (qui est aussi limité) et par l'induction dans l'entrefer qui est plus petite.

Enfin, la résistance de l'induit est importante, tout particulièrement compte tenu des connexions frontales extérieures qui sont relativement grandes, etc.

Il existe de nombreuses indications dans la littérature de spécialité, quant aux avantages et les désavantages de ces machines [1]...[11], mais les problemes de calcul et de l'établissement du projet de ces machines n'ont pas été encore envisagés d'une manière satisfaisante.

Il est possible à trouver nombre d'indications concernant la géométrie de l'induit de l'une de ces machines, dans [3]; dans [7] on établit la condition d'obtenir pour le rotor un diamètre minimum.

Dans [8], l'auteur propose l'emploi de la méthode de la similitude à partir d'un moteur de construction et de traits caractéristiques connus.

Dans [5], on effectue le calcul en supposant un moment d'inertie minimum ; dans [6] on étudie la condition d'obtenir une constante électromagnétique de temps minimum et dans [9] la condition des pertes minimum tandis que dans [10] on trouve une condition pour obtenir une puissance électromagnétique maximum, aux mêmes dimensions du disque du rotor.

Dans cette Note on expose une méthode de calcul qui établit les dimensions de l'induit, à partir de l'expression de la force électromotrice induite dans un conducteur. On utilise, en même temps, les indications de [10], pour obtenir une puissance électromagnétique maximum.

2. Calcul des dimensions de l'induit

Dans ces machines, la disposition des conducteurs est radiale, sur les deux faces, et par conséquent il est récommandable de construire les parties frontales des conducteurs sous la forme d'une développante [3], [9], etc.

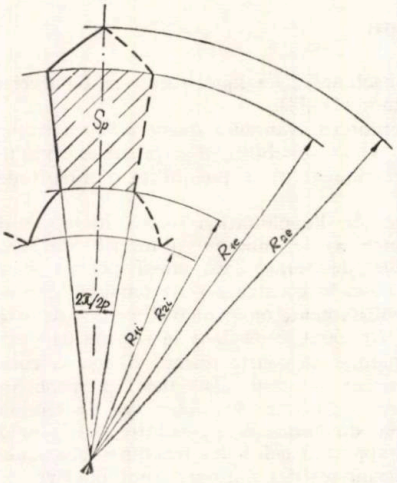


Fig. 1

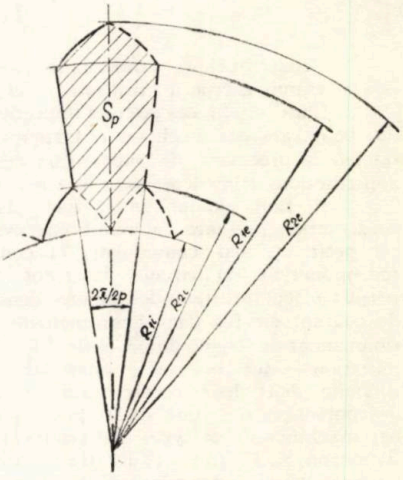


Fig. 2

De cette manière on assure une largeur, et respectivement une section constantes, pour les bouts des conducteurs de l'enroulement.

Dans quelques ouvrages, [3], [5], [7], [9], les auteurs proposent de s'assurer le flux d'excitation, seulement dans la région droite des conducteurs (fig. 1, la région hachurée), en considérant que c'est la seule partie active des conducteurs, par analogie aux machines de construction classique.

Des recherches plus récentes ont montré que les bouts de la bobine [10] peuvent être aussi utilisés pour le couple électromagnétique, parce que dans les machines à circuits imprimés, l'induit est un disque isolant (v. la fig. 2) et, par opposition aux machines classiques, il ne contient pas du fer.

Dans [10] on étudie la variation de la surface S_p, en fonction du rapport des rayons :

$$(1) \qquad \rho_{2i} = \frac{R_{2e}}{R_{1i}}, \quad \rho_{2i} = \frac{R_{2i}}{R_{1i}}, \quad \rho_{1e} = \frac{R_{1e}}{R_{1i}},$$

et du nombre de pôles.

La surface S_p est donnée par la relation :

$$(2) \qquad S_p = 2R_{1i}^2 \rho_{2e}^3 F(\rho_{2e}).$$

On a déterminé par voie analitique le maximum de S_p à l'aide d'une machine électronique de calcul ; les valeurs optimum des rapports ρ_{2e}, ρ_{2i}, ρ_{1e}, sont présentées dans [10], sous la forme du tableau suivant :

Tableau 1

$2p$	ρ_{2e}	ρ_{1e}	ρ_{2i}
4	3,73	2,905	2,115
6	3,16	2,600	1,810
8	2,86	2,434	1,650
10	2,67	2,327	1,549

Si l'on utilise ces résultats, on peut déterminer les dimensions du disque du rotor, et respectivement, de l'enroulement de l'induit.

Par conséquent il faut partir de l'expression connue de la force électromotrice, utilisée dans le cas des machines de courant continu :

$$(3) \qquad E = pn\frac{N}{a}\Phi,$$

où les notations employées signifient : E — la f.é.m. de l'enroulement de l'induit, p — le nombre de paires de pôles de la machine, n — la vitesse de rotation de la machine, N — le nombre total de conducteurs de la machine, $2a$ — le nombre de voies de courant en parallèle de l'enroulement, Φ — le flux magnétique utile des pôles de l'excitation.

D'après la relation :

$$(4) \qquad \Phi = \alpha_p B_\delta S_p,$$

où l'on a noté par: α_p — le coefficient qui représente le rapport entre la surface du pôle magnétique et la surface de la spire, B_δ — l'induction maximum dans l'entrefer, on obtient:

$$E = 2pn\frac{N}{a}\alpha_p B_\delta R_{1i}^2 \rho_{2e}^3 F(\rho_{2e}). \tag{5}$$

Il est possible d'approximer E, à partir de la tension appliquée aux bornes de la machine. Le nombre de tours par minute est donné et on peut approximes α_p d'après les indications existentes (on utilise d'habitude $\alpha_p = 0{,}6...0{,}7$). B_δ est donné par les aimants permanents utilisés. Pour ρ_{2e}, $F(\rho_{2e})$, il faut prendre les valeurs correspondantes au optimum du tableau 1. Il faut utiliser $p = 3$ ou $p = 4$ et $2a = 2$, ayant un enroulement ondulé simple.

Nous pouvons calculer le nombre de conducteurs, d'après la relation suivante:

$$N = \frac{4\pi R_{1i}}{t_i}, \tag{6}$$

où t_i représente le pas des conducteurs sur la circonférence d'étai; il en est donné par:

$$t_i = b_c + b_{iz}. \tag{7}$$

Dans cette dernière relation b_c représente la largeur du conducteur et b_{iz} — la largeur de l'interstice isolant entre deux conducteurs voisins.

Si l'on connaît la puissance P et la tension U il est possible à déterminer la largeur b_c du conducteur. Il faut aussi évaluer le rendement η, considérer l'épaisseur du conducteur h_c normalisée et la densité de courant de l'induit j_a.

Dans les conditions ci-dessus il est possible à calculer b_c, à savoir:

$$b_c = \frac{P}{2\eta U a j_a h_c}. \tag{8}$$

La largeur de l'interstice isolant (b_{iz}) est imposée par les conditions technologiques; il est recommandable à la considérer de l'ordre de grandeur 0,4...1 mm.

En remplaçant R_{1i} de (6) dans (5), on peut écrire:

$$E = p\frac{n}{a}\cdot\frac{N^3 t_i^2}{8\pi^2}\alpha_p B_\delta \rho_{2e}^3 F(\rho_{2e}). \tag{9}$$

Si l'on prend pour ρ_{1e}, ρ_{2i}, ρ_{2e}, $F(\rho_{2e})$ les valeurs optimum du tableau 1, on obtient le nombre optimum de conducteurs:

$$N_{opt} = \sqrt[3]{\frac{8\pi^2 Ea}{pn\alpha_p B_\delta t_i^2 \rho_{2e}^3 F(\rho_{2e})}}. \tag{10}$$

Pour que l'enroulement se ferme, il faut qu'il soit verifiée la condition:

$$\frac{N}{2} = pk + 1, \tag{11}$$

k étant un nombre entier quelconque.

Il est possible à obtenir, avec les relations (1), les dimensions optimum de l'enroulement pour la réalisation du couple électromagnétique maximum.

3. Calcul de la résistance de l'enroulement de l'induit

Plusieurs auteurs récommandent [3], [9], [10] la forme de développante, pour les extrémités de l'enroulement.

Dans ce cas, le calcul de la résistance de l'induit présente quelques particularités.

Pour une machine classique, la résistance de l'enroulement de l'induit prend la forme:

$$r_a = \frac{Nr_N}{(2a)^2}, \tag{12}$$

où l'on a noté par: r_a — la résistance totale de l'induit, r_N — la résistance d'un seul conducteur.

On peut écrire:

$$r_N = r_{ci} + r_{pd} + r_{ce} + r_{ng}, \tag{13}$$

ù: r_{ci} — la résistance des extrémités frontales intérieures, r_{pd} — la résistance de la portion droite des conducteurs, r_{ce} — la résistance des extrémités frontales extérieures, r_{ng} — la résistance du rivet galvanique qui lie les conducteurs des deux faces du disque.

La résistence r_{ci} peut être évaluée à l'aide de la relation:

$$r_{ci} = \rho_1 \frac{l_{ci}}{s_c}, \tag{14}$$

où ρ_1 est la résistivité du cuivre, l_{ci} — la longueur des extrémités frontales intérieures et s_c — la section du cuivre dans la zône des extrémités.

En considérant la section de la partie droite, variable selon la fig. 3, la résistance r_{pd} prend la forme:

$$r_{pd} = \int_{R_{2i}}^{R_{1e}} \rho_1 \frac{\mathrm{d}R}{h_i(4\pi R/N - b_{iz})};$$

donc:

$$r_{pd} = \frac{N\rho_1}{4\pi h_c} \, \mathrm{n} \, \frac{4\pi R_{1e} - Nb_{iz}}{4\pi R_{2i} - Nb_{iz}}, \tag{15}$$

où toutes les grandeurs sont connues d'auparavant.

Pour calculer la résistance on utilise une relation du type (14) à savoir

$$r_{ce} = \rho_1 \frac{l_{ce}}{s_c}, \tag{16}$$

où l_{ce} représente la longueur des extrémités frontales extérieures.

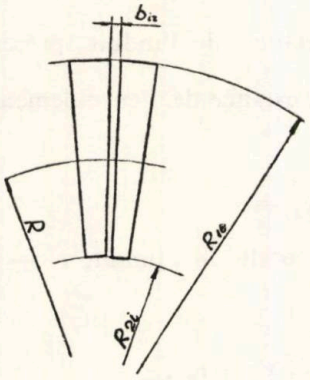


Fig. 3

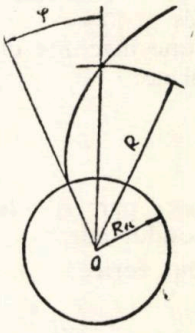


Fig. 4

Pour obtenir la résistance du rivet galvanique, il faut utiliser la relation:

$$r_{ng} = \rho_2 \frac{l_{ng}}{s_{ng}}, \tag{17}$$

ρ_2 étant la résistivité du cuivre déposé par galvanisation, l_{ng} — la longueur, et s_{ng} — la section du rivet galvanique.

Pour calculer les longuueurs l_{ci} et l_{ce} qui interviennent dans les relations (14) et (16), il faut utiliser l'équation de la développante en coordonnées polaires:

$$\varphi = \sqrt{\frac{R^2}{R_{1i}^2} - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{R^2}{R_{1i}^2} - 1}, \tag{18}$$

où l'on a utilisé les notations de la fig. 4.

L'élément d'arc ds s'exprime en coordonnées polaires, par la relation:

$$ds = \sqrt{1 + R^2\varphi'^2}\,dR = \frac{R}{R_{1i}}\,dR. \tag{19}$$

Il en résulte:

$$\begin{cases} l_{ci} = \displaystyle\int_{R_{1i}}^{R_{2i}} \frac{R}{R_{1i}}\,dR = \frac{1}{2R_{1i}}(R_{2i}^2 - R_{1i}^2), \\ l_{ce} = \displaystyle\int_{R_{1e}}^{R_{2e}} \frac{R}{R_{1i}}\,dR = \frac{1}{2R_{1i}}(R_{2e}^2 - R_{1e}^2). \end{cases} \tag{20}$$

Il a fallu considérer le rayon R_{1i} comme rayon de la circonférence d'étai pour les parties frontales intérieures et extérieures, procédé utilisé fréquemment dans la pratique, pour assurer la même section aux extrémités frontales intérieures et extérieures.

4. Conclusions

On aboutit aux conclusions suivantes:

1. Il faut construire les extrémités frontales sous la forme d'une développante, afin d'en réaliser une section constante — ce qu'assure dans celles-ci une densité de courant constante.

2. Il faut construire les pôles inducteurs d'une telle manière, que leur flux traverse toute la surface de la spire, y compris celle de la région des extrémités frontales, ce que permet à obtenir des dimensions minimum.

3. Il est possible à adapter cette méthode pour le calcul des machines de courant alternatif à circuits imprimés.

Institut Polytechnique de Jassy,
Chaire de Mesures et Machines électriques

BIBLIOGRAPHIE

1. Dejussieu-Pontcarral P., *Moteurs à bobinages imprimés „Sérvalco"*. Électron. ind., 1960, *30*.
2. Henry-Baudot M. J., *Les moteurs „Sérvalco" à courant continu et circuits imprimés*. Ingénieurs et techniciens, 1958, *113*.
3. Таел В., *О геометрии ротора с печатной обмоткой в электрических машинах*. ИАН ЭССР, 1961, **X**, *3*, стр. 224—233.
4. Кравцов О. К., *Анализ и сравнение свойстов двигателей с печатной обмоткой на дисковом роторе с двигателями постоянного тока обычного исполнения*. Энерг. и электрот. пром., 1964, *2*, стр. 14—20.
5. Василиев И., Карпенко К., Кравцов О. К., Мураско А. В., *Двигатели постоянного тока с печатной обмоткой якоря*. Энерг. и электрот. пром., 1964, *1*, стр. 25—28.

6. Партс Р. Р., *О геометрии ротора с печатной обмоткой маломощных двигателей постоянного тока.* Электромеханика, 1953, *5*, стр. 569—575.
7. Основич Л. Д., *Выбор оптимальных размеров диска в машинах постоянного тока с печатными обмотками.* Электротехника, 1961, *6*, стр. 63—66.
8. Lăzăroiu F. D., *Unele consideraţii referitoare la proiectarea maşinilor electrice cu înfăşurările realizate pe bază de circuite imprimate.* Electrotehnica, 1965, 7.
9. Астахов Н. В., Чжу-Жень-Цу, *Оптимальные геометрические соотношения печатного якоря машины постоянного тока.* Труды МЭИ, 1964, *56*, стр. 221—226.
10 Сийтан У. Х., *О зависимости электромагнитной мощности электродвигателя постоянного тока с дисковым якорем от геометрии элементов печатной обмоткой якоря.* Электричество, 7, стр. 80—87.
11. Шор А. М., Мацанова А. Л., *Выбор напряжения электродвигателей с печатной обмоткой на роторе.* Элекротехника, 1966, *3*, стр. 61—62.

CU PRIVIRE LA CALCULUL MAŞINILOR ELECTRICE DE CURENT CONTINUU REALIZATE PE PRINCIPIUL CIRCUITELOR IMPRIMATE

(Rezumat)

Se expune o metodă pentru proiectarea maşinilor electrice de curent continuu cu circuite imprimate şi rotorul în formă de disc. Se prezintă calculul numărului de conductoare şi al dimensiunilor discului rotoric, în formă optimizată, pentru a se realiza o utilizare maximă a cuprului maşinii şi dimensiuni minime.

Se fac precizări asupra formei capetelor frontale ale înfăşurării, deducîndu-se cu acest prilej relaţii pentru calculul rezistenţei indusului maşinii.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

Mecanică tehnică

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том XIV (XVIII), вып. 3—4, 1968

Техническая механика

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

Mechanical Engineering

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

C. Z. 547.497.1

INEGALITÉS DANS LE PROBLÈME SPECTRALE CONCERNANT LES PHÉNOMÈNES POLYVIBRANTS

PAR

D. MANGERON et ARSENIE OPREA

Pour le 150e anniversaire (1818—1968) de la première promotion d'ingénieurs, à la suite des cours spéciaux en langue roumaine, inaugurés à Jassy par GHEORGHE ASACHI lors de l'année académique 1812—1813.

1. Lors de l'année 1968 nombre d'hommes de sciences se sont occupés de divers points de vue d'équations polyvibrantes, introduites dans la littérature par le premier des Auteurs. Nous ne mentionnerons ici que les séries de travaux des professeurs G. Birkhoff, W. Gordon et M. N. Oğuztöreli, consacrés respectivement à l'application des „équations de Mangeron" au dessein automatique graphique des surfaces de forme quelconque et à la résolution des problèmes de control optimal polyvibrants à paramètres distribués [1]...[4].

Dans ce qui suit nous donnerons nombre d'inégalités concernant les problèmes spectrales polyvibrants, tout en soulignant l'intérêt de tels résultats dans la science de l'ingénieur, où l'on a fait paraître ou bien l'on a en cours d'élaboration toute une série de monographies consacrées aux inégalités différentielles et intégrales établies dans l'étude des modèles mathématiques des phénomènes physiques [5]...[8].

2. Considérons les systèmes spectraux polyvibrants généralisant celui de Sturm-Liouville, à savoir

$$[A(x)\,u'(x) + \lambda\,B(x)\,u(x)]' + \lambda\,[B(x)\,u'(x) + C(x)\,u(x)] = 0,$$

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_m), \qquad u(x)|_{\mathrm{Fr}\,R} = 0,$$

$$u(x),\ A(x),\ B(x),\ C(x) = u(x_1, x_2, \ldots, x_m),\ A(x_1, x_2, \ldots, x_m), \ldots,$$

dont l'importance comme modèles mathématiques de nombreux phénomènes physiques et en particulier biomécaniques devient de plus en plus appréciée [9]...[11] et dont la *nouveauté* consiste dans le fait que le „rectangle" $R = \{x_i^* \leqslant x_i \leqslant x_i^{**}\}$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$, est à m dimensions et le symbole $'$

désigne la dérivée totale de premier ordre au sens de M. Picone [12], [13]: $u' \equiv \partial^m u / \partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_m$.

A cet égard ont lieu les théorèmes suivants:

Théorème I. *Il existe une suite infinie de valeurs caractéristiques de* λ *(le spectre):*

$$\ldots, \lambda_{-n}, \ldots, \lambda_{-1}, \lambda_{-0}, \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots,$$

$$\ldots < \lambda_{-n} < \ldots < \lambda_{-1} < \lambda_{-0} < 0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n < \ldots$$

(constamment croissante de $-\infty$ *à* $+\infty$, *étant* $\lambda_{-0} = -\infty$ *pour* $(-1)^{m+1} C(x) \geqslant 0$ *dans* R, $\lambda_{+0} = +\infty$ *pour* $(-1)^{m+1} C(x) \leqslant 0$, λ_{-n} *et* λ_n *finis pour chaque valeur de* λ *dans le cas où* $C(x)$ *prend dans* R *des valeurs de signes contraires), telles que l'équation*

$$(1) \qquad \frac{\partial^m}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_m}\left[A(x_1, x_2, \ldots, x_m) \frac{\partial^m u_h(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_m}\right] + \lambda_h C(x_1, x_2, \ldots, x_m) u_h(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0$$

possède, pour $A(x) > 0$ *dans* R *et dans certaines hypothèses de symétrie concernant cette fonction, une solution caractéristique* $u_h(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, *déterminée à moins d'un facteur constant près, vérifiant les conditions à la frontière* $\mathrm{Fr}\, R$ *de l'hyperrectangle* $R = \{b_i \geqslant x_i \geqslant a_i\}$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$:

$$(2) \qquad u_h(x_1, x_2, \ldots, x_m)|_{\mathrm{Fr}R} = 0, \quad \lambda = \lambda_h.$$

Théorème II. *Soit, pour fixer les idées,* $m = 2$. *La fonction caractéristique* $u_h(x)$ *divise le domaine rectangulaire* R *par les courbes-lieux des points de ses zéros contenues dans* R *en* $|h|$ *domaines partiels et en* $|h|$ *seulement.*

Théorème III. *Soit* Γ_h *l'ensemble de fonctions réelles* $u(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *définies dans le domaine hyperrectangulaire* R *à* m *dimensions y étant absolument continues, douées de dérivée totale de premier ordre finie et de carré sommable, nulle sur la frontière* $\mathrm{Fr}R$ *du domaine* R *et sur les hypersurfaces où s'annule la fonction caractéristique* $u_h(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, *solution du système* (1), (2).

L'intégrale

$$(3) \qquad I_h[u] \equiv \int_{a_1}^{b_1} \ldots \int_{a_m}^{b_m} \left\{ A(x) \left[\frac{\partial^m u(x)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_m}\right]^2 + (-1)^m \lambda_h C(x) u^2(x) \right\} dx_1\, dx_2 \ldots dx_m$$

a dans R *pour limite zéro. Cette valeur est effectivement atteinte alors et alors seulement lorsque* $u = \alpha u_h$, *où* α *est une constante. On a donc pour chaque fonction* u *de* Γ_h

$$\int_{a_1}^{b_1}\dots\int_{a_m}^{b_m} A(x_1, x_2,\dots, x_m)\left|\frac{\partial^m u(x_1, x_2,\dots, x_m)}{\partial x_1\,\partial x_2\dots\partial x_m}\right|^2 \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\dots\mathrm{d}x_m \geqslant$$

(4)

$$\geqslant (-1)^{m+1}\lambda_k \int_{a_1}^{b_1}\dots\int_{a_m}^{b_m} C u^2\,\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_m,$$

le signe d'égalité subsistant alors et alors seulement lorsque $u = \alpha u_k$.

3. De (4) on obtient, si l'on pose $A(x) \equiv 1$, $C(x) \equiv -1$, $m = 2$,

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\left[\frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_1\,\partial x_2}\right]^2 \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 : \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} u^2\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \geqslant \frac{\pi^4}{(b_1-a_1)^2(b_2-a_2)^2}. \tag{5}$$

Cette valeur est atteinte pour les fonctions

$$C \sin\pi\frac{x_1-a_1}{b_1-a_1}\sin\pi\frac{x_2-a_2}{b_2-a_2},$$

où C est une constante quelconque et pour celles-là seulement.

4. Dans l'une de ses Notes tout à fait récentes, insérées dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, le premier des Auteurs [14] a donné entre autres l'extension aux cas des équations polyvibrantes de certaines inégalités dûes à M. M. Janet relatives aux problèmes spectraux à une seule dimension, concernant surtout le rapport $\int_a^b y'^2\,\mathrm{d}x : \int_a^b y^2\,\mathrm{d}x$, pour une fonction $y(x)$ s'annulant aux deux extrémités de l'intervalle (a, b). En nous référant aux modèles polyvibrants de la forme

$$D^{(n)}[A(x)\,D^{(n)}u(x)] + \lambda\,C(x)\,u(x) = 0,\quad D^{(n)}u \equiv \frac{\partial^m}{\partial x_1\,\partial x_2\dots\partial x_m}(D^{(n-1)}u), \tag{6}$$

$$u\,|_{\mathrm{Fr}R} = Du\,|_{\mathrm{Fr}R} = \dots = D^{(n-1)}u\,|_{\mathrm{Fr}R} = 0,\quad R = \{b_i \geqslant x_i \geqslant a_i\},\ (i = 1, 2,\dots, m), \tag{7}$$

on a en premier lieu, par ex., pour $n = 2$, $m = 2$:

$$\frac{\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} A\,(D^{(2)}u)^2\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2}{\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} A\,(Du)^2\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2} \geqslant \frac{\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} A\,(D^2u)^2\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2}{(b_1-a_1)(b_2-a_2)\max_R[A(Du)^2]} \tag{8}$$

et, en particulier, pour $A(x) \equiv 1$,

$$(9) \qquad \frac{\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} (D^{(2)}u)^2 \, dx_1 \, dx_2}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \max_R (Du)^2} \geqslant \frac{2^4}{(b_1 - a_1)^2 (b_2 - a_2)^2}.$$

Reçue le 23 VIII 1968

Institut Polytechnique de Jassy,
Chaire de Mécanique,
Chaire de Mathématiques II

BIBLIOGRAPHIE

1. Birkhoff G. a. o., *On the Mangeron's or Draftsman Equations.* General Motors Research Papers, Warren, Mich., 1968.
2. Gordon W., *On Bivariate Functions.* General Motors Research Papers, Warren, Mich., 1968.
3. Oğuztöreli M. N., *Optimal Control Problems concerning Mangeron's Equations.* The University of Alberta Research Papers Series, Edmonton, Alberta, Dept. of Mathematics, 1968.
4. Mangeron D., *Optimization Problems of Polyvibrating Systems.* Notices of the American Math. Soc., Aug., 1968.
5. Bellman a. o., *Inequalities.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York, 1965.
6. Lakshmikantham V. a. o., *Inequalities.* Pergamon Press, (sous presse).
7. Mangeron D., Oğuztöreli M. N., *Estensione di metodi di maggiorazione di Picone alle soluzioni di sistemi di equazioni polivibranti.* Rend. Accad. Naz. dei Lincei Cl. sci. fis., mat. e nat., s. VIII-a, 1968, **XLIV**, pp. 625—632.
8. Fichera G., *Problemi di maggiorazione.* C.N.R., Roma, (sous presse).
9. Bellman R., *New Bibliography on Dynamic Programming.* The RAND Corp. Publ., 1966.
10. — Math. Biosciences and Intern. Journal, 1967, *1*, et suiv.
11. Mangeron D., *Alcuni nuovi problemi spettanti ai sistemi polivibranti.* Rend. Acad. Sci., Napoli, s. 4, 1968, **XXXV**, pp. 395—401.
12. Picone M., *Nuovi metodi d'indagine concernenti i problemi di Fisica Matematica.* Ann. Sci. Univ. Jassy, 1-re série, 1940, **26**, *I*, pp. 183—232.
13. Mangeron D., Krivoshein L. E., *New Methods concerning Mathematical Physics Integro-differential Systems.* Rev. Roumaine Sci. Techn., Série de Méc. appl., 1965, **10**, *1*, pp. 3—34.
14. Mangeron D., *Sur le rapport des valeurs moyennes des carrés de deux dérivées totales d'ordre consécutif.* C. r. Acad. Sci., Paris, 1968, **266**, pp. 1 103—1 106.
15. Walter W., *Differential- und Integral-Ungleichungen.* Springer Verlag, 1964.

INEGALITĂŢI ÎN PROBLEMA SPECTRALĂ REFERITOARE LA SISTEME POLIVIBRANTE

(Rezumat)

Se stabilesc unele inegalităţi interesînd problema spectrală corespunzătoare la sisteme polivibrante. Interesul practic al rezultatelor obţinute se justifică printr-o serie de lucrări recente consacrate inegalităţilor integrale şi diferenţiale, cu aplicaţii în fizică şi tehnică.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

D. C. 539.3

A RE-EXAMINATION OF THE CRITICAL SPEED OF A ROTATING SOLID DISK

BY

E. M. SHOEMAKER

1. Introduction

This paper examines a problem which has been incompletely and incorrectly dealt with in the past — the determination of the critical angular velocity of a solid uniform elastic perfectly-plastic disk. Nadai [1] presents a stress analysis corresponding to the Tresca yield hypothesis but does not consider deformation; in particuler, he does not demonstrate the existence of a nontrivial flow field at the critical angular velocity. (The angular velocity may be regarded as the loading parameter for the problem and the critical angular velocity as the limit load [2].) Życzkowski [3] treats the more general nonhomogeneous disk, again for the Tresca hypothesis. His displacement analysis is, unfortunately, based upon a deformation law of plasticity [4] which for the uniform thickness fully plastic disk is essentially equivalent to a von Mises flow law. As is well known a flow associated with a potential surface other than the yield surface itself is inconsistent in that nonuniqueness can result [5]. We take the view that such a solution is unacceptable.

We re-examine this classical problem from the point of view of flow theory for both the Tresca and von Mises yield hypotheses and flow criteria. Consideration is given to the elastic-plastic problem as well as the limit load problem. We insist that plastic work be non-negative for the elastic-plastic solution. Consequently, Drucker's stability postulates will be satisfied and elastic-plastic solutions will be unique [5]. Moreover, at the critical velocity we stipulate that all the requirements of a complete solution to a limit load problem be satisfied [5]: an equilibrium stress field which in this case is fully-plastic, must exist and an associated nontrivial flow field (associated with the stress field by treating the yield surface as the plastic potential) must exist in which the power dissipation is positive semi-definite. We emphasize that trivial flow fields (strain rates vanishing identically) are not admissible as part of a complete solution. If they were admissible the consequence would, in general, be nonuniqueness, examples of which can be easily produced.

2. Nonexistence of the Tresca Solution

In this section Nadai's treatment is extended to a consideration of deformation. Only side AB (Fig. 1) of the Tresca hexagon for plane stress in principal stress space defined by

$$\sigma_\theta = \sqrt{3}k, \quad 0 \leqslant \sigma_r \leqslant \sqrt{3}k, \tag{2.1}$$

is involved. We consider only the fully-plastic limit load problem. (The treatment of the more general elastic-plastic problem is too lengthy to develop here but the results are stated).

The fully-plastic stress field and unique critical angular velocity ω_c are easily obtained by substituting for σ_θ from (2.1) into the equilibrium equation

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = -\rho r \omega^2 \tag{2.2}$$

subject to the free edge boundary condition $\sigma_r(b)=0$. The results, which satisfy inequality (2.1) are:

$$\sigma_r = \sqrt{3}k - \frac{\rho r^2 \omega_c^2}{3}, \tag{2.3}$$

$$\omega_c^2 = \frac{3\sqrt{3}k}{\rho b^2} . \tag{2.4}$$

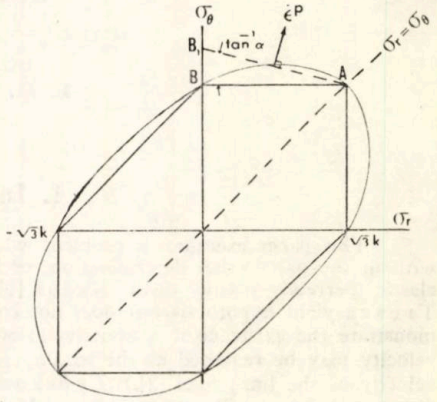


Fig. 1.—Tresca and circumscribed von Mises yield loci for axially symmetric plane stress. Modified Tresca side AB_1 given by $\sigma_\theta = \sqrt{3}k + \sigma(1-\sigma_r/\sqrt{3}k)$ with k the yield stress in shear. Here $\dot{\varepsilon}_p$ represents the plastic strain rate vector.

The flow field, assuming it exists, must satisfy the constitutive equations[1])

$$\dot{\varepsilon}_r = \frac{d\dot{u}}{dr} = 0, \qquad \dot{\varepsilon}_\theta = \frac{\dot{u}}{r}\Gamma, \tag{2.5}$$

with Γ the usual undetermined multiplier of perfect plasticity and $(\dot{\cdot})$ indicating differentiation with respect to time. These equations follow from the requirements that at the limit load the stress is constant in time [6] (and hence the elastic contribution to stress rates vanishes) and that the plastic strain rates are derived by treating the yield surface as a potential surface as follows from Drucker's stability postulates [5]. Since the boundary condition $\dot{u}(0) = 0$ must be satisfied for a solid disk, the only solution of (2.5) is the trivial solution $\dot{u} = 0$ which must be rejected.

[1]) In this and subsequent analyses of deformation the stress state at $r = 0$ lies at corner A (Fig. 1). Thus, for example, (2.5) apply in the open domain $0 < r \leqslant b$ with the direction of the strain rate vector indeterminate at $r = 0$. However, continuity of u in r implies that identical results are obtained by neglecting consideration of the corner.

Thus a complete solution to this problem does not exist. It may be shown that the elastic-plastic problem also does not have a solution. In this latter case displacement fields are inadmissible for two reasons. First, a discontinuity in radial strain is produced at the elastic-plastic interface which is inconsistent with equations (2.5); second, plastic work is not positive semi-definite. The reason why this turns out to be the case is simply because the complementary solution for the displacement field in the plastic zone does not vanish at the origin in contrast to the particular solution which does vanish. Since the homogeneous boundary condition at the origin requires the elimination of the complementary solution and hence the elimination of the constant of integration it becomes impossible to satisfy the condition that the strain field be continuous across the interface. The situation also leads to negative plastic work. These difficulties will be made clear in the next section where the elastic-plastic problem is considered for a slightly modified Tresca hypothesis.

3. Solution corresponding to a modified Tresca Hypothesis

Consider side AB_1 (Fig. 1) which represents a small change from side AB and is given by

$$\sigma_\theta = \sqrt{3}k + \sigma - \frac{\sigma\sigma_r}{\sqrt{3}k}, \quad 0 \leqslant \sigma_r \leqslant \sqrt{3}k, \tag{3.2}$$

where σ is a stress which may be chosen arbitrarily small.

Using the notation and some of results of Timoshenko [7] we start with the well known elastic solution

$$\sigma_r = \frac{1}{8}(3+\nu)\rho\omega^2(b^2 - r^2), \tag{3.3}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\rho\omega^2}{8}[(3+\nu)b^2 - (1+3\nu)r^2], \tag{3.4}$$

$$u = \frac{\rho\omega^2}{8E}[(-1+\nu^2)r^3 + (1-\nu)(3+\nu)b^2 r]. \tag{3.5}$$

As ω increases with time Eq. (3.2) is first satisfied at $r = 0$, where $\sigma_r = \sigma_\theta = \sqrt{3}k$ at the angular velocity

$$(\omega^*)^2 = \frac{8\sqrt{3}k}{(3+\nu)\rho b^2}, \tag{3.6}$$

which is the same result as for the Tresca case.

Subsequent to the initiation of plastic action and assuming that ω increases monotonically, the stress field may be found independent of displacement considerations. It is this fact which has caused other either to neglect entirely considerations of displacement or to treat the matter in

consistently. At some later time let the interface be at $r = c^2$). In the plastic region $0 \leqslant r < c$ the stress field is found by substituting for σ_0 from (3.2) followed by integration and insistence upon regularity at $r = 0$ (the complementary solution must vanish). The result is

$$\sigma_r^p = \sqrt{3}k\left(1 - \frac{\rho\omega^2 r^2}{3\sqrt{3}k + \sigma}\right), \tag{3.7}$$

$$\sigma_0^p = \sqrt{3}k + \sigma - \sigma\left(1 - \frac{\rho\omega^2 r^2}{3\sqrt{3}k + \sigma}\right), \tag{3.8}$$

in $0 \leqslant r < c(\omega)$, with superscripts $p(e)$ referring to the plastic (elastic) regions, respectively.

In the elastic region the general solution is

$$\sigma_r^e = c_1(\omega) + \frac{c_2(\omega)}{r^2} - \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 r^2, \tag{3.9}$$

$$\sigma_r^e = c_1(\omega) - \frac{c_2(\omega)}{r^2} - \frac{1+3\nu}{8}\rho\omega^2 r^2. \tag{3.10}$$

The three functions $c(\omega)$, $c_1(\omega)$, $c_2(\omega)$ are determined by the free boundary condition at $r = b$ an by the requirement of continuity of σ_r and σ_0 at the interface $r = c(\omega)$. The results are

$$\sigma_r^e = \frac{c^2(\omega)}{r^2}\cdot\frac{b^2 - r^2}{b^2 - c^2(\omega)}\left(\sqrt{3}k - \rho\omega^2\left\{\frac{3+\nu}{8}[b^2 - c^2(\omega)] + \frac{\sqrt{3}kc^2(\omega)}{3\sqrt{3}k + \sigma}\right\}\right) + \\ + \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2(b^2 - r^2), \tag{3.11}$$

$$\sigma_0^e = \frac{c^2(\omega)}{r^2}\cdot\frac{b^2 + r^2}{b^2 - c^2(\omega)}\left(-\sqrt{3}k + \rho\omega^2\left\{\frac{3+\nu}{8}[b^2 - c^2(\omega)] + \frac{\sqrt{3}kc^2(\omega)}{3\sqrt{3}k + \sigma}\right\}\right) \\ + \frac{\rho\omega^2}{8}[(3+\nu)b^2 - (1+3\nu)r^2], \tag{3.12}$$

holding in $c(\omega) < r \leqslant b$ where

$$c^2(\omega) = b^2\left[1 - \sqrt{1 - \frac{3(3+\nu) - 24\sqrt{3}k/\rho\omega^2 b^2}{1 + 3\nu + 8\sigma(3\sqrt{3}k + \sigma)^{-1}}}\right]. \tag{3.13}$$

Setting $c(\omega) = b$ in (3.13) gives the critical velocity ω_c corresponding to a fully plastic disk as

---

[2]) We assume a single interior plastic zone of radius $c(\omega)$ with c monotone increasing. If a solution is found, subject to this assumption, uniqueness guarantees that there can be no other type of solution.

$$\omega_c^2 = \frac{3\sqrt{3}k + \sigma}{\rho b^2}. \tag{3.14}$$

It is clear that (3.14) agrees with (2.4) in the limit as $\sigma \to 0$. In fact, all the stress results reduce to the classical results in the limit. It is possible to verify that the elastic stress field does not violate yield at any stage of loading $c(\omega)$.

We now turn our attention to the consideration of displacements. The elastic displacement field is uniquely determined by the stresses [7] and is given by

$$\frac{u^e}{r} = \frac{\sigma_0^e - \nu\sigma_r^e}{E}, \quad c(\omega) < r \leqslant b. \tag{3.15}$$

In the plastic region the constitutive equations are

$$\dot{\varepsilon}_r^p = \frac{\mathrm{d}\dot{u}}{\mathrm{d}r} = \frac{\dot{\sigma}_r^p - \nu\dot{\sigma}_0^p}{E} + \frac{\sigma\Gamma}{\sqrt{3}k}, \tag{3.16}$$

$$\dot{\varepsilon}_0^p = \frac{\dot{u}}{r} = \frac{\dot{\sigma}_0^p - \nu\dot{\sigma}_r^p}{E} + \Gamma. \tag{3.17}$$

The multiplier Γ is eliminated from (3.16), (3.17) and the resulting differential equation solved for $\dot{u}$ subject to the boundary condition that $\dot{u}$ is continuous across $c(\omega)$. The condition $\dot{u}(0) = 0$ must also be satisfied.

The general solution is

$$\dot{u}^p(r,t) = A(\omega)r^{\sigma/\sqrt{3}k} - \frac{2\rho\omega\dot{\omega}(3k^2 - 2\sigma\nu + \sigma^2)}{E(27k^2 - \sigma^2)}r^3, \tag{3.18}$$

where we note that the condition $\dot{u}(0,t) = 0$ is satisfied for any $A(\omega)$ provided $\sigma > 0$. Furthermore σ can be an arbitrarily small positive number and the complementary solution still vanishes at the origin. On the other hand the complementary solution corresponding to $\sigma = 0$, i.e. the Tresca hypothesis, becomes $\dot{u} = A(\omega)$, which must be set equal to zero in order to satisfy the displacement condition at the origin. Thus, the operations $\lim r \to 0$ and $\lim \sigma \to 0$ are not interchangeable.

Since the constant of integration $A(\omega)$ is now retained in (3.18) it is possible to choose it such that $\dot{u}$ is continuous across the interface $c(\omega)$. When this is done we obtain

$$A(\omega) = \frac{2\rho\omega\dot{\omega}}{E}c^{1-\sigma/\sqrt{3}k}(\omega)\left\{\frac{(3k^2 - 2\nu\sigma + \sigma^2)c^2(\omega)}{(27k^2 - \sigma^2)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{3}kc^2(\omega)}{3\sqrt{3}k + \sigma}\left[\frac{b^2 + c^2(\omega)}{b^2 - c^2(\omega)} + \nu\right] + \frac{[b^2 - c^2(\omega)](1 - 2\nu - \nu^2)}{4} + \frac{b^2 + c^2(\omega)}{2}\right\}. \tag{3.19}$$

The final step is to check that $\Gamma \geqslant 0$ thus ensuring that plastic work is positive semi-definite. This involves substitution into (3.17) from (3.18), (3.19), (3.13) and the derivatives of (3.7) and (3.8). This is very lengthy but may be simplified by finding a positive lower bound on Γ. This turns out to be possible provided σ is small compared to k.

At the limit load (3.14) the flow field is simply

$$\dot{u}(r) = Ar^{\sigma/\sqrt{3}k}, \quad A > 0, \tag{3.20}$$

which follows from (3.18) by noting that $\dot{\omega} = 0$. The plastic work is positive-definite and all the requirements of a complete solution are satisfied. Thus, the complete solution may be interpreted as the limiting case, $\lim c(\omega) \to b$, of the elastic-plastic solution. Alternatively, it may be more easily obtained by separate consideration. (It is possible to produce examples where the limit load solution exists without the corresponding elastic-plastic solution existing. Consequently, it was necesary to verify the existence of the elastic-plastic solution).

Since a complete solution exists for all $\sigma > 0$ and ω_c in (3.14) and (2.4) agree in the limit as $\sigma \to 0$ then (2.4) represents the critical velocity *in the limit*. It must be emphasized, however, that there is no complete solution and no limit load corresponding to the Tresca criterion except in this limiting sense. Failure to appreciate the fact that a nontrivial flow field must be part of any complete solution will eventually lead anyone to difficulties with uniqueness.

4. Solution correspndiong to von Mises Hypothesis

The problem is much more complicated corresponding to the von Mises hypothesis (Fig. 1), and it is impossible to obtain the solution other than by numerical means. We consider only the fully plastic problem. Our main interest is in demonstrating existence of a solution and showing why a solution should exist in contrast to the Tresca situation.

The von Mises criterion is

$$\sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_\theta + \sigma_\theta^2 = 3k^2 \tag{4.1}$$

and in seeking a fully plastic solution (4.1) is solved for σ_θ and substituted into (2.2). This gives

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r}{2r} - \frac{\sqrt{3}}{2r}\sqrt{4k^2 - \sigma_r^2} + \rho\omega^2 r = 0, \tag{4.2}$$

with the origin as a singular point.

The solution may be obtained in principle by a power series expansion in some neighborhood of the origin. However, since ω is unknown and can only be obtained by satisfying the free edge condition the power series method is not practical. We chose instead to utilize a computer in numerical integration of (4.2), iterating on ω until the free edge boundary condition was satisfied. That is, an arbitrary choice of ω is made and (4.2), integrated from $r = 0$ to $r = b$ with some non-free edge condition resulting at $r = b$. With an adjustment in ω the procedure is repeated until the free edge condition is satisfied to a desired degree of accuracy. (It is known that the critical value of ω is greater than the Tresca value given by (2.4) and cannot exceed this value by more than 15.5 percent since the circumscribed von Mises criterion nowhere exceeds the Tresca criterion by more than 15.5 percent). The critical value of ω obtained by this procedure is

$$\omega_c^2 = \frac{5.646\, k}{\rho b^2}. \tag{4.3}$$

The flow field is obtained as a solution to the constitutive equations

$$\frac{d\dot{u}}{dr} = \Gamma(2\sigma_r - \sigma_\theta), \quad \frac{\dot{u}}{r} = \Gamma(2\sigma_\theta - \sigma_r). \tag{4.4}$$

Eqs. (4.4) were solved numerically for $\dot{u}$ and Γ resulting in a non-trivial flow field for which Γ was positive semi-definite. Consequently, the existence of a complete solution coresponding to the von Mises yield criterion has been demonstrated.

The question which interests us here is why a complete solution should exist corresponding to the von Mises hypothesis but not exist corresponding to the Tresca hypothesis. In both cases the stress solutions are obtained independent of velocity considerations and offer no difficulties (other than computational). We have seen why the flow field fails to exist for the Tresca case and how the remedy is to slightly perturb the side of the Tresca yield locus. In general, the existence of a flow field depends upon the behaviour of the solution of the constitutive equations in the neighborhood of $r = 0$.

We consider this behaviour in general by considering the constitutive equations associated with side AB_1 (Fig. 1) oriented at $\tan^{-1}\alpha$ to the Tresca side AB. These equations are

$$\frac{d\dot{u}}{dr} = \alpha\Gamma, \quad \frac{\dot{u}}{r} = \Gamma. \tag{4.5}$$

The solution u is

$$\begin{cases} \text{a) } \dot{u} = Ar^\alpha \text{ for } 0 < \alpha < \infty, \\ \text{b) } \dot{u} = B \text{ for } \alpha = 0, \\ \text{c) } \dot{u} = 0 \text{ for } \alpha = \infty. \end{cases} \tag{3.6}$$

The boundary condition $\dot{u}(0) = 0$ is satisfied automatically for (4.6 a) but only the trivial solution prevails in the case of (4.6 b) and (4.6 c). Thus, any yield locus which intersects $\sigma_r = \sigma_0$ in such a way as to be compatible with (4.6 a) will render a flow field which vanishes at the origin[3]).

For the von Mises yield locus $\alpha = 1$ so that this necessary condition for the existence of a flow field is satisfied. The final condition, the positive semi-definiteness of Γ, can be verified only by numerical means.

Acknowledgements. The author would like to thank Mr. G. C. W. Sabin for his assistance and the National Research Council for partial support.

Received the 24 VIII 1968

Simon Fraser University, Burnaby B. C., Canada

REFERENCES

1. Nadai A., *Theory of Flow and Fracture of Solids*. Vol. 1, McGraw-Hill Book Co., New York, 1950, p. 485.
2. Drucker D. C., Prager W., Greenberg H. J., *Extended Limit Design Theorems for Continuous Media*. Quart. Appl. Math., 1952, 9, p. 381.
3. Życzkowski M., *Limit State of Nonhomogeneous Rotating Circular Disks*. Bull. Acad. Polon. Sci., 1967, V, *1*, p. 7.
4. Budiansky B., *A Reassessment of Deformation Theories of Plasticity*. J. Appl. Mech., 1959, 16, p. 259.
5. Drucker D. C., *Plasticity*. Proc. First Symposium on Naval Struct. Mech., Pergamon Press, London, 1960.
6. Drucker D. C., Greenberg H. J., Lee E. H., Prager W., *On Plastic-rigid Solutions and Limit Design Theorems for Elastic-plastic Bodies*. Proc. First National Congress of Applied Mech., Amer. Soc. of Mech. Eng., 1950, p. 533.
7. Timoshenko S., Goodier J. N., *Theory of Elasticity*. 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1951.

O REEXAMINARE A VITEZEI CRITICE A UNUI DISC SOLID ÎN ROTAȚIE

(Rezumat)

Autorul demonstrează existența soluției complete a problemei enunțată în titlul lucrării ținîndu-se seama de criteriul lui von Mises. Se determină valoarea numerică a vitezei critice.

Explicația figurilor

Fig. 1. — Locurile geometrice ale lui Tresca și von Mises pentru eforturi axial simetrice plane. Latura modificată AB_1 a lui Tresca pentru $\sigma_0 = \sqrt{3}k + \sigma(1 - \sigma_r/\sqrt{3}k)$, unde k este efortul produs de forfecare. $\dot{\varepsilon}^p$ reprezintă vectorul de deformație plastică.

---

[3]) It is clear that for a rotating disk $\sigma_r = \sigma_0$ at $r = 0$ so that we are concerned here with the yield locus only at this one point.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

C. D. 531.36

LES PRINCIPES INTÉGRALES DE LA MÉCANIQUE ANALYTIQUE DANS LA DYNAMIQUE DES SYSTÈMES DE SOLIDES RIGIDES

PAR

N. IRIMICIUC et SPIRIDON DELEANU

1. Introduction

Dans une suite de travaux antérieurs [1]...[4], on a analysé les déficiences ainsi que les limites de la construction habituelle de la mécanique analytique, qui considère comme éléments constitutifs d'un système mécanique les points matériels définis au sens newtonien.

Parmi ces déficiences et limites a été mentionnée aussi l'insuffisance des formes habituelles des relations qui expriment les principes de la mécanique analytique, lorsqu'on les applique aux systèmes qui ont des solides rigides comme éléments constitutifs.

Dans cette Note on établit de nouvelles formes, qui correspondent aux systèmes de solides rigides, pour les relations qui expriment les principes intégrales de la mécanique analytique.

2. Les mouvements variés asynchrones d'un système mécanique dont les éléments constitutifs sont des solides rigides

Si l'on choisit les centres de masses G_ν des solides S_ν, $(\nu = 1, 2,..., n)$, d'un système mécanique, comme pôles invariables liés aux solides, les variations asynchrones aux translations et rotations des solides seront définies par les relations :

$$\Delta^* \bar{r}_{G_\nu} = \Delta^* \bar{r}_{G_\nu}(t), \quad \Delta^* \bar{\theta}_\nu = \Delta^* \bar{\theta}_\nu(t), \tag{1}$$

auxquelles on associe une loi temporelle :

$$\Delta^* t = \Delta^* t(t), \tag{2}$$

toutes ces grandeurs étant supposées fonctions continues et dérivables de l'argument t et satisfaisant par surcroît les conditions :

$$\Delta^* \bar{r}_{G_\nu}(t_0) = \Delta^* \bar{r}_{G_\nu}(t_1) = 0, \ \Delta^* \bar{\theta}_\nu(t_0) = \Delta^* \bar{\theta}_\nu(t_1) = 0, \ \Delta^* t(t_0) = \Delta^* t(t_1) = 0, \tag{3}$$

où t_0 et t_1 sont deux instants succesifs qui déterminent un intervalle de temps dans lequel on étudie le mouvement du système mécanique.

On définit aussi les déplacements asynchrones par les relations:

$$\delta^*\bar{r}_{G_\nu} = \Delta^*\bar{r}_{G_\nu} - \bar{a}_{G_\nu}\Delta^*t, \quad \delta^*\bar{\theta}_\nu = \Delta^*\bar{\theta}_\nu - \bar{\omega}_\nu\Delta^*t, \quad (\nu = 1, 2,..., n), \tag{4}$$

qui pour $\Delta^*t \equiv 0$ deviennent les déplacements synchrones du système mécanique considéré, notées simplement $\delta\bar{r}_{G_\nu}$ et $\delta\bar{\theta}_\nu$, ($\Delta\bar{r}_{G_\nu}$ et $\Delta\bar{\theta}_\nu$ étant les variations synchrones).

Tandis que pour les variations des paramètres de position du système mécanique sont valables, selon les définitions, les égalités:

$$\Delta^*x_{G_{\nu\sigma}} = \Delta x_{G_{\nu\sigma}}, \quad \Delta^*\theta_{\nu e} = \Delta\theta_{\nu e}, \quad (\sigma = 1, 2, 3\,;\ e = p, r, n), \tag{5}$$

pour les variations des paramètres cinématiques du premier ordre et pour l'énergie cinétique du système mécanique ont été établies les relations:

$$\Delta^*\bar{v}_{G_\nu} = \Delta\bar{v}_{G_\nu} - \bar{v}_{G_\nu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta^*t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta^*\bar{r}_{G_\nu} + \bar{a}_{G_\nu}\Delta^*t, \tag{6}$$

$$\Delta^*\bar{\omega}_\nu = \Delta\bar{\omega}_\nu - \bar{\omega}_\nu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta^*t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta^*\bar{\theta}_\nu + \bar{\varepsilon}_\nu\Delta^*t \tag{7}$$

et

$$\Delta^*E = \Delta E - 2E\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta^*t, \tag{8}$$

la dernière connue dans la littérature.

Aussi on a réussi à prouver la permutabilité des opérateurs Δ et d appliqués à une certaine fonction de coordonnées généralisées, de vitesses généralisées et de temps, ainsi que la permutabilité des opérateurs Δ^* et d, appliqués seulement aux paramètres de positions et au temps.

3. La relation qui exprime le principe général intégral de Hölder pour les systèmes mécaniques ayant des solides rigides comme éléments constitutifs

Soit un système mécanique formé d'un nombre de n solides rigides, dont les paramètres de positions sont liés entre eux par p liaisons, en général rhéonomes:

$$f_\alpha(..., x_{G_{\nu\sigma}}, \theta_{\nu e},..., t) = 0,$$
$$(\alpha = 1, 2,..., p\,;\ \nu = 1, 2,..., n\,;\ \sigma = 1, 2, 3\,;\ e = p, r, n). \tag{9}$$

Soit aussi l'expression :

$$(10) \qquad \mathcal{E} = \int_{t_0}^{t_1} \sum [(\overline{\mathcal{F}}_\nu + \overline{\mathcal{F}}^i_\nu)\, \delta^* \overline{r}_{G_\nu} + (\overline{\mathcal{M}}_{G_\nu} + \overline{\mathcal{M}}^i_{G_\nu})\, \delta^* \overline{\theta}_\nu]\, dt,$$

où $\overline{\mathcal{F}}_\nu$, $\overline{\mathcal{M}}_{G_\nu}$ et $\overline{\mathcal{F}}^i_\nu = -\dot{\overline{\mathcal{K}}}_\nu$, $\overline{\mathcal{M}}^i_G = -\dot{\overline{\mathcal{K}}}_{G_\nu}$ sont les composants des torseurs dans les centres de masses G_ν des forces actives et des forces d'inertie des solides S_ν et $\delta^* \overline{r}_{G_\nu}$ et $\delta^* \overline{\theta}_\nu$ sont les déplacements asynchrones du système mécanique qui satisfont aux conditions :

$$(11) \qquad \delta^* \overline{r}_{G_\nu}(t_0) = \delta^* \overline{r}_{G_\nu}(t_1) = 0, \quad \delta^* \overline{\theta}_\nu(t_0) = \delta^* \overline{\theta}_\nu(t_1) = 0.$$

Compte tenu des relations (6) et (7) et pour des déplacements asynchrones satisfaisant aux équations de liaisons, l'expression (10) fournit la condition :

$$(12) \qquad \int_{t_0}^{t_1} [\Delta^* E + \sum (\overline{\mathcal{F}}_\nu \Delta^* \overline{r}_{G_\nu} + \overline{\mathcal{M}}_{G_\nu} \Delta^* \overline{\theta})]\, dt - 2 \int_{t_0}^{t_1} \dot{E} \Delta^* t\, dt - \int_{t_0}^{t_1} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial t} \Delta^* t\, dt = 0,$$

où λ_j sont les multiplicateurs des liaisons.

Pour les systèmes mécaniques soumis aux liaisons holonomes scléronomes et pour des mouvements variés asynchrones ont lieu les relations :

$$(13) \qquad \frac{\partial f_j}{\partial t} = 0, \quad \Delta^* t \neq 0,$$

tandis que pour les systèmes mécaniques soumis aux liaisons holonomes rhéonomes, mais pour des mouvements variés synchrones on a :

$$(14) \qquad \frac{\partial f_j}{\partial t} \neq 0, \quad \Delta^* t \equiv 0 ;$$

l'égalité (12) prend la forme :

$$(15) \qquad \int_{t_0}^{t_1} [\Delta^* E + \sum_\nu (\overline{\mathcal{F}}_\nu \Delta^* \overline{r}_{G_\nu} + \overline{\mathcal{M}}_{G_\nu} \Delta^* \overline{\theta}_\nu)]\, dt - 2 \int_{t_0}^{t_1} \dot{E} \Delta^* t\, dt = 0,$$

ou

$$(15') \qquad \int_{t_0}^{t_1} [\Delta^* E + \sum_\nu (\overline{\mathcal{F}}_\nu \Delta^* \overline{r}_{G_\nu} + \overline{\mathcal{M}}_{G_\nu} \Delta^* \overline{\theta}_\nu)]\, dt + 2 \int_{t_0}^{t_1} E \frac{d}{dt} \Delta^* t\, dt = 0,$$

qui exprime le principe général intégral de Hölder, pour les systèmes mécaniques ayant des solides rigides comme éléments constitutifs.

Pour un système quasi-conservatif de forces actives :

$$\sum_{\nu} (\overline{\mathcal{F}}_{\nu} \delta^* \overline{r}_{G_\nu} + \overline{\mathcal{M}}_{G_\nu} \delta^* \overline{\theta}_{\nu}) = \delta^* U - \frac{\partial U}{\partial t} \delta^* t \tag{16}$$

la relation (15) (où bien (15')) prend la forme connue dans littérature :

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\delta^* \mathfrak{L} - \frac{\mathrm{d}\mathfrak{L}}{\mathrm{d}t} \delta^* t \right) \mathrm{d}t = 0, \tag{17}$$

$\mathfrak{L} = E + U$ étant la bien connue fonction lagrangienne.

a) *Le principe variationnel de Hamilton-Ostrogradski*

Dans les conditions (14), c'est-à-dire $\Delta^* t \equiv 0$, $\Delta^* E = \Delta E$, $\Delta^* \overline{r}_{G_\nu} = \Delta \overline{r}_{G_\nu}$ et $\Delta^* \overline{\theta}_{\nu} = \Delta \overline{\theta}_{\nu}$, les relations (15) et (15') conduisent à la formule variationnelle de Hamilton pour les systèmes mécaniques formés par des solides rigides :

$$\int_{t_0}^{t_1} [\Delta E + \sum_{\nu} (\overline{\mathcal{F}}_{\nu} \Delta \overline{r}_{G_\nu} + \overline{\mathcal{M}}_{G_\nu} \Delta \overline{\theta}_{\nu})] \, \mathrm{d}t = 0. \tag{18}$$

Il en résulte, pour des sollicitations conservatives :

$$\sum_{\nu} (\overline{\mathcal{F}}_{\nu} \Delta \overline{r}_{G_\nu} + \overline{\mathcal{M}}_{G_\nu} \Delta \overline{\theta}_{\nu}) = U, \tag{19}$$

la bien connue condition de stationnarité de la fonction principale S de Hamilton :

$$\Delta \int_{t_0}^{t_1} \mathfrak{L} \, \mathrm{d}t = \Delta S = 0. \tag{20}$$

b) *Le principe de Maupertuis-Lagrange*

Dans les conditions (13) et pour des mouvements asynchrones isoénergétiques :

$$\sum_{\nu} (\overline{\mathcal{F}}_{\nu} \Delta \overline{r}_{G_\nu} + \overline{\mathcal{M}}_{G_\nu} \Delta^* \overline{\theta}_{\nu}) = \Delta^* E ; \tag{21}$$

la relation qui exprime le principe général intégral de Hölder prend la forme :

$$2\int_{t_0}^{t_1}\left(\Delta^* E + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta^* t\right)\mathrm{d}t = 0 \tag{22}$$

et conduit à la condition de stationnarité de l'action du système mécanique considéré :

$$\int_{t_0}^{t_1}\Delta^*\,(2E\,\mathrm{d}t) = 0. \tag{23}$$

Il est nécessaire à observer que pour les systèmes de solides rigides l'expression de l'action est :

$$\mathcal{A} = \int_{t_0}^{t_1} 2E\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1}\sum_{\nu}\left(\overline{\mathcal{K}}_{\nu}\,\mathrm{d}\overline{r}_G + \overline{\mathfrak{K}}_{G_{\nu r}}\,\mathrm{d}\overline{\theta}_{\nu}\right) \tag{24}$$

Pour un système mécanique réduit à un seul solide rigide, mobile, dans les conditions de valabilité des lois de conservation de l'impulse et du moment cinétique :

$$\overline{\mathcal{K}} = \overline{\mathcal{K}}^0,\quad \overline{\mathfrak{K}}_{G_r} = \overline{\mathfrak{K}}^0_{G_r}, \tag{25}$$

l'expression de l'action prend la forme :

$$\mathcal{A} = \mathcal{K}^0\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}s_G + \mathfrak{K}^0_{G_r}\int_{t_0}^{t_1}(\mathrm{d}\theta_p + \cos\theta_n\,\mathrm{d}\theta_r) \tag{26}$$

et, si le solide est libre, la condition de minimum de l'action implique le minimum pour les deux intégrales qui figurent dans l'expression (26) : la première conduit au mouvement rectiligne uniforme du centre de masse du solide, la deuxième à un mouvement de précession régulière du solide autour de son centre de masse.

4. Conclusions

1°. Les formes nouvelles des relations qui expriment les principes intégrales de la mécanique analytique contiennent des termes avec des significations physiques concrètes, spécifiques aux systèmes mécaniques réels, rencontrés dans la technique.

2°. Les formes proposées dans cette Note pour les relations qui expriment les principes intégrales permettent la déduction des équations com-

plètes des mouvements des éléments d'un système mécanique (y compris les équations qui dérivent du théorème du moment cinétique).

3°. Si l'on accepte la définition donnée dans [1]...[4], pour la notion du point matériel, tout en concordance avec le sens qu'on attribue à cette notion dans la technique, alors toutes les expressions établies ci-dessus prennent les formes connnues de la littérature, établies pour les systèmes mécaniques ayant des points matériels comme éléments constitutifs.

Reçue le 28 II 1968

Institut Polytechnique de Jassy,
Chaire de Mécanique Théorique

BIBLIOGRAPHIE

1. Irimiciuc N., *Asupra unei noi forme de prezentare a mecanicii analitice pentru sisteme olonome.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1964, **X (XIV)**, *3-4*, pp. 255-262.
2. Irimiciuc N., Ibănescu I., Rusu E., *Sur le problème des liaisons holonomes imposées aux systèmes de solides rigides.* I. *Liaisons géométriques.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1967, **XIII (XVII)**, *1-2*, pp. 389-397.
3. — *Sur le problème des liaisons holonomes imposées aux systèmes de solides rigides.* II. *Liaisons cinématiques.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1968, **XIV (XVIII)**, *1-2*, pp. 461-467.
4. Irimiciuc N., Stancu M., *Une nouvelle relation pour exprimer le principe de Gauss.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1967, **XIII (XVII)**, *3-4*, pp. 429-433.
5. Platrier C., *Mécanique rationelle.* Ed. Dunod, Paris, 1954.
6. Suslov G. K., *Mecanica rațională.* Ed. tehn., Buc., 1950, (traduit du russe).
7. Whittaker E. T., *Analytical Dynamics.* Cambridge, 1937.

PRINCIPIILE INTEGRALE ALE MECANICII ANALITICE ÎN DINAMICA SISTEMELOR DE SOLIDE RIGIDE

(Rezumat)

Se stabilesc noi expresii, corespunzătoare sistemelor mecanice constituite din solide rigide, pentru relațiile care exprimă principiile integrale ale mecanicii analitice. Aceste relații se particularizează, devenind cele cunoscute din literatură, pentru sistemele mecanice constituite din puncte materiale definite în sensul menționat în lucrările [1]...[4].

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

D. C. 539.37

DYNAMIC RESPONSE OF ANISOTROPIC ELASTIC SHELLS

BY

R. S. DHALIWAL

1. Introduction

The large use of circular cylindrical and spherical shells as dynamically loaded structures which find wide application in aircraft, submarines, missiles, pressure vessels and buildings has stimulated considerable interest in the study of wave propagation and vibrations in shells. Due to a variety of application of these it is desirable to find solutions which are applicable to both thick and thin shells.

The problem of radial vibrations of cylindrical and spherical shells of isotropic elastic material has been considered by Tranter [1] and Baker and Allen [2] using Laplace-transform and Midlin-Goodman techniques respectively, when dynamic loads are applied on the curved surfaces. Recently Cinelli [3] has defined a new Hankel-transform and he has applied this transform to obtain solutions [4]: for radial vibrations of infinitely long cylindrical shells and spherical shells and also for torsional vibrations of infinitely long cylindrical shells when the loads are prescribed as arbitrary functions of time on both the surfaces.

In this paper the new Hankel-transform [3] is applied to find the displacement and stresses in infinitely long cylindrical shells composed of transverse curvilinear isotropic material for pure radial motion. The loads on the surfaces are prescribed as arbitrary functions of time. It has been shown that solutions for the radially symmetric motion of a spherical shell of material with transverse isotropy about the radius vector can be derived from the corresponding solutions for the cylindrical shell under similar initial and boundary conditions by defining certain analogous quantities. The solutions for the isotropic shells are derivable by changing the elastic constants and are seen to agree with those of Cinelli [4].

It is believed that solutions obtained are new and that only previous work in this direction is that of Eason [5] who obtained solutions for the radial harmonic vibrations of cylindrical and spherical shells composed of transverse curvilinear isotropic material under the conditions that radial stress is zero on the surfaces.

2. Radial Vibrations of a Cylindrical Shell

When an infinite cylindrical shell is acted upon by time dependent forces on the cylindrical surfaces, the only non-zero displacement component is $u_r \equiv u(r,t)$, where r, θ, z are a system of cylindrical polar coordinates and t is time. For radial vibrations the stress displacement relations for material with transverse curvilinear isotropy are [6], [7]:

$$(1) \qquad \sigma_r = c_{11}\frac{\partial u}{\partial r} + c_{12}\frac{u}{r}, \quad \sigma_0 = c_{12}\frac{\partial u}{\partial r} + c_{22}\frac{u}{r}, \quad \sigma_z = c_{12}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}\right),$$

where σ_r, σ_0, σ_z — radial, circumferential and axial stress components respectively, c_{11}, c_{12}, c_{22} — elastic constants of the material. The only non-vanishing equation of motion is:

$$(2) \qquad \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_0}{r} = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad a \leqslant r \leqslant b, \quad t \geqslant 0,$$

where a, b — inner and outer radii of the shell, respectively, ρ — density of the material.

Substituting from (1) into (2) we find that:

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\nu^2}{r^2}u = \frac{\rho}{c_{11}}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad a \leqslant r \leqslant b, \quad t \geqslant 0,$$

where

$$(4) \qquad \nu = \sqrt{\frac{c_{22}}{c_{11}}}.$$

Now it is expedient to introduce dimensionless variables by means of:

$$(5) \qquad R = \frac{r}{a}, \quad \beta = \frac{b}{a}, \quad v = \sqrt{\frac{c_{11}}{\rho}}, \quad T = \frac{v}{a}t.$$

Using (5), the equation of motion (3) and the stress-displacement relations (1) may be rewritten as:

$$(6) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\cdot\frac{\partial u}{\partial R} - \frac{\nu^2}{R^2}u = \frac{\partial^2 u}{\partial T^2}, \quad 1 \leqslant R \leqslant \beta, \quad T \geqslant 0,$$

$$(7) \qquad \begin{cases} \sigma_R(R,T) = \dfrac{c_{11}}{a}\left[\dfrac{\partial u(R,T)}{\partial R} + \dfrac{c_{12}}{c_{11}}\cdot\dfrac{u(R,T)}{R}\right], \\ \sigma_0(R,T) = \dfrac{c_{12}}{a}\left[\dfrac{\partial u(R,T)}{\partial R} + \dfrac{c_{22}}{c_{12}}\cdot\dfrac{u(R,T)}{R}\right], \\ \sigma_z(R,T) = \dfrac{c_{12}}{a}\left[\dfrac{\partial u(R,T)}{\partial R} + \dfrac{u(R,T)}{R}\right]. \end{cases}$$

Let us introduce a new finite Hankel-transform H^{ν} defined by Cinelli [3] as:

$$H_{\nu}[f(R)] = \bar{f}(\xi_i) = \int_1^{\beta} Rf(R)C_{\nu}(R, \xi_i)\,dR, \quad 1 \leqslant R \leqslant \beta, \tag{8}$$

where

$$C_{\nu}(R, \xi_i) = \{J_{\nu}(\xi_i R)[\xi_i Y'_{\nu}(\xi_i) + hY_{\nu}(\xi_i)] - Y_{\nu}(\xi_i R)[\xi_i J'_{\nu}(\xi_i) + hJ_{\nu}(\xi_i)]\}. \tag{9}$$

The inverse of (8) is given by [3]:

$$H_{\nu}^{-1}[\bar{f}(\xi_i)] = f(R) = \frac{\pi^2}{2}\sum_{\xi_i} \xi_i^2[\xi_i J'_{\nu}(\xi_i\beta) + kJ_{\nu}(\xi_i\beta)]^2 \bar{f}(\xi_i)\frac{C_{\nu}(R, \xi_i)}{F_{\nu}(\xi_i)}, \tag{10}$$

where prime indicates differentiation, ξ_i is a positive root of

$$\begin{aligned}&[\xi_i Y'_{\nu}(\xi_i) + hY_{\nu}(\xi_i)][\xi_i J'_{\nu}(\xi_i\beta) + kJ_{\nu}(\xi_i\beta)] = \\ &= [\xi_i Y'_{\nu}(\xi_i\beta) + kY_{\nu}(\xi_i\beta)][\xi_i J'_{\nu}(\xi_i) + hJ_{\nu}(\xi_i)],\end{aligned} \tag{11}$$

$J_{\nu}(x)$, $Y_{\nu}(x)$ — Bessel function of the first and second kind, respectively, and of order ν; h, k — constants, whose value can be positive, negative or zero; $f(R)$ — arbitrary function of the radial variable R,

$$\begin{aligned}F_{\nu}(\xi_i) = &\left(k^2 + \xi_i^2 - \frac{\nu^2}{\beta^2}\right)[\xi_i J'_{\nu}(\xi_i) + hJ_{\nu}(\xi_i)]^2 - \\ &- (h^2 + \xi_i^2 - \nu^2)[\xi_i J'_{\nu}(\xi_i\beta) + kJ_{\nu}(\xi_i\beta)]^2.\end{aligned} \tag{12}$$

It is further shown by Cinelli [3] that:

$$\begin{aligned}H_{\nu}\left(\frac{d^2 f}{dR^2} + \frac{1}{R}\cdot\frac{df}{dR} - \frac{\nu^2}{R^2}f\right) = \frac{2}{\pi}\Big\{&\frac{\xi_i J'_{\nu}(\xi_i) + hJ_{\nu}(\xi_i)}{\xi_i J'_{\nu}(\xi_i\beta) + kJ_{\nu}(\xi_i\beta)} \times \\ &\times[f'(\beta) + kf(\beta)] - [f'(1) + hf(1)]\Big\} - \xi_i^2\bar{f}(\xi_i).\end{aligned} \tag{13}$$

We wish to find the solution of (6) under the following initial and boundary conditions:

$$u(R, 0) = 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial T}\right]_{T=0} = 0, \tag{14}$$

$$\sigma_R(1, T) = A(T), \quad \sigma_R(\beta, T) = B(T). \tag{15}$$

We operate (6) by H_{ν}, using the boundary conditions (15) and first equation of (7) with

(16) $$h = \frac{c_{12}}{c_{11}}, \quad k = \frac{c_{12}}{c_{11}\beta}$$

and obtain:

(17) $$\frac{\mathrm{d}^2\bar{u}}{\mathrm{d}T^2} + \xi_i^2\bar{u} = \frac{2a}{\pi c_{11}}\left[\frac{\xi_i J_\nu'(\xi_i) + hJ_\nu(\xi_i)}{\xi_i J_\nu'(\xi_i\beta) + kJ_\nu(\xi_i\beta)} B(T) - A(T)\right].$$

Applying the Laplace transform [8] to (17), using the initial conditions (14), and convolution integral for the inverse Laplace transform [8], we find that the solution to equation (17) may be written as:

(18) $$\bar{u}(\xi_i, T) = \frac{2a}{c_{11}\pi\xi_i}\int_0^T \left[\frac{\xi_i J_\nu'(\xi_i) + hJ_\nu(\xi_i)}{\xi_i J_\nu'(\xi_i\beta) + kJ_\nu(\xi_i\beta)} B(\tau) - A(\tau)\right] \sin\xi_i(T-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Using (10), to find the inverse finite Hankel transform of (18) we obtain the final displacement:

(19) $$u(R, T) = \frac{\pi a}{c_{11}}\sum_{\xi_i} \xi_i \left[\xi_i J_\nu'(\xi_i\beta) + kJ_\nu(\xi_i\beta)\right]^2 \frac{C_\nu(R, \xi_i)}{F_\nu(\xi_i)} L_\nu(\xi_i, T),$$

where

(20) $$L_\nu(\xi_i, T) = \int_0^T \left[\frac{(\xi_i J_\nu'(\xi_i) + hJ_\nu(\xi_i)}{\xi_i J_\nu'(\xi_i\beta) + kJ_\nu(\xi_i\beta)} B(\tau) - A(\tau)\right] \sin\xi_i(T-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Substituting from (19) in (7), we find the following expressions for the stresses:

(21) $$\sigma_R(R, T) = \frac{\pi}{R}\sum_{\xi_i} \xi_i[\xi_i J_\nu'(\xi_i\beta) + kJ_\nu(\xi_i\beta)]^2 \frac{1}{F_\nu(\xi_i)}\left(R\frac{\mathrm{d}C_\nu}{\mathrm{d}R} + hC_\nu\right) L_\nu(\xi_i, T),$$

(22) $$\sigma_\theta(R, T) = \frac{\pi c_{12}}{Rc_{11}}\sum_{\xi_i} \xi_i[\xi_i J_\nu'(\xi_i\beta) + kJ_\nu(\xi_i\beta)]^2 \frac{1}{F_\nu(\xi_i)}\left(R\frac{\mathrm{d}C_\nu}{\mathrm{d}R} + \frac{\nu^2}{h}C_\nu\right) L_\nu(\xi_i, T),$$

(23) $$\sigma_z(R, T) = \frac{\pi c_{12}}{Rc_{11}}\sum_{\xi_i} \xi_i[\xi_i J_\nu'(\xi_i\beta) + kJ_\nu(\xi_i\beta)]^2 \frac{1}{F_\nu(\xi_i)}\left(R\frac{\mathrm{d}C_\nu}{\mathrm{d}R} + C_\nu\right) L_\nu(\xi_i, T).$$

Equations (19) ... (23) give the general solution for the problem of radial vibrations of a long cylindrical shell under arbitrarily prescribed time-dependent loadings on both the surfaces. The only integrals, appearing in the solution are of the type:

(24) $$I = \int_0^T F(\tau)\sin\xi_i(T-\tau)\mathrm{d}\tau,$$

which can easily evaluated when $F(\tau)$ specifies any standard dynamic loading.

3. Radial Vibrations of Spherical Shells

When a spherical shell is acted upon by radially symmetric dynamic forces, the only non-zero displacement component is $u_r = u(r, t)$ where r, θ, φ are a system of spherical polar coordinates and t is time. The equation of motion and stress displacement relations for the radial vibrations of a shell with transverse curvilinear isotropic material are [6], [7]:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_\varphi}{r} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad a \leqslant r \leqslant b, \quad t \geqslant 0, \tag{25}$$

$$\sigma_r = c_{11} \frac{\partial u}{\partial r} + 2c_{12} \frac{u}{r}, \quad \sigma_\theta = \sigma_\varphi = c_{12} \frac{\partial u}{\partial r} + (c_{22} + c_{23}) \frac{u}{r}, \tag{26}$$

where a, b — internal and external radii of the shell; c_{11}, c_{12}, c_{22}, c_{23} — elastic constants; ρ — density of the material; σ_r, σ_θ, σ_φ — radial and circumferential stress components respectively.

Substituting from (26) into (25), we obtain:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\nu_1^2 - 1/4}{r^2} u = \frac{\rho}{c_{11}} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{26}$$

where

$$2\nu_1 = \sqrt{\frac{8(c_{22} + c_{23} - c_{12})}{c_{11}} + 1}\,. \tag{28}$$

Now using the dimensionless variables defined in equations (5) and the following:

$$u^* = \sqrt{R}\, u(R, T), \quad \sigma^*_{R,\theta,\varphi} = \sqrt{R}\, \sigma_{R,\theta,\varphi}(R, T), \tag{29}$$

we find that the equation of motion (27) and the stress-displacement relations (26) simplify to:

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial u^*}{\partial R} - \frac{\nu_1^2}{R^2} u^* = \frac{\partial^2 u^*}{\partial T^2}, \quad 1 \leqslant R \leqslant \beta, \quad T \geqslant 0, \tag{30}$$

$$\begin{cases} \sigma^*_R(R, T) = \dfrac{c_{11}}{a} \left(\dfrac{\partial u^*}{\partial R} + \dfrac{4c_{12} - 1}{2c_{11}} \cdot \dfrac{u^*}{R} \right), \\ \sigma^*_{\theta,\varphi}(R, T) = \dfrac{c_{12}}{a} \left[\dfrac{\partial u^*}{\partial R} + \dfrac{2(c_{22} + c_{23}) - 1}{2c_{12}} \cdot \dfrac{u^*}{R} \right]. \end{cases} \tag{31}$$

Let the initial and boundary conditions be prescribed on starred quantities as:

$$u^*(R, 0) = 0, \quad \left[\frac{\partial u^*}{\partial T}\right]_{T=0} = 0, \tag{32}$$

$$\begin{cases} \sigma_R^*(1, T) = A(T) \quad \text{i. e. } \sigma_R(1, T) = A(T), \\ \sigma_R^*(\beta, T) = B(T) \text{ i. e. } \sigma_R(\beta, T) = B(T)/\sqrt{\beta}. \end{cases} \tag{33}$$

Now comparing the equations (30)... (33) with equations (5)... (7), (14) and (15), we find that the solution for the radial vibrations of cylindrical and spherical shells is given by the same equations (19)... (22) if the following analogous quantities

$$u(R, T), \quad \sigma_{R,\theta}(R, T), \quad \nu, \quad \frac{c_{22}}{c_{12}} \quad \text{— for cylindrical shell,} \tag{34}$$

be replaced by the corresponding quantities

$$u^*(R, T), \quad \sigma^*_{R,\theta}(R, T), \quad \nu_1, \quad \frac{2(c_{22} + c_{23}) - 1}{2c_{12}} \quad \text{— for spherical shell,} \tag{35}$$

where for a spherical shell

$$h = \frac{4c_{12} - 1}{2c_{11}}, \quad k = \frac{h}{\beta}. \tag{36}$$

4. Radial Vibrations of Isotropic Shells

a) *Cylindrical Case.* The general solution of section **2** for radial vibrations reduces to that of Cinelli [4], changing the elastic constants as under:

	Anisotropic	*Isotropic*
	ν	1
(37)	$c_{11} = c_{22}$	$\lambda + 2\mu$
	c_{12}	λ,

where λ, μ are Lamé constants.

b) *Spherical Case.* The general solution of section **3** reduces to that of Cinelli [4] for radial vibrations of isotropic spherical shells by changing the elastic constants as under:

(38)

	Anisotropic	*Isotropic*
	ν_1	$2/3$
	$c_{11} = c_{22}$	$\lambda + 2\mu$
	$c_{12} = c_{23}$	λ.

5. Conclusions

The dynamic response of anisotropic elastic hollow cylinders and spheres has been found when the loads are prescribed as arbitrary functions of time. It is concluded that the use of new Hankel-transforms [3] makes it possible to obtain the solutions, in a manner which is more direct and concise than the other existing techniques, for problems which have remained unsolved due to the difficulty involved in inverting the integrals in Laplace transform method. It has been shown that the solutions for the radially symmetric spherical problems may be derived directly from the corresponding plane strain cylindrical problems under similar initial and boundary conditions by defining certain analogous quantities and vice-versa, for materials which are transversely isotropic about the radius vector.

Received the 27 IX 1968

The University of Calgary, Alberta, Canada

REFERENCES

1. Tranter C. J., *Application of the Laplace Transform to a Problem in Elastic Vibrations*. Phil. Magazine, 1942, **33**, p. 614.
2. Baker W. E., Allen F. J., *The Response of Elastic Spherical Shells to Spherically Symmetric Internal Blast Loading*. Ballistic Research Laboratories BRL Memo-1 113, Nov. 1957, AD-156639.
3. Cinelli G., *An Extension of the Finite Hankel Transform and Applications*. Inter. Jour. Engng. Sci., 1965, **3**, 5, p. 539.
4. — *Dynamic Vibrations and Stresses in Elastic Cylinders and Spheres*. J. Appl. Mech., 1966, **33**, 4, p. 825.
5. Eason G., *On the Vibrations of Anisotropic Cylinders and Spheres*. Appl. Sci. Res., Sec. A, 1964, **12**, p. 81.
6. Hearmon R. F. S., *An Introduction to Applied Anisotropic Elasticity*. Oxford University Press, 1961.
7. Love A. E. H., *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Cambridge University Press, 3rd ed., 1920.
8. Sneddon I. N., *Fourier Transforms*. McGraw-Hill Book Co. Inc., 1951.

RĂSPUNSUL DINAMIC AL ÎNVELIŞURILOR ELASTICE ANIZOTROPE

(Rezumat)

O nouă transformare finită a lui Hankel este folosită pentru determinarea deplasărilor şi eforturilor dinamice în cilindri tubulari din material izotropic curbiliniu cînd suprafeţele cilindrice sînt supuse la sarcini arbitrare dependente de timp. Rezultatele obţinute se folosesc pentru determinarea vibraţiilor radiale ale învelişurilor sferice.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

D. C. 531.36

ÉQUATIONS D'APPELL POUR DES SYSTÈMES MÉCANIQUES DE SOLIDES RIGIDES SOUMIS À DES LIAISONS NONHOLONOMES, DE MOBILITÉ LINÉAIRE

PAR

N. IRIMICIUC, I. IBĂNESCU et ELISABETA RUSU

1. Tout en poursuivant l'idée fondamentale des travaux [1]...[5], celle de reconstruire la mécanique analytique en considérant les solides rigides comme éléments constitutifs d'un système mécanique, dans cette Note on établit une nouvelle forme pour les équations d'Appell concernant les systèmes de solides rigides soumis à des liaisons nonholonomes de mobilité linéaire.

2. Soit donc un systéme mécanique formé par un nombre de n solides rigides S_ν, $(\nu = 1, 2,...,n)$, soumis à p liaisons holonomes exprimées par les équations finites :

$$(1)\quad f_\alpha(..., x_{Q_\nu 1}, x_{Q_\nu 2}, x_{Q_\nu 3}, \theta_{\nu p}, \theta_{\nu r}, \theta_{\nu n},..., t) = 0, \ (\alpha = 1, 2,..., p; \nu = 1, 2,..., n),$$

et à r liaisons nonholonomes linéaires, exprimées par les équations différentielles nonitégrables :

$$(2)\quad b^\circ_{ij}\,\dot{x}_{Q_{ij}} + b^\circ_{ie}\,\dot{\theta}_{ie} + b^\circ_0 = 0, \ (i = 1, 2,..., n; \ j = 1, 2, 3; \ e = p, r, n; \rho = 1, 2,..., r)$$

où $x_{Q_\nu\sigma}$ et $\theta_{\nu e}$, $(\sigma = 1, 2, 3; \ e = p, r, n)$, sont les paramètres de position des solides S_ν du système mécanique considéré (les coordonnées des pôles Q_ν invariablement liés aux solides S_ν et les trois angles d'Euler respectifs); i et j sont des indices de sommation, pour les valeurs indiquées, d'après la convention d'Einstein qui s'applique aussi à l'indice e.

La solution du système (1) par rapport à p paramètres de position, qui seront ainsi exprimés comme fonctions de tous les autres m paramètres notés par $q_1, q_2,..., q_m$, transformera le système (2) sous la forme :

$$(3)\qquad c^\circ_k\,\dot{q}_k + c^\circ_0 = 0, \ (k = 1, 2,..., m; \ \rho = 1, 2,..., r),$$

où les coefficients c°_k et c°_0 ont les significations ci-dessous :

$$(4)\qquad c_k^\circ = b_{ij}^\circ \frac{\partial x_{Q_{ij}}}{\partial q_k} + b_{ie}^\circ \frac{\partial \theta_{ie}}{\partial q_k}, \quad c_0^\circ = b_{ij}^\circ \frac{\partial x_{Q_{ij}}}{\partial t} + b_{ie}^\circ \frac{\partial \theta_{ie}}{\partial t} + b_0^\circ,$$

$(i = 1, 2,..., n\,;\ j = 1, 2, 3\,;\ e = p, r, n\,;\ k = 1, 2,..., m\,;\ \rho = 1, 2,..., r).$

Le système (3) permet à exprimer linéairement les premières r vitesses généralisées en fonction des autres $m - r$ qui seront notées par :

$$(5)\qquad \dot{q}_{r+\sigma} = \dot{\eta}_\sigma, \quad (\sigma = 1, 2,..., m - r),$$

ce qui conduit aux relations :

$$(6)\qquad \dot{q}_\lambda = \gamma_{\lambda j}\dot{\eta}_j + \gamma_{\lambda 0}$$

et

$$(7)\qquad \delta q_\lambda = \gamma_{\lambda j}\,\delta\eta_j, \quad (\lambda = 1, 2,..., r\,;\ j = 1, 2,..., m - r).$$

Les dernières relations permetent à établir les expressions suivantes pour les déplacements virtuels des solides du système mécanique considéré :

$$(8)\qquad \delta\bar{r}_{Q_\nu} = \bar{A}_{\nu j}\,\delta\eta_j$$

et

$$(9)\qquad \delta\bar{\theta}_\nu = \bar{B}_{\nu j}\,\delta\eta_j, \quad (\nu = 1, 2,..., n\,;\ j = 1, 2,..., m - r),$$

où $\bar{A}_{\nu j}$ et $\bar{B}_{\nu j}$ sont donnés par :

$$(10)\qquad \bar{A}_{\nu j} = \frac{\partial \bar{r}_{Q_\nu}}{\partial q_\nu}\gamma_{kj}, \quad (k = 1, 2,..., m),$$

et :

$$(11)\qquad \bar{B}_{\nu j} = \left(\frac{\partial \theta_{\nu p}}{\partial q_k}\,\bar{i}_3 + \frac{\partial \theta_{\nu r}}{\partial q_k}\,\bar{i}_3^{(\nu)} + \frac{\partial \theta_{\nu n}}{\partial q_k}\,\bar{n}^{(\nu)}\right)\gamma_{kj},$$

$\bar{i}_3$ étant le vecteur unitaire de l'axe Ox_3, $\bar{i}_3^{(\nu)}$ le vecteur unitaire de l'axe $Q_\nu x_3^{(\nu)}$ invariablement liée au solide S_ν et $\bar{n}^{(\nu)}$ le vecteur unitaire de la ligne des noeuds qui correspond au solide S_ν.

On trouve aussi les expressions suivantes pour les paramètres cinématiques du premier ordre du système mécanique :

$$(12)\qquad \bar{v}_{Q_\nu} = \bar{A}_{\nu j}\dot{\eta}_j + \bar{A}_{\nu 0}, \quad (13)\qquad \bar{\omega}_\nu = \bar{B}_{\nu j}\dot{\eta}_j + B_{\nu 0},$$

ainsi que pour les paramètres cinématiques du deuxième ordre :

$$(14)\qquad \bar{a}_{Q_\nu} = \bar{A}_{\nu j}\ddot{\eta}_j + \bar{\Phi}_\nu, \quad (15)\qquad \bar{\varepsilon}_\nu = \bar{B}_{\nu j}\ddot{\eta}_j + \bar{\psi}_\nu, \quad (j = 1, 2,..., m - r),$$

avec :

(16) $$\frac{\partial \bar{a}_{Q_\nu}}{\partial \ddot{\eta}_\sigma} = \bar{A}_{\nu\sigma}, \quad (17) \quad \frac{\partial \bar{\varepsilon}_\nu}{\partial \ddot{\eta}_\sigma} = \bar{B}_{\nu\sigma},$$

où par $\bar{\Phi}_\nu$ et $\bar{\psi}_\nu$ on a désigné les termes qui ne contiennent pas $\ddot{\eta}$; $\bar{A}_{\nu 0}$ et $\bar{B}_{\nu 0}$ ont les significations ci-dessous :

(18) $$\bar{A}_{\nu 0} = \frac{\partial \bar{r}_{Q_\nu}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{r}_{Q_\nu}}{\partial q_k} \gamma_{k0}$$

et

(19) $$\bar{B}_{\nu 0} = \left(\frac{\partial \theta_{\nu p}}{\partial t} + \frac{\partial \theta_{\nu p}}{\partial q_k}\gamma_{k0}\right)\bar{i}_3 + \left(\frac{\partial \theta_{\nu r}}{\partial t} + \frac{\partial \theta_{\nu r}}{\partial q_k}\gamma_{k0}\right)\bar{i}_3^{(\nu)} + \left(\frac{\partial \theta_{\nu n}}{\partial t} + \frac{\partial \theta_{\nu n}}{\partial q_k}\gamma_{k0}\right)\bar{n}^{(\nu)},$$

$$(k = 1, 2, \ldots, m - r\,;\ \nu = 1, 2, \ldots, n).$$

3. En vertu des relations (16) et (17) l'expression du travail virtue des forces d'inertie du système mécanique peut être écrite sous la forme

(20) $$\delta \mathfrak{P}^i = -\frac{\partial}{\partial \ddot{\eta}_j}\left\{\sum_\nu \left[\frac{1}{2} M_\nu \bar{a}_{G_\nu}^2 + \frac{1}{2}\bar{\varepsilon}_\nu (\dot{\bar{K}}_{G_{\nu r}} + \bar{\omega}_\nu \times \bar{K}_{G_{\nu r}})\right]\right\} \delta\eta_j .$$

D'autre part, si l'on définit la fonction d'Appel pour un système de solides rigides sous la forme :

$$\mathfrak{S} = \sum_\nu \int_{M_\nu} \frac{1}{2} \mathrm{d}m\, a^2,$$

on obtient l'expression suivante pour l'énergie des accélérations :

(21) $$\mathfrak{S} = \frac{1}{2}\sum_\nu [M_\nu \bar{a}_{G_\nu}^2 + \bar{\varepsilon}_\nu (\dot{\bar{K}}_{G_{\nu r}} + \bar{\omega}_\nu \times \bar{K}_{G_{\nu r}}) + 2E_{\nu r}\,\omega_\nu^2],$$

ce qui permit encore à écrire :

$$\delta \mathfrak{P}^i = -\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \ddot{\eta}_j}\delta\eta_j , \quad (j = 1, 2, \ldots, m - r).$$

4. Les relations (8) et (9) permettent aussi à établir l'expression suivante pour le travail virtuel des forces active qui sollicitent le système mécanique considéré :

(22) $$\delta \mathfrak{L} = \sum_\nu (\bar{\mathfrak{F}}_\nu \bar{A}_{\nu j} + \bar{\mathfrak{M}}_{G_\nu} \bar{B}_{\nu j})\,\delta\eta_j , \quad (j = 1, 2, \ldots, m - r).$$

En vertu du principe du travail virtuel et tout en tenant compte de l'arbitrariété des $\delta\eta_j$, on obtient le système d'équations d'Appel pour un système mécanique ayant des solides rigides comme éléments constitutifs :

$$(23) \qquad \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \ddot{\gamma}_{l\sigma}} = \sum_{\nu} (\overline{\mathcal{F}}_{\nu} \bar{A}_{\nu\sigma} + \overline{\mathfrak{M}}_{G_\nu} \bar{B}_{\nu\sigma}), \quad (\sigma = 1, 2, \ldots, m - r).$$

Toutes les expressions et les relations écrites ci-dessus se particularisent en se réduisant aux celles connues de la littérature, pour les systèmes mécaniques ayant comme éléments constitutifs des points matériels définis comme dans les travaux [1]...[5].

Reçue le 10 III 1968

Institut Polytechnique de Jassy,
Chaire de Mécanique Théorique

BIBLIOGRAPHIE

1. Irimiciuc N., *Asupra unei noi forme de prezentare a mecanicii analitice pentru sisteme olonome.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1964, **X (XIV)**, *3-4*, pp. 255-262.
2. Irimiciuc N., Ibănescu I., Rusu E., *Sur le problème des liaisons holonomes imposées aux systèmes de solides rigides.* I. *Liaisons géométriques.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1967, **XIII (XVII)**, *1-2*, pp. 389-397.
3. — *Sur le problème des liaisons holonomes imposées aux systèmes de solides rigides.* II. *Liaisons cinématiques.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1968, **XIV (XVIII)**, *1-2*, pp. 461-467.
4. Irimiciuc N., Stancu M., *Une nouvelle relation pour exprimer le principe de Gauss.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1967, **XIII (XVII)**, *3-4*, pp. 429-433.
5. Irimiciuc N., Deleanu Sp., *Les principes intégrales de la mécanique analytique dans la dynamique des systèmes de solides rigides.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1968, **XIV (XVIII)**, *3-4*, pp. 441-446.
6. Platrier C., *Mécanique rationnelle.* Ed. Dunod, Paris, 1954.
7. Suslov G. K.. *Mecanica raţională.* Ed. tehn. Buc., 1950, (traduit du russe).
8. Whittaker E. T., *Analytical Dynamics.* Cambridge, 1937.

ECUAŢII APPELL PENTRU SISTEME MECANICE DE SOLIDE RIGIDE SUPUSE LA LEGĂTURI NEOLONOME DE MOBILITATE LINIARĂ

(Rezumat)

Luînd drept punct de plecare ecuaţiile de legătură (1) şi (2), se stabilesc noi expresii, corespunzătoare sistemelor mecanice constituite din solide rigide, pentru deplasările virtuale şi pentru energia acceleraţiilor sistemului şi se obţin forme adecvate pentru ecuaţiile lui Appell. Relaţiile obţinute se particularizează în cele cunoscute din literatură pentru cazul sistemelor mecanice constituite din puncte materiale.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

D. C. 532.72 ; 517.946

BOUNDARY-VALUE PROBLEMS ASSOCIATED WITH THE INHOMOGENEOUS DIFFUSION AND WAVE EQUATIONS WITH RETARDED ARGUMENTS IN TIME

BY

E. J. SCOTT

We wish to consider two boundary-value problems involving functions with a retarded time argument and forcing functions independent of time. The first of these is to determine the solution of:

$$r(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2\frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] + b^2\frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial u(x,t-\tau)}{\partial x}\right] + F(x), \tag{1}$$

$$(0 < x < l,\ t > \tau),$$

$$u(0,t) = u_1, \quad u(l,t) = u_2, \quad (t > \tau), \tag{2}$$

$$u(x,t) = \varphi(x,t), \quad (0 \leqslant t \leqslant \tau,\ 0 \leqslant x \leqslant l), \tag{3}$$

where $r(x) > 0$, $p(x) > 0$, $r(x)$, $F(x)$ are continuous, and $p(x)$ is once continuously differentiable. In addition, $\varphi(x,t)$ is continuous in t and twice continuously differentiable in x, and u_1, u_2, a^2, b^2 are real constants.

The above problem can be reduced to the solution of an homogeneous diffusion equation with a retarded time argument and homogeneous boundary conditions by representing $u(x,t)$ in the form

$$u(x,t) = w(x) + v(x,t), \tag{4}$$

and subjecting $w(x)$ to the conditions

$$(a^2 + b^2)[p(x)w'(x)]' + F(x) = 0, \tag{5}$$

$$w(0) = u_1,\ w(l) = u_2. \tag{6}$$

The solution of (5) subject to (6) turns out to be

$$w(x) = u_1 - (a^2 + b^2)^{-1}\left[\int_0^x\int_0^{\xi_2} p^{-1}(\xi_2)\, F(\xi_1)\, d\xi_1\, d\xi_2\right] +$$

$$(7) \qquad + \left(\int_0^x p^{-1}(\xi_2)\, d\xi_2 \Big/ \int_0^l p^{-1}(\xi_2)\, d\xi_2\right)\left\{(u_2 - u_1) + \right.$$

$$\left. + (a^2 + b^2)^{-1}\left[\int_0^l p^{-1}(\xi_2)\int_0^{\xi_2} F(\xi_1)\, d\xi_1\, d\xi_2\right]\right\}.$$

Consequently, the problem in $v(x,t)$ is

$$(8) \qquad r(x)\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = a^2\frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right] + b^2\frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial v(x,t-\tau)}{\partial x}\right],$$
$$(0 < x < l,\ t > \tau),$$

$$(9) \qquad v(0,t) = v(l,t) = 0,\ (t > \tau),$$

$$(10) \qquad v(x,t) = \varphi(x,t) - w(x),\ (0 \leqslant t \leqslant \tau,\ 0 \leqslant x \leqslant l).$$

To solve this problem we employ separation of variables by seeking solutions of the form

$$(11) \qquad v(x,t) = X(x)\,T(t).$$

Proceeding in the usual way, we are led to the Sturm-Liouville problem

$$(12) \qquad [p(x)X'(x)]' + \lambda^2 r(x)X(x) = 0, \quad X(0) = X(l) = 0,$$

and the problem of solving the first order equation with retarded time argument

$$(13) \qquad T'(t) + \lambda^2[a^2T(t) + b^2T(t-\tau)] = 0, \quad (t > \tau).$$

Let the eigenvalues and eigenfunctions of problem (12) be λ_n and $X_n(x)$, respectively. Wishing to take advantage of the fact that (13) can be solved in a form apropriate to the problem at hand, we expand (10) in a series of eigenfunctions, namely,

$$(14) \qquad \varphi(x,t) - w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t)X_n(x),\ (0 \leqslant t \leqslant \tau,\quad 0 \leqslant x \leqslant l),$$

where $A_n(t)$ are the Fourier coefficients. Thus we are reduced to the problem of solving the equations

$$(15) \qquad T_n'(t) + \lambda_n^2[a^2\,T_n(t) + b^2\,T_n(t-\tau)] = 0,\ (t > \tau,\ n = 1,2,3,\ldots),$$

subject to the initial conditions

$$T_n(t) = A_n(t), \quad (0 \leqslant t \leqslant \tau,\ n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{16}$$

Using the Laplace transformation, [1], [2], one can show that the solution of the preceding problem is

$$T_n(t) = A_n(\tau)k(t-\tau) - \lambda_n^2 b^2 \int_0^{\tau} A_n(u)k(t-\tau-u)\,du, \quad (t > \tau,\ n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{17}$$

where

$$k(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{[s + \lambda_n^2(a^2 + b^2 e^{-s\tau})]^{-1}\}. \tag{18}$$

Hence, the solution of the original boundary-value problem may be written as

$$u(x, t) = w(x) + \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)\, T_n(t), \quad (0 < x < l,\ t > \tau), \tag{19}$$

with $w(x)$ and $T_n(t)$ as given in (7) and (17), respectively.

The second boundary-value problem involving the inhomogeneous wave equation with time retardation can be treated in an analogous manner. Thus, consider the equation

$$r(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] + b^2 \frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial u(x, t-\tau)}{\partial x}\right] + F(x), \tag{20}$$
$$(0 < x < l,\ t > \tau),$$

subject to the conditions

$$u(0, t) = u_1, \quad u(l, t) = u_2, \quad (t > \tau), \quad u(x, t) = \varphi(x, t), \quad (0 \leqslant t \leqslant \tau,\ 0 \leqslant x \leqslant l),$$
$$u_t(x, t) = \psi(x, t), \quad (0 \leqslant t \leqslant \tau,\ 0 \leqslant x < l).$$

In addition to the conditions on the functions mentioned before, we stipulate that $\psi(x, t)$ be once continuously differentiable with respect to t and twice continuously differentiable with respect to x.

Again we seek solutions of the form $u(x, t) = w(x) + v(x, t)$ and find that, as before, $w(x)$ is given by (7), whearas $v(x, t)$ satisfies the boundary-value problem

$$r(x)\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right] + b^2 \frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial v(x, t-\tau)}{\partial x}\right], \quad (0 < x < l,\ t > \tau),$$
$$v(x, t) = \varphi(x, t) - w(x), \quad (0 \leqslant t \leqslant \tau,\ 0 \leqslant x \leqslant l),$$
$$v_t(x, t) = \psi(x, t), \quad (0 \leqslant t \leqslant \tau,\ 0 \leqslant x \leqslant l).$$

Separation of variables leads to the Sturm-Liouville problem (12) and the equation

$$T''(t) + \lambda^2[a^2 T(t) + b^2 T(t-\tau)] = 0, \quad (t > \tau).$$

The eigenvalues λ_n and eigenfunctions $X_n(x)$ of problem (12) can now be used to determine the Fourier coefficients $A_n(t)$, $B_n(t)$, defined over the interval $(0 \leqslant t \leqslant \tau)$, in the eigenfunction expansions of $\varphi(x,t) - w(x)$ and $\psi(x,t)$, respectively. There remains, then, the problem of solving the set of equations

$$T_n''(t) + \lambda_n^2[a^2 T_n(t) + b^2 T_n(t-\tau)] = 0, \quad (t > \tau, \ n = 1,2,3,...),$$

subject to the initial conditions

$$T_n(t) = A_n(t), \quad T_n'(t) = B_n(t), \quad (0 \leqslant t \leqslant \tau, \quad n = 1,2,3,...).$$

Application of the Laplace transformation yields the following solution of the preceding difference-differential equation in the form of a definite integral, namely,

$$T_n(t) = B_n(\tau)k(t-\tau) - A_n(\tau)k'(t-\tau) -$$

$$(21) \qquad - \lambda_n^2 b^2 \int_0^{\tau} A_n(u)k(t-\tau-u)\,du, \quad (t > \tau, \ n = 1,2,3,...),$$

where $k(t)$ is given by the inverse Laplace transform

$$k(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{[s^2 + \lambda_n^2(a^2 + b^2 e^{-s\tau})]^{-1}\}, \quad (n = 1,2,3,...).$$

Thus, the solution of the generalized wave equation (20) with retarded time argument can be expressed in the form

$$u(x,t) = w(x) + \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t),$$

where $X_n(x)$ are the eigenfunctions of (12) and $T_n(t)$ is given by (21).

Received the 6 II 1968

University of Illinois, Urbana, Ill USA

REFERENCES

1. Мышкис А. Д., *Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом*. М., 1951.
2. Bellman R., Cooke K., *Differential-Difference Equations*. Academic Press, 1963.

PROBLEME DE CONTUR ASOCIATE CU DIFUZIA NEOMOGENĂ ŞI CU ECUAŢIILE UNDELOR CU ARGUMENTE ÎNTÎRZIATE ÎN TIMP

(Rezumat)

Se tratează problema de contur indicată în titlu, luîndu-se ca punct de plecare modelul matematic dat prin ecuaţiile (1)...(3), respectiv (20).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

C. D. 531.55

NOTE ON THE BALLISTIC EQUATIONS

BY

R. MÜLLER

The author is pleased to dedicate this paper to the University of Otago on his Centenary Jubiler Year

1. Assuming that the motion of the mass-centre takes place in a vertical plane determined by the initial velocity v_0 of P, we have the well-known equations:

$$\dot{v} = -cf(v) - g\sin\theta, \qquad (2) \quad v\dot{\theta} = -g\cos\theta. \tag{1}$$

Here c and g are functions of the height y of P above the horizontal plane. However, we shall treat c and g as constants; this is permissible for sufficiently flat trajectories. Also, the earth's rotation is neglected.

Eliminating θ between equations (1) and (2), we obtain

$$[\dot{v} + cf(v)]^2 + (v\dot{\theta})^2 = g^2. \tag{3}$$

Differentiating (1) with respect to the time, and using (2), we get

$$\frac{\mathrm{d}\dot{v}}{\mathrm{d}v}\dot{v} = -cf'(v)\dot{v} + v\dot{\theta}^2. \tag{4}$$

From (3) and (4) we have

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}(v\dot{v}) = \frac{g^2 - (cf)^2}{\dot{v}} - c(2f + vf'). \tag{5}$$

Writing

$$v[g^2 - (cf)^2] = F_1(v), \quad -c(2f + vf') = F_2(v),$$

equation (5) becomes

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}(v\dot{v}) = \frac{F_1(v)}{v\dot{v}} + F_2(v). \tag{6}$$

Integration of (6) with respect to v gives

$$v\dot{v} = \int_{v_0}^{v} \frac{F_1(v)}{v\dot{v}}\,\mathrm{d}v + F(v) - F(v_0) + (v\dot{v})_0, \tag{7}$$

where

$$\int_{v_0}^{v} F_2(v)\mathrm{d}v = F(v) - F(v_0). \tag{8}$$

Put

$$\frac{F_1(v)}{v\dot{v}}\,\mathrm{d}v = V, \tag{9}$$

and write

$$F(v) - F(v_0) + (v\dot{v})_0 = H(v), \tag{10}$$

(7) now becomes

$$F_1(v)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}V} = V + H(v) \tag{11}$$

or

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}v} = \frac{F_1(v)}{H(v) + V}. \tag{12}$$

Integrating and using Picard's method of successive approximation, we find

$$V(v) = \int_{v_0}^{v} \frac{F_1(v)\mathrm{d}v}{H(v) + \int_{v_0}^{v} \frac{F_1(v)\mathrm{d}v}{H(v) + \int_{v_0}^{v} \frac{F_1(v)\mathrm{d}v}{H(v) + \ldots}}}. \tag{13}$$

Expression (13) for V holds for the first part of the trajectory, where v monotonously decreases from its initial value v_0 towards its minimum

value $v_{\min} = v^*$. During the process of integration (13) we have reached v^*, when both sides of equation (7) vanish. On the second part of the trajectory v increases steadily from v^* until a certain limiting value v^0, where

$$cf(v^0) = g. \tag{14}$$

For the second part of the trajectory we have

$$V = V(v^*) + \int_{v^*}^{v} \frac{F_1(v)\mathrm{d}v}{H(v) + \int_{v^*}^{v} \frac{F_1(v)\mathrm{d}v}{H(v) + \ldots}}. \tag{15}$$

For $v = v^*$, $\dot{v}$ vanishes. However V given by (9) remains finite, as we see when we write (9) in the form

$$V = \int_{t_*}^{t} \frac{F_1(v)}{v}\,\mathrm{d}t = \int_{t_*}^{t} [g^2 - (cf)^2]\mathrm{d}t, \tag{16}$$

t denoting the time.

The initial values v_0 and θ_0 are given; we get $\dot{v}_0$ from the equation

$$\dot{v}_0 = -cf(v_0) - g\sin\theta_0. \tag{17}$$

If we know $V(v)$, equations (7) and (1) show that we now know v as function of θ. As it is known, the remaining part of the problem is then reducible to quadratures.

Notations

v — velocity of the projectile F,
$f(v)$ — function of air-resistance,
$cf(v)$ — air-resistance acting on P per unit mass,
θ — inclination of the tangent to the path of the mass-centre of P towards the horizontal.

Received the 24 VI 1968

University of Otago, Dunedin,
New Zealand

ASUPRA ECUAŢIILOR BALISTICE

(Rezumat)

Se studiază, în anumite ipoteze, schema matematică a problemei de balistică externă.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

C. D. 531.131.1

SUR L'ACCÉLÉRATION D'ORDRE QUELCONQUE DANS LE MOUVEMENT GÉNÉRAL DU CORPS RIGIDE

PAR

GH. D. MUNTEANU

Communication présentée dans la session scientifique jubiliaire de l'Institut Polytechnique de Braşov, 6—7 décembre 1968

Dans l'article [1] M. D. Mangeron a établi, entre autres, les formules suivantes de récurrence pour les trois paramètres cinématiques A_n, $\bar{B}_n$ et $\bar{C}_{n,j}$:

$$A_{n+1} = \dot{A}_n + (\bar{\omega}\bar{B}_n);\ \bar{B}_{n+1} = \dot{\bar{B}}_n - A_n\bar{\omega} \text{ avec } A_0 = 0,\ \bar{B}_0 = \bar{\omega},\ (n = 0,1,2,...)$$

et

$$\bar{C}_{n,j} = \bar{C}_{n-1,j-1} + D\bar{C}_{n-1,j} \text{ où } D \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \bar{\omega}\times \text{ avec } \bar{C}_{1,0} = \bar{\omega},\ \bar{C}_{n-1,-1} = \bar{B}_{n-1},$$

$$(j = 0,1,2,...,n-1).$$

L'accélération d'ordre quelconque dans le mouvement général du corps rigide, en fonction de ces trois paramètres, s'exprime sous la forme:

$$\bar{a}^{(n)} = \bar{a}_A^{(n)} + \{-A_n + \bar{B}_n\times\}\bar{r} + \sum_{j=1}^{n-1}\bar{\omega}^{(j)}(\bar{C}_{n,j}\bar{r}).$$

Dans cette Note nous nous proposons de donner pour le paramètre $\bar{C}$ une autre formule de récurrence, en gardant la forme d'expression pour $\bar{a}^{(n)}$.

Le paramètre $\bar{C}$ sera affecté aussi par deux indices $n-j$, n, c'est-à-dire $\bar{C}_{n-j,n}$; le deuxième indice indiquera l'ordre de l'accélération linéaire (ainsi que A_n et $\bar{B}_n$) mais j indiquera l'ordre de la vitesse angulaire; j ajouté au premier indice de $\bar{C}$ fournira le deuxième indice de $\bar{C}$.

Il en résulte pour $n = 0$, c'est-à-dire pour les vitesses linéaires, $\bar{C}_{j,0} = 0$, quel que soit j entier et négatif, ce qui n'a pas de sens physique.

À cette condition on peut trouver la formule de récurrence:

$$\bar{C}_{n-j,n} = \bar{C}_{n-j,n-1} + \dot{\bar{C}}_{n-j-1,n-1} + \bar{C}_{n-j-1,n-1}[\omega\times,$$

avec $\bar{C}_{0,i} = \bar{B}_0$ et $\bar{C}_{i,i} = \bar{B}_i$, $(i = 1, 2_i, ..., n)$; l'accélération d'ordre quelconque aura maintenant l'expression:

$$a^{(n)} = a_A^{(n)} + \{-\bar{A}_n + \bar{B}_n \times\}\bar{r} + \sum_{j=1}^{n} \bar{\omega}^{(j)}(\bar{C}_{n-j,n}\bar{r}).$$

Dans une Note en cours d'élaboration nous exposerons quelques problèmes de la cinématique des opérateurs différentiels d'ordre quelconque dans les espaces euclidiens à plusieures dimensions [2], [3].

Institut Polytechnique de Braşov

BIBLIOGRAPHIE

1. Манжерон Д. М., *Об экстремальных свойствах приведенных ускорений любого порядка.* ДАН СССР, 1957, **112**, *1*, стр. 27—28.
2. Woinaroski R., *Cinematica solidului rigid fără punct fix în spaţiul euclidian cu mai multe dimensiuni.* St. şi cerc. mec. apl., 1966, **24**, *2*, pp. 319—333.
3. Mangeron D., Oğuztöreli M. N., *Nuove equazioni di Meccanica analitica ed operatori differenziali d'ordine superiore.* Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Cl. sci. fis. mat. e nat., s. VIII, 1968, **44**, pp. 375—380.

ASUPRA ACCELERAŢIEI DE ORDIN OARECARE ÎN MIŞCAREA GENERALĂ A RIGIDULUI

(Rezumat)

Se prezintă o nouă formulă de recurenţă pentru parametrul cinematic $\bar{C}$, din formulele de recurenţă Mangeron [1], folosite în expresia acceleraţiei de un ordin oarecare:

$$\bar{C}_{n-j,n} = C_{n-j,n-1} + \dot{\bar{C}}_{n-j-1,n-1} + \bar{C}_{n-j-1,n-1}[\bar{\omega}\times.$$

$\bar{a}^{(n)}$ se poate scrie sub forma

$$\bar{a}^{(n)} = \bar{a}_A^{(n)} + \{-A_n + \bar{B}_n \times\}\bar{r} + \sum_{j=1}^{n} \omega^{(j)}(\bar{C}_{n-j,n}\bar{r}).$$

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

C. D. 539.413 ; 539.414

CONTRIBUTION TO THE CALCULUS OF THE BENDIG-TORSION BIMOMENT IN A STRAIGHT BEAM UNDER HOBBLED TORSION STRESS

BY

VICTOR BAUȘIC, D. HORBANIUC and C. GIREADĂ

Paper presented at the Scientific Session of the Polytechnic Institute of Jassy, February the 5—7 st, 1965

1. Introduction

The solution of thin wall beams under hobbled torsion stress consists of the calculus of the bimoment B_x, bending-torsion moment M_ω and torsion moment M_t.

In determining those values the following equations are used:

$$B_x = C \operatorname{sh} \alpha x + D \operatorname{ch} \alpha x , \tag{1}$$

where: $\alpha = \sqrt{GI_t/EI}$ and C, D are integration constants which we determine out of the initial conditions, and:

$$M_x = M_\omega + M_t ; \tag{2}$$

here M_x represents the external torsion moment while M_ω is derived from:

$$M_\omega = \frac{dB}{dx} . \tag{3}$$

For determining the constants C and D of a loaded beam with n concentrated forced we must solve a system of $2n + 2$ equations requiring a large amount of calculus.

In order to avoid this, we propose to find another form of expression of the bimoment by determining the constants C and D in the basis of equation (1).

Let us consider a loaded beam under n concentraded forces (Fig. 1). Taking a single origin (for example the support A) we write the equations of the bimoment in the $n + 1$ portions:

$$
(4)\quad \begin{cases} B_1 = C_1 \operatorname{sh} \alpha x_1 + D_1 \operatorname{ch} \alpha x_1, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ B_i = C_i \operatorname{sh} \alpha x_i + D_i \operatorname{ch} \alpha x_i, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ B_{n+1} = C_{n+1} \operatorname{sh} \alpha x_{n+1} + D_{n+1} \operatorname{ch} \alpha x_{n+1}. \end{cases}
$$

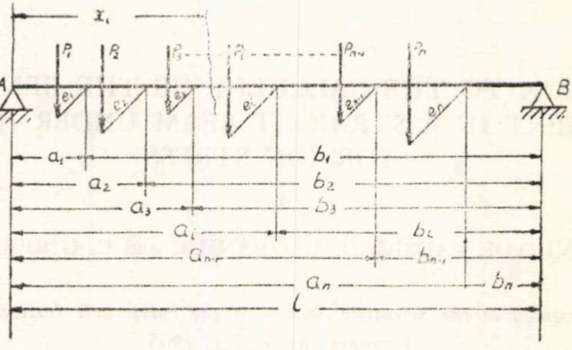


Fig. 1

From the conditions of continuity we obtain *2n* equations while from the initial conditions two more equations are obtained.

2. Continuity Conditions

a) Conditions of equal bimoments:

$$
(5)\quad \begin{cases} x_1 = x_2 = a_1,\ B_1 = B_2,\ (C_1 - C_2) \operatorname{sh} \alpha a_1 = (D_2 - D_1) \operatorname{ch} \alpha a_1, \\ \cdot \\ x_i = x_{i+1} = a_i,\ B_i = B_{i+1},\ (C_i - C_{i+1}) \operatorname{sh} \alpha a_i = (D_{i+1} - D_i) \operatorname{ch} \alpha a_i, \\ \cdot \\ x_n = x_{n+1} = a_n,\ B_n = B_{n+1},\ (C_n - C_{n+1}) \operatorname{sh} \alpha a_n = (D_{n+1} - D_n) \operatorname{ch} \alpha a_n. \end{cases}
$$

b) Conditions of equal distorsions:

$$
(6)\quad \begin{cases} x_1 = x_2 = a_1,\ \theta'_1 = \theta'_2,\ M_{t_1} = M_{t_2}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_i = x_{i+1} = a_i,\ \theta'_i = \theta'_{i+1},\ M_{t_i} = M_{t_{i+1}}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n = x_{n+1} = a_n,\ \theta'_n = \theta'_{n+1},\ M_{t_n} = M_{t_{n+1}}. \end{cases}
$$

It is known that:

$$(7)\qquad \begin{cases} M_{t_1} + M_{\omega_1} = M_{x_1}, \; M_{t_1} = M_{x_1} - M_{\omega_1}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ M_{t_i} + M_{\omega_i} = M_{x_i}, \; M_{t_i} = M_{x_i} - M_{\omega_i}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ M_{t_{n+1}} + M_{\omega_{n+1}} = M_{x_{n+1}}, \; M_{t_{n+1}} = M_{x_{n+1}} - M_{\omega_{n+1}}. \end{cases}$$

Substituting M_t from (7) to (6) we obtain:

$$(8)\qquad \begin{cases} M_{x_1} - M_{x_2} = M_{\omega_1} - M_{\omega_2}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ M_{x_i} - M_{x_{i+1}} = M_{\omega_i} - M_{\omega_{i+1}}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ M_{x_n} - M_{x_{n+1}} = M_{\omega_n} - M_{\omega_{n+1}}. \end{cases}$$

We write the external torsion moments in each portion, i. e.

$$(9)\qquad \begin{cases} M_{x_1} = V_A e, \\ M_{x_2} = V_A e - P_1 e_1, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ M_{x_i} = V_A e - P_1 e_1 - P_2 e_2 - \ldots - P_{i-1} e_{i-1}, \\ \cdot \\ M_{x_{n+1}} = V_A e - P_1 e_1 - \ldots - P_i e_i - \ldots - P_{n-1} e_{n-1} - P_n e_n. \end{cases}$$

On account of (3) there results:

$$(10)\qquad \begin{cases} M_{\omega_1} = C_1 \operatorname{ch} \alpha x_1 + D_1 \operatorname{sh} \alpha x_1, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ M_{\omega_i} = C_i \operatorname{ch} \alpha x_i + D_i \operatorname{sh} \alpha x_i, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ M_{\omega_{n+1}} = C_i \operatorname{ch} \alpha x_{n+1} + D_{n+1} \operatorname{sh} \alpha x_{n+1}. \end{cases}$$

Substituting (9) and (10) in (8) we obtain:

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{P_1 e_1}{\alpha} = (C_1 - C_2) \operatorname{ch} \alpha a_1 + (D_1 - D_2) \operatorname{sh} \alpha a_1, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{P_i e_i}{\alpha} = (C_i - C_{i+1}) \operatorname{ch} \alpha a_i + (D_i - D_{i+1}) \operatorname{sh} \alpha a_i, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{P_n e_n}{\alpha} = (C_n - C_{n+1}) \operatorname{ch} \alpha a_n + (D_n - D_{n+1}) \operatorname{sh} \alpha a_n. \end{cases}$$

By using (5) and (11) it is found that:

$$(12)\quad \begin{cases} C_1 - C_2 = \dfrac{P_1 e_1}{\alpha} \operatorname{ch} \alpha a_1, \\ \cdots\cdots\cdots \\ C_i - C_{i+1} = \dfrac{P_i e_i}{\alpha} \operatorname{ch} \alpha a_i, \\ \cdots\cdots\cdots \\ C_n - C_{n+1} = \dfrac{P_n e_n}{\alpha} \operatorname{ch} \alpha a_n; \end{cases} \qquad (13)\quad \begin{cases} D_1 - D_2 = \dfrac{P_1 e_1}{\alpha} \operatorname{sh} \alpha a_1, \\ \cdots\cdots\cdots \\ D_i - D_{i+1} = \dfrac{P_i e_i}{\alpha} \operatorname{sh} \alpha a_i, \\ \cdots\cdots\cdots \\ D_n - D_{n+1} = \dfrac{P_n e_n}{\alpha} \operatorname{sh} \alpha a_n. \end{cases}$$

Thus we have obtained $2n$ equations.

3. Conditions of Support ($x_1 = 0$, $B_1 = 0$, and $x_{n+1} = l$, $B_{n+1} = 0$)

Accordingly, we dispose of a system of the $2n+2$ equations wich after solution offer the following expressions for the constants:

$$(14)\quad \begin{cases} D_1 = 0, \\ D_2 = \dfrac{P_1 e_1}{\alpha} \operatorname{sh} \alpha a_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ D_i = \dfrac{P_1 e_1}{\alpha} \operatorname{sh} \alpha a_1 + \dfrac{P_2 e_2}{\alpha} \operatorname{sh} \alpha a_2 + \ldots + \dfrac{P_{i-1} e_{i-1}}{\alpha} \operatorname{sh} \alpha a_i, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ D_{n+1} = \dfrac{P_1 e_1}{\alpha} \operatorname{sh} \alpha a_1 + \dfrac{P_2 e_2}{\alpha} \operatorname{sh} \alpha a_2 + \ldots + \dfrac{P_i e_i}{\alpha} \operatorname{sh} \alpha a_i + \ldots + \dfrac{P_n e_n}{\alpha} \operatorname{sh} \alpha a_n; \end{cases}$$

$$(15)\quad \begin{cases} C_1 = -\left(P_1 e_1 \operatorname{sh} \alpha a_1 + P_2 e_2 \operatorname{sh} \alpha a_2 + \ldots + P_n e_n \operatorname{sh} \alpha a_n\right) \dfrac{\operatorname{ch} \alpha l}{\alpha \operatorname{sh} \alpha l} + \\ \qquad + \dfrac{1}{\alpha}\left(P_1 e_1 \operatorname{ch} \alpha a_1 + P_2 e_2 \operatorname{ch} \alpha a_2 + \ldots + P_n e_n \operatorname{ch} \alpha a_n\right), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_i = -\left(P_1 e_1 \operatorname{sh} \alpha a_1 + P_2 e_2 \operatorname{sh} \alpha a_2 + \ldots + P_n e_n \operatorname{sh} \alpha a_n\right) \dfrac{\operatorname{ch} \alpha l}{\alpha \operatorname{sh} \alpha l} + \\ \qquad + \dfrac{1}{\alpha}\left(P_i e_i \operatorname{ch} \alpha a_i + \ldots + P_n e_n \operatorname{ch} \alpha a_n\right), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_{n+1} = -\left(P_1 e_1 \operatorname{sh} \alpha a_1 + P_2 e_2 \operatorname{sh} \alpha a_2 + \ldots + P_n e_n \operatorname{sh} \alpha a_n\right) \dfrac{\operatorname{ch} \alpha l}{\alpha \operatorname{sh} \alpha l}. \end{cases}$$

After substitution of constants C_i and D_i from (14) and (15) in the bimoment equation (4) and computation, there results:

$$
(16)\quad \begin{cases}
B_1 = K \operatorname{sh} \alpha x_1 (P_1 e_1 \operatorname{sh} \alpha b_1 + P_2 e_2 \operatorname{sh} \alpha b_2 + \ldots + P_n e_n \operatorname{sh} \alpha b_n), \\
B_2 = K \operatorname{sh} \alpha x_2 (P_2 e_2 \operatorname{sh} \alpha b_2 + P_3 e_3 \operatorname{sh} \alpha b_3 + \ldots + P_n e_n \operatorname{sh} \alpha b_n) + \\
\qquad + \operatorname{sh} \alpha (l - x_1) P_1 e_1 \operatorname{sh} \alpha a_1, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
B_i = K \operatorname{sh} \alpha x_i (P_i e_i \operatorname{sh} \alpha b_i + P_{i+1} e_{i+1} \operatorname{sh} \alpha b_{i+1} + \ldots + P_n e_n \operatorname{sh} \alpha b_n) + \\
+ K \operatorname{sh} \alpha (l - x_i)(P_1 e_1 \operatorname{sh} \alpha a_1 + P_2 e_2 \operatorname{sh} \alpha a_2 + \ldots + P_{i-1} e_{i-1} \operatorname{sh} \alpha a_{i-1}), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
B_{n+1} = K \operatorname{sh} \alpha (l - x_{n+1})(P_1 e_1 \operatorname{sh} \alpha a_1 + P_2 e_2 \operatorname{sh} \alpha a_2 + \ldots + P_n e_n \operatorname{sh} \alpha a_n),
\end{cases}
$$

where $K = 1/\alpha \operatorname{sh} \alpha l = \text{constant}$.

Thus, for a certain section the bimoment may be written:

$$
(17)\qquad B_{x_i} = K \operatorname{sh} \alpha x_i \sum_{i}^{n} P_i e_i \operatorname{sh} \alpha b_i + K \operatorname{sh} \alpha (l - x_i) \sum_{1}^{i-1} P_j e_j \operatorname{sh} \alpha a_j .
$$

From equation (17) results the following theorem concerning the calculus of the bimoment in a certain section:

The bimoment in a section is equal to the sum of the given internal bimoments in that section by the external forces from the left and right of it.

Since the bimoment in a section appears as a superposition of the given internal bimoments of all the forces of the beam there results that for writting the expression of the bimoment in a current section, the expression of the given bimoment of a single force in that section must be known. The rest of the forces are similarly analysed.

4. Applications

Let us determine the bimoment in a section of a beam built-in at one end and free to the other (Fig. 2).

To write the equations of the bimoment in section x_i of the beam from Fig. 2 the equations of the bimoment in the sections x and x_1 of the beam from Fig. 3 must be determined:

$$
B_x = C \operatorname{sh} \alpha x + D \operatorname{ch} \alpha x, \quad B_{x_1} = C_1 \operatorname{sh} \alpha x_1 + D_1 \operatorname{ch} \alpha x_1 .
$$

We determine the constants C, C_1, D and D_1 satisfying the support conditions: $x=0$, $B_x = 0$; $x_1 = l$, $\theta'_{x_1} = 0$, and those of continuity: $x = x_1 = a$, $B_x = B_{x_1}$ and $\theta' = \theta'_{x_1}$. After computation it is found that:

$$(18)\qquad \begin{cases} B_x = K \operatorname{sh} \alpha x\,(Ve + Pe \operatorname{ch} \alpha b), \\ B_{x_1} = K \operatorname{sh} \alpha x_1\, Ve + K \operatorname{ch} \alpha (l - x_1) Pe \operatorname{sh} \alpha a. \end{cases}$$

Using the equations (18) and superposing the effects we obtain:

$$(19)\qquad \begin{aligned} B_{x_i} = {} & K \operatorname{sh} \alpha x_i (P_i e_i \operatorname{ch} \alpha b_i + P_{i+1} e_{i+1} \operatorname{ch} \alpha b_{i+1} + \ldots + P_n e_n \operatorname{ch} \alpha b_n + Ve) + \\ & + K \operatorname{ch} \alpha (l - x_i)(P_1 e_1 \operatorname{sh} \alpha a_1 + P_2 e_2 \operatorname{sh} \alpha a_2 + \ldots + P_{i-1} e_{i-1} \operatorname{sh} \alpha a_{i-1}), \end{aligned}$$

where $K = 1/\alpha \operatorname{ch} \alpha l = \text{constant}$.

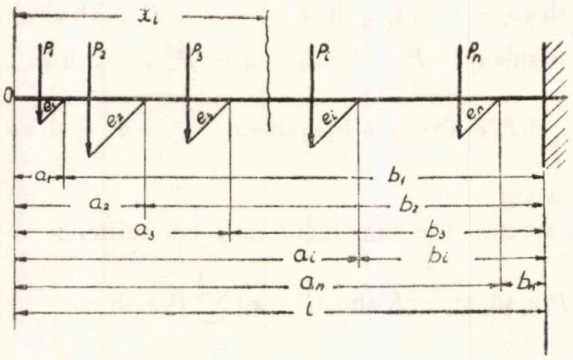


Fig. 2

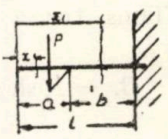


Fig. 3

If for the beam from Fig. 2 the same manner of calculus is adopted as that used for the equation (17) we shall obtain again equation (19) which was inferred on the basis of the basis of the equation enunciated above.

The theoreme deduced on the basis of equation (17) offers the advantage of being applicable for any load.

a) *Beam under uniformly distributed load* (Fig. 4). In this case $e_i = e = \text{const.}$ $\mathrm{d}P_{i_{\text{left}}} = q\,\mathrm{d}z$ and $\mathrm{d}P_{i_{\text{right}}} = q\,\mathrm{d}t$ and equation (17) becomes:

$$B_x = Kqe \operatorname{sh} \alpha x \int_c^{l-x} \operatorname{sh} \alpha t\,\mathrm{d}t + Kqe \operatorname{sh} \alpha (l - x) \int_a^x \operatorname{sh} \alpha z\,\mathrm{d}z.$$

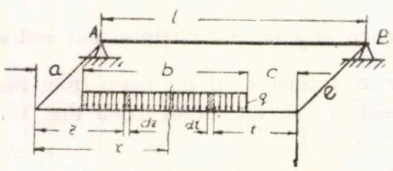


Fig. 4

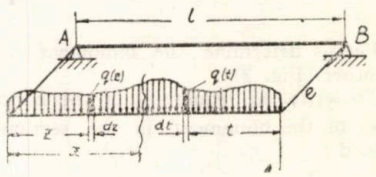


Fig. 5

After computation we find that:

$$B_x = \frac{qe}{\alpha^2}\left[1 - \frac{\operatorname{ch} \alpha c \operatorname{sh} \alpha x + \operatorname{ch} \alpha a \operatorname{sh} \alpha (l - x)}{\operatorname{sh} \alpha l}\right].$$

b) *Beam under a load distributed according to a certain law* (Fig. 5). From equation (17) we obtain:

$$B_x = Ke\left[\operatorname{sh}\alpha x \int_0^{l-x} q(t)\operatorname{sh}\alpha t\,dt + \operatorname{sh}\alpha(l-x)\int_0^{x} q(z)\operatorname{sh}\alpha z\,dz\right].$$

c) *Beam under torsion moment* (Fig. 6). In equation (17) instead of the product $P_i e_i$ there appears torsion moments M_{0_i}. Thus in the section x the equation of the bimoment will be:

$$B_x = K M_{0_3}\operatorname{sh}\alpha x \operatorname{sh}\alpha b_3 + k\operatorname{sh}\alpha(l-x)(M_{0_1}\operatorname{sh}\alpha a_1 + M_{0_2}\operatorname{sh}\alpha a_2).$$

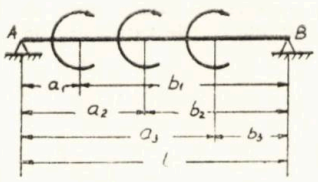


Fig. 6

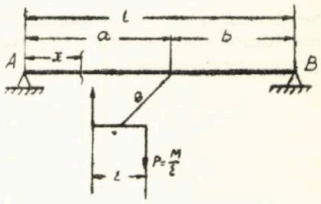


Fig. 7

d) *Beam under concentrated bimoment* (Fig. 7). To be able to write the bimoment in the section x by means of equation (17) we decompose the concentrated moment M in a couple given by two forces placed at infinite small distance; thus $M = P\varepsilon$:

$$B_x = Ke\operatorname{sh}\alpha x\, M\,\frac{\operatorname{sh}\alpha(b+\varepsilon/2) - \operatorname{sh}\alpha(b-\varepsilon/2)}{\varepsilon};$$

the limit value is:

$$B_x = \frac{K}{\alpha}\, e\, M \operatorname{sh}\alpha x \operatorname{sh}\alpha b.$$

5. Conclusions

1. The following theorem is demonstrated: the bimoment in a section is equal to the sum of the internal bimoment set up in that section by the external loads from left and right of it.

2. The deduced theorem is applicable to any statically determined beams, regardless of the manner of loading and supports.

3. In using this theorem the amount of calculus is considerably reduced.

Polytechnic Institute of Jassy,
Department of Strength of Materials

REFERENCES

1. Беляев Н. М., *Сопротивление материалов.* М.—Л., 1953, стр. 541—545.
2. Buzdugan Gh., *Rezistența materialelor.* Ed. Tehn., Buc., 1964, pp. 486—516.
3. Filonenko-Borodici M. M. a. o., *Curs de rezistența materialelor.* P. II, Ed. tehn., Buc., 1952, pp. 288—294, (transl. from. Russian).

CONTRIBUȚII LA CALCULUL BIMOMENTULUI DE ÎNCOVOIERE-RĂSUCIRE ÎNTR-O SECȚIUNE A UNEI GRINZI DREPTE SUPUSĂ LA RĂSUCIRE ÎMPIEDICATĂ

(Rezumat)

Se demonstrează că bimomentul într-o secțiune a unei grinzi drepte static determinate este suma bimomentelor interioare date în acea secțiune de încărcările exterioare de la stînga la dreapta acelei secțiuni.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

C. D. 539.413

UNE MÉTHODE EXPÉDITIVE POUR DÉTERMINER LES DÉFORMATIONS ET LES ÉLÉMENTS STATIQUEMENT NON-DÉTERMINÉS DANS LE CAS DES POUTRES DROITES

PAR

MARIA PINTILIE et D. R. MOCANU

Communication présentée dans la session scientifique de l'Institut Polytechnique de Jassy, 28—30 septembre 1967

1. Introduction

Le problème de la détermination des éléments (réactions, flèches, rotations) des poutres droites est connu des les débuts de la résistance des matériaux.

Dans le premier traité de résistance des matériaux, paru en 1826, Navier calcule la forme des lignes élastiques, la flèche des pièces fléchies et des poutres doublement encastrés, en indiquant le principe de calcul de certains ensembles hyperstatiques et la solution de certains problèmes des poutres continues.

Quoique les principes fondamentaux du calcul des déformations et la détermination des éléments statiquement nondéterminés aient été bien connus depuis environ un siècle, dans cette période on a élaboré nombre de méthodes, utiles seulement dans diverses cas particuliers.

Dans ce qui suit on présente une méthode expéditive et exacte en même temps, pour déterminer les déformations et les éléments statiquement non-déterminés. La méthode peut être facilement appliquée à des systèmes ayant de différents appuis et n'importe quelle charge.

Elle este basée sur l'emploi du théorème de la réciprocité du travail mécanique, le premier état de chargement étant donné par les charges extérieures et les forces de liaison, le deuxième état par une force unitaire appliquée dans la section où l'on exprime la déformation.

2. Détermination des déformations

On considère une poutre simplement appuyée chargée par une système quelconque de charges.

Pour déterminer la flèche (V) dans une section quelconque (C), (v. la fig. 1), on applique le théorème de la réciprocité du travail mécanique, en résultant :

$$V = \sum_{1}^{n_1} P_i v_i + \sum_{1}^{n_2} M_i \theta_i + \sum_{1}^{n_3} \int_{z_i - b_i}^{z_i} p_i v_i \, dz, \tag{1}$$

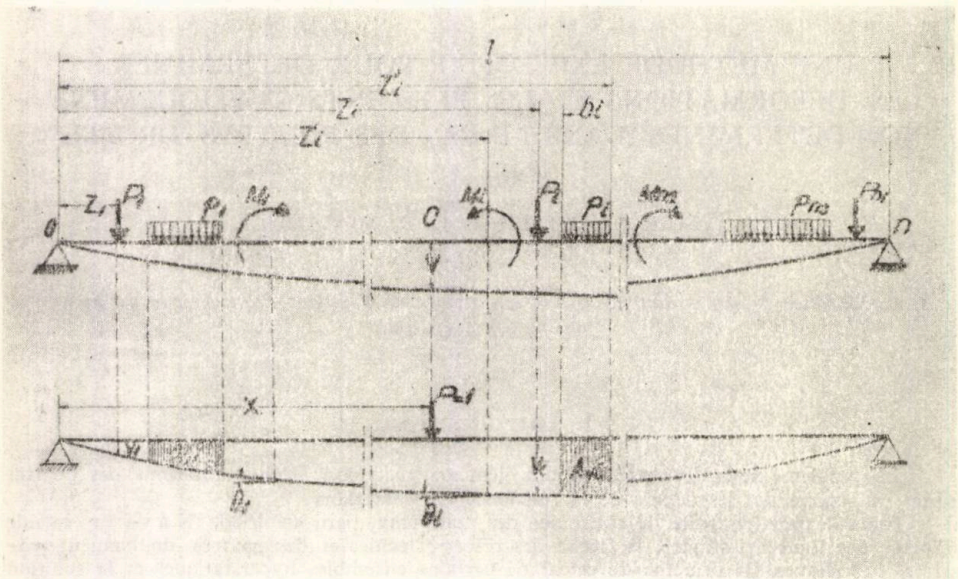


Fig. 1

où l'on a note par : n_1 — le nombre des forces concentrées, n_2 — le nombre des moments concentrés, n_3 — le nombre des portions des charges uniformément distribuées, V — la flèche cherchée $v_i = \overline{v}_i/EI$ — la flèche à l'endroit de la force P_i due à la force unitaire appliqée en (C), $\theta_i = \overline{\theta}_i/EI$ — la rotation à l'endroit du moment M_i due à la force unitaire appliquée en (C), b_i — la longueur sur laquelle on applique la charge uniformément distribuée.

Étant donné que $p_i = \text{const.}$, on l'extrait de l'intégrale qui intervient dans le membre droit de (1) en obtenant

$$\bar{A} v_i = \int_{z_i - b_i}^{z_i} \overline{v}_i \, dz.$$

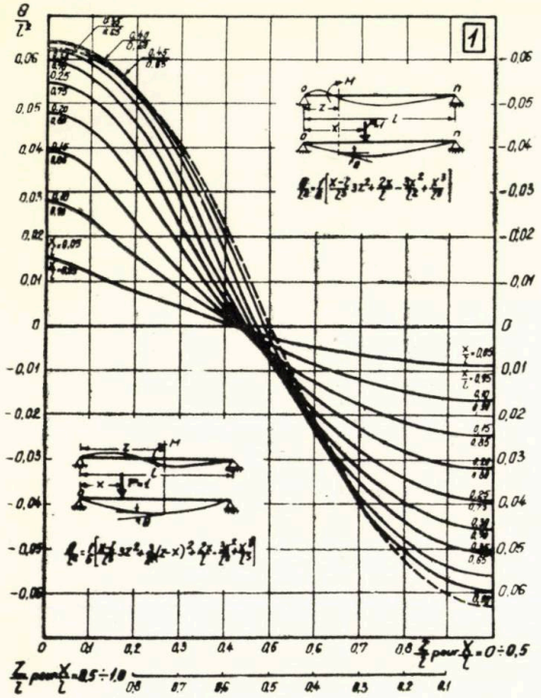


Fig. 2

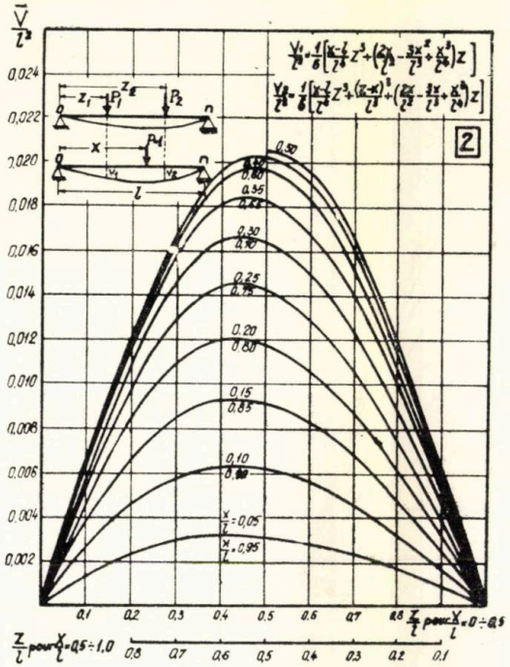


Fig. 3

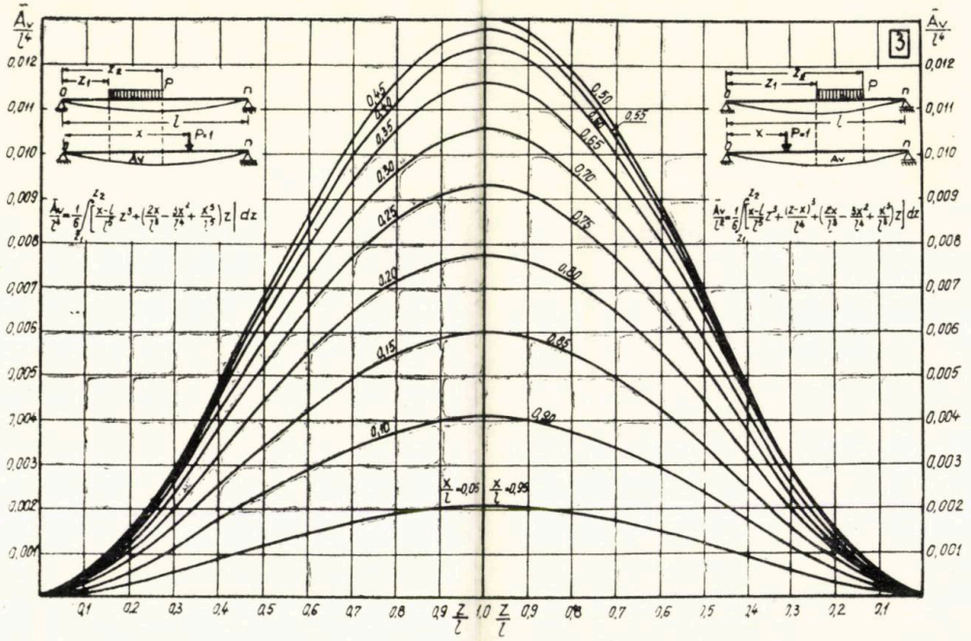


Fig. 4

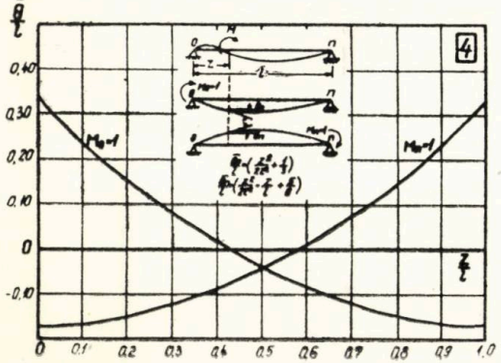


Fig. 5

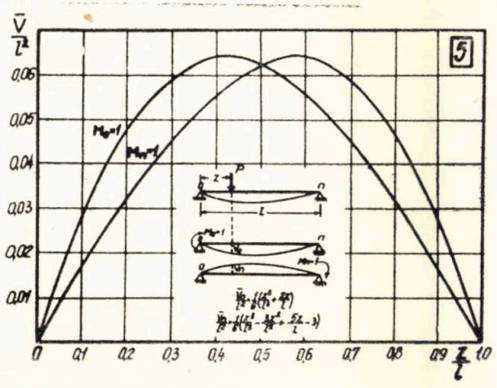


Fig. 6

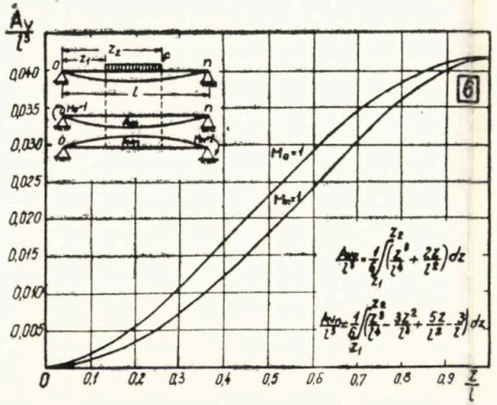
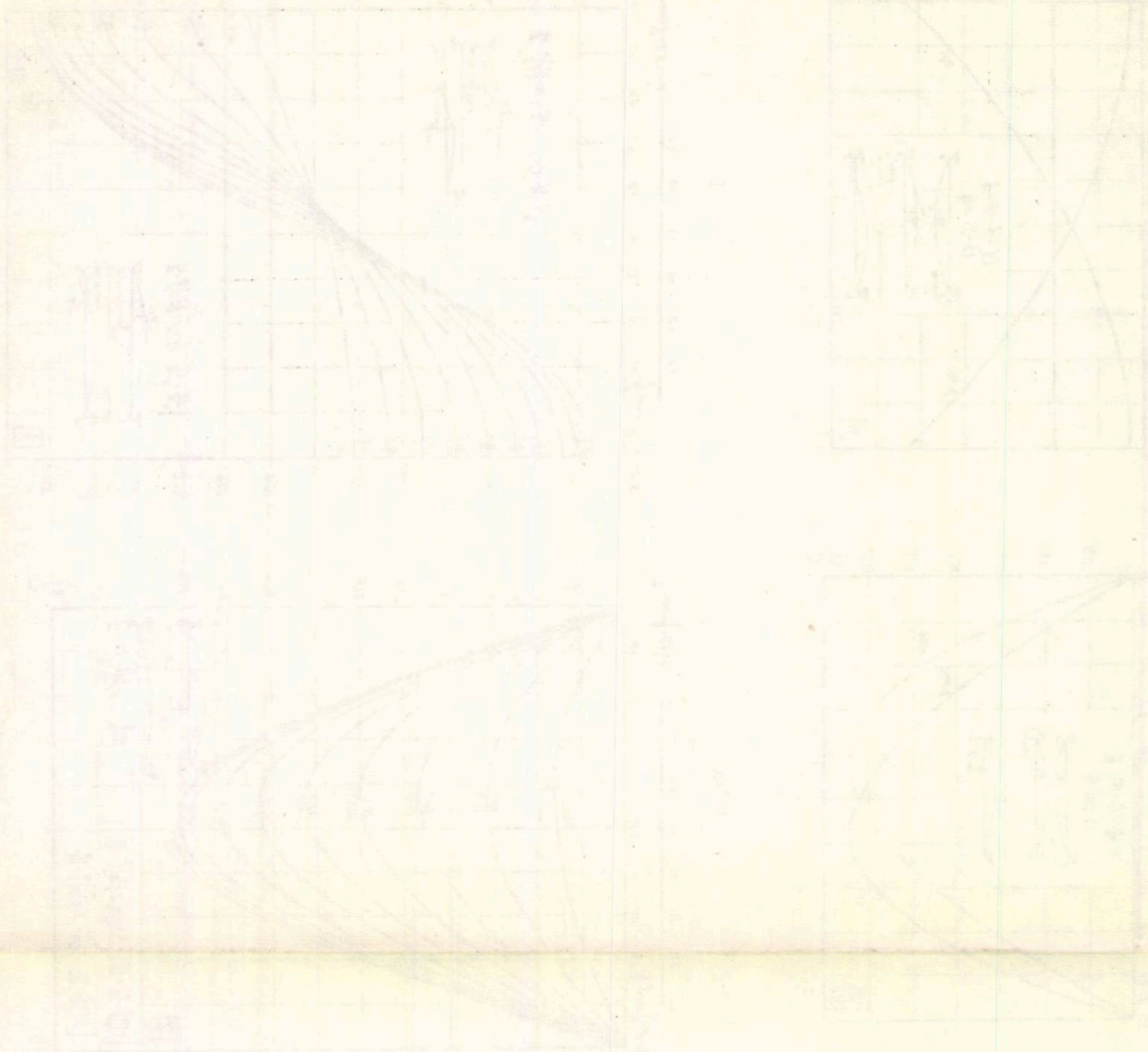


Fig. 7



La relation (1) devient :

$$(2) \qquad V = \frac{1}{E\mathcal{J}}\left(\sum_1^{n_1} P_i \bar{v}_i + \sum_1^{n_2} M_i \bar{\theta}_i + \sum_1^{n_3} p_i \bar{A}v_i\right) \cdot$$

Pour les diverses positions de la charge unitaire et des chargements extérieurs on a calculé les valeurs des coefficients : $\bar{\theta}_i/l^2$, $\bar{v}_i/l^3$, $\bar{A}v_i l^4$ — pour une force unitaire et $\bar{\theta}_i/l$, $\bar{v}_i/l^2$, $\bar{A}v_i/l^3$ — pour un moment unitaire, qui ont été inscrits dans des graphiques.

Pour une force unitaire les coefficients θ_i/l^2 ont été inscrits dans la fig. 2, les coefficients $\bar{v}_i/l^3$ dans la fig. 3 tandis que les coefficients $\bar{A}v_i/l^4$ ont été inscrits dans la fig. 4.

Pour un moment unitaire les coefficients $\bar{\theta}_i/l$ ont été inscrits dans la fig. 5, les coefficients $\bar{v}_i/l^2$ dans la fig. 6 et les coefficients $\bar{A}v_i/l^3$ dans la fig. 7.

On a effectué le calcul des coefficients en utilisant l'équation de l'axe déformée pour une charge unitaire.

Po r une force unitaire les expressions de l'axe déformée sont données ci-dessous : a) dans la partie gauche de la charge unitaire :

$$\bar{v} = E\mathcal{J}v = -\frac{l-x}{l} \cdot \frac{z^3}{6} + \frac{1}{6l}(2l^2x - 3lx^2 + x^3)\, z\,;$$

b) dans la partie droite de la charge unitaire :

$$\bar{v} = E\mathcal{J}v = -\frac{l-x}{l} \cdot \frac{z^3}{6} + \frac{1}{6}(z-x)^3 + \frac{1}{6l}(2l^2x - 3lx^2 + x^3)\, z.$$

Les expressions de la rotation sont les suivantes : a) dans la partie gauche de la charge unitaire :

$$\bar{\theta} = E\mathcal{J}\frac{dv}{dz} = -\frac{l-x}{l} \cdot \frac{z^2}{2} + \frac{1}{6l}(2l^2x - 3lx^2 + x^3)\,;$$

b) dans la partie droite de la charge unitaire :

$$\bar{\theta} = E\mathcal{J}\frac{dv}{dz} = -\frac{l-x}{l} \cdot \frac{z^2}{2} + \frac{1}{2}(z-x)^2 + \frac{1}{6l}(2l^2x - 3lx^2 + x^3).$$

Pour un moment unitaire, les expressions de l'axe déformée sont : a) dans la partie gauche du moment unitaire :

$$\bar{v} = E\mathcal{J}v = \frac{1}{l} \cdot \frac{z^3}{6} + \frac{1}{6l}(3x^2 + 2l^2 - 6lx)\, z\,;$$

b) dans la partie droite du moment unitaire :

$$\bar{v} = E\mathcal{J}v = \frac{1}{l} \cdot \frac{z^3}{6} - \frac{(z-x)^2}{2} + \frac{1}{6l}(3x^2 + 2l^2 - 6lx)\,z.$$

Les expressions de la rotation sont: a) dans la partie gauche du moment unitaire:

$$\bar{\theta} = E\mathcal{J}\frac{dv}{dz} = \frac{1}{l} \cdot \frac{z^2}{2} + \frac{1}{6l}(3x^2 + 2l^2 - 6lx)\,;$$

b) dans la partie droite du moment unitaire:

$$\bar{\theta} = E\mathcal{J}\frac{dv}{dz} = \frac{1}{l} \cdot \frac{z^2}{2} - (z-x) + \frac{1}{6l}(3x^2 + 2l^2 - 6lx).$$

Compte tenu que l'axe déformée est une fonction de x et z, x indiquant la position de la force unitaire et z la position de la section où l'on applique la charge extérieure, on a donné des valeurs à ces variables en obtenant les coefficients ci-dessus.

Il est nécessaire à determiner bien souvent dans la pratique la flèche maximum qui peut être obtenue en partant de l'expression de l'axe deformée, pour la charge extérieure.

En remplaçant les expressions de $\bar{v}_i$, $\bar{\theta}_i$ et $\bar{A}v_i$ dans l'équation (2) on obtient l'expression de l'axe déformée dans sa forme finale, sans être nécessaire de calculer en préalable les réactions et les constantes d'intégration:

$$V = \frac{1}{E\mathcal{J}}\left\{\sum_1^{n_1} P_i\left[-\frac{l-x}{l} \cdot \frac{c_i^3}{6} + \frac{1}{6l}(2l^2x - 3lx^3 + x^3)\,c_i\right] + \right.$$

$$+ \sum_1^{n_2} M_i\left[-\frac{l-x}{l} \cdot \frac{d_i^2}{6} + \frac{1}{6l}(2l^2x - 3lx^2 + x^3)\,d_i\right] +$$

$$+ \sum_1^{n_3} p_i \int_{a_i - b_i}^{a_i}\left[-\frac{l-x}{l} \cdot \frac{z^3}{6} + \frac{1}{6l}(2l^2x - 3lx^2 + x^3)\,z\right]dz +$$

$$\left. + \sum_1^{n_1} P_i\frac{(c_i - x)^3}{6} + \sum_2^{n_2} M_i\frac{(d_i - x)^2}{2} + \sum_1^{n_3} p_i \int_{a_i - b_i}^{a_i}\frac{(z-x)^3}{6}\,dz\,;\right.$$

en groupant les termes on obtient

$$V = \frac{1}{E\mathcal{J}}\left[-\frac{l-x}{l}\left(\sum_1^{n_1} P_i\frac{c_i^3}{6} + \sum_1^{n_2} M_i\frac{d_i^2}{2} + \sum_1^{n_3} p_i \int_{a_i - b_i}^{a_i}\frac{z^3}{6}\,dz\right) + \right.$$

$$+\frac{1}{6l}\left(2l^2x-3lx^2+x^3\right)\left(\sum_1^{n_1}P_i c_i+\sum_1^{n_2}M_i+\sum_1^{n_3}p_i\int_{a_i-b_i}^{a_i}z\,dz\right)+$$

$$+\sum_1^{n_1'}P_i\frac{(c_i-x)^3}{5}+\sum_1^{n_2'}M_i\frac{(d_i-x)^2}{2}+\sum_1^{n_3}p_i\int_{a_i-b_i}^{a_i}\frac{(z-x)^3}{6}\,dz.$$

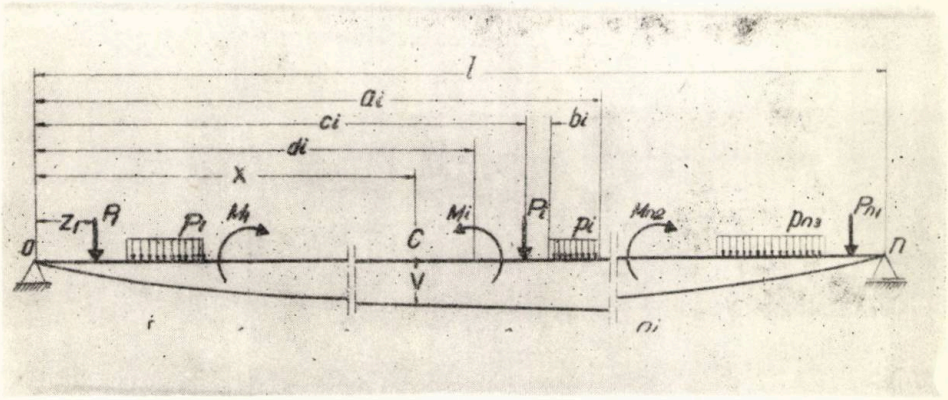


Fig. 3

Dans cette relation on a noté par (fig 8): c_i — la distance de l'origine jusqu'à la force concentrée P_i, d_i — la distance de l'origine jusqu'au moment concentré M_i, b_i — la longueur sur laquelle on applique la charge p_i uniformément distribuée, $a_i - b_i$ — la distance de l'origine jusqu'à la charge p_i uniformément distribuée, n_1' — le nombre des charges concentrées dans la partie droite de la section x, n_2' — le nombre des moments concentrés dans la portion droite de la section x, n_3' — le nombre des portions des charges uniformément distribuées, n_1 — le nombre total des charges concentrées, n_2 — le nombre total des moments concentrés, n_3 — le nombre total des portions des charges uniformément distribuées.

Exemples de calcul

a) On considère une poutre chargée, comme dans la fig. 9; on demande la flèche dans la section (C). On a

$$1.V=P_1 v_1,\quad V=\frac{1}{EJ}P_1\bar{v}_1.$$

Conformément au graphique de la fig. 3, pour $x/l=0{,}35$, $z/l=0{,}50$ il en résulte

$$\frac{\bar{v}_1}{l^3}=0{,}01825,\quad V=\frac{0{,}01825\,P_1 l^3}{EJ}.$$

b) On considère une poutre chargée, comme dans la fig. 10 ; on demande la flèche dans la section (*C*). Dans ce cas :

$$V = \frac{1}{EJ}(p_1 \bar{A}v_1 + P_1 \bar{v}_1' + M_1 \bar{\theta}_1).$$

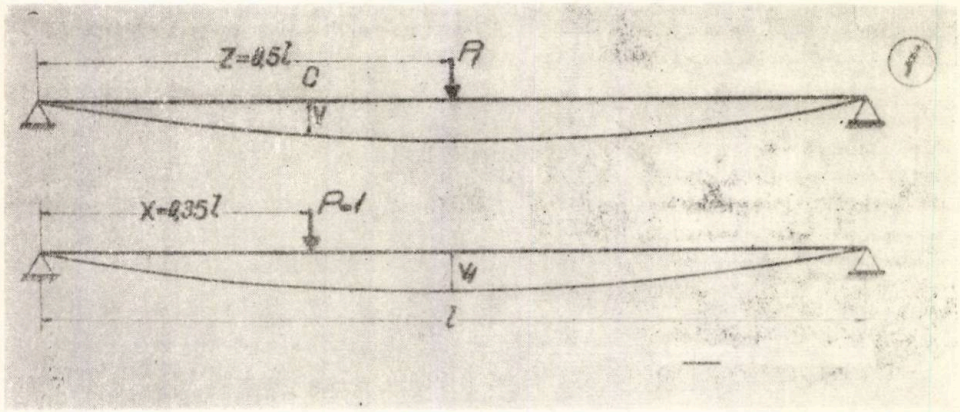


Fig. 9

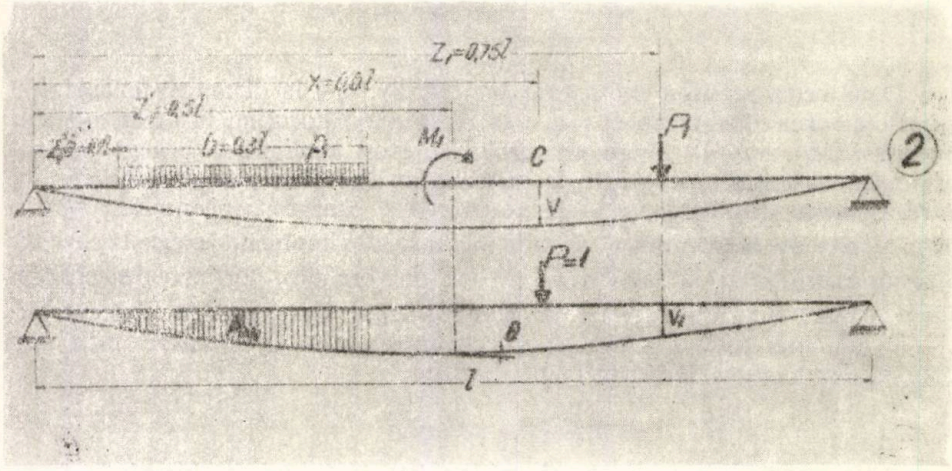


Fig. 10

Conformément au graphique de la fig. 2 on a pour $x/l = 0{,}6$ et $z/l = 0{,}50$, $\bar{\theta}_1/l^2 = 0{,}0060$; compte tenu du graphique de la fig. 3 on a pour $x/l = 0{,}6$ et $z/l = 0{,}75$, $\bar{v}_1/l^3 = 0{,}01443$; enfin si l'on utilise le graphique de la fig. 4 on a pour $x/l = 0{,}6$ et $z/l = 0{,}1$ $\bar{A}v_1/l^4 = 0{,}000278$ et pour $(z+b)/l = 0{,}4$, $\bar{A}v/l^4 = 0{,}00406$. Il en résulte

$$V = \frac{1}{EJ}[(0{,}00406 - 0{,}000278)\, p_1 l^4 + 0{,}0060\, M_1 l^2 + 0{,}01443\, P_1 l^3] \ .$$

3. Détermination des éléments statiquement non-determinés

On considère une poutre sur $n + 1$ appuis chargée avec les charges indiquées dans la fig. 11.

Afin d'étudier un cas plus général on considère l'appui 0 encastré et l'appui n ayant une porte-à-faux.

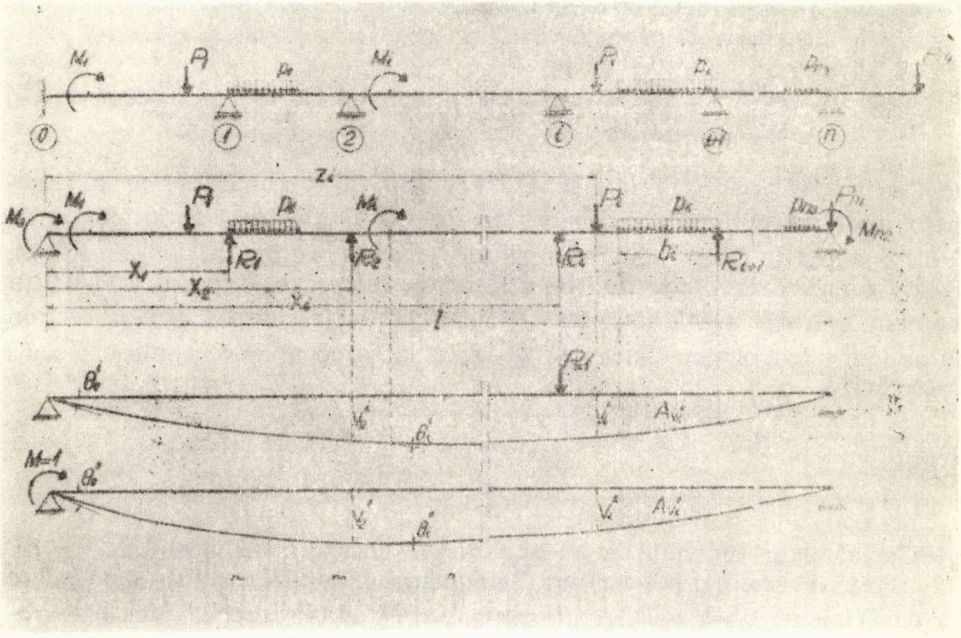


Fig. 11

L'encastrement est remplacé par un moment inconnu et la porte-à-faux par un moment et une force actionnant sur l'appui $n + 1$.

Dans le premier état de chargement la poutre reposant sur des appuis simples est chargée avec les charges extérieures et les forces de liaison.

La poutre est n fois statiquement non-déterminée ; on applique n fois la condition de déformation nulle (si les appuis ne cèdent pas).

Pour le deuxième état de chargement on considère :

a) un moment unitaire appliqué dans l'appui 0 en obtenant l'équation :

$$(3) \qquad \sum_{1}^{n_1} P_i v_i^0 + \sum_{1}^{n_2} M_i \theta_i^0 + \sum_{1}^{n_3} p_i A v_i^0 + M_0 \theta_0^0 + \sum_{1}^{n} R_i v_i^0 = 0 ;$$

b) charges unitaires à l'endroit des appuis intermédiaires et l'on obtient encore $n - 1$ équations :

$$(4)\quad \begin{cases} \sum_1^{n_1} P_i v_i^1 + \sum_1^{n_2} M_i \theta_i^1 + \sum_1^{n_3} p_i Av_i^1 + M_0 \theta_0^1 + \sum_1^{n} R_i v_i^1 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_1^{n_1} P_i v_i^k + \sum_1^{n_2} M_i \theta_i^k + \sum_1^{n_3} p_i Av_i^k + M_0 \theta_0^k + \sum_1^{n} R_i v_i^k = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_1^{n} P_i v_i^{n-1} + \sum_1^{n_2} M_i \theta_i^{n-1} + \sum_1^{n_3} p_i Av_i^{n-1} + M_0 \theta_0^{n-1} + \sum_1^{n} R_i v_i^{n-1} = 0, \end{cases}$$

où l'on a noté par : v_i^0 — la flèche à l'endroit de la force i due au moment unitaire appliqué dans la section 0, v_i^k — la flèche à l'endroit de la force i due à la force unitaire appliquée dans la section k, $(1 < k < n-1)$, θ_i^0 — la rotation dans la section où actionne le moment concentré M_i due au moment unitaire appliqué dans le point 0, θ_i^k — la rotation dans la section où actionne le moment concentré M_i du à la force unitaire appliquée dans la section k,

$$Av_i^k = \int_{z_i - b_i}^{z_i} v_i^k \, dz,$$

b_i — la longueur sur laquelle on applique la charge distribuée.

Pour déterminer les valeurs statiquement non-déterminés on utilise les coefficients $\bar{\theta}_i/l^2$, $\bar{v}_i/l^3$, $\bar{Av}_i/l^4$ et $\bar{\theta}_i/l$, $\bar{v}_i/l^2$, $\bar{Av}_i l^3$ inscrits dans les graphiques représentés dans les fig. 2...7.

Exemples de calcul

a) On considère une poutre chargée comme dans la fig. 12 ; on demande le moment d'encastrement :

$$-M_0 \theta_0 + pAv = 0, \quad M_0 = \frac{pAv}{\theta_0}.$$

Conformément au graphique de la fig. 5 on a pour $x/l = 0$ et $z/l = 0$, $\bar{\theta}/l = 0{,}334$; compte tenu du graphique de la fig. 7 on a pour $x/l = 0$ et $z/l = 0$, $\bar{Av}/l^3 = 0{,}0417$.

Il en résulte

$$M_0 = \frac{0{,}0417\, pl^3}{0{,}334\, l} = 0{,}125\ pl^2.$$

b) On considère une poutre chargée, comme dans la fig. 13, on demande la reaction R_1 :

$$pAv + P_1 v_2 - R_1 v_1 - M\theta = 0, \quad R_1 = \frac{pAv + P_1 v_2 - M\theta}{v_1}.$$

Conformément au graphique de la fig. 2 on a pour $x/l = 0{,}4$ et $z/l = 1$, $\bar{\theta}/l^2 = 0{,}056$; si l'on tient compte du graphique de la fig. 3 on a pour $x/l = 0{,}4$ et $z/l = 0{,}8$, $\bar{v}_2/l^3 = 0{,}01066$ et pour $x/l = 0{,}4$ et $z/l = 0{,}4$, $\bar{v}_1/l^3 = 0{,}01920$; enfin, si l'on considère le graphique de la fig. 4 on a pour $x/l = 0{,}4$ et $z/l = 0{,}3$, $\bar{Av}/l^4 = 0{,}00263$.

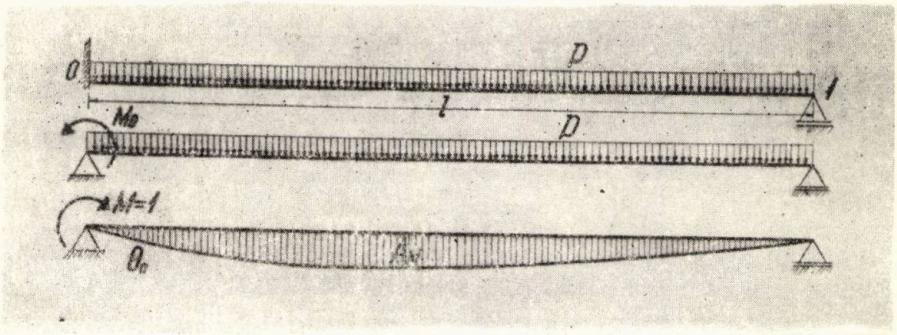


Fig. 12

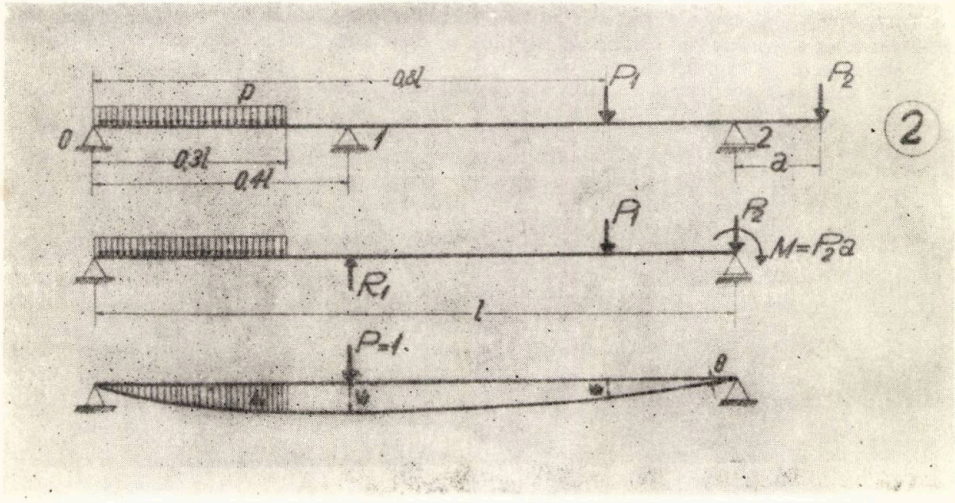


Fig. 13

Il en résulte

$$R_1 = \frac{0{,}00268\, pl^4 + 0{,}01066\, P_1 l^3 - 0{,}056\, Ml^2}{0{,}01920\, l^3}\,.$$

Institut Polytechnique de Jassy,
Chaire de Résistance des Matériaux

BIBLIOGRAPHIE

1. Mazilu C. P., *Statica construcţiilor.* Vol. **I,** ESAC, Buc., 1955.
2. — *Statica construcţiilor.* Vol. **II,** Ed. tehn. Buc., 1959.
3. Prokofiev I. P., *Statica construcţiilor.* Vol. **II,** OPED, C.F.R., Buc., 1951, (traduit du russe).
4. Timoshenko S., *Résistance des Matériaux.* P. **I.** *Théorie élémentaire et problèmes.* Librairie Polytechnique Ch. Béranger, Paris-Liége, 1947.
5. Raithel A., *I teoremi del lavoro in campo elastico.* L'Ingegnere, Giugno 1960.
6. Avram C., *Grinzi continui cu moment de inerţie constant.* Ed. de stat, Buc., 1949.
7. Cakiroglu A., Cetmeli E., *Zur Berechnung der statisch unbestimmten Systeme mit Veränderlichen Trägheitsmomenten nach dem Kraftgröben Verfahren.* Die Bautechnik, August 1964.

O METODĂ EXPEDITIVĂ PENTRU DETERMINAREA DEFORMAŢIILOR ŞI ELEMENTELOR STATIC NEDETERMINATE ÎN CAZUL GRINZILOR DREPTE

(Rezumat)

Se prezintă o metodă expeditivă şi exactă pentru determinarea deformaţiilor şi a elementelor static nedeterminate.

Metoda se poate aplica cu uşurinţă la sisteme cu rezemări diferite şi sarcini oarecare.

Se aplică teorema reciprocităţii lucrului mecanic, prima stare de solicitare fiind dată de sarcinile exterioare şi de forţele de legătură, a doua stare, de o forţă unitară aplicată în secţiunea în care se exprimă deformaţia.

Se utilizează coeficienţi de influenţă înscrişi în graficele anexate.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

D. C. 621-5 ; 629.113

ON THE DYNAMICS OF AUTOMOBILE CLUTCHES

BY

P. SIMA

Extract from the Paper presented at the Scientific Session of the Polytechnic Institute of Jassy, September the 28-30 st 1967

1. The Importance of the Automobile Clutch

The automobile clutch is used for the temporary disconnection of the transmission (of the units of the transmission system) from the engine as well as for its smooth connection with it. Disengagement is necessary for stopping and braking the car or for shifting gears. Smooth connection is required when moving off and after shifting gears. On disconnection of the gear change box from the engine by means of the clutch the gear wheels of the transmission function without any considerable stresses between teeth. Otherwise, a considerable wear of the gear wheels or even their fracture would occur. The smooth connection of the transmission shaft with the engine crankshaft having a hight number of rotations, ensures the gradual and shockless increase of the load both at the gear wheel teeth and at the units of the transmission system, thus reducing wear and eliminating the possibility of their fracture.

2. Determination of the Percussions Occuring in the Gearwheel Teeth of the Transmission System

In order to realize the extent which clutches reduce percussions in the gear wheels, when engaged, we consider the conventional diagram from Fig. 1 showing the way the clutch reacts to the shock of the gear wheel teeth when their engaging position is being changed. The first shaft corresponds to the crankshaft of the engine, the third shaft to the transmission shaft of the gear box, shaft *6* to the countershaft, and shaft *11* to the main shaft. We denote by I_m the mechanical moment of

inertia of the crankshaft and the masses directly associated with it, by I_3 the moment of inertia of the transmission shaft and the masses directly associated with it, by I_6 the moment of inertia of the layshaft, by I_{11} the moment of inertia of the mainshaft and by I_t the moment of inertia of the cardanic transmission, the auxiliary transmission and the differential gear reduced to the mainshaft axis. We further designate by M_m the torque of the engine and by M_r the moment of resistance applied to the mainshaft *11*.

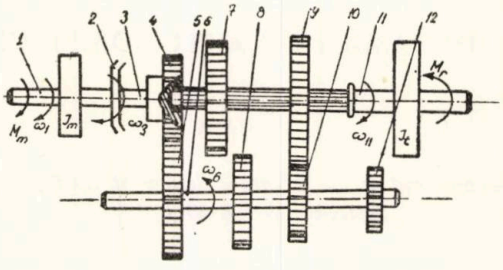


Fig. 1

We assume that the engagement takes place through the displacement of the gear wheel *9* and that after gear change angular velocity of the mainshaft increases from the initial value ω_{11} to new value ω'_{11}; under these conditions we have the following relations betweens the velocities:

$$(1) \qquad \omega_6 = \frac{r_4}{r_5}\omega_1\,,\quad \omega'_6 = \frac{r_4}{r_5}\omega'_1\,,\quad \omega_{11} = \frac{r_4 r_{10}}{r_5 r_9}\omega_1\,,\quad \omega'_{11} = \frac{r_4 r_{10}}{r_5 r_9}\omega'_1\,.$$

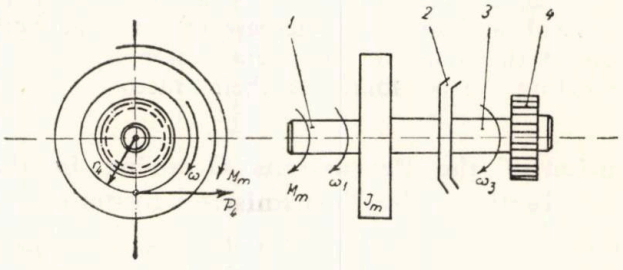


Fig. 2

Applying the theorem of momentum (Fig. 2) to the crankshaft and the masses connected with it, including the clutch *2* and the transmission shaft of the gear box, we obtain the equation

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(I_m + I_3)\omega] = M_m - r_4 P_4 , \tag{2}$$

P_4 being the force acting on the teeth of the wheel *4*.

Separating the variables and integrating, we get the equation

$$(I_m + I_3)(\omega_1' - \omega_1) = (M_m - r_4 P_4)\, t . \tag{3}$$

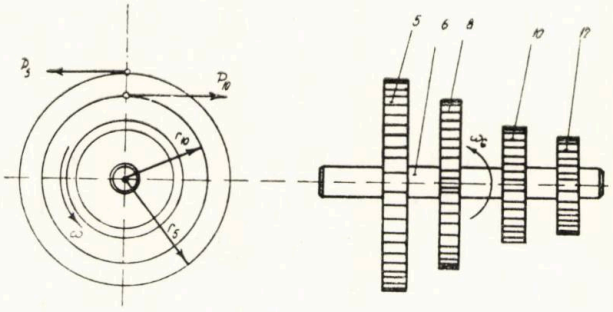


Fig. 3

The theorem of momentum applied to the mainshaft (Fig. 3) yields

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I_6\,\omega) = r_5 P_5 - r_{10} P_{10} , \tag{4}$$

whence by integrating

$$I_6(\omega_6' - \omega_6) = (r_5 P_5 - r_{10} P_{10})\, t . \tag{5}$$

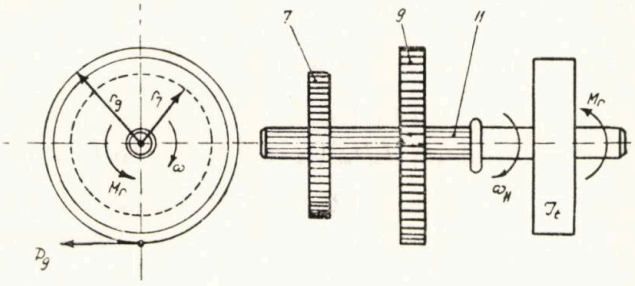


Fig. 4

Writing the theorem of momentum applied to the mainshaft axis (Fig. 4) we get the equation

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(I_{11} + I_t)\,\omega] = r_9 P_9 - M_r , \tag{6}$$

which integrated between the limits of variation of the angular velocity leads to the relationship

$$(I_{11} + I_t)\,(\omega'_{11} - \omega_{11}) = (r_9\,P_9 - M_r)\,t\,. \tag{7}$$

Knowing that $P_5 = P_4$, $P_{10} = P_9$, as well as the relationships (1), we have the system

$$\begin{cases} (I_m + I_3)\,(\omega'_1 - \omega_1) = (M_m - r_4\,P_4)\,t, \quad \dfrac{r_4}{r_5}\,I_6\,(\omega'_1 - \omega_1) = (r_5 P_4 - r_{10} P_9)t, \\ \dfrac{r_4\,r_{10}}{r_5\,r_9}\,(I_{11} + I_t)\,(\omega'_1 - \omega_1) = (r_9\,P_9 - M_r)\,t\,. \end{cases} \tag{8}$$

Solving the system of equations (8) we get the angular velocities

$$\omega'_1 = \frac{i_k\,(i_k M_m - M_r)\,t + [(I_m + I_3)\,i_k^2 + (z_9^2/z_{10}^2)\,I_6 + (I_{11} + I_t)]\,\omega_1}{(I_m + I_3)\,i_k^2 + (z_9^2/z_{10}^2)\,I_6 + (I_{11} + I_t)}\,, \tag{9}$$

$$\omega'_{11} = \frac{(i_k M_m - M_r)\,t + [(I_m + I_3)\,i_k + (z_4 z_9/z_5 z_{10})\,I_6 + (z_4 z_{10}/z_5 z_9)\,(I_{11} + I_t)]}{(I_m + I_3)\,i_k^2 + (z_9^2/z_{10}^2)\,I_6 + (I_{11} + I_t)}\,, \tag{10}$$

in which $i_k = z_5\,z_9/z_4\,z_{10}$ is the transmission ratio of the gear box, and z_4, z_5, z_9 and z_{10} — the number of teeth of the gearwheel.

We consider further the percussion $\bar{P}$ which occurs in the teeth of the gear wheels *9* and *10* on engagement:

$$\bar{P} = P_9\,t = \frac{1}{r_9} \cdot \frac{(I_{11} + I_t)\,[M_m - (z_4\,z_{10}/z_5\,z_9)\,M_r]\,t}{(I_m + I_3)\,i_k + (z_4\,z_9/z_5\,z_{10})\,I_6 + (z_4\,z_{10}/z_5\,z_9)\,(I_{11} + I_t)}\,. \tag{11}$$

From the expression (11) of the percussion $\bar{P}$ it is evident that this is the greater the higher the factor $I_{11} + I_t$ is.

The relation (11) may be also written

$$\bar{P} = \frac{1}{r_9} \cdot \frac{(I_{11}/I_m + I_t/I_m)\,[M_m - (z_4\,z_{10}/z_5\,z_9)\,M_r]\,t}{(1 + I_3/I_m)\,i_k + (I_6/I_m)(z_4\,z_9/z_5\,z_{10}) + (I_{11}/I_m + I_t/I_m)(z_4\,z_{10}/z_5\,z_9)}\,. \tag{12}$$

Neglegting in the relation (12) the small values of the ratios I_3/I_m, I_6/I_m and I_{11}/I_m, the approximate expression of the percussion $\bar{P}$ is obtained

$$\bar{P} = \frac{1}{r_9} \cdot \frac{I_t\,(i_k\,M_m - M_r)\,t}{i_k^2\,I_m + I_t}\,. \tag{13}$$

In the case of the cinematic diagram provided with two clutches (Fig. 5) supposing that the operation of engaging the gear wheels is performed by the clutch *12* while disconnected it follows $I_t = M_r = 0$; the percussion $\bar{P}$ is calculated with the same relation (11) and it will be

$$\bar{P} = \frac{1}{r_9} \cdot \frac{I_{11} M_m t}{(I_m + I_3) i_k + (z_4 z_9 / z_5 z_{10}) I_6 + (z_4 z_{10} / z_5 z_9)^2 I_{11}}. \tag{14}$$

Supposing that the clutch *2* is disengaged, substituting $I_m = M_m = 0$ in the formula (12) we obtain

$$\bar{P} = -\frac{1}{r_9} \cdot \frac{(I_{11} + I_t) M_r t}{i_k^2 I_3 + (z_4 z_9 / z_5 z_{10}) I_6 + I_{11} + I_t}. \tag{15}$$

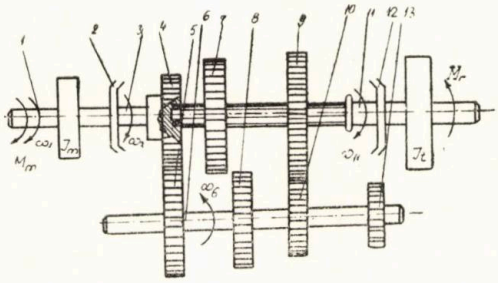


Fig. 5

3. Determination of the Work of Slippage of the Clutch

In calculating the dimensions of the clutch, we must take into consideration the fact that it must transmit the whole torque developed by the engine and that it must resist wear and heating in optimum conditions. The heating of the units of the clutch is determined partly by the amount of the work of slippage, partly by the volume of the parts which take over the released heat.

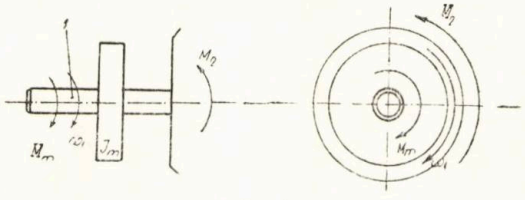


Fig. 6

In order to determine the time and work of slippage of the clutch we assume that when engaging, the angular velocity of the crankshaft ω_1 is higher than the angular velocity ω_3 of the transmission shaft of the gear box, in other words, the difference $\omega_1 - \omega_3$ is positive.

Applying the theorem of momentum to the shaft *1*, we have the equation (fig. 6):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I_m\,\omega_1) = M_m - M_2\,, \tag{16}$$

where M_2 designates the slippage friction couple (moment) in the clutch.

On integrating equation (16) we obtain the equation

$$I_m\,(\omega_0 - \omega_1) + M_2\,t = M_m\,t_0\,, \tag{17}$$

in which ω_0 stand for the resultant angular velocity of the shafts *1* and *2* after engaging, and t_0 for the duration of the engagement.

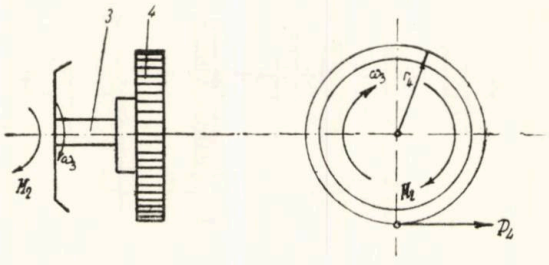


Fig. 7

Similarly, we may write for the shaft *3* (Fig. 7) the equation

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I_3\,\omega_3) = M_2 - r_4\,P_4\,, \tag{18}$$

whence integrating

$$I_3\,(\omega_{03} - \omega_3) + r_4\,P_4\,t_0 = M_2\,t_0\,, \tag{19}$$

in which $\omega_3 = i_k\,\omega_9$ represents the angular velocity of the transmission shaft *3* from the moment the engagement begins, while $\omega_{03} = \omega_0$ is the angular velocity of the same shaft t_0 seconds later.

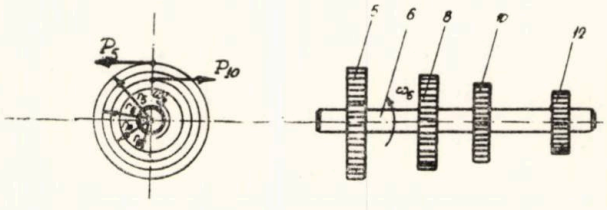


Fig. 8

For the mainshaft (Fig. 8) we have the equation

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I_6\,\omega_6) = r_5\,P_5 - r_{10}\,P_{10}\,, \tag{20}$$

whence

$$I_6(\omega_{06} - \omega_6) + r_{10} P_{10} t_0 = r_5 P_5 t_0 , \tag{21}$$

ω_6 being the angular velocity of the layshaft when engaged, and ω_{06} the angular velocity of the layshaft t_0 seconds after the engagement started.

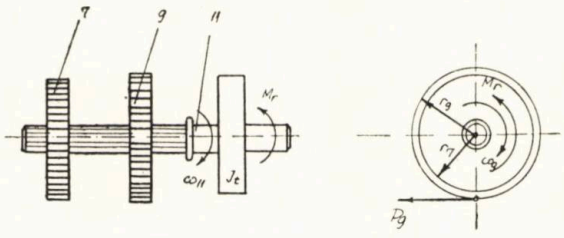


Fig. 9

Finally, the mainshaft (Fig. 9) has the corresponding equation

$$\frac{d}{dt}[(I_{11} + I_t)\,\omega_{11}] = r_9 P_9 - M_1 , \tag{22}$$

whence integrating, we obtain

$$(I_{11} + I_t)\,(\omega_{011} - \omega_{11}) + M_r t_0 = r_9 P_9 t_0 . \tag{23}$$

In equation (23) ω_{11} denotes the angular velocity of the mainshaft from the moment engagement starts, and ω_{011} the angular velocity of the mainshaft t_0 seconds later.

Since $P_5 = P_4$, $P_{10} = P_9$ and $\omega_{06} = (r_4/r_5)\,\omega_0$, $\omega_{011} = (r_4\, r_{10}/r_5\, r_9)\,\omega_0$, we obtain the system of equations

$$\begin{cases} I_m\,(\omega_0 - \omega_1) + M_2 t_0 = M_m t_0 , \; I_3\,(\omega_0 - i_k\,\omega_{11}) + r_4 P_4 t_0 = M_2 t_0 , \\ I_6\left(\dfrac{r_4}{r_5}\,\omega_0 - \dfrac{r_9}{r_{10}}\,\omega_{11}\right) + r_{10} P_9 t_0 = r_5 P_4 t_0 , \\ (I_{11} + I_t)\left(\dfrac{r_4\, r_{10}}{r_5\, r_9}\,\omega_0 - \omega_{11}\right) + M_r t_0 = r_9 P_9 t_0 . \end{cases} \tag{24}$$

Eliminating the forces P_4, P_9 between equations (24) and substituting the ratio of the teeth number for the ratios of radii yields the resultant angular velocity ω_0 and the engaging time t_0 are the following expressions:

$$\omega_0 = \frac{\left[\dfrac{z_9}{z_{10}} I_6 + \dfrac{z_{10}}{z_9}(I_{11} + I_t) + i_k \dfrac{z_5}{z_4} I_3\right]\omega_{11} + \left(\dfrac{z_{10}}{z_9} M_r - \dfrac{z_5}{z_4} M_2\right)\dfrac{I_m}{M_m - M_2}\,\omega_1}{\dfrac{z_5}{z_4} I_3 + \dfrac{z_4}{z_5} I_6 + \dfrac{z_{10}}{z_9} \cdot \dfrac{I_{11} + I_t}{i_k} + \left(\dfrac{z_{10}}{z_9} M_r - \dfrac{z_5}{z_4} M_2\right)\dfrac{I_m}{M_m - M_2}} , \tag{25}$$

$$t_0 = \frac{\left[\frac{z_9}{z_{10}} I_6 + \frac{z_{10}}{z_9}(I_{11}+I_t) + i_k \frac{z_5}{z_4} I_3\right]\omega_{11} - \left(\frac{z_5}{z_4} I_3 + \frac{z_4}{z_5} I_6 + \frac{z_{10}}{z_9} \cdot \frac{I_{11}^2 + I_t}{i_k}\right)\omega_1}{\frac{z_5}{z_4} I_3 + \frac{z_4}{z_5} I_6 + \frac{z_{10}}{z_9} \cdot \frac{I_{11}+I_t}{i_k} + \left(\frac{z_{10}}{z_9} M_r - \frac{z_5}{z_4} M_2\right)\frac{I_m}{M_m - M_2}} \times$$

$$\times \frac{I_m}{M_m - M_2} \cdot \tag{26}$$

From equation (26) we find that the time of slipping of the clutch t_0 can be arbitrary, depending on the relationship between the couples M_m, M_r and M_2. Supposing that as long as engagement lasts, the couples M_m, M_r and M_2 remain constant, the angle of slipping θ of the clutch is equal to the mean of the slippage angular velocity multiplied by the slipping time t_0, that is

$$\theta = \frac{\omega_1 - \omega_3}{2} t_0 = \frac{\omega_1 - i_k \omega_9}{2} t_0 \; ; \tag{26}$$

replacing t_0 with the expression given by (26) yields

$$\theta = \frac{\omega_1 - i_k \omega_9}{2} \times$$

$$\times \frac{\left[\frac{z_9}{z_{10}} I_6 + \frac{z_{10}}{z_9}(I_{11}+I_t) + i_k \frac{z_5}{z_4} I_3\right]\omega_{11} - \left(\frac{z_5}{z_4} I_3 + \frac{z_4}{z_5} I_6 + \frac{z_{10}}{z_9} \cdot \frac{I_{11}+I_t}{i_k}\right)\omega_1}{\frac{z_5}{z_4} I_3 + \frac{z_4}{z_5} I_3 + \frac{z_{10}}{z_9} \cdot \frac{I_{11}+I_t}{i_k} + \left(\frac{z_{10}}{z_9} M_r - \frac{z_5}{z_4} M_2\right)\frac{I_m}{M_m - M_2}} \times \tag{28}$$

$$\times \frac{I_m}{M_m - M_2} \cdot$$

The work of slipping of the clutch is obtained by multipliyng the friction slippage couple in the clutch M_2 by the angle of slipping θ; we finally have

$$L = \frac{\omega_1 - i_k \omega_9}{2} \times$$

$$\times \frac{\left[\frac{z_9}{z_{10}} I_6 + \frac{z_{10}}{z_9}(I_{11}+I_t) + i_k \frac{z_5}{z_4} I_3\right]\omega_{11} - \left(\frac{z_5}{z_4} I_3 + \frac{z_4}{z_5} I_6 + \frac{z_{10}}{z_9} \cdot \frac{I_{11}+I_t}{i_k}\right)\omega_1}{\frac{z_5}{z_4} \cdot \frac{I_3}{I_m} + \frac{z_4}{z_5} \cdot \frac{I_6}{I_m} + \frac{z_{10}}{z_9} \cdot \frac{I_{11}+I_t}{i_k I_m} + \frac{(z_{10}/z_9)M_r - (z_5/z_4)M_2}{M_m - M_2}} \times \tag{29}$$

$$\times \frac{M_2}{M_m - M_2} \cdot$$

Polytechnic Institute, Braşov

REFERENCES

1. Bussien R., *Automobiltechnisches Handbuch.* Technischer Verlag H. Gram, Berlin, 1955.
2. Чудаков А. Е., *Теория автомобиля.* Машгиз, Москва, 1950.
3. Dudiță Fl., *Regimuri tranzitorii ale transmisiei autovehiculelor,* Ed. Tehn., Buc., 1965.
4. Ghiulai C., *Mecanica automobilului.* Ed. Tehn., Buc., 1965.
5. — *Sisteme moderne de transmisie ale automobilului.* Ed. Tehn., Buc., 1963.
6. Куликов Н. К., *Метод расчета передаточных чисел коробки передач автомобиля.* Автомобильная и тракторная промышленность, 1951, *6.*
7. Петров В. А., *Буксование сцепления автоматической коробки передач автомобиля.* Автомобильная и тракторная промышленность, 1955, *12.*
8. Untaru M., *Teoria, calculul și construcția automobilului.* Ed. Tehn., Buc., 1964.
9. Зимелев Г. В., *Теория автомобиля.* Воениздат, Москва, 1955.

ASUPRA DINAMICII AMBREIAJULUI DE AUTOMOBIL

(Rezumat)

Se studiază măsura în care ambreiajul influențează șocul care apare în dinții roților dințate ale cutiilor de viteze ale automobilelor la cuplarea vitezei. S-au determinat, de asemenea, percuțiunile care apar în dinții roților dințate în momentul angrenării lor.

Ținîndu-se seama de toate masele în mișcare de rotație ale automobilului, s-au stabilit expresii complete pentru timpul de ambreiere și pentru lucrul mecanic de patinare al ambreiajului.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

D.K. 629.114

DYNAMISCHE BEANSPRUCHUNGEN DER PROGRESSIVEN HALBELLIPTIK-BLATTFEDERUNG DER LASTKRAFTWAGEN IN DER KURVENFAHRT

VON

VIRGIL OLARIU

Mitteilung an der wissenschaftlichen Tagung der Technischen Hochschule, Jassy, 28—30. September 1967

1. Für die Halbelliptik-Blattfedern kann eine progressive Federkennlinie (variable Starrheit) durch Verwendung von Verbindungen zwischen Feder und Fahrzeugrahmen erreicht werden, die eine Veränderung der freien Länge in Abhängigkeit der Belastung aufweisen soll. Eine derartige Verbindung stellt die zylinderförmige Stütze, „Schlitten" genannt, dar, welche entweder die Federlasche, oder sowohl die Federlasche mitsamt Federgelenk ersetzen kann; im zweiten Fall wird die Feder auf dem Rahmen des Lastkraftwagens, mittels Blattfedern, sogenannten Zugblättern befestigt.

Die Verbesserung der Federkennlinie, beginnend von einer bestimmten Belastung, kann durch Verwendung von Gummihohlfedern — von Type AEON zum Beispiel — erreicht werden, wodurch die Kennlinie der Federung sich besonders der der ideellen nähert (bei Zuwachs der Last soll die Durchbiegung konstant bleiben). Diese Gummihohlfedern können auch die Zusatzfedern der hinteren Federung ersetzen.

2. Um die in den Verbindungen der Vorderachsfedern und dem Rahmen des Lastkraftwagens auftretenden Reaktionskräfte feststellen zu können, wird angenommen, dass die Verbindung zwischen der Halbelliptik-Blattfeder mittels Federbundringen und dem Vorderradbalken eine ideale Einspannung darstellt und gleichfalls, dass die Halbelliptik-Federlasche durch eine sogennante „Schlitten" Type—Verbindung ersetzt wird. Unter solchen Bedingungen kann man für den stationären Kurvenfahrtzustand (Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit, die mit der Schleudergeschwindigkeit gleich ist) aus den dynamischen Gleichgewichtsgleichungen der Vorderachse abgeleitet, auf Grund der Abb. 1 und 2, die Ausdrücke der zwischen den Federn und dem Rahmen auftretenden Querreaktionskräfte wie folgt erhalten:

$$(1) \qquad Y_D = \frac{\varphi R_{1s}}{\sqrt{1+[2A/(2R+B)]^2}}, \quad Y_A = \frac{\varphi R_{1d}}{\sqrt{1+[2A/(2R-B)]^2}}.$$

Da die Entlastung der rechten Feder durch die zusätzliche Belastung der linken Feder ausgeglichen ist, und bei Inbetrachtnahme, dass die Federhebelarme ungefähr gleich sind, kann folgende Gleichung aufgestellt werden:

(2) $$Z_D - Z_A = Z_B - Z_B .$$

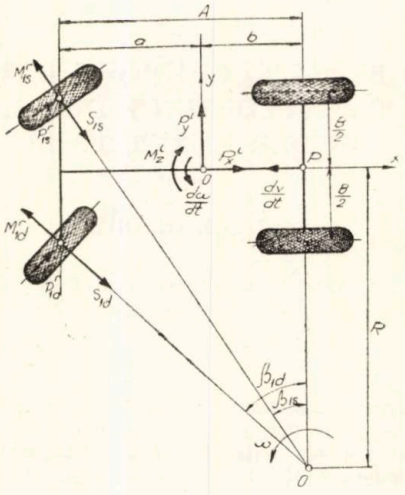


Abb. 1

Die dynamischen Gleichgewichtsgleichungen mitsamt unter (2) angegebenen Bedingungen führen zu folgender Matrix-Gleichung:

(3)
$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & b_{14} & 0 & b_{16} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b_{34} & 1 & b_{36} \\ 0 & 0 & 1 & b_{44} & -1 & b_{46} \\ 1 & 1 & b_{53} & b_{54} & b_{55} & b_{56} \\ 1 & -1 & 0 & b_{64} & 0 & b_{96} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} X_A \\ X_D \\ Z_A \\ Z_B \\ Z_D \\ Z_E \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} b_{10} \\ 0 \\ b_{30} \\ b_{40} \\ b_{50} \\ b_{60} \end{Vmatrix},$$

in welcher

$$b_{14} = b_{16} = b_{64} = \frac{-(l-l_s)+\mu\sqrt{r_s^2-(l-l_s)^2}}{\sqrt{r_s^2-(l-l_s)^2}}, \quad b_{66} = -b_{64};$$

$$b_{34} = b_{36} = b_{44} = \frac{\mu\,|\,l - l_s\,| + \sqrt{r_s^2 - (l-l_s)^2}}{\sqrt{r_s^2 - (l-l_s)^2}}, \quad b_{46} = -\,b_{44};$$

$$b_{53} = b_{55} = -\,\frac{a + 0{,}5\,l}{h_d};$$

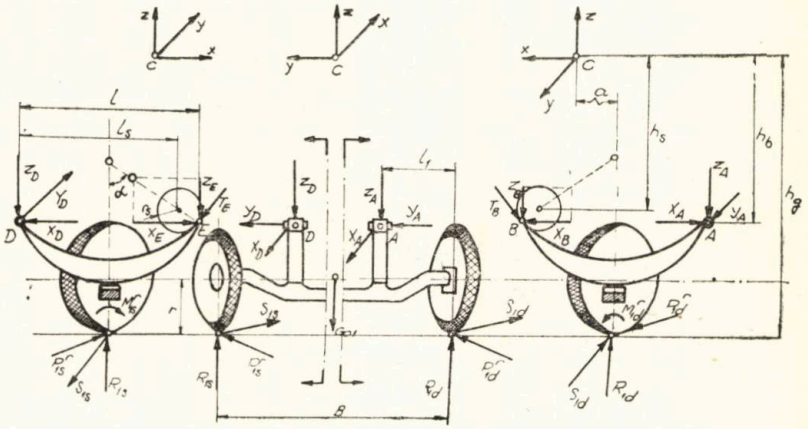


Abb. 2

$$b_{54} = b_{56} =$$

$$= \frac{-(l-l_s)[h_s + \mu(a - 0{,}5\,l)] + \mu[r_s^2 - (l-l_s)^2] - [(a - 0{,}5\,l) - \mu h_s]\sqrt{r_s^2 - (l-l_s)^2}}{h_d\sqrt{r_s^2 - (l-l_s)^2}};$$

$$b_{10} = \frac{[2A/(2R+B)]\,\varphi R_{1s}}{\sqrt{1 + [2A/(2R+B)]^2}} + \frac{[2A/(2R-B)]\,\varphi R_{1d}}{\sqrt{1 + [2A/(2R-B)]^2}}, \qquad b_{30} = R_{1s} + R_{1d} - G_{01};$$

$$b_{40} = \frac{2}{B - 2l_1}\left\{\frac{(h_g - h_b)\,\varphi}{\sqrt{1 + [2A/(2R+B)]^2}} - 0{,}5\,B\right\}R_{1s} +$$

$$+ \frac{2}{B - 2l_1}\left\{\frac{(h_g - h_b)\,\varphi}{\sqrt{1 + [2A/(2R-B)]^2}} + 0{,}5\,B\right\}R_{1d};$$

$$b_{50} = \frac{1}{h_b}\left\{\frac{[2A/(2R+B)]\,\varphi h_g}{\sqrt{1 + [2A/(2R+B)]^2}} - a\right\}R_{1s} +$$

$$+ \frac{1}{h_b}\left\{\frac{[2A/(2R-B)]\,\varphi h_g}{\sqrt{1 + [2A/(2R-B)]^2}} - a\right\}R_{1d} + \frac{a}{h_b}G_{01};$$

$$b_{60} = -\frac{[2AB/(2R+B)+l]\varphi R_{1s}}{(B-2l_1)\sqrt{1+[2A/(2R+B)]^2}} + \frac{[2AB/(2R-B)-l]\varphi R_{1d}}{(B-2l_1)\sqrt{1+[2A/(2R-B)]^2}}.$$

Für den nicht stationären Kurvenfahrtzustand (Beschleunigung in der Kehre) erhält man die Grösstbeanspruchung der Feder aus der Bedingung $R_{1d} = 0$. In diesem Falle können die zwischen den Federn und dem Rahmen auftretenden Querreaktionskräfte folgend ausgedrückt werden:

$$(4) \qquad Y_D = \frac{S_{1s} - [2A/(2R+B)]fR_{1s}}{\sqrt{1+[2A/(2R+B)]^2}}, \quad Y_A = 0;$$

während die Matrix-Gleichung des dynamischen Gleichgewichtes der Vorderachse ihre Struktur (3) beibehält; die einzigen Änderungen erscheinen bei den Element der freien Glieder des Matrix, die folgend ausgedrückt werden können:

$$b_{10} = \frac{fR_{1s} + [2A/(2R+B)]S_{1s}}{\sqrt{1+[2A/(2R+B)]^2}}, \quad b_{30} = R_{1s} - G_{01};$$

$$b_{40} = \frac{-2}{B-2l_1}\left\{\frac{[2A/(2R+B)](h_g - h_b - r)f}{\sqrt{1+[2A/(2R+B)]^2}} + 0{,}5B\right\}R_{1s} + \\ + \frac{2(h_g - h_b)S_{1s}}{(B-2l_1)\sqrt{1+[2A/(2R+B)]^2}};$$

$$b_{50} = \frac{1}{h_b}\left\{\frac{(h_g - r)f}{\sqrt{1+[2A/(2R+B)]^2}} - a\right\}R_{1s} + \frac{[2A/(2R+B)]h_g S_{1s}}{h_b\sqrt{1+[2A/(2R+B)]^2}} + \frac{a}{h_b}G_{01};$$

$$b_{60} = \frac{\{[2A/(2R+B)]l - B\}fR_{1s} - \{[2A/(2R+B)]B + l\}S_{1s}}{(B-2l_1)\sqrt{1+[2A/(2R+B)]^2}}.$$

Die Lösung der Matrix-Gleichung (3) durch eine elektronische Rechenmaschine ausgerechnet, drückt die Reaktionskräfte X_A, X_D, Z_A, Z_B, Z_D, Z_E aus den Verbindungen der Vorderachsfedern mit dem Rahmen des Lastkraftwagens aus.

Die übrigen Reaktionskräfte zwischen Federn und Rahmen sind aus folgenden Gleichungen zu berechnen:

$$(5) \qquad \begin{cases} X_B = \dfrac{(l-l_s)Z_B}{\sqrt{r_s^2-(l-l_s)^2}}, & X_E = \dfrac{(l-l_s)Z_E}{\sqrt{r_s^2-(l-l_s)^2}}, \\ T_B = \dfrac{\mu r_s Z_B}{\sqrt{r_s^2-(l-l_s)^2}}, & T_E = \dfrac{\mu r_s Z_E}{\sqrt{r_s^2-(l-l_s)^2}}. \end{cases}$$

3. Um die Reaktionskräfte aus den Verbindungen der Hinterachsfedern mit dem Fahrzeugrahmen festzustellen, wird auch in diesem Falle angenommen, dass die Verbindung zwischen der Halbelliptik-Blattfeder mittels

Federbundringen und den Hinterachsbalken eine ideale Einspannung darstellt und gleichfalls, dass sowohl das Gelenk, wie auch die Halbelliptik-Federlasche durch eine sogenannte „Schlitten" Type Verbindung ersetzt wird. Unter solchen Bedingungen kann man für den stationären Kurvenfahrtzustand, aus den dynamischen Gleichgewicht-Gleichungen der Hinterachse abgeleitet, auf Grund der Abb. 3, folgende Ausdrücke für die Querreaktionskräfte zwischen Feder und Rahmen erhalten:

$$Y_{2s} = \varphi R_{2s}, \quad Y_{2d} = \varphi R_{2d}.$$

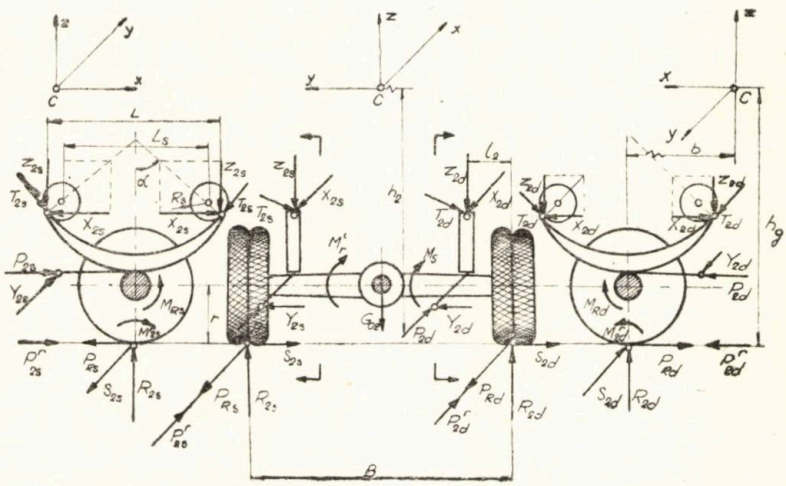


Abb. 3

Das zusätzliche Reaktionsmoment in der Hinterachse ist:

$$M_s = [(h_g - r) - h_2]\, P_R, \tag{7}$$

und die Matrix-Gleichung:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{23} & c_{24} \\ 0 & 0 & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & 0 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} P_{2s} \\ P_{2d} \\ Z_{2s} \\ Z_{2d} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} c_{10} \\ c_{20} \\ c_{30} \\ c_{40} \end{Vmatrix}, \tag{8}$$

in welcher

$$c_{23} = c_{24} = \frac{\mu(L_s - L) + \sqrt{4R_s^2 - (L_s - L)^2}}{\sqrt{4R_s^2 - (L_s - L)^2}}, \quad c_{22} = (B - 2l_2)\, c_{23}, \quad c_{34} = -c_{33};$$

$$c_{41} = -(B - 2l_2), \quad c_{42} = -c_{41}, \quad c_{10} = P_R, \quad c_{20} = 0{,}5\,(R_{2s} + R_{2d} - G_{01});$$

$$c_{30} = 0{,}5\,B(R_{2s} - R_{2d}) - \varphi\,(h_g - h_2)\,(R_{2s} + R_{2d}), \quad c_{40} = (\lambda - 1)BP_R + \varphi L_s(R_{2s} - R_{2d}).$$

Für den nicht stationären Kurvenfahrtzustand ist die gesamte, zwischen den Federn und dem Rahmen auftretende Querreaktionskraft

$$Y_2 = S_2.$$

Das zusätzliche Reaktionsmoment wird durch folgende Formel berechnet:

$$(10) \qquad M_s = [(h_g - r) - h_2] \cdot \left[\frac{i_0 i_s M_{\max}}{r}\eta_t - f\,(R_{2s} + R_{2d})\right] + \delta_1 r \frac{G_a}{g} \cdot \frac{dv}{dt},$$

während die Matrix-Gleichung des dynamischen Gleichgewichtes der Hinterachse, ihre Form (8) beibehält, jedoch mit folgenden Änderungen der freien Glieder:

$$c_{10} = \frac{i_0 i_s M_{\max}}{r}\eta_t - f\,(R_{2s} + R_{2d}), \quad c_{20} = 0{,}5\,(R_{2s} + R_{2d} - G_{02});$$

$$c_{30} = 0{,}5\,B\,(R_{2s} - R_{2d}) - (h_g - h_2)\,S_2;$$

$$c_{40} = (\lambda - 1)\,B\frac{i_0 i_s M_{\max}}{r}\eta_t + fB\,(R_{2s} - R_{2d}) + L_s S_2.$$

Die Lösung der Matrix-Gleichung (8) drückt die Reaktionskräfte P_{2s}, P_{2d}, Z_{2s}, Z_{2d} aus.

Die übrigen, zwischen Federn und Fahrzeugrahmen auftretenden Reaktionskräfte erhält man aus den Formeln:

$$(11) \qquad \begin{cases} X_{2s} = \dfrac{(L - L_s)\,Z_{2s}}{\sqrt{4R_s^2 - (L - L_s)^2}}, & X_{2d} = \dfrac{(L - L_s)\,Z_{2d}}{\sqrt{4R_s^2 - (L - L_s)^2}}, \\ T_{2s} = \dfrac{2\mu R_s Z_{2s}}{\sqrt{4R_s^2 - (L - L_s)^2}}, & T_{2d} = \dfrac{2\mu R_s Z_{2d}}{\sqrt{4R_s^2 - (L - L_s)^2}}. \end{cases}$$

In einer nächstfolgenden Note werden die Forschungsergebnisse des Verfassers über die elastische Kennlinie der progressiven Halbelliptik-Blattfedern mitgeteilt.

Bedeutung der Formelzeichen

G_a — Gesamtgewicht des Lastkraftwagens;

G_{01}, G_{02} — Gewicht der Vorder-, bzw. Hinterachse, einschliesslich Federung;

P_x^i, P_y^i — Komponenten der von der Lastkraftwagenmasse stammenden Trägheitskräfte;

M_z^i — von der Lastkraftwagenmasse stammendes Trägheitskraftemoment, bezogen auf die Normalachse der Fahrbahn;

M_r^i — auf die Antriebsachse reduziertes, von der Umdrehbewegung der Massen stammendes Trägheitskräftemoment;

$\mathcal{J}_z$ — mechanisches Trägheitsmoment des Lastkraftwagens, bezogen auf die Normalachse bei der Fahrt;

P_{1s}^r, P_{1d}^r, P_{2s}^r, P_{2d}^r — beim Rollen auftretende Widerstandskräfte;

M_{1s}^r, M_{1d}^r, M_{2s}^r, M_{2d}^r — beim Rollen auftretende Widerstandsmomente;

P_{Rs}, P_{Rd} — auf die Antriebsachse wirkende Zugkraft;

M_{Rs}, M_{Rd} — Antriebsmomente am Hinterachsradumfang (links s, bzw. rechts d);

M_{max} — grösstes Drehmoment des Motors;

R_{1s}, R_{1d}, R_{2s}, R_{2d} — normale Fahrbahnwiderstände auf die Räder;

S_{1s}, S_{1d}, S_{2s}, S_{2d} — Querfahrbahnwiderstände auf die Räder;

S_2 — Gesamter Querfahrbahnwiderstand auf die Räder der Hinterachse;

X_A, X_D, Y_A, Y_D, Z_A, Z_D — Reaktionskräfte in den Gelenken der Vorderfedern;

X_B, X_E, Z_B, Z_E — Reaktionskräfte der Schlitten auf den Vorderfedern;

T_B, T_E — Gleitreibungskräfte zwischen den Vorderfedern und Schlitten;

X_{2s}, X_{2d}, Z_{2s}, Z_{2d} — Reaktionskräfte der Schlitten auf die Vorderfedern;

T_{2s}, T_{2d} — Gleitreibungskräfte zwischen den Hinterfedern und Schlitten;

P_{2s}, P_{2d}, Y_{2s}, Y_{2d} — Reaktionskräfte in den Gelenken der Zugblätter;

M_s — Zusätzliches Reaktionsmoment an der Hinterachse;

v — Geschwindigkeit des Lastkraftwagens;

V_d — Schleudergeschwindigkeit des Lastkraftwagens;

dv/dt — Tangentialbeschleunigung des Mittelpunktes der Hinterachse;

g — Erdbeschleuningung;

r — Radius des dynamischen Rollens;

i_0 — Übersetzungsverhältnis des Hauptuntersetzungsgetriebes;

i_s — Übersetzungsverhältnis des jeweils gekuppelten Ganges im Getriebekasten;

φ — Haftreibungsverhältnis durch die Querkippung beschränkt;

f — Gesamtrollwiederstandszahl;

δ_1 — Einflusskoeffizient der Räder;

δ_2 — Einflusskoeffizient des Motors;

λ — Einflusskoeffizient der Reibung im Ausgleichgetriebe;

μ — Gleitreibungszahl zwischen Feder und Schlitten;

η_t — Mechanischer Wirkungsgrad der Übertragung (des Getriebes).

Technische Hochschule, Braşov

LITERATURVERZEICHNIS

1. Чудаков Е. А., *Теория автомобиля*. Изд. АН СССР, М., 1961.
2. Демидович Б. П., Марон И. А., *Основы вычислительной математики*. ФМЛ, М., 1960.
3. Ghiulai C., *Mecanica automobilului*. Ed. tehn., Buc., 1965.

4. Untaru M., *Teoria, calculul şi construcţia automobilului.* Ed. Pedag., Buc., 1961.
5. Зимелев Г. В., *Теория автомобиля.* Машгиз, М., 1950.
6. * * * *Composite Springing (The Incorporation of Aeon Hollov Rubber Springs in Conventional Suspension Systems).* Automobile Engineer, April 1958.
7. * * * *Cary Laminaire Suspension (Ingenious Conversion System for Semi-Elliptic Springs, Providing a Progressive Rate Variation; Good Results Obtained on Comercial and Other Vehicles).* Automobile Engine r, April 1960.
8. Rix J., *Die Gummihohlfeder als Federungselement im Fahrzeugbau.* ATF, Oktober 1958.
9. Lustig W., *Die M.A.N.-Pressmüllwagen-System Ochsner.* АГZ., Dezember 1965.

SOLICITĂRI DINAMICE ÎN ARCE DE AUTOCAMIOANE DIN FOI SEMIELIPTICE ÎN TIMPUL ÎNSCRIERILOR ÎN CURBĂ

(Rezumat)

Se aduce o contribuţie la studiul solicitărilor dinamice în arce de autocamioane în timpul înscrierilor în curbă.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

D.K. 629.114

ÜBER DIE SEITENKRÄFTE AN KRAFTFAHRZEUGRÄDERN

VON

GH. DELIU

1. Vorwort

Die Kinematik und Dynamik der aufgehängten Automobilmasse sind in Arbeiten [1], [2] auf mathematischen Modellen mit 6 bzw. 4 Freiheitsgraden begründet. Die Modelle sind weitgehend für die Beschreibung der Seitenbewegung ausreichend.

Die vorliegende Arbeit erweitert die Dynamik der aufgehängten Automobilmasse mit Anwendung für Lastkraftwagen. In diesem Fall bringt die Mitwirkung der unaufgehängten Masse einen vernachlässigenden Einfluss, so dass das mathematische Modell mit 4 Freiheitsgraden technisch ausreicht. Das vereinfachte Schema dieses Modells ist in Abb. 1 dargestellt.

2. Kinematik der aufgehängten Masse

2. 1. Bezugssysteme

Die Orstbeschreibung der aufgehängten Masse ist auf drei verschiedenen Koordinatensysteme bezogen. Diese sind:

a) das raumfeste Bezugssytem $O_1\xi\eta\zeta$, mit der $O_1\xi$-Achse in der Strassenrichtung, die übringen zwei sind körperfeste Bezugssysteme, und zwar:

b) das an der unaufgehängten Masse befestigte System, $Ox_0 y_0 z_0$ (ein Transportbezugssystem), bzw.

c) das an der aufgehängten Masse befestigte System, Ωxyz, wie in Abb. 1 und 2 zu sehen ist.

2. 2. Geschwindigkeiten des Ωxyz-Systems

In Übereinstimmung mit den oben angeführten Arbeiten, lässt sich die absolute Geschwindigkeit des Koordinatenursprungs Ω durch einen Kolonnenvektor beschreiben

(1) $$[\overline{V}_\Omega]_\Omega = \begin{bmatrix} V_{0x} \\ V_{0y} \\ -\varphi V_{0y} \end{bmatrix}$$

und die absolute Drehung

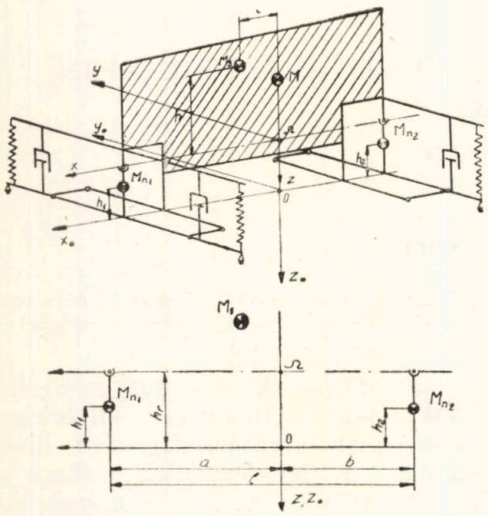


Abb. 1

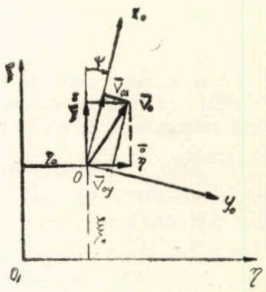


Abb. 2

(2) $$\overline{\omega} = \dot{\overline{\psi}} + \dot{\overline{\varphi}}$$

oder

(3) $$[\overline{\omega}]_\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\psi} & \dot{\psi}\varphi \\ \dot{\psi} & 0 & -\dot{\varphi} \\ -\dot{\psi}\varphi & \dot{\varphi} & 0 \end{bmatrix},$$

die nur in Bezug auf die Drehungsachse durch einen Kolonnenvektor dargestellt werden kann:

(4) $$[\overline{\omega}]_\Omega = \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\psi}\varphi \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}.$$

3. Ableitung der Bewegungsgleichungen der aufgehängten Masse

Es werden dazu die Lagrange-Gleichungen benützt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i\,, \tag{5}$$

wo

$$E = E_s + E_{n_1} + E_{n_2} = E_s + E_n\,, \tag{6}$$

$$E_S = \frac{1}{2} M_S (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) + \frac{1}{2}\mathfrak{J}_x \omega_x^2 + \frac{1}{2}\mathfrak{J}_y \omega_y^2 + \frac{1}{2}\mathfrak{J}_z \omega_z^2 + \\ + M_S c (V_y \omega_z - V_z \omega_y) + M_S h (V_y \omega_x - V_x \omega_y) - \mathfrak{J}_{xz} \omega_x \omega_z\,, \tag{6'}$$

$$E_n = \frac{1}{2} M_{n_1} [V_{0x}^2 + (V_{0y} + a\dot{\psi})^2] + \frac{1}{2}\mathfrak{J}_{z n_1} \dot{\psi}^2 + \\ + \frac{1}{2} M_{n_2} [V_{0x}^2 + (V_{0y} - b\dot{\psi})^2] + \frac{1}{2}\mathfrak{J}_{z n_1} \dot{\psi}^2\,, \tag{6''}$$

$$E_p = \int_0^{\varphi} L_1(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi + \int_0^{\varphi} L_2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi - \frac{1}{2} M_S g \varphi^2 h, \tag{7}$$

$$D = \int_0^{\dot{\varphi}} \beta_1(\dot{\varphi})\,\mathrm{d}\dot{\varphi} + \int_0^{\dot{\varphi}} \beta_2(\dot{\varphi})\,\mathrm{d}\dot{\varphi}, \tag{8}$$

$$q_1 = \xi_0\,, \quad q_2 = \eta_0\,, \quad q_3 = \psi\,, \quad q_4 = \varphi\,, \tag{9}$$

$$Q_1 = Q_x = X_w + X_{1S} + X_{1D} + X_{2S} + X_{2D}\,, \tag{10}$$

$$Q_2 = Q_y = Y_w + Y_{1S} + Y_{1D} + Y_{2S} + Y_{2D}\,, \tag{10'}$$

$$Q_3 = Q_\psi = N_w + aY_{1S} + aY_{1D} - bY_{2S} - bY_{2D} + N_{1S} + N_{1D} + N_{2S} + N_{2D} + \\ + X_{1S}\frac{B_1}{2} - X_{1D}\frac{B_1}{2} + X_{2S}\frac{B_2}{2} - X_{2D}\frac{B_2}{2}\,, \tag{10''}$$

$$Q_4 = Q_\varphi = L_w\,. \tag{10'''}$$

Damit werden die Bewegungsgleichungen:

$$M(\dot{V}_{0x} - V_{0y}\dot{\psi}) - M_s(\ddot{\psi}\varphi - 2\dot{\psi}\dot{\varphi})\,h = X_w + X_1 + X_2\,, \tag{11}$$

$$M(\dot{V}_{0y} + V_{0x}\dot{\psi}) + M_s(\ddot{\varphi} - \dot{\psi}^2\varphi)\,h = Y_w + Y_1 + Y_2\,, \tag{12}$$

$$M_s(V_{0y}\dot{\psi} - \dot{V}_{0x})\varphi h - \mathcal{J}_{xz}\ddot{\varphi} + (\mathcal{J}_z + \mathcal{J}_{z_{n_1}} + \mathcal{J}_{z_{n_2}} + M_{n_1}a^2 + M_{n_2}b^2)\ddot{\psi} = \tag{13}$$
$$= N_w + aY_1 - bY_2 + N + N_B,$$

$$M_s[h(\dot{V}_{0y} + V_{0x}\dot{\psi}) - V_{0y}\dot{\psi}\varphi c] + \ddot{\varphi}\mathcal{J}_x - \ddot{\psi}\mathcal{J}_{xz} - \mathcal{J}_y\dot{\psi}^2\varphi + \tag{14}$$
$$+ L_1(\varphi) + L_2(\varphi) - M_s gh\varphi + \beta_1(\dot{\varphi}) + \beta_2(\dot{\varphi}) = L_w.$$

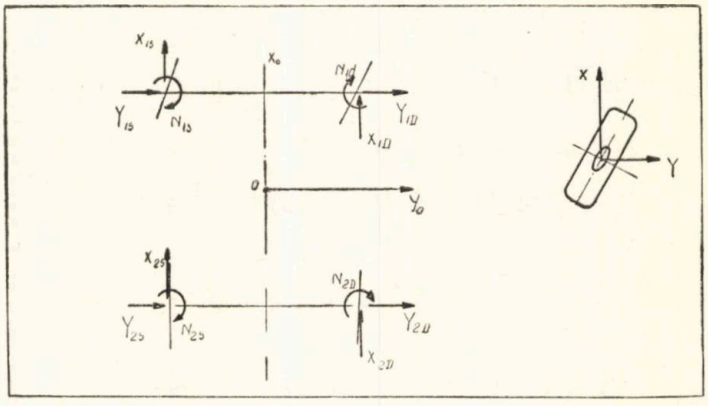


Abb. 3

4. Bewegungsgleichungen bei konstanten Kurwenradius und konstanter Geschwindigkeit

Die Bewegungsgleichungen erhalten die Form:

$$-MV_{0y}\dot{\psi} = X_w + X_1 + X_2, \tag{15}$$

$$MV_{0x}\dot{\psi} - M_s\dot{\psi}^2\varphi h = Y_w + Y_1 + Y_2, \tag{16}$$

$$M_S V_{0y}\dot{\psi}\varphi h = N_w + aY_1 - bY_2 + N + N_B, \tag{17}$$

$$-M_S(V_{0y}\varphi c - V_{0x}h)\dot{\psi} - \mathcal{J}_y\dot{\psi}^2\varphi + L_1(\varphi) + L_2(\varphi) - M_S gh\varphi = L_w. \tag{18}$$

Mit Hinzunahme der Gleichgewichtgleichungen:
a) der vertikalen Komponenten

$$Z_{1S} + Z_{1D} + Z_{2S} + Z_{2D} = Mg; \tag{19}$$

b) der Achsenmomente in Bezug zu einer Querrachse der Kräfte die auf das ganze Kraftfahrzeug wirken

$$(20) \qquad -M_S(b+c)\,\dot{\psi}^2(h_r+h) - M_{n_1} L\,\dot{\psi}^2 h_1 + X_w h_w - Z_2 L + Mga = 0;$$

c) der Achsenmomente in Bezug zu einer Längsachse der Kräfte die nur auf der Vorder- bzw. Hinterachse arbeiten

$$(21) \quad L_1(\varphi) + (Z_{1S} - Z_{1D})\frac{B}{2} - (Y_{1S} + Y_{1D})\,h_r + M_{n_1} V_{0x}\,\dot{\psi}\,(h_r - h_1) = 0,$$

$$(22) \quad L_1(\varphi) + (Z_{2S} - Z_{2D})\frac{B}{2} - (Y_{2S} + Y_{2D})\,h_r + M_{n_2} V_{0x}\,\dot{\psi}\,(h_r - h_2) = 0$$

und unter den Bezeichnungen:

$$(23) \quad \begin{cases} L_1(\varphi) = c_1\varphi\ , & Y_{1S} + Y_{1D} \approx S_1\ , \\ L_2(\varphi) = c_2\varphi\ , & Y_{2S} + Y_{2D} = S_2, \\ X_w = kFV^2\ , & N = N_{1S} + N_{1D} + N_{2S} + N_{2D}, \\ \dot{\psi} = \dfrac{V_{0x}}{R} \approx \dfrac{V}{R}, & N_B = (X_{1S} - X_{1D})\dfrac{B}{2} + (X_{2S} - X_{2D})\dfrac{B}{2}, \end{cases}$$

ergibt sich das Gleichungssystem:

$$(24) \quad \begin{cases} -\Delta Z_1' = \Delta Z_2' = \dfrac{1}{L}\left[kFV^2 h_w - M_{n_1} L\dfrac{V^2}{R}\cdot\dfrac{h_1}{R} - M_s(b+c)\dfrac{V^2}{R}\cdot\dfrac{h_s}{R}\right], \\ \Delta Z_{1S}'' = -\Delta Z_{1D}'' = M_{n_1}\dfrac{V^2}{R}\cdot\dfrac{h_r - h_1}{B} - \dfrac{c_1\varphi}{B} - S_1\dfrac{h_r}{B}, \\ \Delta Z_{2S}'' = -\Delta Z_{2D}'' = M_{n_2}\dfrac{V^2}{R}\cdot\dfrac{h_r - h_2}{B} - \dfrac{c_2\varphi}{B} - S_2\dfrac{h_r}{B}, \\ S_1 + S_2 = M\dfrac{V^2}{R} + M_S\dfrac{V^2}{R}\cdot\dfrac{h}{R}\varphi, \quad S_1 a - S_2 b = 0, \\ \varphi(c_1 + c_2 - M_s gh) \cong M_s\dfrac{V^2}{R}h. \end{cases}$$

5. Berechnung der Radlasten und Seitenkräfte

Die Lösung des Gleichungssystems (24) führt zu:

$$(25) \quad \begin{cases} Z_{1S} \cong Mg\dfrac{b}{2L} - \dfrac{1}{B}\cdot\dfrac{V^2}{R}\left(M_{n_1}h_1 + M_S\dfrac{b+c}{L}h_r + \dfrac{c_1 M_S h}{c_1 + c_2 - M_S gh}\right), \\ Z_{1D} \cong Mg\dfrac{b}{2L} + \dfrac{1}{B}\cdot\dfrac{V^2}{R}\left(M_{n_1}h_1 + M_S\dfrac{b+c}{L}h_r + \dfrac{c_1 M_S h}{c_1 + c_2 - M_S gh}\right), \\ S_1 = \dfrac{V^2}{R}\left(M_{n_1} + M_S\dfrac{b+c}{L}\right), \quad S_2 = \dfrac{V^2}{R}\left(M_{n_2} + M_S\dfrac{a-c}{L}\right). \end{cases}$$

6. Seitenkräfteaufteilung auf den Rädern einer Achse

Lässt sich jede Achse durch das Schema (Abb. 4) erklären, so können die Seitenkräfte, die von einem der Rädern aufgenommen wird, durch den Ausdrücken:

$$\frac{S_{1D}}{\lambda_D} = \frac{S_{1S}}{\lambda_S}, \quad S_{1S} + S_{1D} = S_1, \tag{26}$$

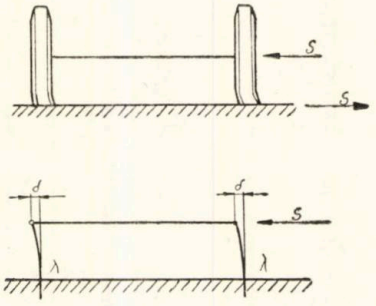


Abb. 4

beschrieben werden. λ_S und λ_D bezeichnen darin die seitlichen Starrheiten der Reifen. Bei linearen Überlegungen der Abhängigkeit Reifenstarrheit-Radlastübertragung, erhalten wir für eine Linkskurve:

$$\begin{cases} \lambda_D = \lambda_0 (1 - \alpha \Delta Z''_{1D}), & S_{1S} = \dfrac{S_1}{Z} (1 - \alpha \Delta Z''_{1S}), \\ \lambda_S = \lambda_0 (1 - \alpha \Delta Z''_{1S}), & S_{1D} = \dfrac{S_1}{2} (1 + \alpha \Delta Z''_{1S}), \end{cases} \tag{27}$$

oder

$$S_{1D} = \frac{1}{2} \cdot \frac{V^2}{R} \left(M_{n_1} + M_S \frac{b+c}{L} \right) \left\{ 1 - \frac{\alpha}{B} \left[\frac{V^2}{R} \left(M_{n_1} h_1 + \frac{b+c}{L} M_S h_r + \right. \right. \right.$$
$$\left. \left. \left. + \frac{c_1 M_S h}{c_1 + c_2 - M_S g h} \right) \right] \right\}, \tag{28}$$

$$S_{1S} = \frac{1}{2} \cdot \frac{V^2}{R} \left(M_{n_1} + M_S \frac{b+c}{L} \right) \left\{ 1 + \frac{\alpha}{B} \left[\frac{V^2}{R} \left(M_{n_1} h_1 + \frac{b+c}{L} M_S h_r + \right. \right. \right.$$
$$\left. \left. \left. + \frac{c_1 M_S h}{c_1 + c_2 - M_S g h} \right) \right] \right\}. \tag{29}$$

Durch Umformung der Gleichungen (25) ... (29) lässt sich das Stabilitätsdiagramm der Vorderachse wie in Abb. 5 darstellen:

$$(30)\qquad \begin{cases} Z_{1D} = A_3 + A_4 \dfrac{V^2}{R}, & S_{1D} = A_1 \dfrac{V^2}{R} - A_2 \left(\dfrac{V^2}{R}\right)^2, \\ Z_{1S} = A_3 - A_4 \dfrac{V^2}{R}, & S_{1S} = A_1 \dfrac{V^2}{R} + A_2 \left(\dfrac{V^2}{R}\right)^2. \end{cases}$$

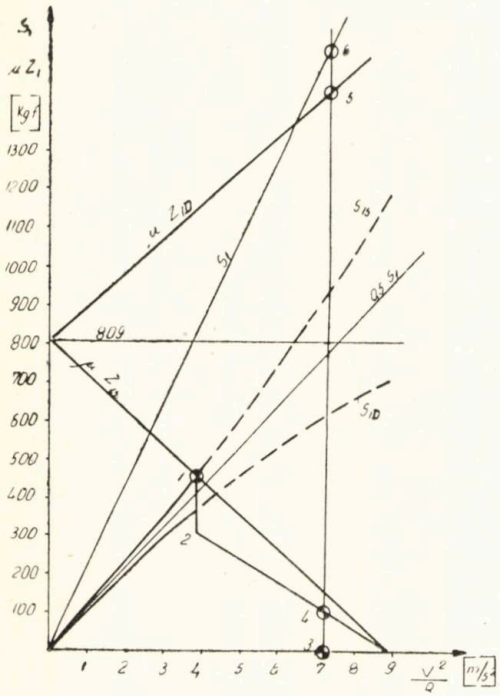


Abb. 5

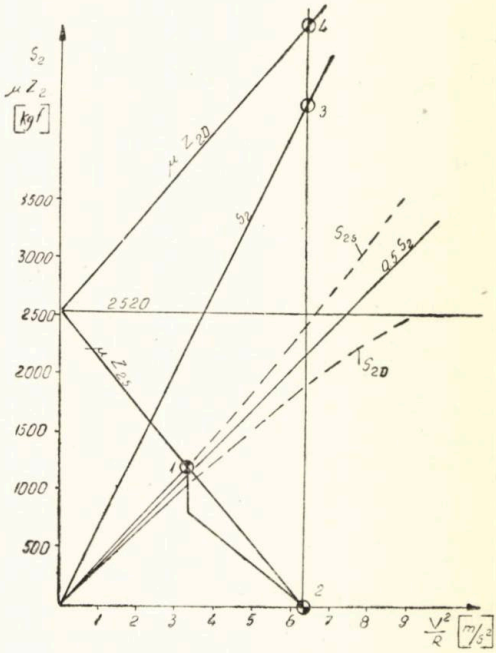


Abb. 6

Für die Hinterachse kann eine ähnliche Vereinfachungsüberlegung durchgeführt werden, die in diesem Fall die Vernachlässigung der Umfangskraftwirkung betrifft. Das ist für das vorher angenommene zeitlich konstantes Regime möglich. Die Abb. 6 stellt das so ausgerechnete Stabilitätsdiagramm dar.

7. Interpretation der Stabilitatsdiagramme

Die Diagramme wurden fur einen Lastkraftwagen SR-113 mit folgenden zahlenmässigen Angaben angefertigt:

$M = 890$ Kgf s²/m, $L = 4$ m, $F = 3{,}5$ m²

$M_{n_1} = 34{,}6$ Kgf s²/m, $a = 3{,}04$ m, $k = 0{,}06$ Kgf s²/m⁴,

$M_{n_2} = 74{,}5$ Kgf s²/m, $b = 0{,}96$ m, $c = 0{,}04$ m,

$M_S = 780{,}9$ Kgf s²/m, $h_w = 1{,}265$ m, $c_1 = 4\,250$ Kgf m/rad,

$g \cong 10$ m/s², $h = 0{,}66$ m, $c_2 = 26\,100$ Kgf m/rad,

$B = 1{,}75$ m, $h_r = 0{,}60$ m, $J_y = 2\,400$ Kgf m s².

$h_1 = 0{,}40$ m,

$h_2 = 0{,}50$ m,

Die charakteristischen Punkte des Diagramms aus Abb. 5 sind:

a) der Anfang der seitlichen Gleitung des inneren Vorderrades, Punkt *1*;

b) der Anfang des seitlichen Schleuderns der ganzen Achse, die Punkte *3, 4, 5, 6,* (der Abstand *3-4* gleich dem Abstand *5-6*)

Die charakteristischen Punkte des Diagramms aus Abb. 6 sind:

a) der Anfang der seitlichen Gleitung des inneren Hinterrades, Punkt *1*;

b) die Abhebung des inneres Hinterrades von der Fahrbahn, Punkt *2.*

Bedeutung der Formelzeichen

a, b — Abstand des Fahrzeugschwerpunktes von der Vorderachse, bzw. Hinterachse,
A_1, A_2, A_3, A_4 — Konstanten,
B — Spurweite,
c — Abstand des Schwerpunktes der aufgehängten Masse von der Ωz-Achse,
c_1, c_2 — Schlingerstarrheit der Vorderfederung, bzw. Hinterfederung,
D — Streuungsfunktion,
E_S — Kinetische Energie der aufgehängten Masse,
E_n — Kinetische Energie der unaufgehängten Masse,
E_p — Potentielle Energie,
g — Schwerebeschleunigung,
h — Abstand des Schwerpunktes der aufgehängten Masse von der Ωx - Achse (Schlingerachse),
h_r — Abstand der Schlingerachse von der Fahrbahnebene,
h_1, h_2 — Abstand des Schwerpunktes der vorne bzw. hinten unaufgehängten Masse von der Fahrbahnebene,
J_x, J_y, J_z — Trägheitsmomente und
J_{xz} — Deviationsmomente der aufgehängten Masse in korperfestem Koordinatensystem Ωxyz,
$J_{z_{n_1}}$, $J_{z_{n_2}}$ — Trägheitsmomente der vorne und hinten unaufgehängten Masse in Bezug zu vertikalen Eigenachsen,
l — Radstand,
L_1, L_2 — Innere Federungsmomente, vorne bzw. hinten,
L_w — Ωx - Projektion des Luftwiederstandmomentes,

M — Masse des Fahrzeugs,

M_S — Aufgehängte Masse des Fahrzeugs,

M_{n_1}, M_{n_2} — Unaufgehängte Masse, vorne bzw. hinten,

N — Totaler Reifenrückstellmoment,

N_{1S}, N_{1D}, N_{2S}, N_{2D} — Reifenrückstellmoment jedes Reifens,

N_w — Ωz - Projektion des Luftwiederstandmomentes,

Q_i — Lagrange-Kraft (Verallgemeinerte Kraft),

q_i, $\dot{q}_i$ — Lagrange-Koordinate, bzw. Geschwindigkeit,

R — Kurvenradius,

S_{1S}, S_{1D}, S_{2S}, S_{2D} — Seitenkräfte bei jedem Rad,

S_1, S_S — Achsenseitenkräfte,

$\overline{V}$ — Geschwindigkeitsvektor,

V_{0x}, V_{0y} — Geschwindigkeitskomponenten des O-Punkts auf Ox, Oy-Achsen,

X_{1S}, X_{1D}, X_{2S}, X_{2D} — Längsradkräfte,

X_w — Längsluftkraftskomponente,

Y_{1S}, Y_{1D}, Y_{2S}, Y_{2D} — Querradkräfte,

Y_w — Querluftkraftskomponente,

Z_{1S}, Z_{1D}, Z_{2S}, Z_{2D} — Radlast auf jedem Rad,

$\Delta Z'$ — Langsübertragung der Radlast,

$\Delta Z''$ — Querübertragung der Radlast,

α — Leitungsfähigkeit der Radlastübertragung in linearer Überlegung der Seitenstarrheiten,

β_1, β_2 — Innere Dampfungsmomente; vorne bzw. hinten,

λ_S, λ_D — Seitenstarrheiten der Reifen einer Achse,

ξ_0, η_0 — O - Ursprungskoordinaten und,

$\dot{\xi}_0$, $\dot{\eta}_0$ — Geschwindigkeiten in Bezug zu dem raumfesten System,

φ — Schlingerwinkel,

ψ — Stellungswinkel des Fahrzeugs; Winkel zwischen Fahrzeuglangsachse und Strassenrichtung,

ω — Winkelgeschwindigkeit.

Eingegagen am 25 XII 1968

Technische Hochschule,
Braşov

LITERATURVERZEICHNIS

1. Deliu Gh., *Sur la cinématique de la masse suspendue des automobiles.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1968, **XIV (XVIII)**, *1 — 2*, pp. 438 — 442.
2. — *Asupra dinamicii masei suspendate a automobilelor.* Bul. Inst. polit. Braşov, Seria A, 1969, *11.*
3. Pacejka H. B., *De bestuderung van hef gedrag van een zich over een vlakke horizontale weg bewegende auto, m. b. v. een elektronische analogonmachine.* Technische Hogeschool, Delft, Holland, Laboratorium voor Voertiugtechniek, 1958.

ASUPRA FORȚELOR LATERALE LA ROȚI DE AUTOMOBIL

(Rezumat)

Se studiază dinamica masei suspendate a automobilelor, cu aplicație la autocamioane, pe un model matematic cu patru grade de libertate. Se determină forțele laterale și verticale la roți în regim staționar și se ridică diagramele de stabilitate la derapaj ale celor două punți ale autocamionului, cu aplicație numerică pentru tipul SR-113.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

C. D. 621.791 ; 621.81

CONTRIBUTIONS AU CALCUL DES ASSEMBLAGES SOUDÉS AUX SOLLICITATIONS STATIQUES ET À LA FATIGUE, SIMPLES ET COMPOSÉES, FONDÉES SUR DES RECHERCHES EXPÉRIMENTALES

PAR

N. G. POPINCEANU et V. MERTICARU

Communication présentée dans la session scientifique de l'Institut Polytechnique de Jassy, 28—30 septembre 1967

1. Considérations générales

Les assemblages soudés tendent à remplacer de plus en plus les autres types d'assemblages non démontables. La littérature de spécialité présente de nombreuses recherches qui ont acquis des résultats remarquables surtout dans le domaine de la technologie du soudage, du perfectionnement des procédés et de la découverte de nouveaux procédés de soudage, visant à l'application de ces procédés à un nombre toujours plus grand de matériaux et de domaines constructifs.

L'utilisation des assemblages soudés en général et dans la construction de machines tout particulièrement réclame de nombreux essais mécaniques de la résistance et surtout des essais à la fatigue.

La littérature de spécialité présente des résultats concernant surtout le comportement à la fatigue, aux sollicitations simples de traction et de flexion [2], [3], [4], [7], [9], aux aciers bien soudables, utilisés dans les constructions métalliques, aciers du typ St 37 (après DIN 17 100) et même pour St 52, équivalentes aux aciers roumains OL 38 respectivement OLX 52 ; on remarque cependant un nombre réduit de recherches concernant le comportement à la fatigue pour des sollicitations composées des assemblages soudés.

Les résultats des épreuves à la fatigue ne sont pas suffisants pour pouvoir servir comme base pour une méthode sûre et unitaire de calcul à la fatigue, tant pour les sollicitations simples que, surtout, pour les sollicitations composées ; on n'a pu trouver jusqu'à présent une relation généralement valable ni même pour les sollicitations statiques composées.

Dans ce qui suit on donne nombre de détails quant au niveau actuel des connaissances concernant le calcul des assemblages soudés aux sollicitations statiques et à la fatigue,on donne les résultats de certaines recherches à la fatigue, aux sollicitations simples de flexion et de torsion, et aux sollicitations composées de flexion avec torsion sur des

éprouvettes soudées bout à bout ; à partir des résultats de ces recherches on réussit à donner nombre de recommandations pour le calcul.

2. Considérations à propos du niveau actuel de calcul des assemblages soudés

On constate et l'on considère que la résistance du joint soudé et de la zone de passage du joint au matériel de base est moindre que la résistance du matériel de base.

Tant pour les sollicitations statiques que pour les sollicitations à la fatigue, on est convenu, pour le calcul des assemblages soudés, de comparer la tension effective ρ_s ou équivalente σ_{es} du joint ou de la zone de passage à la tension admissible de traction du matériel de base multipliée par les coefficients d'affaiblissement.

2.1. Sollicitations statiques

Pour la vérification à la résistance de l'assemblage soudé on utilise la relation :

$$\rho_s \leqslant \rho_{as} = v_1 v_{2st} \sigma_{at} = v_1 v_{2st} \frac{\sigma_c}{c}, \tag{1}$$

où : v_1 — le coefficient d'affaiblissement qui dépend de la qualité de la soudure, v_{2st} —le coefficient d'affaiblissemet, aux sollicitations statiques, qui dépend de la forme du joint et de la nature de la tension du joint, σ_c — la limite d'écoulement à la traction, du matériel de base, c — coefficient de sûreté, ρ_{as} — la résistance admissible de la soudure, ρ_s — la tension effective du joint, qui, lors des sollicitations simples peut être la tension normale σ_s , ou tangentielle τ_s ; aux sollicitations composées ρ_s est exprimée par une des quatre relations suivantes :

$$\rho_s = \sigma_{es} = \frac{\sigma_s}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_s^2 + 4\tau_s^2}, \tag{2}$$

$$\rho_s = \sigma_{es} = \sqrt{\sigma_s^2 + 3\tau_s^2}, \tag{3}$$

$$\rho_s = \sigma_{es} = \sqrt{\sigma_s^2 + \tau_s^2}, \tag{4}$$

$$\rho_s = \sigma_{es} = \sqrt{\sigma_s^2 + \lambda\tau_s^2}. \tag{5}$$

Les relations (2) et (3) sont utilisées par P. Schimpke et H. A. Horn [12], la relation (4) par G. Niemann [8] et la relation (5) par A. Neumann [7] qui, en se basant sur des essais, recommande pour certains assemblages λ=1,7.

Dans les relations (2)...(5) on a noté par σ_{es} la tension équivalente du joint, tandis que σ_s et τ_s sont les tensions effectives normales, respectivement tangentielles du joint soudé.

2.2. Sollicitations à la fatigue

Dans le calcul à la fatigue des assemblages soudés, on utilise, sauf différentes relations de calcul nombre de méthodes de calcul ; à savoir il y a trois méthodes qui se profilent dans la littérature de spécialité.

a) *La méthode de la comparaison de l'amplitude des tensions.* Cette méthode, exposée par G. Niemann [8], est basée sur les relations :

$$\rho_{vs} \leqslant v_1 v_2 \frac{\sigma_{vl}}{c}, \tag{6}$$

pour les sollicitations simples, et

$$\rho_{vs} = \sigma_{ves} = \sqrt{\sigma_{vs}^2 + \tau_{vs}^2} \leqslant v_1 v_2 \frac{\sigma_{vl}}{c}, \tag{7}$$

pour les sollicitations composées.

Dans les relations (6) et (7) on a noté par : σ_s — l'amplitude de la tension effective du joint qui, dans le cas des sollicitations simples (relation (6)) peut être normale σ_{vs} ou tangentielle τ_{vs}, tandis que pour des sollicitations composées (relation (7)) $\rho_{vs} = \sigma_{ves}$ représente l'amplitude de la tension équivalente du joint ; dans la relation (7) on a noté par ρ_{vs} et τ_{vs} les amplitudes des tensions effectives normales, respectivement tangentielles du joint (fig. 1) ; σ_{vl} — l'amplitude de la tension limite de traction du matériel de base pour le cycle considéré ; lorsqu'on emploie cette méthode on compare en général des cycles à $\rho_m = \text{const.}$; v_1 — le coefficient d'affaiblissement, qui dépend de la qualité de la soudure ; v_2 — le coefficient d'affaiblissement, qui dépend de la nature de la tension du joint, du type du joint (bout à bout ou en angle) et de la manière d'usinage de la surface du joint, c — coefficient de sûreté pour les assemblages soudés.

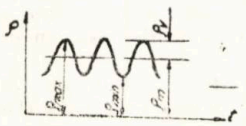


Fig. 1. — Schéma de la sollicitation à la fatigue : suivant la nature de la sollicitation, ρ peut être σ ou τ ; t — le temps.

Des valeurs numériques pour v_1, v_2, v_{2st} et c sont indiquées dans les travaux [10], [12].

Il est nécessaire de faire encore une vérification par rapport à la limite d'écoulement à l'aide de la relation $\rho_{maxs} \leqslant v_1 v_{2st} \sigma_c / c$, où σ_c est la limite d'écoulement à la traction du matériel de base.

b) *La méthode de la comparaison des tensions maximum* [10] ... [14]. Lorsqu'il y a des sollicitation simples on utilise la relation :

$$\rho_{maxs} \leqslant \rho_{maxas} = v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 \ldots \frac{\sigma_{maxl}}{c}, \tag{8}$$

tandis que pour des sollicitations composées [12] la relation :

$$\rho_{maxs} = \sigma_{maxes} = \sqrt{\sigma_{maxs}^2 + \tau_{maxs}^2} \leqslant v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 \ldots \frac{\sigma_{maxl}}{c}. \tag{9}$$

Tant pour les sollicitations simples que pour celles composées il est nécessaire à faire aussi une vérification par rapport à la limite d'écoulement à la traction du matériel de base à l'aide de la relation :

$$\rho_{maxs} \leqslant v_1 v_{2st} \frac{\sigma_c}{c}. \tag{10}$$

A. Neumann [7] propose pour les sollicitations composées une relation ayant la forme :

(11) $$\rho_{max s} = \sigma_{max es} = \sqrt{\sigma^2_{max s} + \lambda \tau^2_{max s}},$$

analogue à la relation (5), pour des sollicitations statiques, mais sans recommander des valeurs pour λ.

Dans les relations (8) ... (11) on a noté par: $\sigma_{max l}$ — la tension limite (résistance) à la fatigue de traction du matériel de base au cycle considéré; on recommande, lorsqu'on emploie cette méthode, de comparer les cycles au même coefficient d'asymétrie, ayant donc $\rho_v/\rho_m = \text{const.}$; $\rho_{max s} = \rho_{ms} + \rho_{vs}$ — la tension (fig. 1) maximum effective du joint qui, dans les relations (8) et (10), peut être normale ou tangentielle, et dans les relations (9) et (11) représente la tension équivalente maximum $\sigma_{max es}$ du joint; $\sigma_{max s}$ et $\tau_{max s}$ — les tensions maximales effectives, normale, respectivement tangentielle, du joint; c — coefficient de sûreté pour les assemblages soudés; v_1, v_2, et v_{2st} — coefficients d'affaiblissement ayant la même signification que dans le § **2.2 a**; v_3, v_4, v_5 — des coefficients d'affaiblissement qui indiquent respectivement l'influence de la dimension, des tensions rémanentes et du matériel; dans les travaux mentionnés [8], [10], [12] [1]) on donne des valeurs numériques pour c, v_1, v_2, v_{2st}, v_3, v_4, v_5. Les valeurs numériques pour v_3, v_4 et v_5 ne sont pas encore suffisantes; c'est pourquoi on utilise, dans cette méthode, seulement les coefficients v_1 et v_2 (v_2 tient compte aussi des influences qui caractérisent v_3, v_4 et v_5). Aux sollicitations à la fatigue $v_1 = 1$, puisqu'on y utilise seulement des soudures de qualité supérieure [8], [10].

c) *La méthode du coefficient de réduction des résistances admissibles.* Cette méthode, recommandée par S. V. Serensen [13] pour les constructions métalliques, est relativement peu utilisée; elle fait appel à la relation:

(12) $$\rho_{max s} \leqslant \gamma v_1 v_{2st} \frac{\sigma_c}{c},$$

où γ est un coefficient de réduction.

On peut constater, compte tenu des §§ **2.1** et **2.2**, qu'aux sollicitations statiques composées on utilise quatre relations différentes, plus précisément les relations (2), (3), (4) et (5), tandis que le calcul aux sollicitations a la fatigue est basé sur trois méthodes différentes.

En examinant les relations (9) et (11), qui ont la même forme, mais dans la relation (9) $\lambda = 1$, on est amené à se poser les questions suivantes:

1° Est-ce que λ a vraiment des valeurs constantes pour toutes valeurs de $\sigma_{max s}$ et $\tau_{max s}$?

2° Qu'est-ce qui se passe si les tensions normales et tangentielles du joint ne varient pas suivant le même cycle, mais suivant des cycles différents? Comment les relations du type (9) et (11) tiennent elles compte de celà?

3° Ne serait-il pas possible à obtenir une relation de calcul pour les sollicitations composées à la fatigue qui ait une valabilité générale indifférent de la nature du cycle selon lequel varient les tensions normales ou tangentielles (par exemple, l'un est symétrique, l'autre oscillant, ou bien l'un est osciliant, l'autre constant, etc.)?

---

[1]) Dans le travail [12] les coefficients v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 sont notés respectivement par b_1, b_2, b_3, b_4, b_5.

Afin de pouvoir répondre à ces questions on a effectué des essais à la fatigue, simples et composés, comme on peut voir ci-dessous, et l'on propose sur cette base une relation unitare de calcul.

3. Recherches expérimentales

3.1. La machine et les éprouvettes d'essai

Les essais ont été effectués sur une machine d'épreuves à la fatigue, dont le schéma est représenté dans la fig. 2.

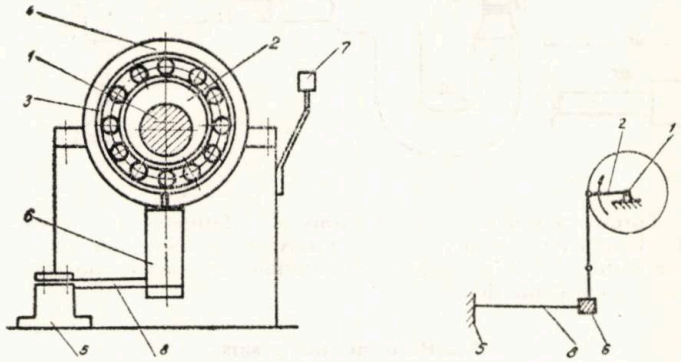


Fig. 2. — Schéma de la machine d'épreuve à la fatigue : *a* — le principe constructif ; *b* — le schéma de travail ; *1* — l'arbre principal de la machine ; *2* — excentrique ; *3* — roulement ; *4* — anneau ; *5* et *6* — dispositifs de fixation de l'éprouvette ; *7* — compteur de cycles ; *8* — éprouvette d'essai.

Sur l'arbre *1* de la machine d'épreuve on a monté neuf excentriques de manière que la machine permet l'essai des neuf éprouvettes simultanément, à des charges diverses, soit au même cycle de sollicitation, soit à des cycles différents ; la machine permet aussi des épreuves à la fatigue de flexion dans le plan, épreuves à la torsion et épreuves aux sollicitations composées de flexion dans le plan avec torsion.

Les éprouvettes soudées pour épreuves à la fatigue ont la forme donnée dans les fig. 3 a, 3 b, 3 c et 4 a, 4 b, 4 c.

Les éprouvettes ont été confectionnées de OL 38 STAS 500-63 (analogue à l'acier St 37 DIN 17 100) ; les soudures ont été effectuées avec des électrodes EL 42 A STAS 1 125-64 (analogues à E 42 GOST 2 523-51).

On a considéré seulement les éprouvettes à soudures sans défauts remarquables.

Après soudage les éprouvettes ont été traitées du point de vue thermique par recuit de stabilisation et la surface de la soudure a été usinée par tournage fin et polissage.

Pour chaque type des éprouvettes indiquées dans la fig. 3 on a essayé des éprouvettes sans entaille de même que des éprouvettes à entaille du type *A*. Pour tous les types d'essais le cycle de sollicitations a été alternant symétrique.

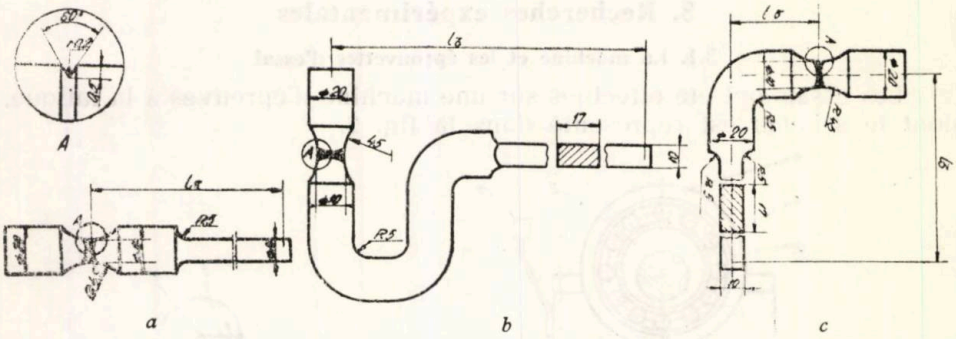


Fig. 3. — Éprouvettes soudées pour essais à la fatigue : *a* — éprouvette soudée pour essai à la flexion dans le plan ; *b* — éprouvette soudée pour essai à la torsion ; *c* — éprouvette soudée pour essai aux sollicitations composées de flexion avec torsion ; *A* — détail pour l'entaille.

3.2. Résultats des essais

Les résultats obtenus sont indiqués dans les fig. 5 et 6 pour sollicitations simples de flexion, respectivement torsion, et dans la fig. 7 pour sollicitations à la fatigue composées de flexion avec torsion.

En examinant les fig. 5 et 6 on constate que les coefficients de concentration des tensions K_σ et K_τ et les coefficients de sensibilité du matériel par rapport à l'entaille η_σ et η_τ sont moindres que ceux pour le matériel de base ; c'est bien normal, vu la structure du matériel déposé par soudage.

Si l'on écrit la relation (11) sur la courbe limite de la fig. 7 on obtient $\sqrt{\sigma^2_{\max s} + \lambda\tau^2_{\max s}} = \sigma_{-1s}$ d'où il en résulte

$$\lambda = \frac{\sigma^2_{-1s} - \sigma^2_{\max s}}{\tau^2_{\max s}}$$

pour éprouvettes sans entaille et

$$\lambda_k = \frac{\sigma^2_{-1sk} - \sigma^2_{\max sk}}{\tau^2_{\max sk}} .$$

pour éprouvettes avec entaille.

Dans les tableaux 1 a et 1 b on donne les valeurs de λ et λ_k ainsi déterminées, pour des divers rapports $\tau_{\max s}/\sigma_{\max s}$ et respectivement $\tau_{\max sk}/\sigma_{\max sk}$ caractérisant les points des courbes limite (fig. 7) obtenues par essais.

Tableau 1

Valeurs pour λ *et* λ_k *pour différentes valeurs des rapports* $\tau_{max s}/\sigma_{max s}$ *respectivement* $\tau_{max sk}/\sigma_{max sk}$ *dans le cas des éprouvettes sans entaille* (a) *et avec entaille* (b) *sollicitées de manière composée à la flexion avec torsion*

$\tau_{max s}$	$\sigma_{max s}$	$\frac{\tau_{max s}}{\sigma_{max s}}$	λ	$\tau_{max sk}$	$\sigma_{max sk}$	$\frac{\tau_{max sk}}{\sigma_{max sk}}$	λ_k
900	300	3	3,24	810	320	2,53	1,89
895	780	1,15	2,63	780	540	1,44	1,74
850	1 080	0,787	2,15	680	820	0,83	1,48
700	1 160	0,603	2,79	670	620	1,08	2,14
740	1 290	0,573	1,90	430	1 030	0,417	1,52
520	1 500	0,346	1,73				

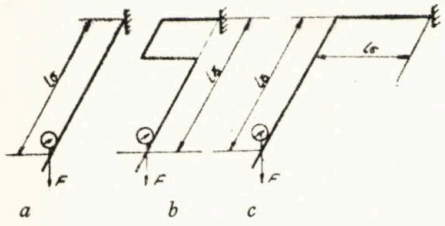


Fig. 4. — Schéma des éprouvettes nécessaire à la détermination des tensions : *a* — éprouvette pour essais à la flexion ; *b* — éprouvette pour essais à la torsion ; *c* — éprouvette pour essais aux sollicitations composées de flexion avec torsion ; la tension de flexion de la soudure $\sigma_{max s} = 32Fl_\sigma/\pi d^3$, la tension de torsion de la soudure $\tau_{max s} = 16Fl_\tau/\pi d^3$; *d* — diamètre de l'éprouvette soudée ($d = 10$ mm).

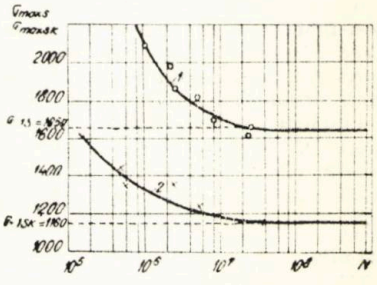


Fig. 5. — Courbes de fatigue pour la flexion dans le plan, cycle alternant symétrique, pour des éprouvettes telles que celles de la fig. 3 a : *N* — nombre des cycles de sollicitation, $\sigma_{-1s} = 1\,650$ kgf/cm² — résistance à la fatigue, éprouvette sans entaille, $N > 10^7$ cycles, $\sigma_{-1sk} = 1\,160$ kgf/cm² — résistance à la fatigue, éprouvette avec entaille, $N > 10^7$ cycles ; *1* — courbe pour éprouvette sans entaille ; 2 — courbe pour éprouvette a entaille ; le coefficient de concentration des tensions $K_\sigma = \sigma_{-1sk}/\sigma_{-1sk} = 1{,}42$; le coefficient de sensibilité du matériel par rapport à l'entaille $\eta_\sigma = (K_\sigma - 1)/(\alpha_k - 1) = 0{,}21$ avec $\alpha_k = 3$ pour entaille du type *A* (fig. 3) [1] ; pour le matériel de base $K_\sigma = 1{,}7$, $\eta_\sigma = 0{,}35$ [11].

Dans le tableau 1 on voit que λ et λ_k ont des valeurs différentes et non pas des valeurs constantes pour des rapports différents $\tau_{max s}/\sigma_{max s}$ et respectivement $\tau_{max sk}/\sigma_{max sk}$ il en résulte que l'emploi des relations du type (9) ou (11) pour le calcul à la fatigue des assemblages soudés aux sollicitations composées n'est pas justifié.

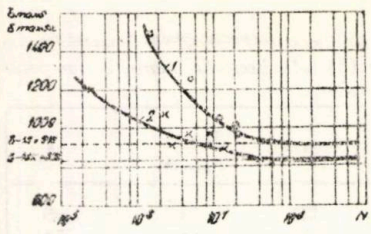


Fig. 6. Courbes de fatigue à la torsion, cycle alternant symétrique, pour éprouvettes telles que celles de la fig. 3 b : N — nombre des cycles de solicitation, $\tau_{-1s} = 910$ kgf/cm^2 — résistance à la fatigue pour éprouvette sans entaille ; $\tau_{-1sk} = 830$ kgf/cm^2 — résistance à la fatigue pour éprouvette avec entaille ; *1* — courbe pour éprouvette sans entaille, 2 — courbe pour éprouvette avec entaille ; le coefficient de concentration des tensions $K_\tau = \tau_{-1s} / \tau_{-1sk} = 1{,}09$; le coefficient de sensibilité du matériel par rapport à l'entaille $\eta_\tau = (K_\tau - 1)/(\alpha_{k\tau} - 1) = 0{,}072$ avec $\alpha_{k\tau} = 2{,}25$ pour entaille du type *A* (fig. 3) [1] ; pour le matériel de base $K_\tau = 1{,}3$, $\eta_\tau = 2{,}24$ [11].

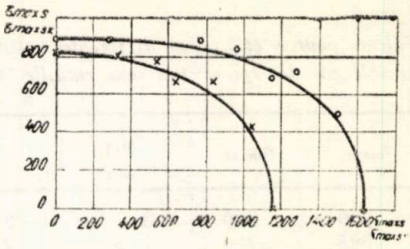


Fig. 7. — Courbes résultées des essais à la fatigue aux sollicitations composées de flexion, pour éprouvettes telles que celles de la fig. 3 c ; les tensions de fléxion de même que celles de torsion varient suivant le cycle alternant symétrique : *1* — courbe limite pour éprouvettes sans entaille, 2 — courbe limite pour éprouvettes avec entaille du type *A* (fig. 3).

4. Conclusions et propositions concernant le calcul des assemblages soudés

La relation (1), pour sollicitations statiques, peut s'écrire sous la forme :

$$c_\rho = \frac{\sigma_c}{\rho_s / v_1 v_{2st}} = \frac{\sigma_c}{\rho_s K_{\rho st}}, \tag{13}$$

où $K_{\rho st} = 1/v_1 v_{2st}$ est le coefficient d'affaiblissement pour des sollicitations statiques, c_s — coefficient de sûreté, pouvant être c_σ ou c_τ suivant que ρ_s est σ_s ou τ_s .

En adoptant la méthode indiquée dans le § **2.2** b), la relation (8) pour sollicitations simples à la fatigue peut s'écrire sous la forme :

$$c_\rho = \frac{\sigma_{max\,l}}{\rho_{max\,s} / v_1 v_2 v_3 v_4 v_5} = \frac{\sigma_{max\,l}}{\rho_{max\,s} K_\rho}, \tag{14}$$

où $K_\rho = 1/v_1 v_2 v_3 v_4 v_5$ est le coefficient d'affaiblissemet pour sollicitations variables, c_ρ est le coefficient de sûreté qui peut être c_σ ou c_τ suivant que $\rho_{max\,s}$ est $\sigma_{max\,s}$ ou $\tau_{max\,s}$.

En employant une schématisation, telle que l'indique S. V. Serensen [13], la relation (14) peut être écrite sous la forme :

$$c_\rho = \frac{\sigma_{-1t}}{(\rho_{vs} + \psi_{\sigma t}\, \rho_{ms})\, K_\rho}, \tag{15}$$

où $\psi_{\sigma t} = (2\sigma_{-1t} - \sigma_{0t})/\sigma_{0t}$ est le coefficient de sensibilité du matériel de base par rapport à l'assymétrie du cycle, σ_{-1t} — la résistance à la fatigue de traction, cycle alternant symétrique, du matériel de base, σ_{0t} — la résistance à la fatigue de traction, cycle pulsatoire, du matériel de base, ρ_{vs} — l'amplitude de la tension effective du joint ou de la zone de passage, qui peut être σ_{vs} ou τ_{vs}, ρ_{ms} — la tension moyenne effective du joint ou de la zone de passage qui peut être σ_{ms} ou τ_{ms}, c_ρ — coefficient de sûreté qui peut être c_σ ou c_τ suivant que ρ_{vs} et ρ_{ms} sont des tensions normales ou bien tangentielles.

Les relations (3) ... (5) pour les sollicitations statiques composées et les relations (9) et (11) pour les sollicitations à la fatigue composées sont du même type mais ayant des valeurs différentes pour λ.

Si l'on utilise ces relations, on peut calculer le coefficient de sûreté avec la relation :

$$\frac{1}{c_\sigma^2} + \frac{1}{c_\tau^2} = \frac{1}{c^2}\ ^{2})$$

ou

$$c = \frac{c_\sigma\, c_\tau}{\sqrt{c_\sigma^2 + c_\tau^2}}, \tag{16}$$

où c_σ et c_τ sont calculés à l'aide de la relation (13) pour les sollicitations à la fatigue. La relation (16) est valable aussi longtemps que $\lambda \leqslant \sigma^2_{\max ls}/\tau^2_{\max ls}$; elle peut être utilisée aussi bien pour le cas où les tensions du joint varient selon le même cycle que pour le cas où elles varient selon des cycles différents.

Pour les essais présentés ci-dessus le cycle de sollicitation a été alternant symétrique, donc $\sigma_{\max ls} = \sigma_{-1s}$, $\tau_{\max ls} = \tau_{1-s}$ et $\sigma^2_{-1s}/\tau^2_{-1s} = (1\,650/910)^2 = 3{,}27$ aux éprouvettes sans entaille, et $\sigma^2_{-1sk}/\tau^2_{-1sk} = (1\,160/830)^2 = 1{,}93$ aux celles avec entaille.

Dans le tableau 1 on peut voir que pour les éprouvettes sans entaille $\lambda < 3{,}27$, et pour les éprouvettes avec entaille $\lambda_k < 1{,}93$.

---

2) En effet, aux sollicitations statiques $\sigma_s^2 + \lambda\tau_s^2 = \sigma_{es}^2$, $\sigma_s^2/\sigma_{ls}^2 + \lambda\tau_s^2/\sigma_{ls}^2 = \sigma_{es}^2/\sigma_{ls}^2$ et comme $c_\sigma = \sigma_{ls}/\sigma_s$, $c_\tau = \tau_{ls}/\tau_s$, $c = \sigma_{ls}/\sigma_{es}$ il résulte que $1/c_\sigma^2 + 1/c_\tau^2 = 1/c^2$ si $\sigma_{ls}^2/\lambda = \tau_{ls}^2$; aux sollicitations à la fatigue, $c_\sigma = \sigma_{\max ls}/\sigma_{\max s}$, $c_\tau = \tau_{\max ls}/\tau_{\max s}$, $\lambda = \sigma^2_{\max ls}/\tau^2_{\max ls}$.

En conclusion, on recommande à utiliser pour la vérification à la résistance des joints soudés :

a) aux sollicitations statiques simples la relation (13) ;

b) aux sollicitations simples à la fatigue la relation (15) ; il est necesaire une vérification supplémentaire par rapport à la limite d'écoulement à la traction du matériel de base l'aide de la relation (13) ;

c) aux sollicitations composées la relation (16), qui peut être utilisée lorsque les cycles suivant lesquels varient les tensions normales et celles tangentielles du joint sont identiques, de même que dans le cas où ces cycles sont différents.

Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire des Éléments de machines

BIBLIOGRAPHIE

1. Buzdugan G., *Calculul de rezistență la solicitări variabile.* Ed. Tehn., Buc., 1963.
2. Bourguignon G., *La fatigue des assemblages soudés en acier.* Revue de la Soudure, 1963, **19**, 3, pp. 111—156.
3. Frost E., Denton K., *The Fatigue Strength of Butt-welded Joints in Low-alloy Structural Steels.* British Welding Journal, 1967, **14**, 4.
4. Mortelée J., *Essais de fatigue sur soudures bout à bout transversales contenant des manques de pénétration.* Revue de la Soudure, 1967, **23**, 2.
5. Nădăşan Şt., *Oboseala metalelor.* Ed. Tehn., Buc., 1963.
6. Nădăşan Şt., Raţiu M., *Consideraţii asupra folosirii raţionale a oţelurilor în construcţia de maşini.* Constr. de maşini, 1966, 3.
7. Neumann A., *Probleme în legătură cu rezistenţa la oboseală a îmbinărilor sudate.* I.D.T., Buc., 1962, (traduit de l'allemand).
8. Niemann G., *Maschinelemente.* Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1960.
9. Ouchida H., Nishioka A., *A Study of Fatigue Strength of Fillet Welded Joints.* Hitachi Review, 1964, **13**, 2.
10. Popinceanu N., Gheorghiu I., Merticaru V., *Asupra calculului la oboseală a îmbinărilor sudate.* I.D.T., Buc., 1964.
11. Popinceanu N., Gafiţeanu M., Merticaru V., Constantinescu M., *Principii de calcul la oboseală şi criterii de alegere a materialelor la proiectarea şi construcţia organelor de maşini.* Iaşi, 1967.
12. Schimpke, Horn, Ruge, *Praktisches Handbuch der gesammten Schweisstechnik* Bd. **III**, Zweite Aufl., Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1959.
13. Серенсен С. В., *Несущая способности и расчеты деталей машин на прочности* Машгиз, М. 1963.
14. *** *Справочник машиностроителя* Т. **4-II**, Машгиз, М., 1963,

CONTRIBUŢII LA CALCULUL ÎMBINĂRILOR SUDATE LA SOLICITĂRI STATICE ŞI LA OBOSEALĂ, SIMPLE ŞI COMPUSE, BAZATE PE ÎNCERCĂRI EXPERIMENTALE

(Rezumat)

Se realizează o sinteză a metodelor şi relaţiilor de calcul a îmbinărilor sudate solicitate static şi la oboseală şi se scoate în evidenţă caracterul neunitar al relaţiilor şi metodelor de calcul utilizate în prezent.

Se prezintă metodica unor încercări la oboseală, efectuate pe epruvete sudate, crestate și necrestate, la solicitări simple (încovoiere în plan și torsiune) și la solicitări compuse (încovoiere în plan cu torsiune) și se dau rezultatele acestor încercări.

Pe baza acestor rezultate se propun, pentru calculul îmbinărilor sudate, relații unitare, atît la solicitări statice simple și compuse, cît și la solicitări la oboseală simple și compuse.

Explicația figurilor

Fig. 1. — Schema solicitării la oboseală; după natura solicitării ρ poate fi σ sau τ; t — timpul.

Fig. 2. — Schema mașinii de încercat la oboseală: *a* — principiu constructiv, *b* — schemă de lucru; *1* — arborele principal al mașinii, *2* —excentric, *3* — rulment, *4* — inel, *5* și *6* — dispozitive de prindere a epruvetei, *7* — numărător de cicluri, *8* — epruvetă de încercat.

Fig. 3. — Epruvete sudate pentru încercări la oboseală: *a* — epruvetă sudată pentru încercare la încovoiere în plan, *b* — epruvetă sudată pentru încercare la răsucire, *c* — epruvetă sudată pentru încercare la solicitări compuse de încovoiere cu răsucire, *A* — detaliu pentru crestătură.

Fig. 4. — Schema epruvetelor, necesară pentru determinarea tensiunilor: *a* — epruvetă pentru încercare la încovoiere, *b* — epruvetă pentru încercare la răsucire, *c* — epruvetă pentru încercare la solicitări compuse de încovoiere cu răsucire; tensiunea de încovoiere din sudură $\sigma_{max\,s} = 32Fl_\sigma/\pi d^3$, tensiunea de răsucire din sudură $\tau_{max\,s} = 16Fl_\tau/\pi d^3$; d — diametrul epruvetei sudate ($d = 10$ mm).

Fig. 5. — Curbe de oboseală la încovoiere în plan, ciclu alternant simetric, pentru epruvete ca în fig. 3 a: N — numărul de cicluri de solicitare, $\sigma_{-1s} = 1\,650$ kgf/cm² — rezistența la oboseală, epruvetă fără crestătură, $N > 10^7$ cicluri, $\sigma_{-sk} = 1\,160$ kgf/cm² — rezistența la oboseală, epruvetă cu crestătură, $N > 10^7$ cicluri; *1* — curbă pentru epruvetă fără crestătură, *2* — curbă pentru epruvetă cu crestătură; coeficientul de concentrare a tensiunilor $K_\sigma = \sigma_{-1s}/\sigma_{-1sk} = 1{,}42$, coeficientul de sensibilitate a materialului față de crestătură $\eta_\sigma = (K_\sigma - 1)/(\alpha_k - 1) = 0{,}21$ cu $\alpha_k = 3$ pentru crestătură de tip *A* (fig. 3), [1]; pentru materialul de bază $K_\sigma = 1{,}7$, $\eta_\sigma = 0{,}35$, [11].

Fig. 6. — Curbe de oboseală la răsucire, ciclu alternant simetric pentru epruvete ca în fig. 3 b: N — numărul de cicluri de solicitare, $\tau_{-1s} = 910$ kgf/cm² — rezistența la oboseală pentru epruvetă fără crestătură, $\tau_{-1sk} = 830$ kgf/cm² — rezistența la oboseală pentru epruvete cu crestătură; *1* — curbă pentru epruvetă fără crestătură, *2* — curbă pentru epruvetă cu crestătură; coeficientul de concentrare a tensiunilor $K_\tau = \tau_{-1s}/\tau_{-1sk} = 1{,}09$; coeficientul de sensibilitate a materialului față de crestătură $\eta_\tau = (K_\tau - 1)/(\alpha_{k\tau} - 1) = 0{,}072$ cu $\alpha_{k\tau} = 2{,}25$, pentru crestătură de tip *A*, (fig. 3), [1]; pentru materialului de bază $K_\tau = 1{,}3$, $\eta_\tau = 0{,}24$, [11].

Fig. 7. — Curbe rezultate din încercările la oboseală la solicitări compuse de încovoiere cu răsucire, pentru epruvete ca în fig. 3 c; atît tensiunile de încovoiere cît și cele de răsucire variază după ciclul alternant simetric: *1* — curba limită pentru epruvete necrestate, *2* — curba limită pentru epruvete cu crestătură de tip *A* (fig. 3).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

УДК 621.82

ДИНАМИКА ЖЕСТКОГО ВАЛА, ВРАЩАЮЩЕГОСЯ В ШАРНИРНОЙ И УПРУГОЙ ОПОРАХ

Е. Г. БЕРГЕР и А. С. КЕЛЬЗОН

1. В современном машиностроении, при конструировании высокооборотных роторов, зона рабочих скоростей которых лежит выше первого критического числа оборотов, приходится предусматривать специальные меры для избежания повышенной вибрации, вследствие которой или невозможно перейти через первое критическое число оборотов или же преждевременно выходят из строя подшипники.

Эти отрицательные явления наблюдаются систематически у роторов самого различного назначения и вне зависимости от кострукции и размеров ротора. Так, например, попытки создать веретена для прядения хлопка, работающие на скоростях порядка 20 000 об/мин, и валопроводы современных крупнотоннажных танкеров, делающие всего 120 об/мин, наталкиваются на одно и тоже препятствие — выход из строя подшипников (у валопроводов — обычно дейдвудного подшипника). Использование для борьбы с этим явлением эффекта самоцентрирования гибкого вала Лаваля не дает в большинстве случаев требуемого результата по следующим причинам: если вал вращается в подшипниках скольжения, то при скорости, превышающей удвоенное значение первого критического числа оборотов, возникают автоколебания большой амплитуды, препятствующие нормальной эксплуатации; у тонких роторов в закритической зоне возникают автоколебания вследствии внутреннего трения, возникающего при изгибных колебаниях вала.

У роторов с большой жесткостью переход через первое критическое число оборотов затруднен недопустимыми по величине виброперегрузками и амплитудами колебаний.

Для устранения этих явлений в последнее время применяют установку ротора в упругие опоры. Если зона рабочих скоростей лежит выше первого и ниже второго критического числа оборотов, то вал устанавливают в одну шарнирную и вторую упругую опоры, [1]...[5], если же зона рабочих скоростей расположена выше второго критического числа оборотов, то вал конструируют в двух упругих опорах [6], [7]. Выбирая надлежащим образом жесткость упругих опор, можно обеспечить легкий переход через первое критическое число оборотов (для вала с одной упругой опорой) и легкий переход через первое и второе критические числа оборотов (для вала с двумя упругими опорами).

Динамика жесткого вала, вращающегося в шарнирной и упругой опорах, рассмотренная в работах [1]... [5] не свободна от одного существенного недостатка. Во всех этих работах в качестве возмущающей силы принималась реакция неуравновешенной точечной массы. При

этом не учитывалось влияние этой массы на моменты инерции вращающегося вала.

В настоящей работе этот недостаток устраняется. Возмущающая сила рассматривается здесь как эффект статической и динамической неуравновешенности вала, как это и имеет место в большинстве практических случаев. Поэтому в работе рассматриваются только вынужденные колебания вала, где сказывается правильный выбор возмущающей силы.

2. Рассмотрим малые колебаний горизонтального вала, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω. Левый конец вала вращается в шарнирно закрепленном подшипнике, правый конец вала вращается в упруго закрепленном подшипнике. Коэффициент жесткости c упругого поля опоры одинаков в любом радиальном направлении. Дифференциальные уравнения малых колебаний вала будут в соответствии с теоремой о движении центра инерции и теоремой об изменении кинетического момента в относительном движении:

$$(1)\quad \begin{cases} M\ddot{y}_c = -cy + R_{1y}, \quad M\ddot{z}_c = -cz + R_{1z}, \\ A\omega\dot{\beta}^* - B\ddot{\gamma}^* = czl_2 + R_{1z}l_1, \quad A\omega\dot{\gamma}^* + B\ddot{\beta}^* = -cyl_2 - R_{1y}l_1, \end{cases}$$

где: M — масса вала, y_c, z_c — координаты центра инерции вала, y, z — координаты точки оси вала лежащей в плоскости упругой опоры, R_{1y}, R_{1z} — проекции шарнирной опоры, l_1, l_2 — соответственно расстояния центра тяжести от шарнирной и упругой опор, A, B — главные центральные моменты инерции, β^*, γ^* — углы, образованные главной центральной осью с координатными плоскостями xz и xy.

Координаты центра инерции вала равны

$$(2)\qquad y_c = y\frac{l_1}{l} + e\cos\omega t, \quad z_c = z\frac{l_1}{l}e\sin\omega t,$$

а углы β^*, γ^* будут

$$(3)\quad \begin{cases} \beta^* = \beta + \delta\cos(\omega t - \varepsilon) = \dfrac{y}{l} + \delta\cos(\omega t - \varepsilon), \\ \gamma^* = \gamma + \delta\sin(\omega t - \varepsilon) = \dfrac{z}{l} + \delta\sin(\omega t - \varepsilon). \end{cases}$$

В этих равенствах: e — эксцентриситет вала, δ — угол наклона главной центральной оси инерции к оси вращения вала, β, γ — углы, образованные геометрической осью вращения с плоскостями xz и xy, ε — угол между плоскостями проходящими через геометрическую ось вала и, соответственно, через центр тяжести и угол δ, l — расстояние между опорами.

Внося значения (2) и (3) в уравнение (1) и исключая из последней системы проекции шарнирной опоры, находим

$$(4)\quad \begin{cases} B_0\ddot{z} - A\omega\dot{y} + cl^2 z = Me\omega^2 l_1 l \sin\omega t + (B-A) l\omega^2\delta\sin(\omega t - \varepsilon), \\ B_0\ddot{y} + A\omega\dot{z} + cl^2 y = Me\omega^2 l_1 l \cos\omega t + (B-A) l\omega^2\delta\cos(\omega t - \varepsilon). \end{cases}$$

В этой системе дифференциальных уравнений, определяющих вынужденные колебания вала, для краткости обозначено $B_0 = B + Ml_1^2$.

Частное решение системы (4), определяющее вынужденные колебания вала, будет

$$(5)\qquad y = H\cos(\omega t - \alpha), \quad z = H\sin(\omega t - \alpha),$$

где

$$(6)\quad \begin{cases} H = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}, \quad \alpha = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{b_1}{a_1}, \\ a_1 = \dfrac{Me\omega^2 l_1 l + (B-A) l\omega^2\delta\cos\varepsilon}{cl^2 - (B_0 - A)\omega^2}, \quad b_1 = \dfrac{(B-A) l\omega^2\delta\sin\varepsilon}{cl^2 - (B_0 - A)\omega^2}. \end{cases}$$

Таким образом, при вынужденных колебаниях точка оси вала, лежащая в плоскости упругой опоры, описывает окружность радиуса H, вращаясь со скоростью ω в направлении собственного вращения вала. Вынужденным колебаниям, вызванным статической и динамической неуравновешенностью вала, соответствует прямая прецессия вала с угловой скоростью, равной по величине собственной угловой скорости вала.

3. Если увеличивать угловую скорость вала от нуля, то до тех пор, пока

$$(7)\qquad cl^2 + \omega^2 A > B_0\omega^2,$$

вынужденные колебания вала и возмущающая сила совпадают по фазе, когда же соотношение (7) изменяется на обратное, то они находятся в противоположных фазах.

Если приравнять нулю определитель системы алгебраических уравнений, полученных в результате подстановки частного решения в дифференциальные уравнения (4), то найдем критические скорости вала

$$(8)\qquad \omega_1 = \frac{l\sqrt{c}}{\sqrt{B_0 - A}}, \qquad (9)\quad \omega_2 = \frac{l\sqrt{c}}{\sqrt{B_0 + A}}.$$

Как видно из равенств (6), при вынужденных колебаниях вала, вызванных статической и динамической неуравновешенностью, возникают резонансные колебания соответствующие только одной критической скорости (8).

4. Для нахождения реакции упругой опоры запишем дифференциальные уравнения движения этой опоры, отбросив мысленно вал и заменении его действие искомой реакцией R_A. Имеем

$$m\ddot{y} = -cy + R_{Ay}, \quad m\ddot{z} = -cz + R_{Az}, \tag{10}$$

где m — масса той части опоры (подшипника), которая не вращается вместе с валом, но колеблется вместе с ним. Подставляя значения y, z из (5) и их вторые производные в (10), находим

$$R_A = (c - m\omega^2)H. \tag{11}$$

Реакция упругой опоры обращается в нуль на заданной угловой скорости, при наличии статической и динамической неуравновешенности вала, если масса опоры удовлетворяет равенству

$$m = \frac{c}{\omega^2}. \tag{12}$$

Это обстоятельство позволяет снизить реакцию между валом и упругой опорой во много раз по сравнению с той же реакцией, если опора жесткая.

Для определения реакции шарнирной опоры воспользуемся первыми двумя уравнениями системы (1). Подставляя в эти формулы значения y_c, z_c согласно (2) и перемещения y, z упругой опоры (5), находим модуль реакции шарнирной опоры

$$R_1 = \sqrt{\left(c - M\omega^2\frac{l_1}{l}\right)^2 H^2 + M^2\omega^4 e^2 - 2M\omega^2 e\left(c - M\omega^2\frac{l_1}{l}\right)H\cos\alpha}. \tag{13}$$

При увеличении угловой скорости вала эта реакция неограниченно возрастает.

5. Рассмотрим далее резонансные колебания вала, когда

$$\omega = \omega_1 = \frac{l\sqrt{c}}{\sqrt{B_0 - A}}. \tag{14}$$

В этом случае частное решение системы (4) ищем в виде

$$\begin{cases} y = (a_1 + b_1 t)\cos\omega t + (a_2 + b_2 t)\sin\omega t, \\ z = (a_3 + b_3 t)\sin\omega t + (a_4 + b_4 t)\cos\omega t. \end{cases} \tag{15}$$

Подставляя функции (15) и их производные в систему (4), приравниваем коэффициенты при одноименных функциях в левых и правых частях уравнений (4).

В результате получаем систему линейных алгебраических уравнений с 8 неизвестными a_i, b_i, $(i = 1, 2, 3, 4)$:

$$[cl^2-(B+Ml_1^2)\omega^2]a_1+A\omega^2a_3+2(B+Ml_1^2)\omega b_2+A\omega b_4= \tag{16.1}$$
$$=Me\omega^2l_1l+(B-A)l\omega^2\delta\cos\varepsilon,$$

$$A\omega^2a_1+[cl^2-(B+Ml_1^2)\omega^2]a_3-A\omega b_2-2(B+Ml_1^2)\omega b_4= \tag{16.2}$$
$$=Me\omega^2l_1l+(B-A)l\omega^2\delta\cos\varepsilon,$$

$$[cl^2-(B+Ml_1^2)\omega^2]b_2-A\omega^2b_4=0, \tag{16.3}$$

$$-A\omega^2l_2+[cl^2-(B+Ml_1^2)\omega^2]b_4=0, \tag{16.4}$$

$$[cl^2-(B+Ml_1^2)\omega^2]a_2-A\omega^2a_4-2(B+Ml_1^2)\omega b_1+A\omega b_3= \tag{16.5}$$
$$=(B-A)l\omega^2\delta\sin\varepsilon,$$

$$[cl^2-(B+Ml_1^2)\omega^2]b_1+A\omega^2b_3=0, \tag{16.6}$$

$$-A\omega^2a_2+[cl^2-(B+Ml_1^2)\omega^2]a_4-A\omega b_1+2(B+Ml_1^2)\omega b_3= \tag{16.7}$$
$$=-(B-A)l\omega^2\delta\sin\varepsilon,$$

$$A\omega^2b_1+[cl^2-(B+Ml_1^2)\omega^2]b_3=0. \tag{16.8}$$

Первые 4 и последние 4 уравнения представляют собой независимые системы уравнений. Рассмотрим первую из этих систем.

В силу выполнения равенства (14) из (16.3) и (16.4) получаем:

$$b_2=-b_4. \tag{17}$$

Далее, сложим и вычтем почленно (16.1) и (16.2). Получим:

$$\{[cl^2-(B+Ml_1^2)\omega^2]+A\omega^2\}(a_1+a_3)+ \tag{18.1}$$
$$+[2(B+Ml_1^2)\omega-A\omega](b_2-b_4)=2Me\omega^2l_1l+2(B-A)l\omega^2\delta\cos\varepsilon,$$

$$\{[cl^2-(B+Ml_1^2)\omega^2]-A\omega^2\}(a_1-a_3)+ \tag{18.2}$$
$$+[2\omega(B+Ml_1^2)+A\omega](b_2+b_4)=0.$$

Учитывая равенства (14) и (17), получаем из (18.1):

$$b_2=-b_4=\frac{Mel_1+(B-A)\delta\cos\varepsilon}{2(B+Ml_1^2)-A}l\omega. \tag{19}$$

Совершенно аналогичным образом, рассматривая систему (16.5)... (16.8), получаем:

$$b_1=b_3=-\frac{(B-A)l\omega\delta\sin\varepsilon}{2(B+Ml_1^2)-A}. \tag{20}$$

Интересующие нас резонансные слагаемые решения имеют вид:

$$(21) \qquad y_p = t(b_1 \cos \omega t + b_2 \sin \omega t), \quad z_p = t(b_1 \sin \omega t - b_2 \cos \omega t).$$

Вводя обозначения $b_1 = A\cos\alpha$, $b_2 = A\sin\alpha$, можем записать (21) в виде:

$$(22) \qquad y_p = At\cos(\omega t - \alpha), \quad z_p = At\sin(\omega t - \alpha).$$

Из (22) видим, что при $\omega = \omega_{kp}$, ось ротора описывает коническую поверхность, радиус которой возрастает пропорционально времени, причем обход поверхности совершается в сторону вращения ротора и с угловой скоростью, равной скорости вращения ротора.

Поступила 27 I 1968

Ленинградское Высшее Инженерное Морское Училище им. Макарова, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Кельзон А. С., Мушина Н. И., *Исследование вибраций быстроходных роторов с учетом натяга пружины.* ИАН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, *3.*
2. Кельзон А. С., *Исследование влияния вязкого трения на колебания и устойчивость жесткого ротора, вращающегося в шарнирной и упругой опорах.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1961, **VII(XI)**, *3—4.*
3. — *Исследование динамики центрифуги со сферическим демпфером.* Изв. вуз. „Технология текстильной промышленности, 1962, *2.*
4. Бергер Е. Г., Кельзон А. С., Трейель В. К., *Резонансные колебания жесткого ротора, вращающегося в упругой и шарнирной опорах.* Научные труды ММФ СССР, 1964, *1.*
5. Кельзон А. С., Прядилов В. И., *Устранение опасных колебаний вертикальных роторов.* ИАН СССР, Механика, 1965, *6.*
6. Кельзон А. С., *Самоцентрирование и уравновешивание жесткого ротора вращающегося в двух упругих опорах.* ДАН СССР, 1956, **110**, *1.*
7. Кельзон А. С., Троицкая З. В., *Самоцентрирование и уравновешивание высокооборотного компрессора.* ИАН СССР, Механика и машиностроение, 1963, *3.*

DINAMICA UNUI ARBORE RIGID ÎN ROTAŢIE, CU REAZEME ARTICULATE ŞI ELASTICE

(Rezumat)

Se studiază dinamica unui arbore rigid în rotaţie, cu reazeme articulate şi elastice, ţinînd seama nu numai de forţa perturbatoare dată prin reacţia masei punctuale neechilibrată, ci şi de influenţa acestei mase asupra momentelor de inerţie ale arborelui în rotaţie.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

D. C. 621.833

CONTRIBUTIONS TO THE ACCURATE DETERMINATION OF THE THICKNESS OF THE THREAD, OR OF THE WIDTH OF THE SPACE IN CYLINDRICAL WORM GEARS

BY

D. MAROS, A. ANTAL, N. ORLANDEA and L. NEGRESCU

In most cases the thickness of the thread or the width of the space in cylindrical worms is determined in a normal plane (N) on the cordresponding mean helix of the reffering cylinder (Fig. 1).

Considering the limitrophe helices E_1 and E_2 on the reffering cylinder (D_{d_1}) the calculation chord $BC = S$, correlated with the thickness or the nominal axial width equal to the half of the axial pitch $Pa/2$, is determined by means of the geometrical relationships, which follows from Fig. 1.

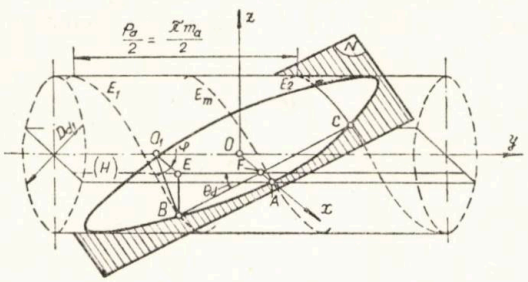


Fig. 1

Noting with: h — the helical movement parameter, θ_d — the leand angle on the reffering cylinder, m_a — the axial modulus, Q — diametral coefficient, z_1 — the number of starts or threads on worm, we obtain

$$S = D_{d_1} \frac{\sin \varphi}{\sin \theta_d}. \tag{1}$$

Knowing that

$$D_{d_1} = qm_a \quad \text{and} \quad \operatorname{tg}\theta_d = \frac{z_1}{q} \tag{2}$$

the formula (1) becomes:

$$S = q\sqrt{q^2 + z_1^2}\,\frac{m_a}{z_1}\sin\varphi, \tag{4}$$

where

$$\sin\varphi = \frac{EB}{D_{d_1}/2} = \frac{2EF\operatorname{tg}\theta_d}{D_{d_1}} \quad \text{and} \quad EF = \frac{p_a}{4} - h\varphi. \tag{5}$$

Replacing (6) into (5), it results:

$$\sin\varphi + \frac{2h}{D_{d_1}}\operatorname{tg}\theta_d\varphi - \frac{p_a}{2D_{d_1}}\operatorname{tg}\theta_d = 0. \tag{7}$$

Knowing that:

$$h = \frac{p_E}{\pi}\cdot\frac{D_{d_1}}{2}\operatorname{tg}\theta_d, \qquad \frac{p_a}{2D_{d_1}} = \frac{\pi}{2q}, \tag{8, 9}$$

and taking acount of (3), we obtain:

$$\sin\varphi + \frac{z_1^2}{q^2}\varphi - \frac{\pi}{2}\cdot\frac{z_1}{q^2} = 0. \tag{10}$$

Giving the normalized values to z_1 and q_2, we calculate for $m_a = 1$ the exact mathematical values of S, from the relation (10) and (4), as in Table 1.

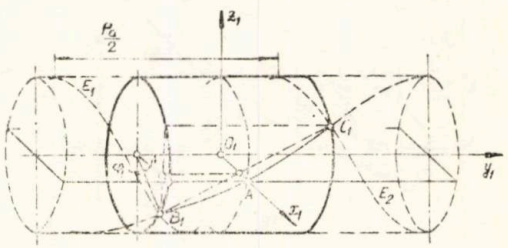


Fig. 2

The thickness of the thread and the width of the space may also be mathematically accurately determined by the chord that unites the points of intersection B_1 and C_1 of the limitrophe helices E_1 and E_2 to the orthogonal helix of the reffering cylinder, according to Fig. 2.

Table 1

q \ z_1		1	2	3	4
18	S	1.568377	1.561188	1.549422	1.533386
	δ	8.999894	8.999587	8.999098	8 998463
16	S	1.567737	1.558665	1.543889	1.523888
	δ	7.999850	7.999416	7.998735	7.997865
14	S	1.566804	1.555007	1.535922	1.510341
	δ	6.999777	6.999136	6.998150	6.996925
13	S	1.566169	1.552528	1.530560	1.501309
	δ	6.499722	6.496928	6.497721	6.496250
12	S	1.565370	1.549420	1.523882	1.490149
	δ	5.999647	5.998648	5.997153	5.995372
11	S	1.564344	1.545454	1.515424	1.476163
	δ	5.499544	5.498262	5.496385	5.494213
10	S	1.563000	1.540283	1.504511	1.458349
	δ	4.999395	4.997718	4.995325	4.992660
9	S	1.561187	1.533374	1.490119	1.435245
	δ	4.499174	4.496925	4.493827	4.490551
8	S	1.558664	1.523864	1.470656	1.404673
	δ	3.998831	3.995729	3.991658	3.987649
7	S	1.555003	1.510291	1.443543	1.363310
	δ	3.498272	3.493846	3.488443	3.483622

We may write from this figure

$$\varphi_1 = \frac{p_n \sin \theta_d}{2D_{d_1}}. \tag{11}$$

Taking account of (2) and (3), the relation (11) becomes:

$$\varphi_1 = \frac{\pi z_1}{2(q^2 + z_1^2)}. \tag{12}$$

Knowing the value of φ_1, (fig. 2), it results the chord $B_1 C_1 = S_1$,

$$S_1 = \sqrt{(D_{d_1} \sin \varphi_1)^2 + \left(\frac{p_n \cos \theta_d}{2}\right)^2}. \tag{13}$$

Considering the relations (2) and (3), we obtain:

$$S_1 = q m_a \sqrt{\sin^2 \varphi_1 + \frac{\pi^2}{4}} \cdot \frac{q^2}{(q^2 + z_1^2)^2}. \tag{14}$$

To be able to effect the measurements we have to calculate the inclination β of the calculating chord S_1 in relation to the direction of the worm axis.

From Fig. 2 it results:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{(D_{d_1}/2)\sin\varphi_1}{(p_n/4)\cos\theta_d}. \tag{15}$$

Taking account of (2), (3) and (12), we obtain:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{2(z_1^2+q^2)}{q\pi}\sin\frac{\pi z_1}{2(z_1^2+q^2)}. \tag{16}$$

The relation (16) may also be written in the form:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{k}{q}C\frac{z_1}{k}. \tag{17}$$

Comparing with (3), it results:

$$\operatorname{tg}\beta = C_1\operatorname{tg}\theta_d. \tag{18}$$

The coefficient C_1 is subunitary and variable, becoming smaller as the values of φ_1, given by the relation (12), increase.

Consequently, the β angle is always smaller than θ_d.

The maximum deviation appears when φ_1 from (12) is maximum, that is, at $z_1 = 4$ and $q = 18$.

In this case the deviation between θ_d and β will be

$$\psi = \theta_d - \beta \cong 1'30''.$$

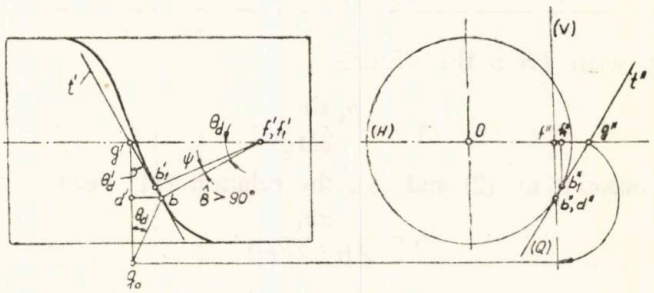


Fig. 3

To determine the difference between the lengths S and S_1 corresponding to the two cases dealt with above, the cylinders represented in Fig. 1 and 2 will be considered superposed, so that the systems of coordinate axes $Oxyz$ and $O_1x_1y_1z_1$ to coincide.

The system obtained this way, will be projected according to the principles of descriptive geometry in the vertical plane zOy and the lateral plane zOx (Fig. 3).

The points B and B_1 being set in space on the same limitrophe helix E_1 very close to each other, the tangent to the helix in B is considered to be superposed upon the chord BB_1.

The segment of the straight line FB, parallel to the vertical plane, closes the angle θ_d with a parallel direction to the worm axis.

The same angle is obtained, too, between the tangent T to the helix, and the segment GD comprised in the plane (Q) tangent to B at the cylinder. The segment GD is also comprised in a perpendicular plane on the worm axis.

Turning the triangle GDB comprised in plane (Q) into the plane (V) paralel to zOy, the shaded triangle $d'b'g_0$ in draught is obtained.

The angle θ_d appears in the point g_0. This is smaller than θ'_d obtained by the orthogonal projection of the triangle GDB in the plane (V).

The segments $f'g'$ and $g'd'$ being perpendicular, and θ'_d being longer than θ_d, it results that the angle from b' is obtuse.

In Fig. 4 we have represented the triangle $f'b'_1b'$ from Fig. 3, where $b'_1f'_1 = S_1/2$ and $b'f' = S/2$. Drawing a perpendicular in b' and intersecting the straight line $f'b'$ with an arc of a circle of the radius $S'/2$ from f' as a center, we can deduce, the actual deviation ΔS between the lenghts of the chords:

$$2\Delta S < 2\Delta S'. \tag{19}$$

The deviation $\Delta S'$ is determined from

$$2\Delta S' = \frac{S'}{\cos\psi} - S. \tag{20}$$

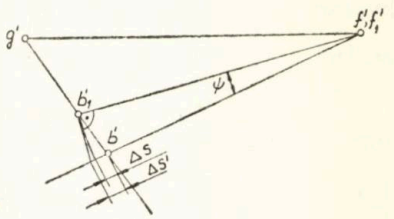


Fig. 4

In the case when $z_1 = 4$ and $q = 8$ we obtain:

$$2\Delta S' = 0.0000013.$$

The deviation being practically negligible, it results that the values determined by means of the formula (14), verify the length of the chord too, in the normal plane, that is, the values comprised in Table 1 remain valid for the second case as well.

To effect the measurements the cota OF is to be indicated too (Fig. 1).

It results for $m_a = 1$ from relation

$$OF = \delta = \frac{q}{2}\cos\varphi. \tag{21}$$

The values given by the relation (21) are also contained in Table 1.

In the case of convolute worms the length of the chord BC (Fig. 1) is the cota corresponding to the width of the cutter at a distance OF from the axis given in Table 1.

Sometimes, in the speciality literature [1], [2], the width of the cutter is given in tangent plane to the reffering cylinder, as being equal with $p_n/2$, this, in view of simplifying the calculation. In this case the values of the chord – length S can no longer be taken from Table 1.

For determining the length of the chord S, the convolute worm NG will be first considered (Fig. 5).

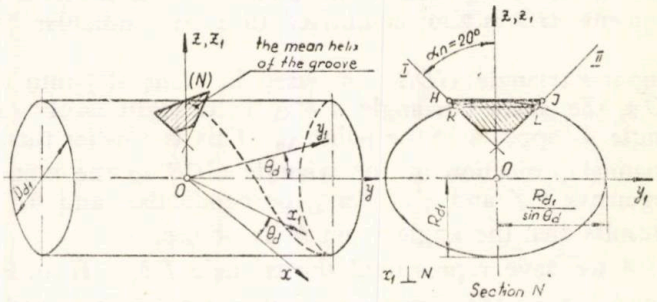


Fig. 5

From equation (5) we can write the equation of the ellipse obtained by intersecting the reffering cylinder with the normal plane (N):

$$z_1^2 + y_1^2 \sin^2 \theta_d = R_{d_1}^2 . \tag{22}$$

The equation of the straight line I (being the chipping edge of the cutter) taking into account that $HI = p_n/2$ is:

$$y_1 + z_1 \operatorname{tg} \alpha_n = R_{d_1} \operatorname{tg} \alpha_n - \frac{p_n}{4} . \tag{23}$$

Intersecting this ellipse with a straight line determined by the relation (23) we obtain:

$$y_1^2 (\sin^2 \theta_d + \operatorname{ctg}^2 \alpha_n) - y_1 \left(2R_{d_1} \operatorname{ctg} \alpha_n - \frac{p_n}{2} \operatorname{ctg}^2 \alpha_n \right) + \frac{p_n^2}{16} \operatorname{ctg}^2 \alpha_n - R_{d_1} \frac{p_n}{2} \operatorname{ctg} \alpha_n = 0. \tag{24}$$

From (24), taking account of (2) and (3), and considering $KL = S_{NG}$ it results:

$$S_{NG} = \left| \frac{q m_a \operatorname{ctg} \alpha_n}{2} \times \right. \tag{25}$$

$$\left. \times \frac{[2(q^2 + z_1^2) - \pi \sqrt{q^2 + z_1^2} \operatorname{ctg} \alpha_n - \sqrt{4(q^2 + z_1^2)^2 - \pi^2 z_1^2 + 4\pi z_1^2 \sqrt{q^2 + z_1^2} \operatorname{tg} \alpha_n}}{z_1^2 + (q^2 + z_1^2) \operatorname{ctg}^2 \alpha_n} \right| .$$

Table 2

q \ z_1		1	2	3	4
18	S_{NG}	1.568301	1.560888	1.548768	1.532273
	S_{ND}	1.568454	1.591489	1.550080	1.534511
16	S_{NG}	1.567627	1.558239	1.542972	1.522343
	S_{ND}	1.567846	1.559092	1.544813	1.525455
14	S_{NG}	1.566642	1.554380	1.534584	1.508126
	S_{ND}	1.566966	1.555638	1.537277	1.512603
13	S_{NG}	1.565967	1.551751	1.528915	1.498614
	S_{ND}	1.566371	1.553311	1.532231	1.504037
12	S_{NG}	1.565114	1.548441	1.521829	1.486834
	S_{ND}	1.565626	1.550404	1.525973	1.493572
11	S_{NG}	1.564013	1 544196	1.512825	1.472035
	S_{ND}	1.564677	1.546726	1.518087	1.480460
10	S_{NG}	1.562560	1.538635	1.501162	1.453143
	S_{ND}	1.563441	1.541957	1.507968	1.463830
9	S_{NG}	1.560588	1.531159	1.485721	1.428597
	S_{ND}	1.561790	1.535635	1.494708	1.442357
8	S_{NG}	1.557817	1.520799	1.464758	1.396081
	S_{ND}	1.559517	1.527017	1.476906	1.414074
7	S_{NG}	1.553728	1.505885	1.435459	1.352095
	S_{ND}	1.556271	1.514871	1.452310	1.375978

The values of S_{NG} are given in Table 2 for $m_a = 1$ and $\alpha_n = 20°$.

In the case of the convolute worm ND (fig. 6), the equation of the straight line I is :

$$z_1 \operatorname{tg} \alpha_n + y_1 = R_{d_1} \operatorname{tg} \alpha_n + \frac{p_n}{4}. \tag{26}$$

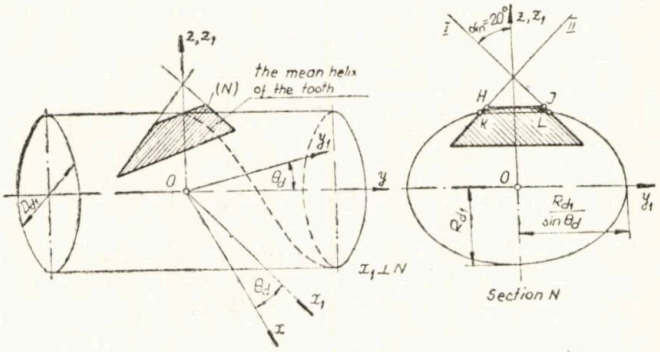


Fig. 6

Intersecting with the ellipse given by the relation (22), in account of (2) we obtain:

$$S_{ND} = \frac{q m_a \operatorname{ctg} \alpha_n}{2} \times$$

$$\times \frac{[2(q^2+z_1^2)+\pi\sqrt{q^2+z_1^2}\operatorname{ctg}\alpha_n]-\sqrt{4(q^2+z_1^2)^2-\pi^2 z_1^2-4\pi z_1^2\sqrt{q^2+z_1^2}\operatorname{tg}\alpha_n}}{z_1^2+(q^2+z_1^2)\operatorname{ctg}^2\alpha_n}. \tag{27}$$

The values of S_{ND} noted in fig. 6 with KL are given in Table 2 for $m_a = 1$ and $\alpha_n = 20°$.

Comparing the values contained in Table 1 and 2 it results that

$$S_{NG} < S < S_{ND}, \tag{28}$$

that is: a) the width of the space in the convolute worm NG is smaller than the width of the space in the exact theoretical case; b) the thickness of the thread in the convolute worm ND is greater than the thickness of the thread in the exact theoretical case.

Similarly as in the exact theoretical case we shall determine the distances from the worm axis to the S_{NG} and S_{ND} chords given in Table 2.

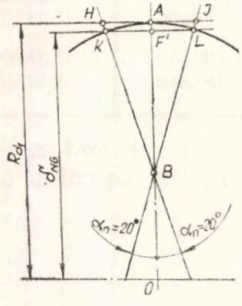


Fig. 7

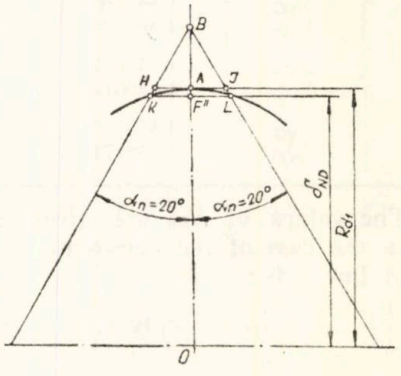


Fig. 8

From Fig. 7 it results:

$$\delta_{NG} = R_{d_1} - \frac{p_n/2 - S_{NG}}{2\operatorname{tg}\alpha_n}, \tag{29}$$

where from, in account of (2) and (3), for $m_a = 1$, we obtain:

$$\delta_{NG} = \frac{2\sqrt{q^2+z_1^2}\,(q\operatorname{tg}\alpha_n + S_{NG}) - \pi q}{4\sqrt{q^2+z_1^2}\operatorname{tg}\alpha_n}. \tag{30}$$

Similarly, from Fig. 8 it results:

$$\delta_{ND} = \frac{2\sqrt{q^2 + z_1^2}\,(q \operatorname{tg} \alpha_n - S_{ND}) + \pi q}{4\sqrt{q^2 + z_1^2} \operatorname{tg} \alpha_n}. \tag{31}$$

The values of δ_{NG} and δ_{ND} are given in Table 3.

Table 3

q \ z_1		1	2	3	4
18	δ_{NG}	8.999894	8.999587	8.999099	8.998465
	δ_{ND}	8.999895	8.999587	8.999098	8.998461
16	δ_{NG}	7.999849	7.999412	7.998736	7.997867
	δ_{ND}	7.999850	7.999412	7.998734	7.997858
14	δ_{NG}	6.999777	6.999136	6.998153	6.996933
	δ_{ND}	6.999777	6.999135	6.998147	6.996915
13	δ_{NG}	6.499722	6.498929	6.497726	6.496263
	δ_{ND}	6.499722	6.498927	6.497717	6.496236
12	δ_{NG}	5.999648	5.998650	5.997160	5.995392
	δ_{ND}	5.999648	5.998646	5.997145	5.995350
11	δ_{NG}	5.499544	5.498265	5.496397	5.494245
	δ_{ND}	5.499544	5.498259	5.496372	5.494179
10	δ_{NG}	4.999395	4.997723	4.995346	4.992712
	δ_{ND}	4.996395	4.997713	4.995303	4.992605
9	δ_{NG}	4.499175	4.496934	4.493864	4.490639
	δ_{ND}	4.499173	4.496916	4.493789	4.490458
8	δ_{NG}	3.993833	3.995746	3.991725	3.987799
	δ_{ND}	3.998830	3.995711	3.991587	3.987482
7	δ_{NG}	3.498240	3.493855	3.488555	3.483875
	δ_{ND}	3.498265	3.493799	3.488293	3.483315

Further, we shall estimate the differences imposed by the relation (28), in the axial plane.

On the basis of formula (4) for $m_a = 1$ we can write:

$$\sin \varphi_{NG} = \frac{S_{NG}}{q} \cdot \frac{z_1}{\sqrt{q^2 + z_1^2}} \quad \text{and} \quad \sin \varphi_{ND} = \frac{S_{ND}}{q} \cdot \frac{z_1}{\sqrt{q^2 + z_1^2}}. \tag{32}$$

Similarly as in Fig. 1 we shall determine the points where the limitrophe helices corresponding to the ends of the S_{NG} and S_{ND} chords intersect the plane of the axis (H) which passes through A.

As in Fig. 1 it results:

$$(a - h\varphi_{NG,\,ND}) \operatorname{tg} \theta_d = \frac{D_{d_1}}{2} \sin \varphi_{NG,\,ND}, \tag{33}$$

wherefrom, in account of (2) and (3) for $m_a = 1$ it results:

$$a = \frac{S_{NG,ND}}{2} \cdot \frac{q}{\sqrt{q^2 + z_1^2}} + \frac{z_1}{2} \varphi_{NG,ND}. \tag{34}$$

The deviations with relation to the widths corresponding to the exact theoretical case for $m_a = 1$ is determined by means of the formulas:

$$\Delta_{NG} = 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{S_{NG}}{2} \cdot \frac{q}{\sqrt{q^2 + z_1^2}} - \frac{z_1}{2} \varphi_{NG}\right). \tag{35}$$

$$\Delta_{ND} = 2\left(\frac{S_{ND}}{2} \cdot \frac{q}{\sqrt{q^2 + z_1^2}} + \frac{z_1}{2} \varphi_{ND} - \frac{\pi}{4}\right). \tag{36}$$

The values of the deviations taking into account the Table 2 and the relations (28), are given in Table 4.

Table 4

q \ z_1		1	2	3	4
18	Δ_{NG}	0.00007665	0.00030197	0.00066318	0.00114029
	Δ_{ND}	0.00007665	0.00030272	0.00066702	0.00115179
16	Δ_{NG}	0.00010980	0.00043004	0.00092930	0.00159190
	Δ_{ND}	0.00010908	0.00042991	0.00093996	0.00161501
14	Δ_{NG}	0.00016240	0.00063342	0.00136859	0.00230391
	Δ_{ND}	0.00016252	0.00063694	0.00138526	0.00235229
13	Δ_{NG}	0.00020250	0.00078661	0.00168896	0.00280971
	Δ_{ND}	0.00020268	0.00079204	0.00171465	0.00289256
12	Δ_{NG}	0.00025691	0.00099314	0.00211573	0.00349534
	Δ_{ND}	0.00025726	0.00100181	0.00215624	0.00360800
11	Δ_{NG}	0.00033273	0.00127809	0.00269422	0.00439330
	Δ_{ND}	0.00033350	0.00129280	0.00276069	0.00457318
10	Δ_{NG}	0.00044156	0.00168112	0.00349684	0.00560828
	Δ_{ND}	0.00044301	0.00170671	0.00360978	0.00590451
9	Δ_{NG}	0.00060291	0.00226938	0.00463701	0.00727780
	Δ_{ND}	0.00060628	0.00231625	0.00483869	0.00678522
8	Δ_{NG}	0.00085347	0.00315892	0.00629999	0.00961168
	Δ_{ND}	0.00086006	0.00325084	0.00667678	0.01051753
7	Δ_{NG}	0.00130252	0.00458268	0.00879908	0.01292960
	Δ_{ND}	0.00126647	0.00476413	0.00954446	0.01460910

In Fig. 9 we represent the variations of the deviations depending on q and z_1, for $m_a = 1$. It is observed that the deviations become greater as the number of starts z_1 increases and as well as with the decreasing of the diametral coefficient.

In both cases the maximum deviations accur in the case $z_1 = 4$ and $z_1 = 8$.

For example, for $m_a = 10$ mm this deviation, in the case of convolute worm NG, has the value $10 \times 0.009611482 = 0.09611482$ mm and in the convolute worm ND, in same circumstances, results the value 0.10517538 mm. When establishing the play between the flanks, we must take into consideration the values calculated in Table 4, because the nominal quota considered in design equals $P_a/2$.

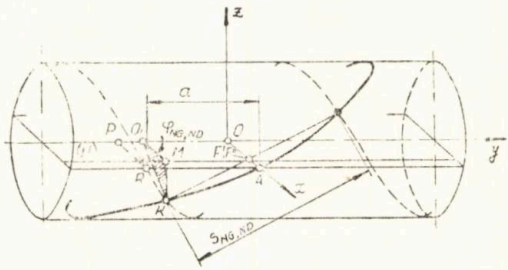


Fig. 9

The tables presented in this paper may be directly used in both, design and execution work.

The great amount of calculations were possible owing to the use of the DACCIC 1 electronic computer from The Institute of Calculation from Cluj beloging to the Academy of Socialist Republic of Romania.

Received the 7 IX 1966

Polytechnic Institute, Cluj

REFERENCES

1. Литвин Ф. Л., *Теория зубчатых зацеплений*. ГИФМЛ, М., 1960.
2. Szeniczei L., *Csigahajtomüvek*. Müszaki Könyvkiadó, Budapest, 1957.

CONTRIBUŢII LA DETERMINAREA PRECISĂ A ADÎNCIMII ŞI GROSIMII INTERSPAŢIILOR ÎN ROŢI CILINDRICE MELCATE

(Rezumat)

Se stabilesc relaţii de calcul exacte a adîncimii şi grosimii interspaţiilor în roţi cilindrice melcate.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

C. D. 677.7

ÉTUDE EXPÉRIMENTALE CONCERNANT LA CAPACITÉ DE TRACTION DES TRANSMISSIONS À CÂBLE EN ACIER

Note II

INFLUENCE DES PARAMÈTRES GÉOMÉTRIQUES DE LA GORGE ET DE LA PRESSION CÂBLE-GORGE SUR LE COEFFICIENT DE PROFIL DE LA POULIE AVEC GORGE À SIÈGE

PAR

CRISTIAN LINDE et D. RĂDĂUCEANU

Communication présentée dans la session scientifique de l'Institut Polytechnique de Jassy, 28—30 septembre 1967

1. Considérations introductives

Dans un article antérieur [1], on a prouvé que le choix du coefficient d'entraînement (μ_a) pour les transmissions par friction, à câble en acier, est une opération difficile, compte tenu de la grande dispersion et même de la non-concordance des indications qu'on trouve dans la littérature de spécialité. Dans le même article il a été établi que, pour offrir aux practiciens la possibilité d'un choix correct du coefficient d'entraînement, il faut effectuer de nouvelles études expérimentales et on a proposé une telle présentation des résultats obtenus afin que les practiciens puissent calculer la valeur du coefficient d'entraînement avec la formule :

$$\mu_a = (C_1 C_2 \dots C_n)\,\mu_0,$$

ou : μ_0 —la valeur du coefficient d'entraînement établie dans certaines conditions (la valeur de base), $C_1, C_2, \dots, C_n$ — les coefficientes qui reflètent l'influence des différents facteurs constructifs et fonctionnels de la transmission (les coefficients de correction).

Enfin, dans le même article, on a établi que l'utilisation de la formule ci-dessus implique tout d'abord l'établissement par voie expérimentale des facteurs constructifs et fonctionnels dont la variation influence la valeur du coefficient d'entraînement de la transmission, cette étape préliminaire étant nécessaire, une opinion unanime n'ayant pu être établie en ce qui concerne le sens et même l'existence de l'influence de certains facteurs.

Dans ce qui suit on continue à étudier l'étape mentionnée, en présentant l'étude expérimentale de l'influence des paramètres

géométriques de la gorge et de la pression câble-gorge sur le coefficient de profil d'une poulie avec gorge à siege (fig. 1).

À présent, en utilisant les hypothèses théoriques de F. Nymans et A. V. Hellborn [2], on a établi [3] que l'influence des paramètres géométriques de la gorge à siège sur le coefficient de profil de la poulie est exprimée par la formule :

$$K_p = 4\,\frac{\sin(\beta/2) - n\sin(\gamma/2)}{(\beta + \sin\beta) - (\gamma + \sin\gamma)}, \tag{1}$$

ou β et γ sont les angles indiqués sur la fig. 1.

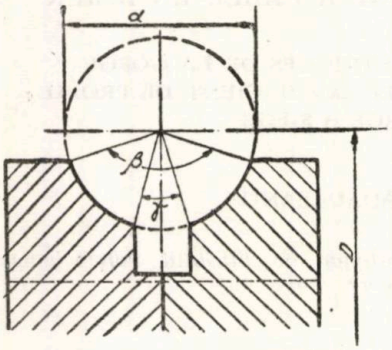


Fig. 1

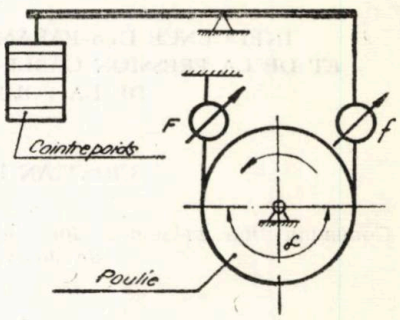


Fig. 2

En ce qui concerne l'influence de la pression câble-gorge sur le coefficient de profil de la poulie, il n'y a pas un accord unanime, cette influence étant acceptée par quelques auteurs [2], [4], [5], mais niée par d'autres [6], [7].

2. Conditions expérimentales

Les expériences ont été éfectuées à l'aide d'une installation dont la construction a été présentée dans l'article antérieur [1].

La fig. 2 indique le montage du câble et le système utilisé pour la tension de celui-ci.

Au cours des expériences on a utilisé deux poulies, chacune formée par deux disques en fonte, assemblés par des boulons, et ayant un diamètre primitif $D = 440$ m. D'abord, sur chaque poulie on a pratiqué par tournage une gorge demi-circulaire ayant $\beta \approx 180°$ pour une poulie et $\beta = 142°30'$ pour l'autre poulie (v. fig. 1). Par le tournage des arêtes des disques constitutifs on a obtenu le siège de la gorge dont l'angle a été varié de $\gamma = 0°$ (la gorge sans siège) jusqu'à $\gamma \cong 90°$. Finalement, pour les expériences sur les poulies

lisses, le diamètre de celles-ci a été réduit par tournage jusque sous le fond du siège (trait pointillé).

Pour chaque poulie on a utilisé le même morceau de câble (câble galvanisé 11-6×19-160-S/Z STAS 1 353-60) qui a été rodé préalablement tant sur la poulie à gorge demi-circulaire que sur la poulie lisse. Ce rodage a déterminé la diminution de l'influence de l'usure du câble et de la variation de la microstructure de la surface de la gorge sur les résultats des expériences.

Pour mesurer les forces, dans les deux brins du câble on a introduit des dynamomètres mécaniques.

Toutes les expériences ont été éfectuées pour un angle d'embrassement de la poulie $\alpha = 180^{\circ}$, une vitesse moyenne de $2{,}5 \cdot 10^{-2}$ rot/min (avec une appréciable variation autour de cette valeur), un graissage abondant de la poulie et du câble, à une température moyenne du milieu environnant de 20°C.

3. Méthode expérimentale et résultats obtenus

Pour chaque gorge de dimensions données on a varié la tension du câble et on a enregistre les valeurs des forces agissant dans les brins de celui-ci (F et f). Pour diminuer les erreurs dues aux variations inévitables du coefficient de frottement le long de la gorge et des paramètres géometriques de celle-ci, les valeurs des forces ont été établies comme moyennes arithmétiques de quatre lectures faites pour quatre positions de la poulie, chaque nouvelle position étant obtenue par une rotation de la poulie de 90°.

A l'aide des valeurs obtenues pour les forces F et f on a établi :

a) la valeur du coefficient d'entraînement

$$\mu_a = \frac{1}{\pi} \ln \frac{F}{f};$$

b) la valeur moyenne de la tension du câble

$$\mathcal{F} = \frac{F - f}{\ln (F/f)}.$$

Les résultats obtenus ont permis à tracer les diagrammes $\mu_a = \varphi(\mathcal{F})$ (fig. 3). Dans le cas particulier des poulies lisses ($\beta = 0^0$ et $\gamma = 0^0$) les valeurs de μ_a représentent les valeurs du coefficient de frottement entre le câble et la poulie (μ).

Le coefficient de profil a été établi à l'aide de la formule de définition :

$$K_p^{ex} = \frac{\mu_a}{\mu}.$$

Les valeurs de μ_a et μ ont été lues sur les diagrammes précédents en utilisant pour chaque valeur de μ_a la valeur qui correspond à la même tension du câble (v. fig. 3). Pour chaque valeur de K_p^{ex} ainsi obtenue on a calculé la pression moyenne câble-gorge à l'aide de la formule :

$$p_m = \frac{8\mathcal{F}}{dD[(\beta + \sin\beta) - (\gamma + \sin\gamma)]} \cdot \frac{\sin(\beta/2) - \mathcal{F}\sin(\gamma/2)}{(\beta - \gamma)/2},$$

où : $D = 440$ mm — le diamètre primitif de la poulie, $d = 11$ mm — le diamètre du câble.

Les résultats obtenus ont permis à tracer les diagrammes $K_p^{ex} = \varphi(p_m)$ (fig. 4). Dans les tableaux incorporés dans cette figure on a indiqué les valeurs théoriques du coefficient de profil, calculées à l'aide de la formule (1).

4. Conclusions

En examinant les diagrammes $K_p^{ex} = \varphi(p_m)$ on peut aboutir aux conclusions suivantes :

a) Le coefficient de profil dépend non seulement des paramètres géométriques de la gorge, mais aussi de la pression câble-poulie.

b) Au fur et à mesure que la pression augmente le coefficient de profil passe par un minimum pour présenter ensuite une tendance de stabilisation à une valeur constante.

c) Le minimum du coefficient de profil est situé vers des pressions d'autant plus grandes que la surface de contact câble-gorge est plus réduite.

d) À l'exception d'un seul cas, les valeurs expérimentales du coefficient de profil sont plus grandes que celles obtenues à l'aide de la formule théorique (1).

e) Les conclusions précédentes, qui concordent d'ailleurs avec celles des expériences antérieures effectuées sur des poulies à gorge demi-circulaire [8], justifient la nécessité, signalée aussi par d'autres auteurs [9], de reconsidérer la loi de la distribution de la pression câble-gorge, admise pour la déduction de la formule (1).

Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire d'Éléments de Machines

BIBLIOGRAPHIE

1. Linde C., Ror A l., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1963, IX (XIII), 3—4, pp. 295—304.
2. Hymans F., Hellborn A. F., *Der neuzeitliche Aufzug mit Treibscheibenantrieb.* Springer, Berlin, 1927.

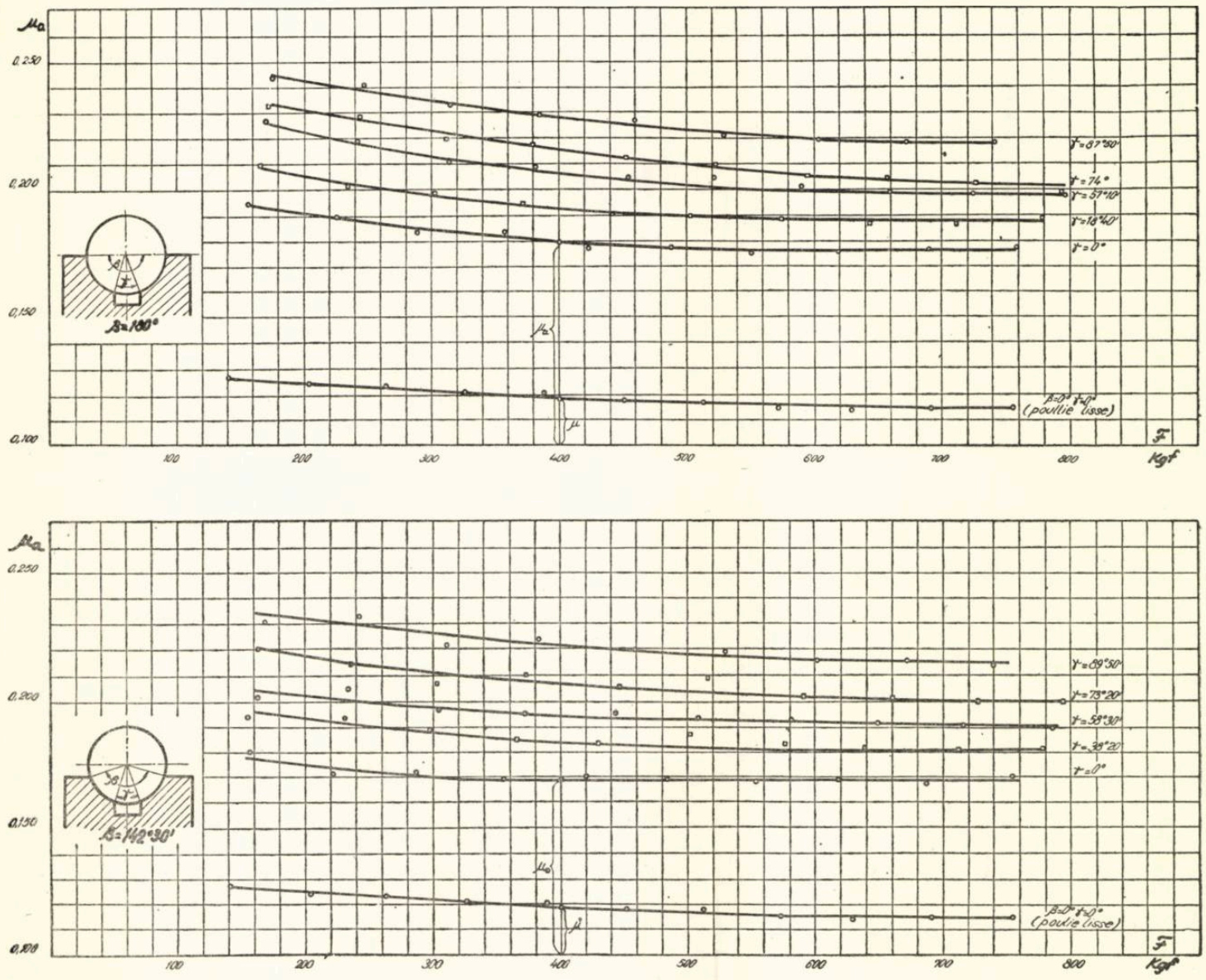

μa
0,250
0,200
0,150
0,100
β=180°
γ=87°50'
γ=74°
γ=57°10'
γ=18°40'
γ=0°
β=0° γ=0°
(poulie lisse)
100
200
300
400
500
600
700
800
Kgf
β=142°30'
γ=89°50'
γ=73°20'
γ=58°30'
γ=38°20'
γ=0°

Fig. 3

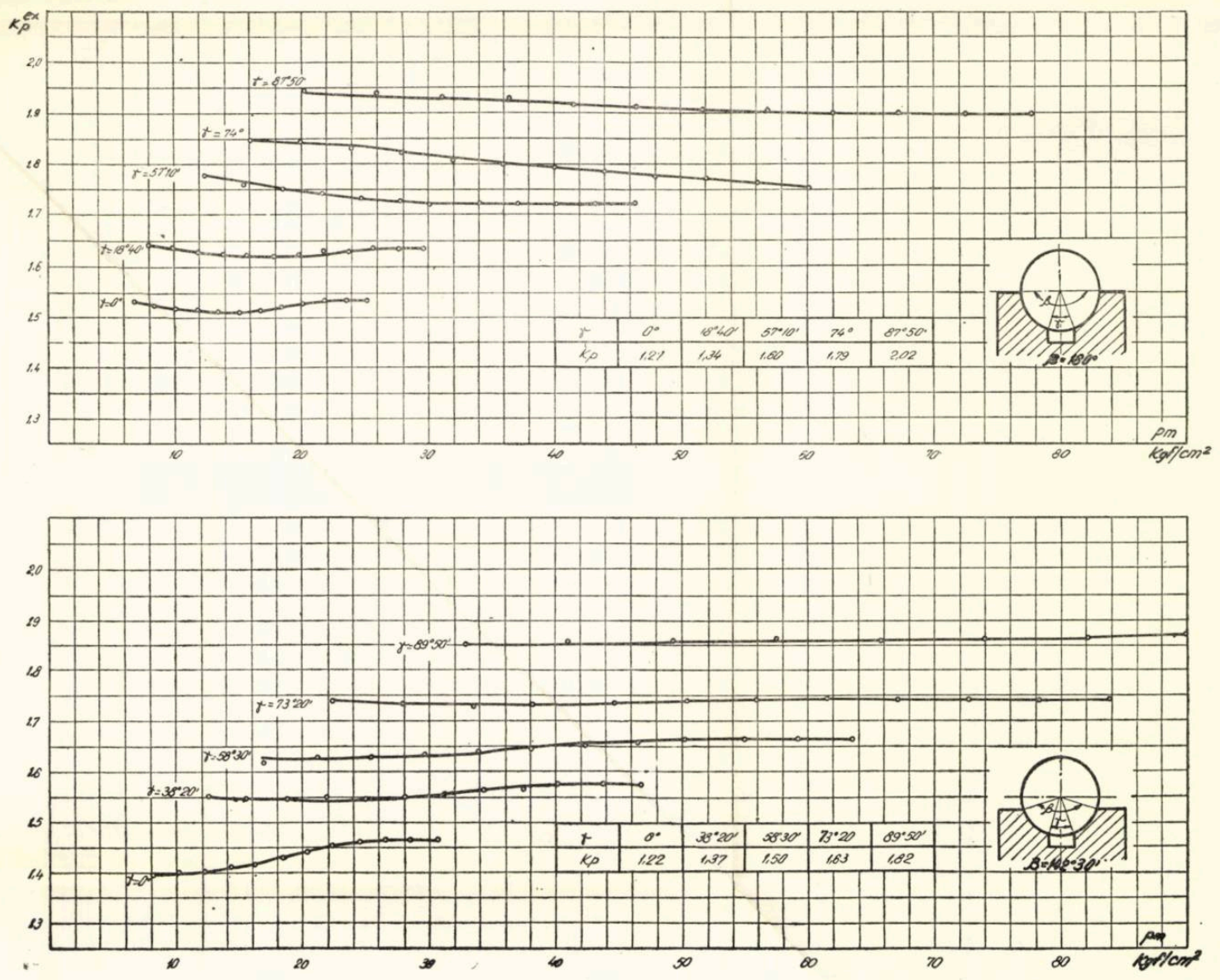

kp ex
2,0
1,9
1,8
1,7
1,6
1,5
1,4
1,3
γ=87°50'
γ=74°
γ=57°10'
γ=18°40'
γ=0°
γ | 0° | 18°40' | 57°10' | 74° | 87°50'
kp | 1,21 | 1,34 | 1,60 | 1,79 | 2,02
β=180°
10
20
30
40
50
60
70
80
pm
kgf/cm²
γ=89°50'
γ=73°20'
γ=58°30'
γ=38°20'
γ=0°
γ | 0° | 38°20' | 58°30' | 73°20 | 89°50'
kp | 1,22 | 1,37 | 1,50 | 1,63 | 1,82
β=142°30'

Fig. 4

3. Bauşic V., Linde C., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1956, **II (VI)**, *1—2*, pp. 331—337.
4. Kawecki Z., Stachurski I., Prz. gorn., 1955, **XI (XLII)**, *7—8*, pp. 282—288.
5. Czerner K., Bergbautechnik, 1954, *7*, pp. 369—370.
6. Цикавый Л А., Вестн. Машиностр., 1955, *12*, стр. 15—17.
7. Рулин И. А., Сб. ВНИИПТМАШ, 1959, *28*, стр. 56—75.
8. Linde C., Ror Al., Bauşic V., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1964, **X (XIV)**, *3—4*, pp. 323—328.
9. Czyzewski M., Arch. budowy masyn, 1966, **XIII**, *1*, pp. 31—68.

STUDIUL EXPERIMENTAL AL CAPACITĂŢII DE TRACŢIUNE A TRANSMISIEI PRIN FRECARE CU CABLU DIN OŢEL

Nota II

Variaţia coeficientului de profil al roţii de antrenare cu şanţ semicircular degajat în funcţie de parametrii geometrici ai şanţului şi de presiune dintre cablu şi roată

(Rezumat)

În prezent, calculul coeficientului de profil al şanţului semirotund degajat se efectuează cu formula (1), stabilită pe baza unor ipoteze teoretice referitoare la distribuţia presiunii dintre cablu şi şanţ. Formula exprimă coeficientul de profil numai în funcţie de parametrii geometrici ai şanţului.

Autorii şi-au propus să verifice experimental formula menţionată ţinînd seama, pe lîngă parametrii geometrici ai şanţului, şi de presiunea dintre cablu şi şanţ.

Determinările experimentale s-au efectuat pe o instalaţie descrisă într-un articol anterior [1] şi după o metodă care a condus la obţinerea exprimării grafice a dependenţei coeficientului de profil atît de parametrii geometrici ai şanţului cît şi de presiunea dintre cablu şi şanţ (fig. 4).

Principalele concluzii sînt următoarele:

1. Pentru un tip dimensional de şanţ dat, coeficientul de profil depinde şi de presiunea dintre cablu şi şanţ, trecînd printr-un minimum, pe măsura creşterii presiunii şi avînd apoi tendinţa de stabilizare la o valoare constantă.

2. Valorile coeficientului de profil obţinute pe cale experimentală sînt mai mari decît cele calculate cu formula (1), ceea ce justifică necesitatea semnalată şi de alţi autori [9], de reconsiderare a legii de distribuţie a presiunii dintre cablu şi şanţ care stă la baza deducţiei formulei (1).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

C. Z. 662.65; 621.33

INFLUENŢA UTILIZĂRII COMBUSTIBILILOR INFERIORI INDIGENI ASUPRA CARACTERISTICILOR DE TRACŢIUNE ALE LOCOMOTIVELOR DIESEL

DE

I. ZĂGĂNESCU, V. HOANCĂ şi GH. TUROS

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 28—30 septembrie 1967

1. Introducere

În ultimul timp pe toate reţelele de căi ferate ponderea sistemului de tracţiune Diesel este în continuă creştere, alături de tracţiunea electrică. În anumite condiţii de densitate de trafic mai redusă, cum este cazul în special pe liniile de căi ferate secundare, precum şi pentru anumite servicii speciale, ca de exemplu serviciul de manevră, serviciul tracţiunii trenurilor de călători de viteză mare şi automotoare, tracţiunea Diesel devine aproape obligatorie. De aici rezultă mărirea în mod corespunzător a consumului de combustibil, iar odată cu aceasta şi necesitatea reducerii preţului de cost al transportului feroviar şi integrarea combustibililor utilizaţi în bilanţul energetic general al ţării.

Motorul Diesel de tracţiune feroviară şi în special tipul de motor pentru locomotive nu mai poate fi considerat deci ca un sistem redus la un singur tip de combustibil superior, ci trebuie examinat sub aspectul multiplu al utilizării unei game de sorturi de combustibil [1]...[14].

Introducerea sorturilor de combustibil cu calităţi diferite la locomotivele Diesel, precum şi determinarea gradelor de economicitate are implicaţii nu numai în ceea ce priveşte aspectul energetic şi funcţional al motorului însăşi, ci în întregul proces de interacţiune motor — transmisie — vehicul. De aceea pentru tracţiunea în sine, unde locomotivele lucrează la solicitări diferite, caracteristicile de bază indiferent de felul transmisiei, sînt: forţa de tracţiune la obadă — viteza de mers $F_0(V)$, puterea efectivă la obadă — viteza de mers $P_0(V)$, ambele reprezentînd aspectul dinamic, şi consumul specific de combustibil — viteza de mers $c_e(V)$, care reprezintă aspectul energetic al locomotivelor [5], [6].

Din aceste caracteristici principale şi pe bază de măsurători, se deduc apoi un număr de caracteristici de funcţionare după sistemul de locomotivă care se încearcă.

Valabilitatea acestor caracteristici în analizele calculelor de tracţiune şi în studiile de eficienţă economică sînt însă legate strîns de precizia sistemului utili-

zat la ridicarea acestor caracteristici, în condiții de funcționare identică a locomotivei, ceea ce nu se poate realiza decît pe un stand de încercat locomotive.

Determinarea caracteristicilor de mai sus s-a efectuat pe standul de încercat locomotive Diesel al Catedrei de material rulant de la Institutul politehnic din Timișoara, menținînd locomotiva la un regim de servici constant corespunzător unei anumite trepte de comandă, variindu-se viteza, efectuîndu-se această operație pentru toate treptele de comandă existente ale unei locomotive Diesel-mecanice de tip LDI, ecartament 760 mm, construcție Uzinele „23 August", echipată cu un motor Diesel MG 120, cu antecameră, de 120 CP la turația 1 250 rot/min.

Obiectul studiului de față fiind o comparare a funcționării locomotivei Diesel la utilizarea combustibililor inferiori, ridicarea caracteristicilor s-a efectuat în două seturi de experiențe cînd s-a utilizat drept combustibil motorina STAS 240-57, utilizată azi la noi exclusiv în tracțiunea feroviară și anume un set cînt combustibilul a fost păcură de calorifer tip A STAS 54-59 și un set cînd combustibilul a fost păcură parafinoasă necracată STAS 51-49, aduse în starea în care se asigură funcționarea locomotivei cu un randament $\eta_l \geqslant 0{,}25$, condiție limită pentru realizarea unei economicități satisfăcătoare în raport cu celelalte sisteme de tracțiune [5]...[8], [9].

2. Măsurarea caracteristicilor de tracțiune

Pentru fiecare din combustibilii aleși s-a efectuat cîte un set de experiențe la turațiile motorului Diesel $n = 700$; 900; 1 050; 1 200 rot/min, la cele patru trepte de viteză ale locomotivei și pentru fiecare din cele două regimuri de mers: greu și ușor. La toate experiențele motorul Diesel a funcționat la injecția normală. Durata unei experiențe a fost de 15 min, în care timp citirile valorilor măsurate s-au făcut din 3 în 3 min. Pentru aducerea locomotivei la regim termic staționar, înainte de începerea fiecărei experiențe locomotiva a funcționat timp de 30...60 min., iar între două puncte de măsurare un timp de 10...15 min.

Pentru a asigura funcționarea locomotivei cu un randament $\eta_l \geqslant 0{,}25$, înainte de experiență a fost necesară prepararea combustibililor inferiori. Astfel păcura de calorifer a necesitat o centrifugare pentru curățirea de impurități mecanice, un adaus de 10% motorină și asigurarea unei temperaturi a amestecului de 50...60°C înainte de intrarea în motor. Păcura parafinoasă necracată a necesitat două centrifugări pentru curățirea de impurități mecanice, un adaus de 10% motorină și asigurarea unei temperaturi a amestecului de 80...90°C înainte de intrarea în motor.

La încercările efectuate cu păcură de calorifer și păcură parafinoasă necracată pornirea motorului s-a realizat pe motorină și apoi s-a trecut la funcționarea cu păcură de calorifer sau păcură parafinoasă. Înainte de oprirea motorului s-a trecut iarăși la funcționarea cu motorină.

a) *Puterea la obadă a locomotivei* $P_0 = f(V)$. Frînarea locomotivei, pe standul pe care s-a lucrat, fiind electrică, puterea la obadă a locomotivei s-a determinat cu relația :

$$P_0 = \frac{P_g + \sum p}{736\,\eta_s}, \text{ [CP]}, \tag{1}$$

unde : P_g este puterea generatorilor de frînare ai standului, [W], $\sum p$ — pierderile mecanice, în fier, în cupru și la colectorul generatoarelor de frînare, [W], $\eta_s \approx 0{,}875$ — randamentul standului.

Puterea generatoarelor de frînare ale standului s-a determinat cu relația :

$$P_g = \sum_1^4 U_i\, I_i, \tag{2}$$

unde : U_i este tensiunea generatoarelor de frînare, [V], I_i — curentul generatoarelor de frînare, [A].

Pierderile mecanice, în fier, în cupru și în colectorul generatoarelor de frînare s-au determinat cu relația :

$$\sum p = p_m + p_{fe} + p_{Cu} + p_{co}, \tag{3}$$

unde : $p_m + p_{fe}$ sînt pierderile mecanice și în fier ale generatoarelor, care s-au determinat în funcție de turația și tensiunea generatoarelor (fig. 1), [W], $p_{Cu} = \sum_1^4 0{,}11\, I_i^2$ — pierderile în cupru, [W], $p_{co} = \sum_1^4 2 I_i$ — — pierderile la colector, [W].

Valorile puterii la obadă a locomotivei, pentru diferite turații ale motorului Diesel, trepte de viteză și regimuri de mers, sînt trecute în diagrama din fig. 2.

b) *Forța de tracțiune la obadă a locomotivei* $F_0 = f(V)$ s-a determinat cu relația :

$$F_0 = \frac{270\, P_0}{V}, \text{ [kgf]}, \tag{4}$$

unde : V este viteza locomotivei, [km/h].

Viteza locomotivei s-a determinat cu relația :

$$V = 0{,}1885 \frac{D}{i_t}\, n_m, \tag{5}$$

unde $D = 0{,}742$, [m], este diametrul roții motoare a locomotivei, i_t — raportul de transmitere pentru o treaptă de viteză, n_m — turația motorului Diesel, [rot/min].

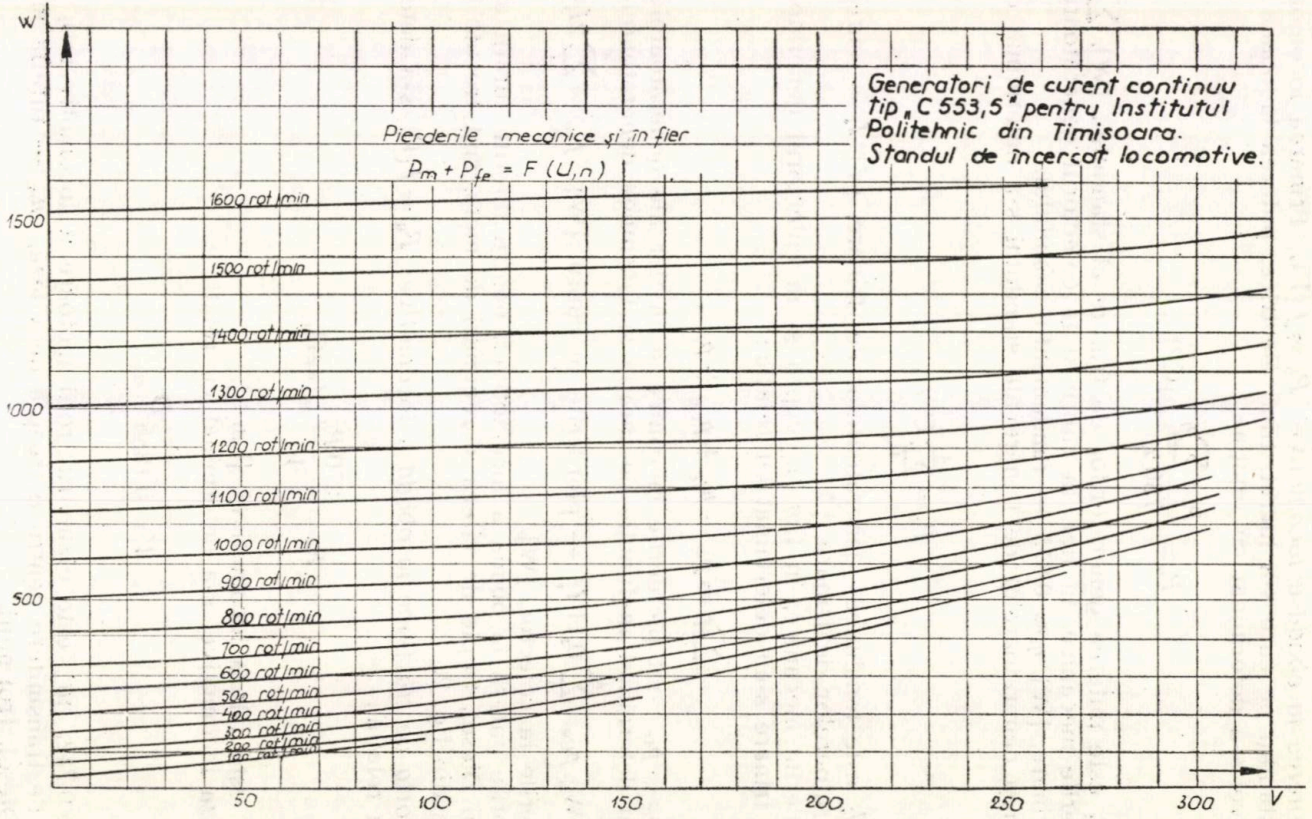


Fig. 1. — Pierderile mecanice și în fier la generatoarele de curent continuu tip C 553,5.

c) *Forța de tracțiune la cîrlig a locomotivei* $F_c = f(V)$ s-a măsurat cu ajutorul unui dinamometru electrotensometric.

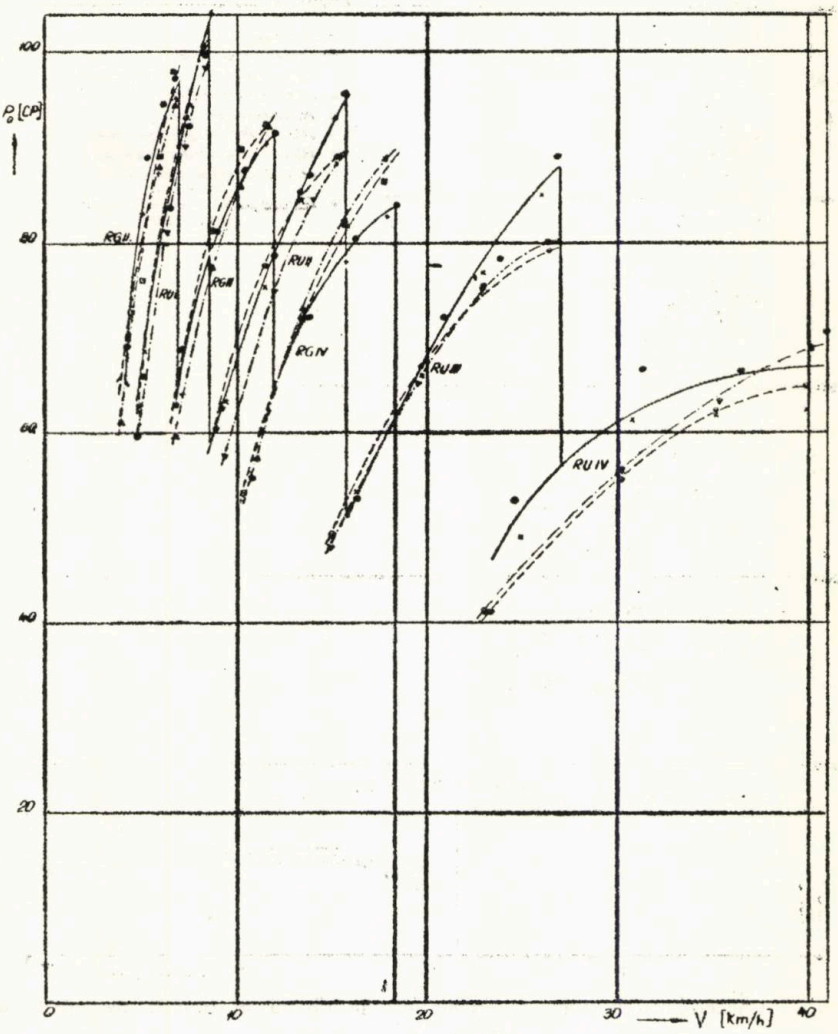


Fig. 2. — Caracteristicile puterii la obadă în funcție de viteza de mers $P_\theta(V)$

Rezultatele sînt trecute în diagrama din fig. 3.

d) *Consumul specific de combustibil al locomotivei* s-a determinat cu relația :

(6) $$c_c = \frac{1000\, G_c}{P_i}, \text{ [g/CP h]},$$

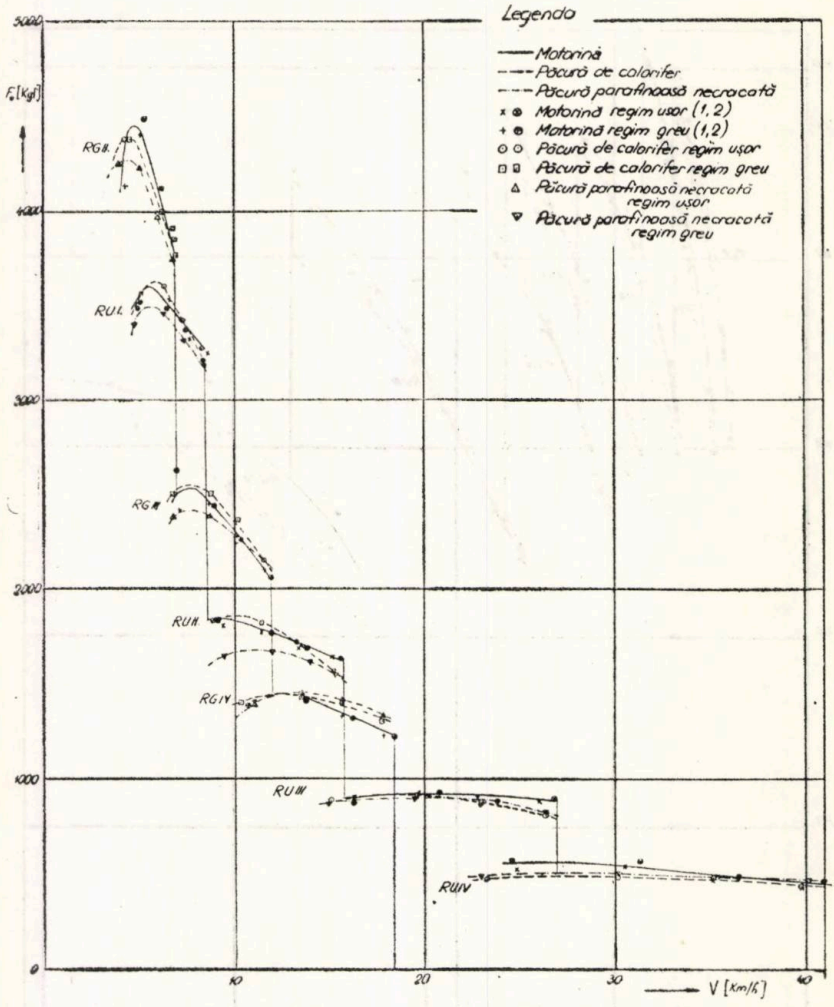


Fig. 3 — Caracteristicile forţei de tracţiune la obadă în funcţie de viteza de mers $F_0(V)$.

unde: G_c este cantitatea de combustibil orară consumată de către motorul Diesel, [kg]. Consumul de combustibil s-a determinat prin cîntărire cu ajutorul unei balanţe.

Consumul specific de combustibil s-a reprezentat în diagramele din fig. 4 a şi 4 b.

e) *Randamentul total al locomotivei* s-a determinat cu relația:

$$\eta_l = \frac{632\, P_0}{H_i\, G_c}, \tag{7}$$

unde H_i este puterea calorifică inferioară a combustibilului, [kcal/kg].

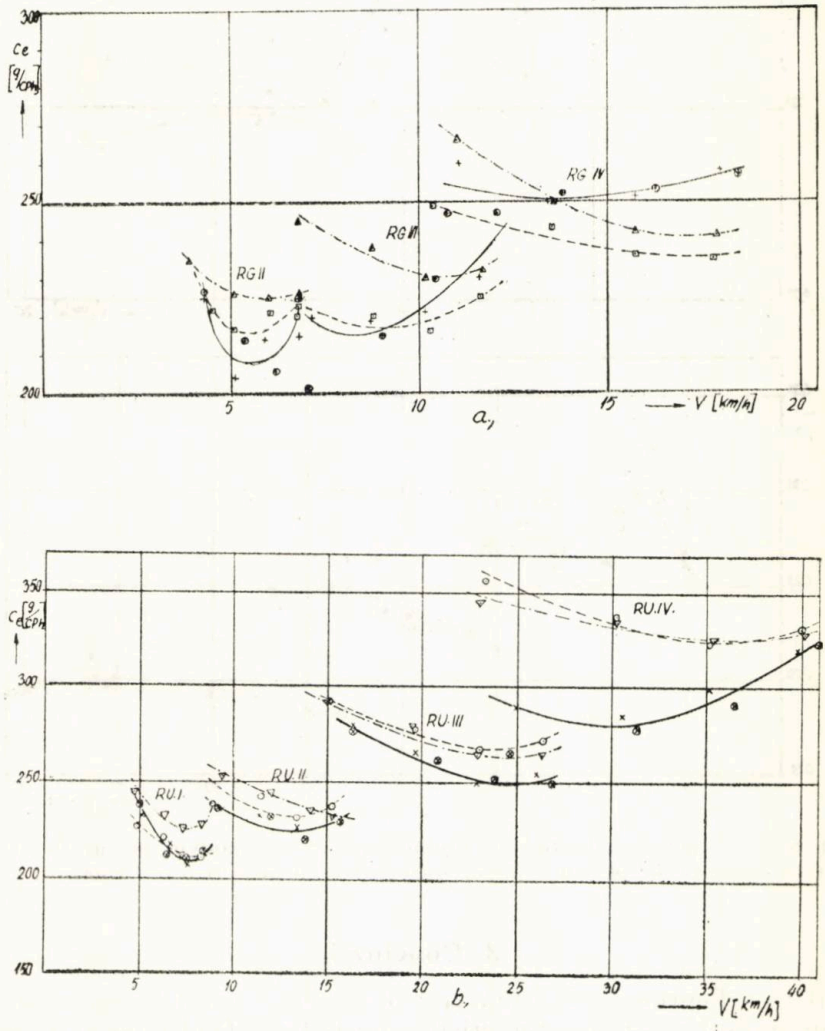


Fig. 4 — Caracteristica consumului specific de combustibil, raportată la puterea la obadă, în funcție de viteza de mers $c_e(V)$, pentru regimul greu *(a)* și pentru regimul ușor *(b)*.

În diagramele din fig. 5 a şi 5 b s-au reprezentat valorile randamentului total al locomotivei.

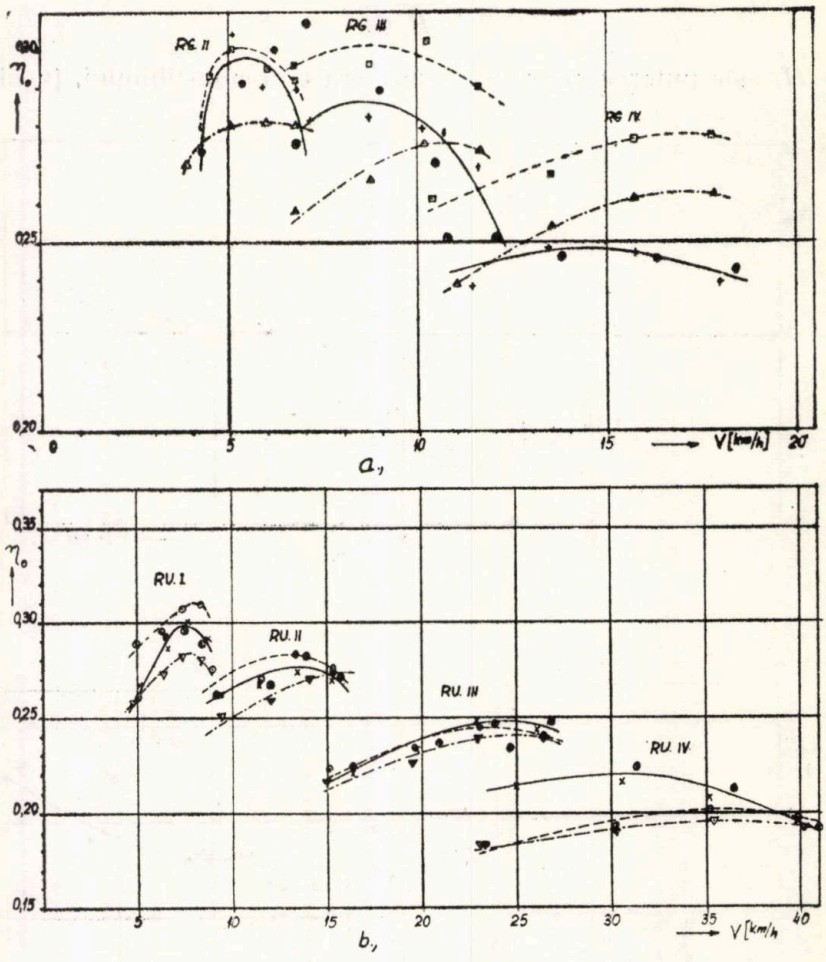


Fig. 5 — Caracteristicile randamentului total al locomotivei în funcţie de viteza de mers $\eta_l(V)$ pentru regimul greu *(a)* şi pentru regimul uşor *(b)*.

3. Concluzii

a) Din diagramele din fig. 2 şi 3 rezultă că atît caracteristica de tracţiune $F_0(V)$ cît şi caracteristica de putere $P_0(V)$ nu sînt influenţate de tipul combustibilului utilizat, valorile medii ale forţei de tracţiune şi puterii fiind aproximativ aceleaşi.

b) Consumul specific de combustibil al locomotivei a arătat o creștere în medie de 3...7% la utilizarea păcurii de calorifer tip A STAS 54-59 și de 5...10% la utilizarea păcurii parafinoase necracate STAS 51-49.

c) Randamentul la obadă al locomotivei este mai mare în medie cu 1...5% la utilizarea păcurii de calorifer, iar la utilizarea păcurii parafinoase necracate mai mic cu 3...7%.

d) Din experiențele întreprinse cu păcura de calorifer nu s-au observat depuneri de calamină, iar la utilizarea păcurii parafinoase necracate, după 50 de ore de funcționare a locomotivei, s-au constatat depuneri de calamină numai pe suprafața pulverizatorului.

Institutul politehnic, Timișoara

BIBLIOGRAFIE

1. Popescu C., *Sisteme de tracțiune feroviară*. Ed. Căilor ferate, Buc., 1957.
2. *** Bericht Göttingen : *Dieselfahrzeugen in Schienenverkehr*. Köln, Röhrig C., 1954.
3. Spausta F., *Kraftstoff-Handbuch*. Franckische Verlagshandlung, Stuttgart, 1960.
4. Jostes F., *Betrachtungen über Kraftstoffe für Dieselmotor*. M.T.Z., 1958, 3.
5. Zăgănescu I., Popescu C., *Aspectul energetic și funcțional în utilizarea diferitelor sorturi de combustibil la motoarele Diesel de locomotivă* Bulet. șt. și tehn. Inst. polit., Timișoara, 1965, **10 (24)**, *1*.
6 — *Determinarea gradului de economicitate al locomotivelor Diesel, pentru diferite sorturi de combustibil*. Bulet. șt. și tehn. Inst. polit., Timișoara, 1965, **10 (24)**, *1*.
7. — *Alegerea sorturilor de combustibil inferior indigen pentru locomotive Diesel*. Comunicare la sesiunea științifică a Inst. polit., Timișoara, 1966.
8. — *Instalații de preparare în depouri a combustibililor inferiori indigeni pentru locomotive Diesel*. Comunicare la sesiunea științifică a Inst. polit., Timișoara, 1966.
9. — *Preparatea pe locomotive Diesel a combustibililor inferiori*. Comunicare la sesiunea științifică a Inst. polit., Timișoara. 1966.

DER EINFLUSS DER VERWENDUNG MINDERWERTIGER INLÄNDISCHER BRENNSTOFFE AUF DIE ZUGEIGENSCHAFTEN DER DIESELLOKOMOTIVEN

(Zusammenfassung)

Die Arbeit behandelt das Verhalten der inländischen Heizöle im Arbeitsprozess der Dieselmotore für Lokomotiven und es werden die Vorbrennungsfaktoren dieser Heizöle für Diesellokomotiven bestimmt. Ebenfalls werden auf dem Erprobungsstand für Lokomotiven der Technischen Hochschule, Timișoara, die Zugeigenschaften der Lokomotive L.D.I., eine Konstruktion des Werkes „23 August", bestimmt. Man kommt zur Schlussfolgerung dass die inländischen parafinhaltigen Heizöle für Diesellokomotiven verwendet werden können, nachdem sie einer von den Verfasser bestimmten Bearbeitung unterzogen wurden.

Erklärung der Abbildungen

Abb. 1. — Mechanische und Eisenverluste ($p_m + p_{fe}$) von Generatoren C 553,5.

Abb. 2. — Kennlinie: Leistung am Radumfang — Fahrtgeschwindigkeit $P_0(V)$.

Abb. 3. — Kennlinie: Zugkraft am Radumfang — Fahrtgeschwindigkeit $F_0(V)$.

Abb. 4. — Kennlinie: Spezifischer Ölverbrauch (bezogen auf die Leistung am Radumfang) — Fahrtgeschwindigkeit, für schweres Regim *(a)*, und für leichtes Regim *(b)*.

Abb. 5. — Kennlinie: Gesamtwirkungsgrad der Lokomotive — Fahrtgeschwindigkeit, für schweres Regim *(a)*, und für leichtes Regim *(b)*.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

C. Z. 621.94

DETERMINAREA PARAMETRILOR FORŢEI PRINCIPALE DE AŞCHIERE ÎN PROCESUL DE STRUNJIRE LONGITUDINALĂ LA OŢELURILE ROMÂNEŞTI DIN GRUPA OLC STAS 880-1960

DE

GH. CAŞLER şi D. ZETU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 28—30 septembrie 1967

Continuînd încercările experimentale [1] în vederea determinării parametrilor forţei principale de aşchiere în procesul de strunjire longitudinală, în lucrarea de faţă se determină valorile exponenţilor x_p, y_p şi a constantei C_p din relaţia clasică cunoscută:

$$P_z = C_p\, t^{x_p} s^{y_p}, \tag{1}$$

la următoarele oţeluri: OLC 15, OLC 20, OLC 30, OLC 40, OLC 50, OLC 55 şi OLC 65.

Înaintea încercărilor experimentale, aceste oţeluri au fost verificate în laborator la duritate şi acolo unde duritatea depăşea prescripţiile STAS oţelul a fost supus unei recoaceri pentru a-l aduce la duritatea prescrisă în STAS.

Pentru încercările experimentale s-a folosit un dinamometru tip G. A. Levit, cu pîrghia de transmitere a deformaţiilor legată rigid de un amortizor hidraulic. Valorile forţei principale de aşchiere au fost determinate pe baza indicaţiilor comparatorului folosind relaţia de etalonare:

$$P_z = \frac{240\, d}{l+30}\ [\text{kgf}], \tag{2}$$

unde: l — lungimea liberă a cuţitului, [mm]; 30 reprezintă lungimea cuţitului în suportul dinamometrului pînă la axa barei de torsiune, [mm]; d — numărul diviziunilor citite pe comparatorul dinamometrului; 240 — constanta de etalonare a dinamometrului.

Valorile medii ale forţei P_z calculate cu relaţia (2), pentru trei valori diferite ale vitezei de aşchiere, au fost trecute într-un grafic în coordonate dublulogaritmice, obţinînd două rînduri de drepte: $P_z = f_1(s)$, la $t = \text{const.}$ şi $P_z = f_2(t)$, la $s = \text{const.}$ (fig. 1...7).

Pentru determinarea exponentului x_p se aleg două puncte extreme de pe fiecare dreaptă construită la $s = \text{const.}$ şi prin logaritmare, se obţine expresia de calcul pentru x_p:

$$x_p = \frac{\log P_{z_2} - \log P_{z_1}}{\log t_2 - \log t_1}. \tag{3}$$

Procedînd în mod analog şi cu dreptele construite la $t = \text{const.}$, se obţine relaţia de calcul pentru y_p:

$$y_p = \frac{\log P_{z_2} - \log P_{z_1}}{\log s_2 - \log s_1}. \tag{4}$$

Valorile coeficientului C_p, pentru fiecare dreaptă, s-au determinat folosind relaţia:

$$C_p = \frac{P_z}{t^{x_p} s^{y_p}}. \tag{5}$$

După calcularea valorilor exponenţilor x_p, y_p şi a constantei C_p folosind relaţiile (3), (4) şi (5), pentru toate dreptele din diagramă, s-au determinat valorile medii ale acestora pentru fiecare material cercetat (tabelul 1).

Tabelul 1

Oţelul STAS 880-60	H_B kgf/mm²	x_{pm}	y_{pm}	C_{pm}
OLC 15	129	0,95	0,74	160
OLC 20	138	0,97	0,72	162
OLC 30	174	1,03	0,75	152
OLC 40	291	0,97	0,76	180
OLC 50	229	0,88	0,78	203
OLC 55	219	0,92	0,81	214
OLC 65	244	1,00	0,87	240

Determinările au fost efectuate cu un cuţit din oţel rapid R 18, având următoarea geometrie: $\alpha = 10°$, $\gamma = 25°$, $\lambda = 0°$, $K = 45°$, $K' = 15°$, fără lichid de ungere şi răcire, pe un strung normal S_3, „Iosif Rangheţ", Arad.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de maşini-unelte şi scule

BIBLIOGRAFIE

1. Caşler Gh. şi colab., *Determinarea parametrilor forţei principale de aşchiere în procesul de strunjire longitudinală.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1956, **II (VI)**, *3–4*, pp. 313–318.

DÉTERMINATION DES PARAMÈTRES DES FORCES DE COUPE CONCERNANT LES ACIERS ROUMAINS SOUMIS AU TOURNAGE LONGITUDINAL. LES ACIERS STANDARDISÉS STAS 880-60

(Résumé)

En continuant les recherches expérimentales antérieures les auteurs établissent les valeurs des paramètres C_p, x_p et y_p de l'expression (1), pour les suivantes sortes d'acier: OLC 15, OLC 20, OLC 30, OLC 40, OLC 50, OLC 55 et OLC 65, STAS 880-60.

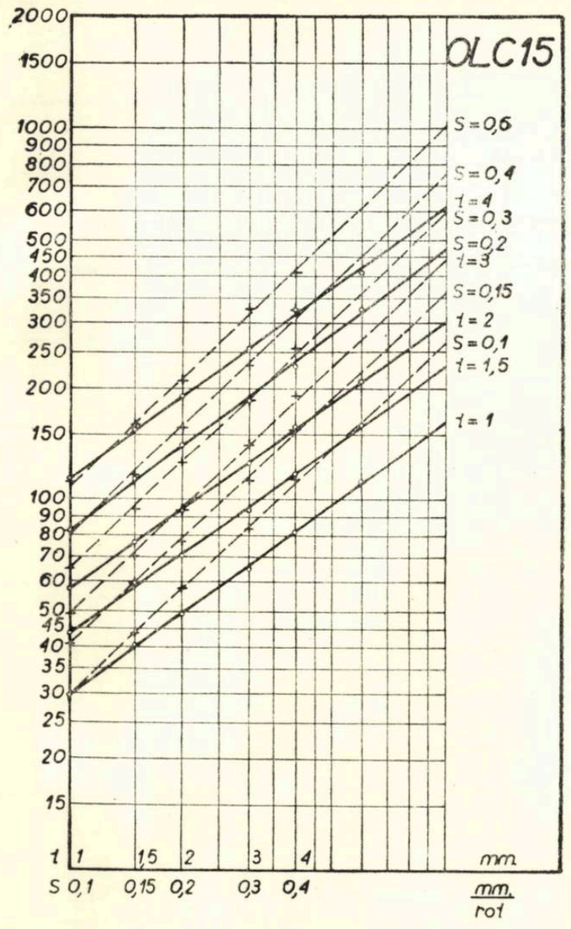


Fig. 1

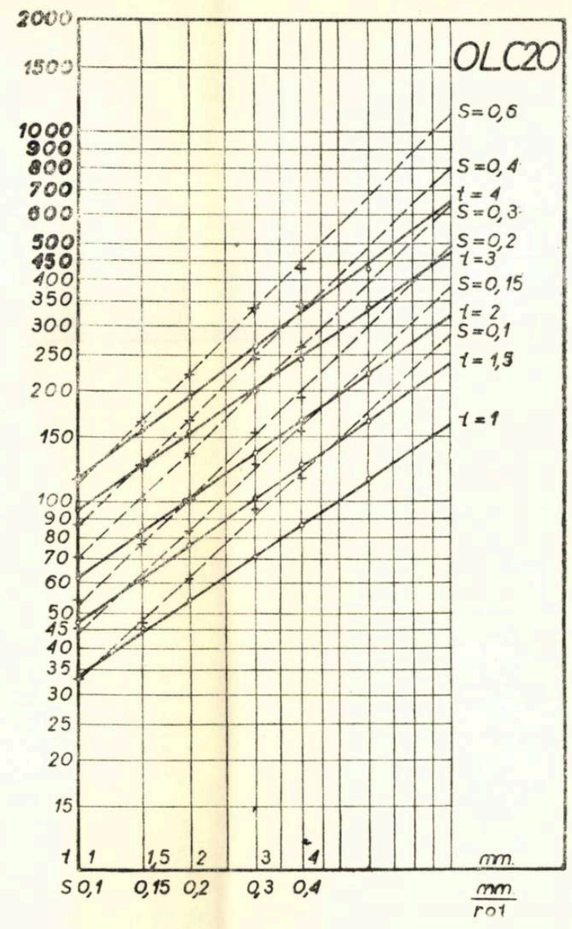


Fig. 2

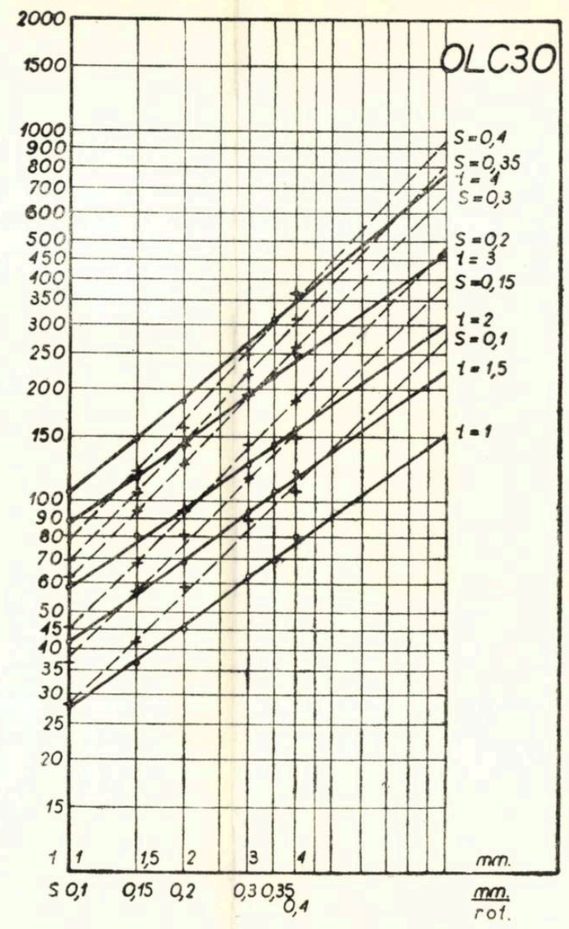


Fig. 3

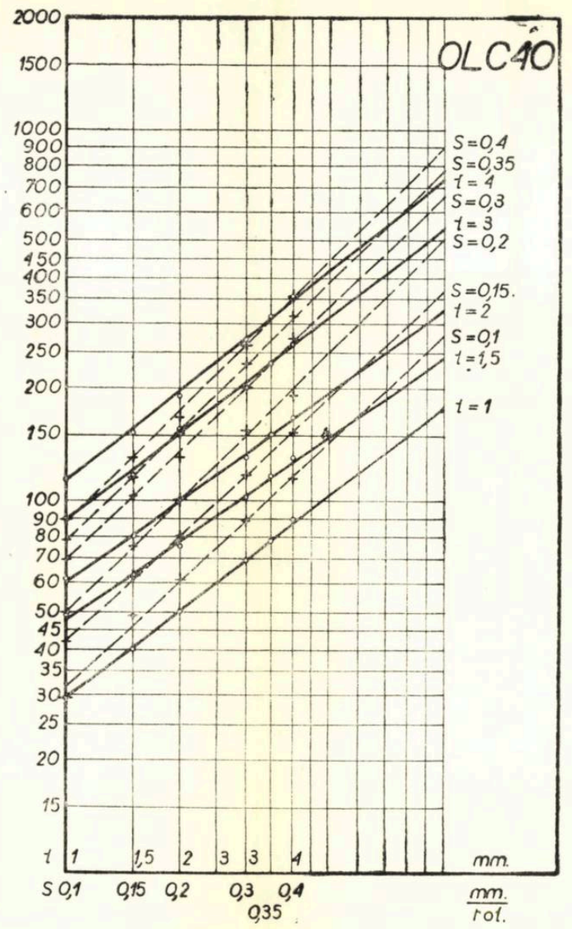


Fig. 4

Fig. 5

Fig. 6

Fig. 7

du-se în acest mod particule fine Deplasîndu-se cu viteză mare, picăturile de lichid ajung în zona de aşchiere pe suprafeţele încălzite şi în frecare, efectuînd astfel răcirea şi ungerea. Starea pulverizată a lichidului determină eficacitatea termică remarcabilă a acestei metode. Venind în contact cu suprafeţele încălzite ale sculei, piesei şi aşchiei, mediul de răcire absoarbe şi evacuează o parte a căldurii din zona de aşchiere. Mecanismul de absorbţie de căldură de către mediul de răcire la aşchiere se desfăşoară în general pe seama vaporizării şi convecţiei. Pătrunzînd în zonele de contact, unde asigură o ungere în condiţii limită (condiţii de presiune şi temperatură ridicate), fluidul de ungere şi de răcire reduce frecarea pe feţele de degajare şi aşezare ale sculei aşchietoare.

Realizarea ungerii, în condiţii limită, este legată de acţiunea de adsorbţie a mediilor lichide. În urma adsorbţiei, pe suprafeţele de lucru ale sculei se formează pelicule foarte subţiri de lubrifiant care micşorează frecarea şi reduc considerabil mărirea uzurii acesteia. Acţiunea de adsorbţie a fluidelor se manifestă şi în altă direcţie. În zona de deformare plastică a metalului există microfisuri din cele mai fine, care sînt umplute de către fluidul de răcire activ. Moleculele sale se îndreaptă cu extremităţile polare spre moleculele metalului şi se combină rezistent cu acestea. Cîmpul de forţe existent în jurul moleculelor crează forţele care provoacă acţiunea de distanţare din fisură (despicare) [1]. Datorită acestui fapt se uşurează deformarea metalului la aşchiere şi se micşorează forţele de aşchiere.

După teoria lui A. T. Isaev [5] lichidul de răcire sau, ceea ce este mai probabil, vaporii lichidului [8], sînt aspiraţi în zona de vid formată la desprinderea tăişului de depunere, la limita dintre stratul frînat şi suprafaţa de degajare, realizînd ungerea.

C. Show [8] explică pătrunderea lichidului de răcire-ungere în zona muchiei prin acţiunea forţelor de capilaritate care apar la contactul sculă-piesă, sculă-aşchie. Fenomenul de răcire, în cazul lichidului pulverizat, este mult mai intens decît la răcirea prin curgere de lichid. Picăturile de lichid pătrunzînd în zona muchiei aşchietoare favorizează captarea căldurii prin mărirea suprafeţelor de contact sculă-fluid. Este utilizată, prin aceasta, o caracteristică fizică importantă, insuficient folosită de metoda clasică de răcire-ungere, şi anume — căldura latentă de vaporizare a lichidului. De asemenea mecanismul de ungere este intensificat în cazul trimiterii unui jet de lichid pulverizat. Explicarea mecanismului influenţei mediului poate fi făcută prin studiul procesului de aşchiere în diverse condiţii de mediu, material al piesei sau sculei, sau prin experimente indirecte referitoare la fenomenele de uzură, dinamica aşchierii, calitatea suprafeţei.

2. Rezultate experimentale

Avînd în vedere că în procesul de pulverizare răcirea este eficientă în special pe direcţia feţei de aşezare, s-a întreprins un studiu experimental care să stabilească domeniul de eficienţă maximă a răcirii-ungerii prin pulverizare la strunjirea profilată a rolelor de rulmenţi.

Pe această linie, ţinînd seama de legile generale ale aşchierii metalelor şi ale uzurii sculelor, era de presupus că datorită răcirii în special a feţei de aşezare, eficienţa maximă să se obţină la regimuri de aşchiere şi la scule la care fenomenele de frecare şi uzură pe faţa de aşezare sînt preponderente în raport cu cele de pe faţa de degajare. Sculele profilate lucrează în general cu avansuri mici şi aici contribuţia răcirii-ungerii prin pulverizare este importantă.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

C. Z. 621.94 ; 621.82

CONTRIBUŢII LA STUDIUL RĂCIRII-UNGERII PRIN PULVERIZAREA LICHIDELOR LA JOASĂ PRESIUNE ÎN STRUNJIREA PROFILATĂ A ROLELOR DE RULMENŢI

DE

BORIS PLĂHTEANU şi I. CONDREA

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 28—30 octombrie 1967

1. Introducere

Oţelurile dure şi termorezistente, aliajele de titan, crom şi nichel, care au o prelucrabilitate prin aşchiere redusă, cerinţele tot mai mari de precizie şi calitate a suprafeţelor pieselor prelucrate, fac, printre altele, ca rolul lichidelor de răcire-ungere în aşchierea metalelor să crească tot mai mult. Problema mediului în care are loc aşchierea şi cea a proceselor de răcire-ungere atrage atenţia specialiştilor.

Astăzi căutarea de noi lichide „patent" şi a metodelor de răcire-ungere eficace, fac parte din principalele căi de perfecţionare a tehnologiei prelucrării metalelor.

Numeroase cercetări [2], [5], [7], au arătat că procesul formării aşchiei depinde de mediu, mecanismul influenţei acestuia, însă, este explicat diferit. O primă ipoteză emisă se referă la formarea unei pelicule la contactul sculă-piesă, sculă-aşchie [4], [6], [8]. Pelicula formată este rezultatul interacţiunii chimice a lichidului cu suprafaţa metalică proaspătă, cu atomi activi. O altă ipoteză se bazează pe starea de tensiune a metalului în prezenţa mediilor tensio-active care produce o creştere a ecruisării, devenind principalul factor al acţiunii mediului [1], [3], [6].

Se pare că în procesul de aşchiere au loc ambele fenomene, influenţa unuia sau altuia asupra eficacităţii acţiunii mediului depinzînd de ansamblul condiţiilor în care are loc aşchierea. La aşchierea cu folosirea răcirii-ungerii se obţine, în primul rînd, o mărire a durabilităţii sculelor şi o îmbunătăţire a calităţii suprafeţelor prelucrate. Are loc o micşorare a forţelor de aşchiere şi a energiei cheltuite. Pe lîngă acestea, problema în discuţie are şi un aspect economic deosebit. Aplicarea corectă a metodelor moderne de răcire-ungere conduce la o economie însemnată rezultată din mărirea durabilităţii sculelor, reducerea numărului de operaţii de finisare, mărirea productivităţii pe seama reducerii timpilor de înlocuire a sculelor.

În prezent se folosesc diverse metode de răcire-ungere a sculelor aşchietoare, între care şi răcirea prin pulverizare de lichid în jet de aer comprimat.

Esenţa metodei, relativ nouă, de răcire-ungere prin pulverizare, constă în aceea că lichidul, în cantitate redusă, este antrenat de un jet de aer comprimat formîn-

În ideia înlocuirii răcirii-ungerii prin curgere cu debit mare de ulei (cca. 18 l/min), folosit la strunjirea profilată la Fabrica de Rulmenți, Bîrlad, cu răcire prin pulverizare de lichid în jet de aer comprimat, am procedat la experimentări de uzură efectuate cu cuțite disc profilate, folosite la prelucrarea rolelor butoi.

În condițiile actuale, la Fabrica de Rulmenți criteriul durabilității îl constituie calitatea suprafeței obținute. S-a constatat că înrăutățirea calității suprafeței este produsă de o anumită uzură pe fața de așezare, asociată cu o decarburare pe o anumită adîncime a sculei. Continuarea lucrului cu scula, în aceste condiții, ar duce la degradarea rapidă a unui strat mare de material al sculei, ceea ce ar impune, la reascuțire, înlăturarea unui strat corespunzător de metal.

Considerăm că în cazul răcirii-ungerii cu ulei, efectul dominant este cel al ungerii, ceea ce explică uzura relativ redusă de pe suprafața de așezare, însoțită de o decarburare pe o adîncime mare a sculei. Fenomenele termice, în acest caz, sînt foarte intense, iar evacuarea căldurii este defectuoasă. Se impune folosirea unui mediu care, pe lîngă calitățile de ungere, să aibă bune calități de răcire. De aceea, ne-am oprit asupra procedeului de răcire-ungere prin pulverizare ale cărui calități, în comparație cu alte sisteme, au fost arătate fie explicit, fie implicit.

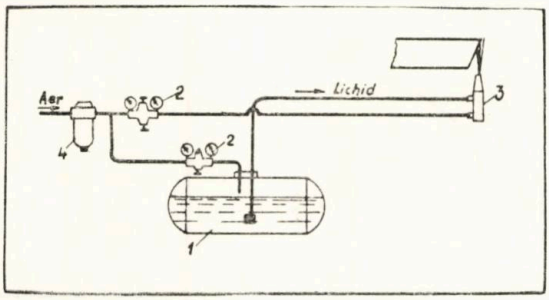


Fig. 1

Au fost culese datele privitoare la timpul de lucru efectiv, între două reascuțiri, al cuțitelor profilate la Fabrica de Rulmenți. Dispersia datelor este mare, rezultînd durabilități cu mult inferioare celei calculate.

În cadrul experiențelor de laborator, au fost ridicate curbe de uzură pentru așchierea uscată și pentru așchierea în prezența lichidului pulverizat, prezentate în fig. 2. Încercările au fost efectuate folosind o instalație experimentală de pulverizare, realizată în cadrul unei lucrări care face parte din planul de stat al cercetării științifice (fig. 1).

Din încercările efectuate pe instalaţie s-a stabilit regimul optim de pulverizare avîndu-se în vedere stabilitatea jetului pentru lichidele folosite, obţinerea unei caracteristici superioare de pulverizare (spectrul pulverizării), care să asigure o eficienţă maximă a procesului de răcire-ungere.

Instalaţia cuprinde un rezervor pentru lichid *1*, regulatoarele de presiune 2, pulverizatorul amestecător de tipul cu ejecţie modificat 3, filtrul de aer *4*.

Pentru determinările de laborator a fost construit un dispozitiv port-sculă, adaptabil pe strungul universal (foto). Cuţitele disc profilate încercate, executate din RW 180, sînt cele folosite la prelucrarea rolelor butoi. Materialul prelucrat este RUL 1 cu duritatea $HB = 203...205$, regimul de aşchiere $s_t = 0{,}05$ mm/rot, viteza de aşchiere medie $v = 36{,}5$ m/min, ceea ce înseamnă o viteză cu mult mai mare ca cea folosită în uzină ($v = 10$ m/min).

Lichidul de răcire-ungere a fost emulsia cu concentraţia de 1,5%. Parametrii regimului de pulverizare : $p = 3{,}5$ at, $p_{1,2} = 0{,}8$ at, $Q_1 = 250$ g/h.

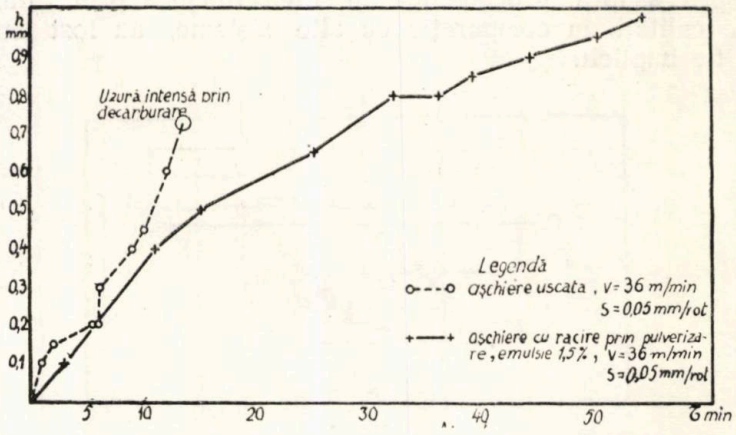


Fig. 2

Uzura a fost măsurată folosind o lupă Brinell cu precizia 0,05 mm. Variaţia în timp s-a determinat măsurînd periodic mărimea faţetei de uzură de pe faţa de aşezare (fig. 2).

Datele obţinute sînt centralizate în tabelul 1.

Din analiza datelor se constată următoarele :

a) Durabilitatea în cazul aşchierii cu răcire-ungere prin pulverizare a rezultat de circa 5 ori mai mare decît în cazul aşchierii uscate, folosind o viteză de aşchiere de 36 m/min (fig. 2).

b) În toată perioada încercărilor de laborator, uzura sculelor s-a produs fără decarburări ale tăişului, calitatea suprafeţei obţinute fiind

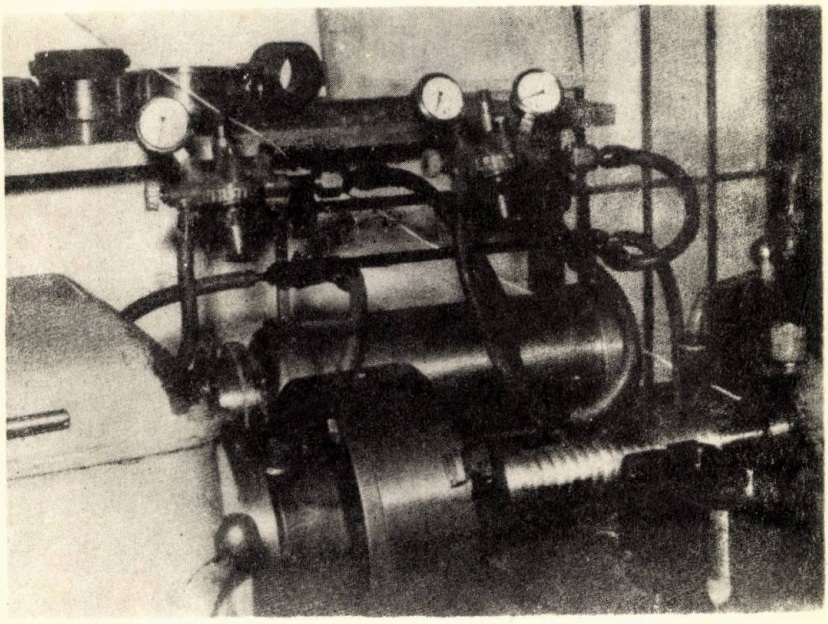


Fig. 1

bună, deşi mărimea uzurii era superioară aceleia din cazul aşchierii uscate sau cu răcire-ungere cu ulei. Abia o uzură de 1 mm a provocat apariţia decarburării accelerate a tăişului şi înrăutăţirea calităţii suprafeţei.

Tabelul 1

Material sculă-RW 180 Material piesă-RUL 1		Regim de aşchiere $s = 0{,}05$ mm/rot, $v = 36$ m/min		
Aşchierea uscată		Răcirea prin pulverizare emulsie 1,5%		Aspectul uzurii pe faţa de aşezare
t	h	t	h_a	
1′	0,1	3′	0,1	
2′10″	0,15	10′45″	0,4	
5′30″	0,3 (0,2)	15′	0,5	
8′	0,3 (0,2)	25′	0,65	
9′	0,4	32′	0,8	
10′	0,45	36′	0,8	
12′	0,6	39′	0,85	
12′10	distrugere prin decarburare	44′	0,9	
		50′	0,95	
		54′	1,00	
Regim de aşchiere $v = 10$ m/min		Răcire-ungere prin curgere de ulei $Q_1 = 18$ l/min		
Durabilitate medie $T = 40$ min, în condiţiile aşchierii intermitente la viteza de aşchiere prescrisă.				

3. Concluzii

1. Din analiza situaţiei existente în fabrică, se impune concluzia că la folosirea răcirii-ungerii cu ulei, efectul dominant este cel al ungerii, efectul de răcire fiind insuficient pentru evacuarea căldurii ce se dezvoltă în cazul strunjirii profilate la care efectele termice sînt foarte intense. Manifestarea acestei stări de fapt o constituie scoaterea prematură a sculei din uz ca urmare a decarburării puternice, deşi mărimea uzurii pe faţa de aşezare este relativ redusă (ungere bună).

2. La folosirea răcirii-ungerii prin pulverizare de lichid în jet de aer comprimat se obţine o durabilitate superioară a sculelor, rezultată

din efectul puternic de răcire şi calităţile de ungere ale fluidului în stare pulverizată, în comparaţie cu răcirea-ungerea cu ulei.

3. Lichidul de răcire-ungere folosit (emulsie, concentraţie 1,5%) s-a dovedit a fi eficace, avînd un puternic efect de răcire şi bune calităţi de ungere.

4. Este posibilă intensificarea regimului de aşchiere prin mărirea vitezei de aşchiere, ceea ce ar duce la o mărire substanţială a productivităţii strungurilor automate pluriax pe care se execută această prelucrare.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de maşini-unelte şi scule

BIBLIOGRAFIE

1. Проскуряков Ю. Г., Петров В. Н., *Тонкораспылительное охлаждение режущих инструментов.* Машгиз, М., 1962.
2. Egorov S. V., Rudnev A. V., *Metode eficiente de răcire a sculelor aşchietoare la prelucrarea aliajelor refractare.* Maşini-unelte şi scule, 1961, *8*, pp. 488—491, (trad. din l. rusă).
3. Zaiţev V. M., *Influenţa mediilor de răcire asupra durabilităţii sculelor şi netezimii suprafeţelor prelucrate.* Maşini-unelte şi scule, 1958, *6*, pp. 22—24, (trad. din l. rusă).
4. Kececioglu D., Sorensen Ar., *Comparativ Effect of Land and Crater Wear on Tool Life when Dry Cutting Mist Cooling and Flood Cooling.* Trans. of ASME, s. B, J. of Mech. Eng., 1962, *1*.
5. Askarov M. A., *Folosirea lichidului de ungere şi răcire la aşchierea oţelurilor dure şi a oţelurilor aliate.* Maşini-unelte şi scule, 1957, *1*, pp. 69—72, (trad. din l. rusă).
6. Kohn E. M., *Theory on the Role of Lubricant in Metal Cutting at Low Speeds and in Boundary Lubrication.* Wear, 1963, *1*.
7. Лоладзе Т. Н., *Износ режущего инструмента.* Машгиз, М., 1958.
8. Bouillet, *L'utilisation des fluides dans la coupe de métaux.* Mécanique electr., 1964, *183*.

CONTRIBUTIONS À L'ÉTUDE DU REFROIDISSEMENT ET DE LA LUBRIFICATION PAR PULVÉRISATION DES LIQUIDES À BASSE PRESSION, DANS LE TOURNAGE PROFILÉ DES ROULEAUX DE ROULEMENT

(Résumé)

On étudie les performances du refroidissement et de la lubrification par pulvérisation dans le processus de coupe des rouleaux de roulement par tournage profilé, par rapport a la coupe sèche et la coupe avec refroidissement et lubrifiaction par coulage de liquide. On constate que dans le cas du tournage profilé, dans lequel les processus sur la face antérieure sont très intenses, le refroidissement et la lubrification par pulvérisation sont particulièrement efficaces.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

C. Z. 620.1; 669.13

COMPORTAREA LA COROZIUNE A UNOR OŢELURI ALIATE DE CONSTRUCŢIE STANDARDIZATE (II)

DE

TIBERIU GOLGOŢIU, TOMA FĂRCAŞ, GH. AILINCĂI, C. CIOCHINĂ, EMIL ANDREI şi I. MĂLUREANU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 28—30 septembrie 1967

1. Într-o serie de lucrări anterioare privind coroziunea metalelor [1]...[2], s-au stabilit metodele de cercetare la coroziune, s-a propus un anumit mod de exprimare a rezistenţei la coroziune şi s-a arătat modul de comportare la coroziune a oţelurilor carbon obişnuite, a oţelurilor carbon de calitate, precum şi a unui număr de 8 mărci de oţeluri aliate de construcţie [5].

2. În aceeaşi ordine de idei se studiază, în continuare, comportarea la coroziune a unui alt lot de 8 mărci de oţeluri aliate de construcţie, cuprinse în acelaşi STAS 731-63.

Pentru a face posibilă comparaţia cu mărcile de oţeluri studiate anterior, s-au folosit aceleaşi metode de lucru şi anume: a) metoda imersiei succesive lente (*D*), b) metoda statică (*S*) şi c) metoda statică aerată prin barbotare (*B*).

De asemenea, s-au păstrat şi ceilalţi factori ca: mediile agresive (neutru, acid, oxidant) şi drept medii agresive s-au utilizat: a) soluţie de NaCl (mediu neutru), în concentraţii de 1, 3, 5, 10 şi 15%; b) soluţie de H_2SO_4 (mediu acid), în concentraţii de 1, 3, 5 şi 10%; b) soluţie de NaOCl (mediu oxidant), în concentraţii de 1, 3, 5 şi 7,5%, pentru a ne situa în limitele concentraţiilor practice mai frecvente.

Determinările au fost efectuate la temperatura mediului ambiant. Experienţele s-au întreprins pe probe cilindrice cu dimensiunile de 40×10 mm, corespunzătoare greutăţii medii de 25 g, prelucrate din oţel laminat, la diametre apropiate; perioada de încercare a fost de 10 zile.

Aprecierea gradului de corodare s-a efectuat prin metoda gravimetrică, determinîndu-se pierderile în greutate cu o precizie de

0,01 g. Valorile pierderilor în greutate reprezintă, pentru fiecare caz în parte, media a patru epruvete.

3. Datele experimentale obținute sînt redate în tabelele 1...3. Urmărind aceste date în funcție de metodă, mediu și concentrația mediului, pentru fiecare sort de oțel, se observă următoarele:

1°. La metoda imersiei succesive (*D*), oțelurile studiate se comportă după cum urmează:

a) În mediu neutru (NaCl), cu excepția mărcii 50 VC 11, la care pierderile descresc cu creșterea concentrației mediului, la toate celelalte mărci studiate se constată o creștere a pierderilor cu concentrația pînă la o anumită concentrație (1; 5 și 10%) și apoi scad.

Pierderile pentru același sort sînt înscrise în limite foarte strînse; atacul este foarte slab, uniform; la unele concentrații apar zone lucioase neatacate.

b) În mediu acid (H_2SO_4), pentru mărcile 21 MoMC 12, 50 VC 11 și 41 MoC 11, pierderile cresc continuu cu creșterea concentrației mediului, în timp ce la mărcile 15 CO 7, 41 C 10, 41 CN 12, 34 MoCN 15 și 35 CMS 13, pierderile cresc cu creșterea concentrației mediului pînă la o anumită valoare (3 și 5%), iar apoi scad.

Pierderile, pentru același sort de oțel, se înscriu în limite largi; atac puternic, uniform, suprafață rugoasă.

c) În mediu oxidant (NaOCl), pentru oțelurile 15 CO 7 și 21 MoMC 12, pierderile cresc continuu odată cu concentrația mediului coroziv, pe cînd la celelalte mărci studiate aceste pierderi cresc pînă la o anumită concentrație (3; 5%).

Pierderile pentru același sort de oțel se înscriu în limite strînse. Atacul este uniform, la unele sorturi dînd suprafețe netede, iar la altele rugoase.

2°. La metoda statică (*S*), aceleași oțeluri se comportă după cum urmează:

a) În mediu neutru (NaCl), pentru oțelurile 15 CO 7 și 50 VC 11, pierderile descresc continuu cu creșterea concentrației mediului coroziv, pe cînd la celelalte mărci studiate, aceste pierderi cresc mai întîi pînă la o anumită concentrație (3; 5%), apoi scad.

Pierderile, pentru același sort de oțel, se înscriu în limite foarte strînse. Atacul uniform la toate sorturile de oțel; suprafețe netede.

b) În mediu acid (H_2SO_4), pentru toate mărcile se constată o creștere continuă a pierderilor cu creșterea concentrației mediului coroziv. Pierderile, pentru același sort de oțel, se înscriu în limite foarte largi. Atac puternic, dînd suprafețe netede sau rugoase.

c) În mediu oxidant (NaOCl), toate mărcile de oțel studiate se comportă asemănător; pierderile cresc odată cu creșterea concentrației mediului coroziv, pînă la o anumită concentrație (3; 5%), iar apoi scad.

Tabelul 1

Nr. c t.	Metoda	Concentraţia NaCl %	Sortul oţelului															
			15 CO 7		41 C 10		20 MoMC 12		50 VC 11		41 MoC 11		41 CN 12		34 MoCN 15		35 CMS 13	
			g %	cori	g %	cori	g %	cori	g %	cori	g %	cori	g %	cori	g %	cori	g %	cori
1		1	0,20	0,035	0,25	0,042	0,16	0,029	0,38	0,067	0,35	0,061	0,37	0,065	0,21	0,030	0,38	0,067
2		3	0,25	0,042	0,27	0,049	0,19	0,032	0,34	0,060	0,39	0,069	0,58	0,102	0,16	0,029	0,35	0,061
3	*D*	5	0,27	0,049	0,30	0,053	0,17	0,030	0,22	0,037	0,41	0,072	0,61	0,107	0,28	0,049	0,46	0,081
4		10	0,19	0,033	0,22	0,037	0,16	0,029	0,17	0,030	0,55	0,097	0,76	0,134	0,36	0,063	0,39	0,069
5		15	0,10	0,017	0,11	0,019	0,09	0,014	0,17	0,030	0,17	0,030	0,13	0,023	0,06	0,011	0,17	0,030
6		1	0,13	0,023	0,13	0,023	0,10	0,017	0,16	0,029	0,06	0,010	0,04	0,007	0,04	0,007	0,04	0,007
7		3	0,12	0,021	0,14	0,025	0,12	0,021	0,12	0,021	0,07	0,012	0,07	0,012	0,04	0,007	0,06	0,011
8	*S*	5	0,12	0,021	0,11	0,019	0,12	0,021	0,12	0,021	0,10	0,017	0,11	0,019	0,09	0,015	0,09	0,015
9		10	0,08	0,013	0,07	0,012	0,07	0,012	0,09	0,015	0,09	0,014	0,11	0,019	0,08	0,013	0,08	0,013
10		15	0,07	0,012	0,05	0,008	0,06	0,011	0,08	0,013	0,09	0,015	0,07	0,012	0,05	0,008	0,09	0,015
11		1	0,12	0,021	0,12	0,021	0,08	0,013	0,16	0,029	0,12	0,021	0,12	0,021	0,06	0,011	0,20	0,035
12		3	0,20	0,035	0,24	0,042	0,19	0,033	0,28	0,049	0,19	0,033	0,22	0,039	0,23	0,039	0,29	0,051
13	*B*	5	0,27	0,049	0,22	0,039	0,12	0,021	0,30	0,053	0,30	0,053	0,22	0,039	0,16	0,029	0,23	0,039
14		10	0,21	0,036	0,22	0,039	0,23	0,039	0,24	0,042	0,21	0,036	0,18	0,031	0,10	0,017	0,09	0,015
15		15	0,17	0,030	0,18	0,031	0,15	0,028	0,22	0,039	0,10	0,017	0,10	0,017	0,10	0,017	0,11	0,019

Tabelul 2

	Metoda	Concentraţia H_2SO_4 %	Sortul oţelului															
			15 CO 7		41 C 10		21 MoMC 12		50 VC 11		41 MoC 11		41 CN 12		34 MoCN 15		35 CMS 13	
			g %	cori	g %	cori	g %	cori	g %	cori	g %	cori	g %	cori	g %	cori	g %	cori
1		1	60,20	10,670	38,40	6,808	2,20	0,390	29,20	5,161	38,50	6,851	71,30	12,650	32,60	5,770	14,00	2,480
2		3	72,60	12,870	93,50	16,570	42,10	7,464	66,50	11,750	49,00	8,700	96,50	17,110	71,50	12,650	33,60	5,950
3	*D*	5	65,50	11,610	91,00	16,134	83,60	14,823	73,00	12,920	50,10	8,900	95,00	16,800	88,30	15,500	91,50	16,220
4		10	68,90	12,210	87,10	15,440	83,80	14,858	83,00	14,700	57,50	1,010	95,20	16,900	87,10	15,400	87,50	15,500
5		—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
6		1	0,70	0,124	0,50	0,088	0,60	0,106	0,60	0,106	1,00	0,177	0,81	0,143	0,73	0,129	0,63	0,111
7		3	2,10	0,372	2,20	0,390	1,90	0,336	2,00	0,354	1,40	0,248	1,30	0,230	1,10	0,195	0,10	0,195
8	*S*	5	9,80	1,737	9,20	1,631	8,60	1,524	8,60	1,524	8,40	1,489	7,70	1,365	4,90	0,868	5,00	0,886
9		10	65,70	11,650	75,60	13,400	77,50	13,730	72,90	12,900	43,10	7,650	28,20	4,980	16,90	2,990	7,50	1,330
10		—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
11		1	1,50	0,265	2,20	0,390	0,80	0,141	4,60	0,815	0,50	0,088	0,69	0,121	0,56	0,010	0,64	0,011
12		3	1,50	0,265	2,50	0,443	1,30	0,230	6,10	1,081	1,19	0,210	1,30	0,230	1,30	0,230	1,20	0,213
13	*B*	5	45,40	8,040	54,50	9,650	48,70	8,480	45,90	8,150	1,60	0,283	2,20	0,390	2,80	0,498	2,70	0,480
14		10	51,60	9,140	49,60	8,800	48,00	8,501	47,10	8,350	2,50	0,443	3,80	0,673	2,10	0,372	3,20	0,567
15		—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Tabelul 3

Nr. crt.	Metoda	Concentraţia NaOCl %	Sortul oţelului															
			15 CO 7		41 C 10		21 MoMC 12		50 VC 11		41 MoC 11		41 CN 12		34 MoCN 15		35 CMS 13	
			g %	cori	g %	cori	g %	cori	g %	cori	g %	cori	g %	cori	g %	cori	g %	cori
1		1	1,40	0,248	1,30	0,230	2,00	0,354	2,60	0,460	3,70	0,656	4,00	0,709	2,00	0,354	3,00	0,530
2		3	4,40	0,780	6,50	1,152	2,60	0,460	3,50	0,620	6,80	1,205	7,00	1,241	5,80	1,028	4,60	0,815
3	*D*	5	5,50	0,975	3,80	0,673	3,70	0,656	4,90	0,868	5,70	1,010	6,20	1,099	2,90	0,514	2,50	0,443
4		7,5	6,30	1,117	3,50	0,620	5,30	0,939	4,40	0,780	1,40	0,248	1,80	0,319	0,75	0,132	0,60	0,106
5		—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
6		1	3,30	0,585	1,70	0,301	1,60	0,283	3,70	0,656	4,80	0,850	5,40	0,957	4,60	0,815	4,40	0,780
7		3	5,00	0,886	1,90	0,336	2,20	0,390	4,20	0,744	6,30	1,117	6,70	1,187	7,50	1,329	8,20	1,453
8	*S*	5	4,60	0,815	1,50	0,263	3,40	0,602	3,10	0,549	1,10	0,195	3,30	0,585	0,80	0,141	0,60	0,106
9		7,5	1,60	0,283	1,40	0,248	2,30	0,407	2,40	0,425	0,50	0,088	0,70	0,124	0,50	0,088	0,40	0,070
10		—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
11		1	3,20	0,567	2,40	0,425	2,80	0,498	3,30	0,585	5,00	0,886	5,30	0,939	0,30	0,053	4,30	0,762
12		3	4,70	0,833	4,30	0,762	4,80	0,850	4,60	0,815	5,30	0,939	6,20	1,099	5,00	0,886	5,90	1,046
13	*B*	5	4,00	0,709	2,60	0,460	2,60	0,460	4,10	0,726	3,40	0,602	3,80	0,673	2,50	0,443	0,20	0,035
14		7,5	2,00	0,354	1,50	0,265	2,80	0,498	3,10	0,549	2,70	0,478	1,10	0,195	0,80	0,141	0,30	0,053
15		—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Pierderile, pentru toate mărcile de oțel, se înscriu în limite destul de strînse. Atac slab, uniform, la unele probe apărînd zone lucioase, neatacate, sau atac puternic la locul de legare.

3°. În cazul metodei statice aerată prin barbotare (*B*), oțelurile studiate se comportă astfel:

a) În mediu neutru (NaCl) toate mărcile de oțel studiate se comportă la fel; pierderile cresc cu concentrația mediului agresiv, pînă la o anumită concentrație a acestuia (3; 5 și 10%), apoi scad.

Pierderile se înscriu în limite foarte strînse. Atac slab uniform; la unele probe zone neatacate, lucioase.

b) În mediu acid (H_2SO_4), pentru oțelurile 41 C 10, 21 MoMC 12 și 34 MoCN 15, pierderile cresc odată cu creșterea concentrației mediului pînă la o concentrație de 5%, apoi scad. Pentru celelalte oțeluri, pierderile cresc cu creșterea concentrației mediului.

La unele probe pierderile se înscriu în limite foarte largi, iar la altele în limite strînse. Atac uniform, dînd suprafețe netede sau rugoase.

c) În mediu oxidant (NaOCl) toate mărcile de oțel se comportă la fel; pierderile în greutate cresc cu concentrația mediului coroziv pînă la o concentrație de 3%, iar apoi descresc.

Pierderile se înscriu în limite strînse. Atac uniform, cu suprafețe netede sau lucioase.

Concluzii

Pe baza datelor experimentale obținute, s-a ajuns la următoarele concluzii:

1. Pentru mediile neutre (NaCl) și oxidante (NaOCl) și pentru toate metodele (*D*, *S*, *B*) se constată, ca linie generală pentru toate mărcile de oțel studiate, o creștere a pierderilor în greutate cu creșterea concentrației mediului coroziv pînă la o anumită valoare, ca apoi pierderile să scadă cu creșterea concentrației mediului coroziv. Sînt și cîteva excepții.

2. Pentru mediile acide (H_2SO_4) și toate metodele, se constată, în general, pentru oțelurile studiate (cu cîteva excepții) o creștere a pierderilor cu creșterea concentrației mediului coroziv.

3. În tabele se remarcă unele abateri de la linia generală indicată. Aceste abateri reprezintă o consecință a neomogenității materialului ca structură și compoziție chimică și a repartiției neuniforme a impurităților.

4. Scăderea pierderile în greutate, pentru anumite concentrații ale mediului agresiv, se explică prin formarea unui strat pasivizat care frînează atacul în continuare.

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de tehnologia metalelor
Catedra de chimie generală

BIBLIOGRAFIE

1. Fărcaș T. și colab., *Considerațiuni asupra metodelor de laborator pentru determinarea coroziunii.* Bulet. Inst. polit. Iași, **VII (XI)**, *1—2*, pp. 337—340.
2. Golgoțiu T. și colab., *Considerațiuni asupra exprimării rezistenței la coroziune a metalelor și aliajelor.* Bulet. Inst. polit. Iași, 1961, **VII (XI)**, *3—4*, pp. 289—292.
3. Golgoțiu T. și colab., *Comportarea la coroziune a oțelurilor carbon STAS 500-49.* Bulet. Inst. polit. Iași, 1961, **VII (XI)**, *3—4*, pp. 293—300.
4. Golgoțiu T. și colab., *Comportarea la coroziune a oțelurilor carbon de calitate, STAS 880-49.* Bulet. Inst. polit. Iași, 1962, **VIII (XII)**, *3—4*, pp. 331—336.
5. Golgoțiu T. și colab., *Comportarea la coroziune a oțelurilor aliate de construcție, standardizate (I).* Bulet. Inst. polit. Iași, 1966, **VIII (XII)**, *1—2*, pp. 397—403.

COMPORTEMENT À LA CORROSION DE QUELQUES ALLIAGES D'ACIER POUR CONSTRUCTIONS, STADARDISÉS (I)

(Résumé)

Les Auteurs ont étudié le comportement à la corrosion de huit marques d'aciers alliées pour les construction (STAS 731-63) en tenant compte des facteurs suivants :

a) Milieu agressif (neutre, acide, oxydant).

b) Variation de la concentration du milieu agressif.

On a employé trois méthodes de laboratoire à savoir : la méthode de l'imersion succésive lente *(D)*, la méthode statique *(S)* et la méthode statique aérée par barbotage *(B)*.

Les déterminations ont été effectuées à la température du milieu ambiant. On a apprécié le degré de corrosion par la méthode gravimetrique en déterminant les pertes du poids.

Basées sur les dates expérimentales obtenues on a abouti aux conclusions suivantes :

1. Pour les milieux neutres (NaCl) et oxydants (NaOCl) et pour toutes les méthodes *(D, S, B)* on constate comme ligne générale, pour toutes les marques d'aciers étudiées, une augmentation des pertes en poids avec l'augmentation de la concentration du milieu corrosif jusqu'à une certain valeur. D'ici les pertes baissent à mesure que la concentration du milieu corrosif augmente. Il y a aussi quelques exceptions.

2. Pour les milieux acides (H_2SO_4) dans toutes les méthodes on a constaté, en général, pour tout les aciers étudiés, sauf quelques exceptions, une hausse des pertes de poids avec l'augmentation de la concentration du milieu corrosif.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

C. Z. 620.1

INFLUENŢA DEFORMĂRII PLASTICE SUPERFICIALE PRIN RULARE CU BILE ASUPRA REZISTENŢEI LA OBOSEALĂ

DE

C. PICOŞ, CAZIMIR BOHOSIEVICI, OCT. PRUTEANU şi V. BRAHA

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 28—30 septembrie 1967

1. Procedeele de deformare plastică superficială a pieselor de maşini prin rulare cu role, rulare cu bile, împroşcare cu alice etc. se utilizează pentru mărirea durabilităţii pieselor de maşini. Prin aplicarea acestor procedee se măreşte duritatea stratului superficial, se micşorează rugozitatea suprafeţei şi se măreşte rezistenţa la oboseală [1].

Sub acţiunea forţei normale pe suprafaţa de contact a rolei sau bilei cu piesa de prelucrat are loc deformarea plastică a metalului, care în funcţie de mărimea presiunii specifice se propagă pe o anumită adîncime. Prin deformarea plastică în stratul superficial apar eforturi unitare de compresiune remanente iar în straturile interioare eforturi unitare de întindere care le echilibrează pe primele [2].

Existenţa eforturilor unitare de compresiune remanente în stratul superficial reprezintă una din cauzele principale ale măririi rezistenţei la oboseală la piesele deformate plastic superficial. Se ştie că ruperile prin oboseală se amorsează în fibrele întinse, astfel că existenţa prealabilă a unor eforturi unitare de compresiune micşorează eforturile unitare de întindere din fibrele externe cele mai solicitate la încovoiere şi torsiune şi în consecinţă rezistenţa la oboseală creşte. La creşterea rezistenţei la oboseală contribuie şi micşorarea rugozităţii suprafeţei obţinută prin rulare, micşorîndu-se astfel efectul de crestătură.

Cercetările efectuate asupra sporirii rezistenţei la oboseală în urma deformării plastice superficiale se referă cu precădere la procedeele de rulare cu role şi împroşcare cu alice, iar în ce priveşte rularea cu bile sînt de semnalat un număr relativ redus de cercetări. Astfel s-a constatat că rularea cu bile a racordărilor unor arbori cu diametre mari, din oţel 40 (GOST 1050-60) are ca efect mărirea rezistenţei la oboseală prin încovoiere rotativă cu 75% pentru forţa de rulare de 400 kgf şi diametrul arborelui de 45 mm şi cu 42% pentru forţa de rulare de 6 500 kgf şi diametrul de 180 mm [3]. După alte date [4] rularea cu bile a eprubetelor din oţel 45 (GOST 1050-60) are ca efect mărirea rezistenţei la oboseală cu 40...45%.

Într-o lucrare anterioară [1] s-a studiat influenţa parametrilor tehnologici ai procesului de rulare cu bile asupra caracteristicilor ecruisării stratului superficial (grad de ecruisare, adîncimea stratului ecruisat) şi asupra rugozităţii suprafeţei.

Caracteristicile ecruisării stratului superficial, rugozitatea suprafeței precum și proprietățile de exploatare ale piesei (rezistența la oboseală, rezistența la coroziune) depind de parametrul tehnologic principal al procesului de rulare și anume de presiunea specifică medie [5] care acționează pe proiecția suprafeței de contact a bilei cu piesa de prelucrat.

Aplicînd diferite regimuri de rulare, schimbarea parametrilor tehnologici ai procesului va determina modificarea proprietăților de exploatare ale piesei rulate.

2. Scopul acestei lucrări a constat în determinarea influenței presiunii specifice medii la rularea cu bile asupra rezistenței la oboseală prin încovoiere plană a epruvetelor din oțel tras OLC 45 T (STAS 2880-61). Oțelul folosit a avut următoarele caracteristici: a) rezistența la rupere: 81 kgf/mm^2, b) alungirea: 9%, c) starea de livrare: oțel pătrat 16×16 tras.

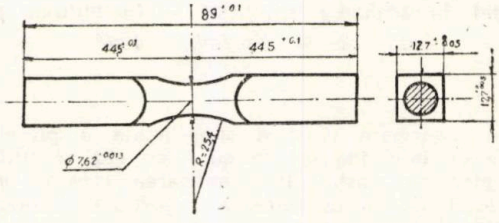


Fig. 1. — Epruvetă pentru încercarea la oboseală prin încovoiere plană.

Pentru efectuarea experiențelor s-au executat epruvete pentru încercarea la oboseală cu forma și dimensiunile din fig. 1. Finisarea suprafeței torice a epruvetei a fost executată prin rectificare, obținîndu-se rugozitatea suprafeței de $R_a = 0{,}1$ μm.

S-au executat patru serii de epruvete din care o serie au rămas nerulate iar trei serii au fost rulate cu bilă pe suprafața părții gîtuite, folosind următoarele regimuri de rulare:

a) $P_{rul} = 20$ kgf, $a_{rul} = 0{,}1$ mm/rot, $n = 610$ rot/min;
b) $P_{rul} = 30$ kgf, $a_{rul} = 0{,}1$ mm/rot, $n = 610$ rot/min;
c) $P_{rul} = 40$ kgf, $a_{rul} = 0{,}1$ mm/rot, $n = 610$ rot/min,

unde: P_{rul} — forța de rulare, a_{rul} — avansul de rulare, n — numărul de rotații ale epruvetei în timpul rulării.

Rularea s-a efectuat cu ajutorul dispozitivului descris în lucrarea [1]. Dispozitivul a fost fixat în suportul port-cuțit al unui strung normal S_3. Pe strung s-a montat un dispozitiv de copiere hidraulică care a permis obținerea avansului bilei în lungul suprafeței torice a epruvetei, prin copiere după o epruvetă-etalon.

Presiunea specifică medie care acționează pe proiecția suprafeței de contact a bilei cu piesa de prelucrat s-a determinat cu relația:

$$q_m = \frac{P}{A}, \quad (1)$$

unde: q_m — presiunea specifică medie [kgf/mm²], P — forța de rulare normală pe suprafața de contact [kgf], A — proiecția suprafeței de contact pe un plan perpendicular pe direcția forței de rulare [mm²].

Proiecția suprafeței de contact pe un plan perpendicular pe direcția forței de rulare este o elipsă ale cărei semiaxe au fost măsurate cu ajutorul unui microscop Amsler.

În urma măsurătorilor și a calculelor efectuate cu relația (1) s-au obținut valorile presiunilor specifice medii înregistrate în tabelul 1.

Tabelul 1

P_{rul} kgf	20	30	40
q_m kgf/mm²	102,5	126,5	138

Încercările la oboseală prin încovoiere plană s-au efectuat pe o mașină de încercări tip NPL 434, fabricație Amsler.

3. Rezultatele încercărilor sînt date în tabelul 2.

Reprezentările curbelor σ—N într-un sistem de axe de coordonate semilogaritmice sînt date în fig. 2...5. Pentru fiecare curbă s-au folosit 12 (într-un caz 13) epruvete.

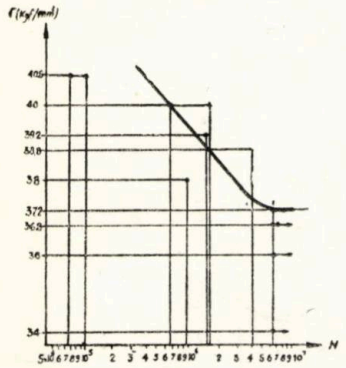


Fig. 2. — Curba de oboseală pentru epruvete nerulate.

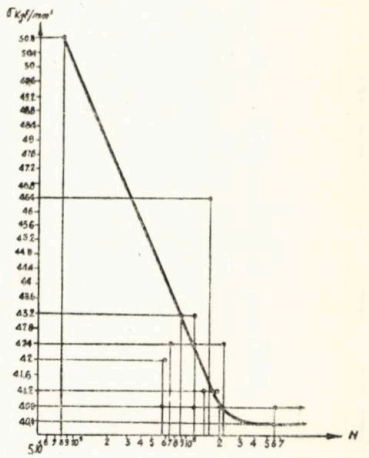


Fig. 3. — Curba de oboseală pentru epruvete rulate cu presiune specifică medie q_m = 102,5 kgf/mm².

Tabelul 2

Presiunea specifică medie de rulare q_m kgf/mm²	Efortul unitar maxim σ kgf/mm²	Numărul de cicluri pînă la rupere $N_{cicl} \times 10^{-6}$
Nerulate	40,8	0,108
	40,8	0,077
	40,0	1,59
	40,0	0,67
	39,2	1,585
	38,8	3,973
	38,0	0,95
	37,2	>6,0
	36,8	>6,0
	36,8	>6,0
	36,0	>6,0
	34,0	>6,0
102,5	50,8	0,081
	44,4	1,457
	43,2	0,889
	43,2	1,12
	42,4	0,685
	42,4	2,112
	42,0	0,669
	41,2	1,9
	41,2	1,372
	40,8	1,945
	40,8	0,614
	40,8	>6,0
	40,4	>6,0
126,5	45,6	1,201
	45,6	0,432
	44,4	0,502
	43,2	1,398
	43,2	0,719
	42,8	4,409
	42,8	1,188
	42,0	3,174
	42,0	0,89
	41,6	>6,0
	41,6	>6,0
	41,2	>6,0
138,0	47,2	0,401
	47,2	0,339
	45,6	0,57
	45,6	1,049
	44,8	1,56
	44,8	1,203
	43,6	0,73
	43,6	1,597
	43,6	>6,0
	43,2	1,012
	42,8	>6,0
	42,8	>6,0

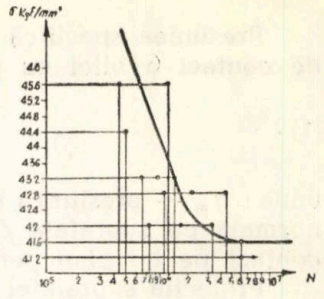


Fig. 4. — Curba de oboseală pentru epruvete rulate cu presiunea specifică medie $q_m = 126{,}5$ kgf/mm².

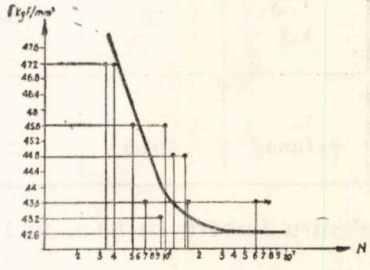


Fig. 5. — Curba de oboseală pentru epruvete rulate cu presiunea specifică medie $q_m = 138$ kgf/mm².

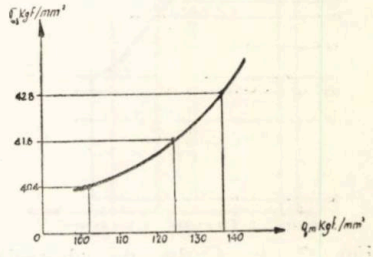


Fig. 6. — Variația rezistenței la oboseală în funcție de presiunea specifică medie.

Pe baza acestor încercări s-a stabilit variația rezistenței la oboseală prin încovoiere a epruvetelor rulate, în funcție de presiunea specifică medie de rulare (tabelul 3 și fig. 6).

4. Analizînd datele experimentale obținute, se constată că rezistența la oboseală crește în urma rulării cu bile; cu cît presiunea specifică de rulare este mai mare, cu atît valorile rezistenței la oboseală sînt mai mari.

Tabelul 3

Presiunea specifică medie de rulare q_m kgf/mm²	Rezistența la oboseală σ_{-1} kgf/mm²	Creșterea rezistenței la oboseală față de epruvetele nerulate %
Nerulate	37,2	—
102,5	40,4	8,6
126,5	41,6	11,8
138,0	42,8	15,0

Mărirea rezistenței la oboseală prin încovoiere în urma rulării cu bile, se explică prin existența eforturilor unitare de compresiune în stratul superficial, care se suprapun peste eforturile unitare create de solicitările exterioare, astfel că se descarcă parțial fibrele exterioare în care acționează eforturile unitare maxime de întindere.

Se constată de asemenea că în limitele presiunilor specifice medii de rulare utilizate (102,5...138,0 kgf/mm²), creșterea rezistenței la oboseală, în comparație cu epruvetele nerulate, este relativ redusă, ajungînd numai la 15% pentru presiunea specifică de 138,0 kgf/mm². O creștere relativ mică a rezistenței la oboseală în cazul nostru, în comparație cu alte cercetări experimentale, poate fi explicată prin faptul că influența rulării asupra ameliorării proprietăților mecanice se micșorează odată cu creșterea rezistenței inițiale a materialului [6]. Dată fiind valoarea mare a rezistenței de rupere inițiale a materialului utilizat ($\sigma_r = 81$ kgf/mm²) explicația propusă poate fi acceptată.

După cum rezultă din literatură [3] creșterea forței de rulare, prin urmare și a presiunii specifice de rulare, este însoțită de mărirea eforturilor unitare remanente din stratul superficial pînă la o valoare maximă, după care eforturile unitare remanente se micșorează deși forța de rulare crește.

Ținînd seama de cele de mai sus se poate presupune că există un grad optim de ecruisare pentru care se obține creșterea maximă a rezistenței la oboseală sub efectul rulării.

Concluzii

a) Studiul influenței parametrului tehnologic principal al procesului de rulare cu bile — presiunea specifică medie — asupra rezistenței la oboseală, a pus în evidență creșterea rezistenței la oboseală odată cu creșterea presiunii specifice medii de rulare.

b) Creşterea relativ redusă (maximum 15%) a rezistenţei la oboseală, în limitele condiţiilor cercetării efectuate, se poate explica prin faptul că influenţa ecruisării superficiale asupra creşterii rezistenţei la oboseală se micşorează odată cu creşterea rezistenţei iniţiale a materialului. Pe de altă parte, presiunile de rulare relativ mici utilizate constituie fără îndoială o cauză a creşterii relativ reduse a rezistenţei de oboseală.

c) Cercetările viitoare trebuie să urmărească determinarea regimurilor optime de rulare cu bile din punctul de vedere al creşterii rezistenţei la oboseală.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de tehnologia construcţiei de maşini şi mecanică agricolă

BIBLIOGRAFIE

1. Picoş C., Coman Gh., Bohosievici C., Cirillo A., *Asupra durificării metalelor prin rularea cu bile.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1963, **IX (XIII)**, *1—2.*
2. Папшев Д. Д., *Увеличение долговечности деталей формированием остаточных напряжений при упрочняющем обкатывании.* Вестник машиностроения, 1966, *12.*
3. Браславский В. М., *Технология обкатки крупных деталей роликами.* Изд. Машиностроения, М., 1966.
4. Grozinskaia Z. P., *Durificarea superficială a metalelor prin rulare cu bile.* În culegerea *Calitatea suprafeţelor pieselor de maşini.* I.D.T., Buc., 1960 (trad. din l. rusă).
5. Шиф И. М., *Влияние удельных давлений роликов на характеристики упрочнения и качество поверхности деталей.* В сб. *Упрочнения деталей машин механическим наклепыванием.* Изд. Наука, М., 1965.
6. *** *Realizări actuale în domeniul prelucrării metalelor prin deformare la rece.* I.D.T., Buc., 1956.

ВЛИЯНИЕ ПОВЕРХНОСТНОГО ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ОБКАТКОЙ ШАРИКАМИ НА УСТАЛОСТНУЮ ПРОЧНОСТЬ

(Резюме)

Изучается влияние поверхностного упрочнения обкаткой шариками на усталостную прочность образцов из качественной углеродистой стали.

Заключается что:

а) Увеличение среднего удельного давления шарика на поверхность образцов привело к повышению предела выносливости на 15% (максимальное полученное повышение).

б) Относительно небольшое повышение предела выносливости объясняется относительно небольшом давлением обкатки, использованном в экспериментах.

в) Дальнейшие исследования посвящены к определению оптимальных режимов обкатки шариками, для достижения максимальной эффективности упрочнения с точки врения увеличения усталостной прочности.

Объяснение рисунков

Рис. 1. — Образец для испытания на усталостную прочность плоскостным изгибом.

Рис. 2. — Усталостная кривая для необкатанных образцов.

Рис. 3. — Усталостная кривая для обкатанных образцов (среднее удельное давление обкатки $q_m = 102{,}5$ кг/мм²).

Рис. 4. — Усталостная кривая для обкатанных образцов (среднее удельное давление обкатки $q_m = 126{,}5$ кг/мм²).

Рис. 5. — Усталостная кривая для обкатанных образцов (среднее удельное давление обкатки $q_m = 138$ кг/мм²).

Рис. 6. — Зависимость усталостной прочности от среднего удельного давления.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

C D. 6 (09)

SCURTĂ SCHIŢĂ A EVOLUŢIEI ISTORIEI ÎNVĂŢĂMÎNTULUI MECANICII ÎN ROMÂNIA

Nota I

ÎNCEPUTURILE MECANICII ÎN ROMÂNIA

DE

IGOR IVANOV

Deşi preocupările şi cercetările ştiinţifice sistematice în domeniul mecanicii teoretice în România se plasează abia la începutul secolului al XIX-lea, odată cu organizarea şcolii tehnice româneşti, preocupări sporadice au existat şi mai devreme.

Poziţia geografică a ţării noastre, în drumul invaziilor popoarelor migratoare, şi urmările datorite războaielor, distrugerilor, incendiilor şi stăpînirii străine, au influenţat negativ întreaga dezvoltare economică, socială şi culturală a ţării şi au şters în mare măsură mărturiile referitoare la preocupările ştiinţifice mai vechi.

Avînd în vedere însă existenţa, pe teritoriul patriei noastre, chiar din perioada incipientă a formării poporului român, a unei tehnici destul de avansate (tehnica minieră, ceramică, morărit etc.), nu ne putem îndoi că au existat preocupări în domeniul mecanicii, legate direct de aplicaţiile ei, de necesităţile construcţiilor şi funcţionării diferitelor mecanisme impuse de practica şi tehnica timpului.

Dacii aveau cunoştinţe de mecanică, dacă ţinem seama că foloseau pîrghiile, planul înclinat, scripeţii etc. la construcţii de cetăţi şi fortificaţii, unde au folosit metode constructive şi soluţii tehnice originale, sau în tehnica militară unde au realizat ingenioase maşini de război.

Dacii au avut de asemenea şi preocupări ştiinţifice legate de astronomie, care presupun cunoştinţe elementare de fizică şi mecanică.

Toate aceste îndeletniciri se intensifică în epoca sclavagistă romană cînd romanii, contribuind la formarea poporului român, introduc spiritul practic ingineresc, specific lor, şi crează pe teritoriul ţării, prin şosele, construcţii militare şi civile (apeducte, băi, poduri, castre etc.) mărturii necontestate ale unei tehnici avansate, care au contribuit la adîncirea deprinderilor legate de practică, tehnică şi implicit de mecanică.

În perioada care cuprinde intervalul de timp între retragerea romanilor din Dacia în timpul lui Aurelian (271—275) şi pînă la închegarea primelor voievodate ca forme statale (sec. XIV), în condiţiile trecerii spre feudalismul timpuriu, factorii economici, sociali şi politici au influenţat negativ asupra dezvoltării culturale şi ştiinţifice a ţării, împiedicînd ridicarea ei la nivelul altor ţări ale Europei, deşi şi în această epocă se constată o dezvoltare a îndeletnicirilor şi tehnicilor de acum existente, îmbogăţirea terminologiei cu noi termeni etc.

După formarea principatelor, în condiţiile orînduirii feudale, cerinţele de cultură şi tehnică cresc pe măsura lărgirii bazei economice; în această epocă se dezvoltă şi se multiplică şcolile, apar primele tipărituri, lucrări originale în manuscris.

În această epocă domnitorul Despot Vodă sau Iacob Heraclid (1561—1563) întemeiază o bibliotecă de curte la Suceava (1562 sau 1563), un colegiu academic la Hîrlău (1558), apoi (1562) la Cotnari, de fapt o *Schola latină*, sub conducerea învățatului Ioan Sommer.

Necesitățile bisericilor catolică sau reformată (în Transilvania) sau „apărarea ortodoxiei în contra ereziilor" (în Moldova și Muntenia), nevoia de cadre didactice, de ingineri hotarnici, dar evident întotdeauna pentru satisfacerea necesităților orînduirii feudale, au impus reorganizarea sau înființarea unor școli superioare denumite după uzanța din Occident — Academii.

Organizarea acestor Colegii sau Academii poartă influența organizatorilor, a relațiilor și a legăturilor statale și religioase: Occidentală, germană după modelul **universității din Heidelberg (în Transilvania), a Academiei** din Kiev (în Moldova), a universității din Padova și apoi din Halle (în Muntenia).

În Transilvania se intenționează (1557) să se înființeze de către Ioan Sigismund o școală superioară calvină sub conducerea lui Pierre de la Ramée (Petrus Ramus), iar mai tîrziu (1581) se înființează la Cluj de către Ștefan Bathory universitatea catolică, închisă (1603) de către reformați, care deschid (1622) la inițiativa lui Gabor Bethlen o universitate la Alba Iulia *(Collegium Bethlenianum)*.

În aceste colegii și universități, ca și în alte țări ale Europei, în cadrul cursurilor de filozofie aristotelică se preda pînă în sec. XVII și fizica aristotelică, adică probleme generale filozofice asupra mișcării, spațiului, timpului etc., probleme care interesează și mecanica.

Astfel de cursuri au fost predate la Colegiul Bethlenian din Alba Iulia de Johann Heinrich Alsted (Alstedius) (1588—1638) autor a peste 60 de lucrări printre care *Methodus admirandorum mathematicorum...* (Herborn-Nassau, 1613) retipărită într-o lucrare enciclopedică *Scientiarum omnium Encyclopedia septem tomis distincta* (Herborn, 1630), de J. H. Bisterfeld care preda matematica și fizica (1632—1653) și al cărui curs a servit apoi ca model și pentru alte cursuri predate la noi și de András Pocrsalmi, care a predat fizica la Colegiul reformat din Cluj.

Numai mai tîrziu, treptat, și la început în paralel cu fizica lui Aristotel, modificată de necesitățile propagandei religioase protestante, au început să se predea și elemente de fizică a lui Descartes după apariția monumentalei sale opere *Principia philosophiae* (Amsterdam, 1644) și apoi, ulterior, au început să se răspîndească și elemente de fizică și mecanică ale lui Newton, Gassendi, Rohault, Leibniz și alții.

Un astfel de cartezianism modificat și simplificat a avut totuși o mare influență contribuind la dezvoltarea interesului pentru științele naturii.

Elemente de fizică și mecanică carteziană pătrund pe teritoriul nostru prin foștii studenți ai universităților din Elveția, Germania, Anglia și mai ales Olanda, deveniți cadre didactice la liceele și colegiile reformate care au predat fizica după lucrările lui Descartes sau ale adepților lui Descartes, de multe ori îmbunătățite și adaptate. O astfel de lucrare, după care s-au predat la noi elemente de fizică carteziană, a fost lucrarea *Fundamenta Physices* (Utrecht, 1646) datorită lui Henricus Regius (Henri Le Roy) (1598—1679), profesor la Universitatea din Utrecht, după aprecierea lui K. Marx, inițiatorul filozofiei care avea să ducă la materialismul francez al secolului al XVIII-lea.

Considerațiile de statică ale lui Regius sînt reproduse după o altă lucrare a lui Descartes, un mic tratat de statistică *Explication des engins par l'ayde desquels on peut avec une petite force lever un fardeau fort pesant* (1637), în care se tratează echilibrul mecanismelor pe baza unei teorii apreciate de principiul lucrului mecanic virtual.

În această perioadă fizica este predată la Alba-Iulia, și apoi la Cluj de Apáczai Cseri János (1625—1659) autorul unei lucrări enciclopedice însumînd cunoștințele epocii din cele mai variate domenii, printre care fizica, astronomia etc. și a unui curs *Philosophia Naturalis Cl. John Cheri Apaci*, care conține

elemente de fizică carteziană (legile mișcării, proprietățile corpurilor, conservarea cantității de mișcare, legile ciocnirii etc.), luate după Descartes și Regius.

În același timp elemente de fizică carteziană se predau după Regius de Enyedi Sámuel (1627—1671) la Colegiul reformat din Aiud, așa cum se vede dintr-un manuscris al fostului său elev Pápai Páriz Ferenc: *Physica seu Philosophia Naturalis qvam ex Professione, clarissimi ac Doctissimi Dni Samueli Enyedi Md. Doctoris in hanc seriem delineavit A. 1665. In coll. N. Enyediensi Franciscus Pápai.*

Elemente de fizică se predau apoi de Pápai Páriz Ferenc (1649—1716), la Aiud, și de Kaposi Sámuel la Tg. Mureș.

În această epocă demn de menționat este un manuscris coligat din care primele două părți distincte, aparținînd începutului secolului al XV-lea, conțin elemente de mecanică cu referire la mașini simple, iar partea III, *Cartea de artă*, manuscris datorat lui Conrad Haas, guard de geniu al orașului Sibiu din 1529, este important pentru preocupările teoretice și practice ale autorului legate de mecanică, zborul reactiv și altele.

La Academiile domnești înființate la București (1640 sau 1644) și Iași (1714 sau 1716), în scopul „apărării ortodoxiei împotriva ereziilor" dar și pentru satisfacerea necesităților orînduirii feudale, care aveau un caracter general filozofic, ia naștere un curent filozofic neoaristotelic grecesc, cu elemente umaniste, dar cu serioase limitări teologice ortodoxe.

În aceste condiții la Academia domnească din București, cunoscutul medic la curtea lui Constantin Brîncoveanu, geograf și filozof Ion Comnen, preda printre alte discipline și „științe fizice". Mai tîrziu, cînd sub influența necesităților social-culturale și politice precum și a convingerii că „o academie fără epistimuri este moartă" academia se reprofilează, se predau elemente de „fizică coridaleană" după lucrările lui Teofil Corydaleu (1563—1646), un remarcabil gînditor cu vădite tendințe materialiste, o fizică neoaristotelică sau alexandriană în prelucrarea filozofului Cesare Cremonini (1550—1631), profesorul lui Corydaleu la Universitatea din Padova.

Sub forma de fizica coridaleană, elemente de fizică și mecanică au fost predate de Sebastos Kymenitis din Trapezunt, Alexandru Papanastasi, Nicolae Kerameos (1660—1665) și Teodor din Trapezunt.

Alături de fizica lui Corydaleu au circulat și alte „fizici", ca *Filozofia fizică* a lui Ioan Scotus, o lucrare a lui Martin intitulată *Curiozități și alegeri din deosebite științe*, sau ca manuscrisul *Conspect al fizicii* ce a aparținut lui Ion fiul lui Simeon din Trapezunt.

Prin hrisovul domnesc al lui Al. Ipsilanti (1776) învățămîntul era prevăzut cu 4 etape, iar la cel superior se preda fizica, „urmînd pe Aristotel și discipolii săi greci", și astronomie.

Treptat, sub influența noilor cuceriri ale științei, fizica lui Corydaleu cade în desuetudine astfel că spre sfîrșitul secolului al XVIII-lea, ea nu se mai predă, întîi la Iași (1763) apoi la București (1788).

Aceasta se datorește faptului că în această perioadă, în orizontul cunoștințelor de mecanică încep să pătrundă și apoi să se consolideze printr-un proces de înfiltrare și asimilare lent și greu, elemente de mecanică newtoniană, ca urmare a apariției monumentalei lucrări a lui Isaac Newton: *Philosophiae naturalis principia mathematica* (Londra, 1687), baza astronomiei, fizicii și mecanicii clasice, considerată de J. L. Lagrange „cea mai mare creație a minții omenești".

Acum se remarcă la Iași și București, Nicolae Chiriac Cercel, profesor la Iași (1760—1773), considerat la noi primul profesor de fizică experimentală și teoria gravitației, autor al unor lucrări manuscrise de fizică experimentală și matematici aplicate, traducător al unei părți din opera lui Newton.

Acela care prezintă pentru evoluția fizicii și mecanicii în țara noastră, un interes deosebit, este însă Nichifor Theotokis (1736 sau 1738—1800) autorul unei cunoscute lucrări *Stoicheia fysikis...* (Elemente de fizică) în două volume

tipărite la Leipzig (1766—1767), un amestec din fizica lui Descartes și fizica lui Newton. Elemente de fizică se predau apoi la Academiile domnești de către Iosif Mesiodax, autor al unor *Însemnări fizice* (1784), Zerzulis și Govdelas, cunoscuți matematicieni, de către Manasse Eliadis, Constantin Vardallah (1775—1830), autor al unei lucrări de fizică experimentală, Panaite Sinopeus, Lambru Fothiade și Neofit Duca, director al Academiei Domnești și autor al unui manual de fizică. *Epitomi fisikis* (Rezumat de fizică).

În ultimul deceniu al sec. al XVIII-lea întîlnim o lucrare în manuscris, *Gheografie nouă care cearcă de obște toată fața a sferei idroghiu*, o traducere făcută în Moldova în jurul anului 1780 care conține elemente de mecanică newtoniană, și o altă lucrare, o introducere elementară în științele naturii intitulată *Gramatica fizicii*, o traducere din italiană făcută în Moldova pe la 1790.

O altă copie a acestei traduceri, identificată la Kiev, poartă titlul întreg: *Critica de la învățătura fizicii, scoasă de pe limba italienească pre limba moldovenească, întru care se cuprinde tot ceea ce omul voiește a ști și a învăța în cer și pe pământ din lucrările cele mai cunoscute și mai trebuincioase. Anul 1796, april 10*, și este probabil opera episcopului Amfilohie Hotiniul, care tipărește la Iași *De obște gheografie* (Iași, 1795) și *Elementi aritmetice arătate firești* (Iași, 1795), traduceri din limba italiană.

Manuscrisul este important pentru că reprezintă prima expunere în românește, cunoscută pînă acum, a problemelor de fizică și de mecanică și în acest sens o primă încercare de stabilire a unei terminologii în acest domeniu, dar în special pentru faptul că este prima lucrare din Moldova care prezintă legile mecanicii clasice formulate de Newton.

În acest timp în Transilvania se remarcă Szathmári Mihály, profesor la Tg. Mureș, autor al unui manual didactic *Physica contracta juxta principia neutericorum* (Cluj, 1719) bazat pe fizica lui Rohault, un amestec din fizica lui Descartes și Newton, Vásárhelyi Töke István, profesor la colegiul reformat din Aiud, autor al unei lucrări de fizică carteziană *Institutiones philosophiae naturalis dogmatico-experimentalis* (Sibiu, 1736) în care apar elemente de fizică ale lui Leibniz și Newton, Paul Sipoș (1759—1816), profesor de fizică și matematică (1783—1787) la colegiul din Orăștie.

La *Seminarul de la Socola*, prima școală cu organizare modernă din punct de vedere didactic, doctorul Anton Velini, predă fizica și chimia introducînd în cursul predării și lucrări experimentale.

Spre sfîrșitul perioadei, care va fi marcată de înființarea primelor școli inginerești în România, la academiile domnești întîlnim profesori de științe care predau elemente de mecanică sau fizică cu elemente de mecanică cum sînt: Dimitrie Panaiotache Gobdelas (1775—1831), profesor și ultimul director al Academiei Domnești de la Iași (1808—1811 și 1816—1821), iar după el Ștefan Dungas, care a predat (1813) fizica și matematica. În această perioadă, predarea fizicii și mecanicii se face pe bază de lucrări clasice străine cum este aceea a lui Christian Fr. Wolff, filozof și matematician la Universitatea din Halle, cunoscut prin participarea sa la disputa asupra unor noțiuni fundamentale din fizică, angajată între cei mai mari fizicieni ai secolului al XVIII-lea. Elemente de fizică și mecanică s-au predat după una din lucrările sale *Auszug aus den Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften* (Halle, 1713, ed. X., Halle, 1772) în traducerea prescurtată a lui S. Pataky, profesor la liceul reformat din Cluj și publicată la Cluj în 1773 sub titlul: *Compendium elementorum matheseos in usum studiosae juventutis adonatum...*

Lucrarea enciclopedică a lui Wolff a stat și la baza elaborării cursului de mecanică predat la Iași de către Dimitrie Panaiotache Gobdelas.

Se cunoaște de asemenea, după Wolff, manuscrisul manualului de fizică predat în Transilvania, *Institutiones physicae* (1775), de către Verestói György, profesor la colegiul de la Cluj, elevul cunoscutului astronom clujean M. Hell (1720—1792), ulterior profesor de mecanică la Universitatea din Viena. Verestói a elaborat o teorie electrică a fulgerului și trăznetului și o teorie atomică a materiei.

De asemenea Kovács József, profesor de matematică la Colegiul din Aiud și Cluj, a predat fizica și mecanica după lucrarea *Elementa philosophia naturalis* (1774) care se întemeiază pe opera lui Johann Gottlieb Krüger (1715—1759): *Naturlehre* (Halle, 3 vol., 1740—1749), lucrare care a fost tradusă de J. D. Krull sub titlul de *Philosophia naturalis experimentis combinata* (Halle, 1753).

Popularizarea cunoștințelor de fizică și mecanică este realizată în această perioadă și de Gh. Șincai (1754—1816), unul din cei mai importanți corifei ai curentului progresist, de influență iluministă, care a fost *Școala Ardeleană*, într-o lucrare intitulată *Învățătura firească spre surparea superstițiilor poporului*, o prelucrare și adaptare după lucrarea *Volksnaturlehre zur Dämpfung des Aberglaubes*, a lui J. Helmuth (1732—1813), un popularizator al științelor naturii.

Evident au existat și alte lucrări de elemente de mecanică care au contribuit la consolidarea cunoștințelor, la ridicarea nivelului învățămîntului mecanicii. Așa este de exemplu, lucrarea în manuscris a lui Ioan Frederic Bucherer, intitulată *Fizica*.

Printre manuscrisele acestei epoci, care se referă la mecanică, avem de menționat de asemenea un manuscris datînd din 1801, intitulat *Elemente de fizică*, un altul *Rezumat de astronomie*, datînd probabil după 1777, ambele aparținînd bibliotecii Seminarului Veniamin Costache din Iași, precum și un manuscris miscelaneu, datînd din anii 1817—1818, care pe lîngă elemente de geometrie, meteorologie, conține un manuscris *Stoicheia fizikis* (Elemente de fizică) scris la Roman, datat 12 decembrie 1817.

În această perioadă avem de menționat o lucrare în manuscris fără titlu, în limba română, greacă și latină, care a aparținut lui Moses Gaster, copiat de Grigore Rimniceanu, după un manuscris al unui elev sau profesor de la Academia Domnească din București și care în afară de chestiuni de matematici cuprinde și unele chestiuni de mecanică.

În această perioadă elemente de mecanică se întîlnesc și în lucrarea *Dissertatio de vi insita* (Viena, 1778) a lui Murányi Ignacz (n. 1742), profesor de liceu la Carei, și care între 1777 și 1802 a predat fizica la Liceul academic din Cluj, după care a fost transferat (1804) la Seghedin, unde curînd după aceea a decedat.

Lucrarea sa este interesantă, fiindcă însușindu-și definiția lui Newton a **forței de inerție, Murányi** încearcă să dovedească împotriva leibnizienilor că forța de inerție nu provine din modificarea impenetrabilității materiei, nu este o forță fictivă ci o forță reală, ce există în natură.

Elemente de mecanică s-au predat în această perioadă și de Joan Zalitzky, profesor la Arad, așa cum rezultă dintr-un manuscris de curs de fizică, datînd din anul școlar 1816/1817, care a aparținut lui Alexandru Gavra (1797—1884), absolvent al Academiei de drepturi din Oradea, profesor (1821—1876) de matematici, fizică, istorie etc. la preparandia din Arad, ulterior școală normală.

Manuscrisul purtînd titlul *Institutiones phisicae, historiae naturalis et oeconomia ruralis* conține lecții de fizică, incluzînd elemente de mecanică, de astronomie fizică, de geografie, de electricitate etc.

Interesantă este și o altă lucrare de fizică în manuscris, care conține elemente de mecanică, datorată lui Stephan Ujlaky. Manuscrisul este datat 12 ianuarie 1826.

Spre sfîrșitul acestei perioade mai avem de menționat pe Farkas Bolyai (1775—1856), care re remarcă printr-o îndelungată activitate didactică și științifică (1804—1851) la catedra de matematici și fizică la Colegiul reformat din Tg. Mureș.

Se face cunoscut în special prin lucrarea sa *Tentamen juventutem Studiosam in elementa matheseos purae introducendii* (Budapesta, 2 vol., 1832—1839), în care în volumul I se găsesc exemple de aplicarea calculului diferențial în mecanică.

Din această scurtă încercare de sinteză asupra începuturilor mecanicii în țara

noastră, rezultă că și pînă la 1821, cînd începe perioada modernă a istoriei noastre și se semnalează existența unor cunoscuți mecanicieni, au existat preocupări de mecanică în învățămîntul nostru, dar datele pe care le posedăm sînt incomplete.

Primită la 18 VIII 1968 *Institutul de construcții, București*

BIBLIOGRAFIE

1. Bălan Șt., Ivanov I., *Din Istoria mecanicii.* Buc., 1966.
2. Marian V., *Introducerea mecanicii lui Newton în România.* Studia Universitatis Babeș-Bolyai, Series math-phys., 1967, *1*, pp. 79—83.
3. — *Dintr-un caiet de școală al lui Pápai Páriz Ferenz.* Studia Universitatis Babeș-Bolyai, Series math-phys., 1967, 2, pp. 123—132.
4. Andonie Gh. Șt., *Istoria matematicii din România.* Buc., 1966.

OUTLINE OF THE HISTORY OF TEACHING OF MECHANICS IN ROMANIA

Note 1
Beginning of the Mechanics in Romania

(Summary)

The author exposes in this first part of his research work the early period concerning the history of teaching of Mechanics in Romania.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

Construcţii. Hidrotehnică

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том XIV (XVIII), вып. 3—4, 1968

Строительство. Гидротехника

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

Constructions. Hydrotechnics

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

D. C. 531.3124.

COMPLEX LINEAR OSCILLATING SYSTEMS

BY

JAROSLAV KOŽEŠNIK

1. Introduction

Let $\vec{y}$ be the position vector of a system determined by matrices $\vec{M}$, $\vec{R}$, $\vec{K}$. The system is influenced by the external exitation $\vec{p}_0 e^{j\omega t}$. Than the following equation holds

$$\vec{M}\vec{y}'' + \vec{R}\vec{y}' + \vec{K}\vec{y} = \vec{p}_0 e^{j\omega t}. \tag{1}$$

The co-ordinates of the vector $\vec{p}_0$ are supposed to be time-invariant. The equation (1) describes forced oscillations of the system. If only particular solution is to be found, we can substitute

$$\vec{y} = \vec{y}_0 e^{j\omega t}, \tag{2}$$

where the co-ordinates of $\vec{y}_0$ are also time-invariant. In this way we obtain

$$(-\omega^2\vec{M} + j\omega\vec{R} + \vec{K})\vec{y}_0 = \vec{p}_0. \tag{3a}$$

If we denote

$$\mathcal{A} = -\omega^2\vec{M} + j\omega\vec{R} + \vec{K},$$

it is obvious that

$$\vec{y}_0 = \mathcal{A}^{-1}\vec{p}_0. \tag{3b}$$

In the case of a complex system the matrix-inversion $\mathcal{A}^{-1}$ can be cumbersome. No numerical difficulties arise only when $\vec{R}$ is a linear combination of matrices $\vec{M}$ and $\vec{K}$

$$\vec{R} = \alpha\vec{M} + \beta\vec{K}. \tag{4}$$

It is the case of so called proportional damping. If $\vec{e}_i$ are all independent characteristic vectors of the homogenous problem (principal modes of oscillations) [1]

$$\bar{M}\bar{\dot{y}} + \bar{K}\bar{y} = 0 \tag{5}$$

corresponding to n natural frequencies Ω_i of the undamped system, than as it is well known

$$\bar{y}_0 = \sum_{i=1}^{n} C_i \bar{e}_i, \tag{6}$$

where

$$C_i = \frac{\bar{e}_i \bar{p}_0}{-\omega^2 \bar{e}_i M e_i + j\omega \bar{e}_i R e_i + \bar{e}_i K e_i} = \frac{\bar{e}_i p_0}{-\omega^2 M_{i\,\mathrm{red}} + j\omega R_{i\,\mathrm{red}} + K_{i\,\mathrm{red}}}. \tag{7}$$

It is necessary to suppose the matrices $\bar{M}$, $\bar{R}$, $\bar{K}$ are diagonaly symmetrical or diagonal. But even in this case the equations (6), (7) hold only when the condition (4) is fulfilled. The quantities $M_{i\,\mathrm{red}} = \bar{e}_i \bar{M} e_i$ and similarly $R_{i\,\mathrm{red}}$, $K_{i\,\mathrm{red}}$ represent the transformed masses, transformed damping and rigidities. The outlined procedure tranforms a complex system into n systems of one degree of freedom.

2. Unproportional Damping

When the condition (4) is not fulfilled, the equations (6), (7) are not valid. But even in this case this method can be applied to obtain an approximation if the damping is only slightly different from the proportional. Let us write the general equation (3 a) in the following form

$$\{-\omega^2 \vec{M} + j\omega(\vec{R}_{\mathrm{prop}} + \varkappa \vec{R}) + \vec{K}\}\vec{y}_0 = \vec{p}_0. \tag{8}$$

Let us denote

$$-\omega^2 \vec{M} + j\omega \vec{R}_{\mathrm{prop}} + \vec{K} = \mathcal{A}. \tag{8 a}$$

The matrix $\varkappa \vec{R}$ indicates the difference between actual and proportional damping. For this moment let us consider the coefficient $\varkappa$ to be arbitrarily small. In accordance with the accepted notation it is obvidious that

$$(\mathcal{A} + \varkappa j\omega \vec{R})\vec{y}_0 = \vec{p}_0. \tag{9}$$

Let us set again $\vec{y}_0 = \sum C_i \vec{e}_i$. Then it holds

$$\mathcal{A} \sum_i C_i \vec{e}_i + \varkappa j\omega R \sum_i C_i \vec{e}_i = \vec{p}_0.$$

After left-side-multiplication of this equation by the vector $\vec{e}_k^T$, $(k = 1, 2, ..., n)$, it will hold according to the orthogonality properties of $\vec{\mathcal{A}}$

$$C_k \vec{e}_k^T \vec{\mathcal{A}} \vec{e}_k + \varkappa j\omega \sum_{i=1}^{n} C_i \vec{e}_k^T \vec{R} \vec{e}_i = \vec{e}_k^T \vec{p}_0. \tag{10}$$

Let us formally expand C_i into the series

$$C_i = C_{0i} + \varkappa C_{1i} + \varkappa^2 C_{2i} + \ldots \tag{11}$$

After substitution in (10) it will be

$$\begin{cases} (C_{0k} + \varkappa C_{1k} + \varkappa^2 C_{2k} + \ldots) \vec{e}_k^T \vec{\mathcal{A}} \vec{e}_n + \varkappa j\omega \sum_i (C_{0i} + \varkappa C_{1i} + \varkappa^2 C_{2k} + \ldots), \\ \vec{e}_k^T \vec{R} \vec{e}_i = \vec{e}_k^T \vec{p}_0. \end{cases}$$

Having arranged the terms according to the powers of $\varkappa$ we obt in

$$\begin{cases} \text{a)} \; C_{0k} \vec{e}_k^T \vec{\mathcal{A}} \vec{e}_k = \vec{e}_k^T \vec{p}_0, \\ \text{b)} \; C_{1k} \vec{e}_k^T \vec{\mathcal{A}} \vec{e}_k = -j\omega \sum_i C_{0i} \vec{e}_k^T \vec{R} \vec{e}_i, \\ \text{c)} \; C_{2k} \vec{e}_k^T \vec{\mathcal{A}} \vec{e}_k = -\omega \sum_i C_{1i} \vec{e}_k^T \vec{R} \vec{e}_i \text{ etc.}; \end{cases} \tag{12}$$

according to (11) setting $\varkappa = 1$ we can obtain as the first approximation

$$C_k = \frac{\vec{e}_k^T \vec{p}}{\vec{e}_k^T \vec{\mathcal{A}} \vec{e}_k^T} - \frac{j\omega}{\vec{e}_k^T \vec{\mathcal{A}} \vec{e}_k} \sum \frac{\vec{e}_i^T \vec{p}}{\vec{e}_i^T \vec{\mathcal{A}} \vec{e}_i} \left(\vec{e}_k^T \vec{R} \vec{e}_i \right). \tag{13}$$

Then the sought for vector $\vec{y}_0$ is approximately

$$\vec{y}_0 = \sum_{k=1}^{n} C_k \vec{e}_k. \tag{13 b}$$

Such calculation is also labourious but no doubt easier than the direct calculation according to (3 b). It is often sufficent to use (13) for judgement on the magnitude of the necessary corrections only.

3. Approximate Calculation of Forced and Free Oscillations if Several Linearly Vectors are Known

Let us consider again the problem

$$\mathcal{L} - y_0 e^{j\omega t} = p_0 e^{j\omega t}. \tag{14}$$

Let the square matrix depend on the exciting frequency ω and have real and imaginary parts

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathrm{j}\mathcal{L}_{-1}.$$

It consists of n rows and n columns $(n \times n)$.

Let us suppose to have $m \ll n$ independent vectors $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_m$. These vectors $\vec{y}_i$ may for instance satisfy the equation of free oscillations without any damping $\mathcal{L}_0 \vec{y}_i = 0$. Or they may be the vectors of independent static deformations of the given system, each of them is caused by only one force or momentum applied in the point where one of the significant masses of the system is concentrated [2]. The number of these independent vectors should be the same as the number of the masses, but it can be considerably lower when calculating only approximately. However it is important for the deformation vectors to be linearly independent and to give a true picture of the motion of system. If the vectors have been suitably chosen so that for certain constants C_i we have with sufficient accuracy

$$\vec{y}_0 = C_1 \vec{y}_1 + \ldots + C_m \vec{y}_m, \tag{15}$$

we may use them for the approximate solution of the equation (14).

First let us write (15) in the form:

$$\vec{y}_0 = \left| \vec{y}_1 ; \vec{y}_2 ; \ldots ; \vec{y}_m \right| \left| \begin{matrix} C_1 \\ \vdots \\ C_m \end{matrix} \right| = \vec{\mathcal{D}}\vec{C} \tag{16}$$

and substitute for $\vec{y}_0$ in (14). Then it will be approximately

$$\vec{\mathcal{L}}\vec{\mathcal{D}}\vec{C} = \vec{p}_0, \tag{15 a}$$

(the dimensions are: $\vec{\mathcal{L}} - n \times n$, $\vec{\mathcal{D}} - m \times m$, $\vec{C} - m \times 1$).

Let us denote $\vec{\mathcal{L}}\vec{\mathcal{D}} = \vec{\varkappa}$. The dimension of $\vec{\varkappa}$ is $m \times n$.

It is not possible to determine $\vec{C}$ from the relation

$$\vec{\varkappa}\vec{C} = \vec{p}_0 \tag{16}$$

(because we have n equations for $m < n$ unknown).

However if we require the equation (16) to be fulfilled in the sense of minimal squares of residuals, then we have to solve the equation

$$\vec{\varkappa}^T \vec{\varkappa}\vec{C} = \vec{\varkappa}^T \vec{p}_0. \tag{17}$$

This equation enables to find $\vec{C}$ as the inversion of the matrix $\vec{\varkappa}^T\vec{\varkappa}$ exists $(m \times n)$:

$$\vec{C} = (\vec{\varkappa}^T.\vec{\varkappa})^{-1}\varkappa^T p_0. \tag{18}$$

The matrix $\varkappa$ depends on ω. Having calculated the inversion of the symmetrical matrix $(\vec{\varkappa}^T.\vec{\varkappa})$ it is $(\vec{\varkappa}^T.\vec{\varkappa})^{-1} = \vec{F}(\omega)/\Delta(\omega)$ and in accordance with (18)

$$\vec{C} = \frac{\vec{F}(\omega)}{\Delta(\omega)}\varkappa^T(\omega)\vec{p}_0. \tag{19}$$

The matrix $\vec{F}(\omega)$ is adjugate to $(\vec{\varkappa}^T\vec{\varkappa})$ and therefor it is symmetrical. $\Delta(\omega)$ is the determinant of the matrix product $(\vec{\varkappa}^T\vec{\varkappa})$.

If the system is undamped the condition $\Delta(\omega) = 0$ yields m approximate values of natural frequencies and the corresponding modes of oscillations can be expressed as a linear combinations of the auxiliary vectors $\vec{y}_i$. The outlined procedure of approximate calculation is suitable for practical use especially when the frequency of excitation ω is lower than the lowest natural frequency Ω_1. Than the number m of auxiliary independent vectors may be small and it is possible to base the calculation upon static deformations. When the exciting frequency is high, e. g. $\Lambda_{n-1} < \omega < \Lambda_n$, ($\Lambda_{n-1}$, Λ_n are two neighbour natural frequencies), we must have at our disposal such auxiliary vectors that are near to the mode of the oscillation corresponding to Λ_{n-1}, Λ_n respectively. If this condition were not fulfiled the result of the calculation could not give a satisfactory approximation especially when m is a small number. With increasing m the number of necessary numerical operations increases rapidly.

4. Approximate Calculation of the Amplitudes for a Slightly Damped System in the Resonance

We start again with the equation of forced oscillations

$$(\mathcal{A}_0 + \mathrm{j}\omega R)\vec{y}_0 = \vec{p}_0, \quad (\mathcal{A}_0 - \text{without damping}). \tag{20}$$

Further let $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ represent all principle modes of the oscillation and $\Lambda_0, \ldots, \Lambda_n$ be corresponding natural frequencies of the system described by $\mathcal{A}_0 e = 0$.

Let us write

$$\vec{y}_0 = \sum_{i=0}^{n} C_i \vec{e}_i. \tag{21}$$

We suppose that the exciting frequency $\omega = \Omega_0$ in other words we suppose the case of the resonance. Than

$$C_k \vec{e}_k^T \mathcal{A} \vec{e}_k^T + \vec{e}_k^T \mathrm{j}\omega \sum_{i=0}^{n} RC_i \vec{e}_i = \vec{e}_k^T \vec{p}_0$$

holds for all vectors $\vec{e}_k$ except to $\vec{e}_0$.

If the damping is small it is possible to neglect the second term on the left-hand side. Hence it holds for all $i = 1,2,...,n$ (except to $i = 0$!) approximately

$$C_i = \frac{\vec{e}_i^T \vec{p}_0}{\vec{e}_i^T \mathcal{A} \vec{e}_i}. \tag{22}$$

As $C_0 \vec{e}_0^T \mathcal{A} \vec{e}_0 = 0$ the following equation is valid for the resonance frequency Λ_0 and the corresponding constant C_0:

$$\vec{e}_0^T \mathrm{j}\omega \sum_{i \neq 0} RC_i \vec{e}_i = \vec{e}_0^T \vec{p}.$$

It is obvious that

$$\mathrm{j}\omega C_0 \vec{e}_0^T R \vec{e}_0 + \mathrm{j}\omega \vec{e}_0^T \sum_{i \neq 0} C_i \vec{e}_i = \vec{e}_0^T \vec{p}.$$

Substituting an approximate expression (22) for C_i we obtain

$$C_0 = \frac{\vec{e}_0^T \vec{p}}{\mathrm{j}\omega \vec{e}_0^T R \vec{e}_0} - \frac{\vec{e}_0^T}{\vec{e}_0^T R \vec{e}_0} \sum_{i \neq 0} R \vec{e}_i \frac{\vec{e}_i^T \vec{p}}{\vec{e}_i^T \mathcal{A} \vec{e}_i}. \tag{23}$$

Having evaluated C_i and C_0 from (22), (23) we set them into (21) and obtain an approximate solution. Usually C_0 prevails over all other C_i. Than also the terms with $C_i, ..., C_n$ can be omitted in (21). Also the second (correcting) terms in (23) is usually very small and thus a rough approximation is

$$C_0 = \frac{\vec{e}_0^T \vec{p}}{\mathrm{j}\omega \vec{e}_0^T R \vec{e}_0}.$$

Received the 15 I 1968

Czechoslovak Academy of Science, Prague

REFERENCES

1. Kožešnik J., *The Amplitude Calculation in the Damped Linear System.* Acta Technica ČSAV, 1966, *1*, p. 1.
2. — *The Computation of Vertical Frequencies based upon Independent Deformations.* Acta Technica ČSAV, 1960, *6*, p. 503.

SISTEME OSCILANTE LINIARE COMPLEXE

(Rezumat)

Se studiază sisteme oscilante liniare complexe, făcînd în prealabil o transformare adecvată în n sisteme cu cîte un grad de libertate.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

C. Z. 624.07

REZOLVAREA STRUCTURILOR SPAŢIALE ARTICULATE PRIN MATRICI DE TRANSFER

DE

ANTON ŞESAN, ADRIAN VULPE, N. TUTOŞ şi FLORIN MACAVEI

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 28—30 septembrie 1967

1. Introducere

Metodele de rezolvare a structurilor spaţiale, folosite în proiectare, s-au elaborat în ideea unui calcul fără folosirea maşinilor cifrice. Ipotezele simplificatoare ce se fac — desfacerea în structuri plane — conduc la rezultate cu un anumit grad de aproximaţie.

Calculul spaţial, în forma directă de exprimare matricială a metodei forţelor sau a deformaţiilor, conduce la un sistem cu un număr mare de ecuaţii.

Folosirea „matricilor de transfer" în rezolvarea sistemelor articulate spaţiale reduce considerabil ordinul matricii de inversat, făcînd posibilă soluţionarea problemei la maşini de performanţă redusă.

Modul de rezolvare prezentat aici se bazează pe noţiunea de „tronson" sau „unitate" a structurii.

Unitatea, reprezentată în fig. 1, constă din n feţe laterale şi una transversală. Feţele laterale sînt $A_1^{r-1}\ A_2^{r-1}\ A_2^r\ A_1^r,\ldots,A_n^{r-1}\ A_1^{r-1}\ A_1^r\ A_n^r$, iar faţa transversală conţine nodurile $A_1^r, A_2^r,\ldots,A_n^r$. Nodurile unităţii r, în număr de n, sînt cele din dreapta ei.

Structura fiind articulată, pentru fixarea în spaţiu a fiecărui nod sînt necesare trei bare. Forţele axiale ale barelor strict necesare asigurării nedeformabilităţii le vom include în „matricea forţelor" unităţii r:

$$F_r = \begin{bmatrix} f_{r1} \\ f_{r2} \\ \vdots \\ f_{rm} \end{bmatrix} = \{f_1\ f_2\ f_3 \ldots f_m\}_r, \quad \text{unde } m = 3n.$$

Forţele axiale ale celorlalte bare sînt cuprinse în „matricea forţelor hiperstatice" F_r'. Se aleg ca hiperstatice forţele axiale ale barelor feţei

transversale. Dacă aceasta are g bare în afara barelor de pe contur, atunci vor fi $n+g$ forţe hiperstatice pentru unitatea r:

$$F_r^* = \{f_1^* \; f_2^* \dots f_n^* \; f_{n+1}^* \dots f_{n+g}^*\}_r .$$

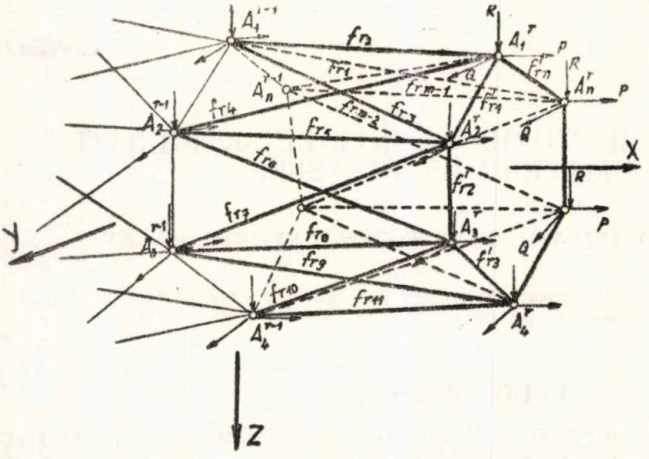


Fig. 1

Pentru forţele exterioare care acţionează asupra celor n noduri ale unităţii se introduce „matricea încărcărilor“:

$$P_r = \{P^{A_1} \; Q^{A_1} \; R^{A_1} \dots P^{A_n} \; Q^{A_n} \; R^{A_n}\}_r .$$

După încărcare, nodurile A_1^r, A_2^r,..., A_n^r, ale fiecărei unităţi, suferă cîte o deplasare, ale cărei componente le notăm cu u, v, w. „Matricea deplasărilor“ unităţii r va fi:

$$D_r = \{u^{A_1} \; v^{A_1} \; w^{A_1} \dots u^{A_n} \; v^{A_n} \; w^{A_n}\}_r .$$

„Vectorul de stare“ Z_r al unităţii r cuprinde matricea-coloană F_r a „forţelor“ şi matricea-coloană D_r a „deplasărilor“ unităţii r:

$$Z_r = \begin{Bmatrix} F_r \\ D_r \end{Bmatrix} .$$

O ecuaţie matricială liniară permite transferarea acestuia la unitatea $r+1$ astfel încît eforturile din toate barele structurii cît şi deplasările tuturor nodurilor se pot exprima funcţie de vectorul de stare al unităţii zero — componentele acestuia putînd fi determinate din condiţiile de margine.

2. Legătura dintre vectorii de stare a două unităţi consecutive

Pentru sistemele articulate spaţiale, legătura între vectorii de stare a două unităţi consecutive se realizează prin:

a) condiţiile de echilibru a celor n noduri comune, cît şi prin:

b) condiţiile de compatibilitate a deformaţiilor barelor cu deplasările nodurilor.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\lambda_2^r & 0 & -\lambda_4^r & 0 & 0\ldots0 & 0 & -\lambda_m^r \\ 0 & -\mu_2^r & 0 & -\mu_4^r & 0 & 0\ldots0 & 0 & -\mu_m^r \\ 0 & -\nu_2^r & 0 & -\nu_4^r & 0 & 0\ldots0 & 0 & -\nu_m^r \\ 0 & 0 & -\lambda_3^r & 0 & -\lambda_5^r & 0\ldots0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_3^r & 0 & -\mu_5^r & 0\ldots0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu_3^r & 0 & -\nu_5^r & 0\ldots0 & 0 & 0 \\ \cdots & & & & & & & \\ -\lambda_1^r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\ldots0 & -\lambda_{m-1}^r & 0 \\ -\mu_1^r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\ldots0 & -\mu_{m-1}^r & 0 \\ -\nu_1^r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\ldots0 & -\nu_{m-1}^r & 0 \end{bmatrix}}_{C_{f\cdot \mathrm{st.}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1^{r+1} & \lambda_2^{r+1} & \lambda_3^{r+1} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1^{r+1} & \mu_2^{r+1} & \mu_3^{r+1} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \nu_1^{r+1} & \nu_2^{r+1} & \nu_3^{r+1} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4^{r+1} & \lambda_5^{r+1} & \lambda_6^{r+1} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_4^{r+1} & \mu_5^{r+1} & \mu_6^{r+1} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_4^{r+1} & \nu_5^{r+1} & \nu_6^{r+1} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_{m-2}^{r+1} & \lambda_{m-1}^{r+1} & \lambda_m^{r+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \mu_{m-2}^{r+1} & \mu_{m-1}^{r+1} & \mu_m^{r+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \nu_{m-2}^{r+1} & \nu_{m-1}^{r+1} & \nu_m^{r+1} \end{bmatrix}}_{C_{f\cdot \mathrm{dr.}}} \begin{bmatrix} f_{r,1} \\ f_{r,2} \\ f_{r,3} \\ f_{r,4} \\ f_{r,5} \\ f_{r\,6} \\ \vdots \\ f_{r,m-2} \\ f_{r,m-1} \\ f_{r,m} \\ f_{r+1,1} \\ f_{r+1,2} \\ f_{r+1,3} \\ \vdots \\ f_{r+1,m-2} \\ f_{r+1,m-1} \\ f_{r+1,m} \end{bmatrix} +$$

$$(\mathrm{M}) \qquad + \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_{r,1}^* & 0 & 0 & \ldots & \lambda_{r,n}^* & \lambda_{r,n+1}^* & \ldots \\ \mu_{r,1}^* & 0 & 0 & \ldots & \mu_{r,n}^* & \mu_{r,n+1}^* & \ldots \\ \nu_{r,1}^* & 0 & 0 & \ldots & \nu_{r,n}^* & \nu_{r,n+1}^* & \ldots \\ \lambda_{r,1}^* & \lambda_{r,2}^* & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ \mu_{r,1}^* & \mu_{r,2}^* & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ \nu_{r,1}^* & \nu_{r,2}^* & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ \cdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\lambda_{r,n}^* & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\mu_{r,n}^* & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\nu_{r,n}^* & 0 & \ldots \end{bmatrix}}_{C_f^*} \underbrace{\begin{bmatrix} f_{r\,1}^* \\ f_{r,2}^* \\ f_{r,3}^* \\ \vdots \\ f_{r,n}^* \\ f_{r,n+1}^* \\ \vdots \\ f_{r\,n+h}^* \\ \vdots \\ f_{r,n+g}^* \end{bmatrix}}_{F_r^*} + \underbrace{\begin{bmatrix} P^{A_1^r} \\ Q^{A_1^r} \\ R^{A_1^r} \\ P^{A_2^r} \\ Q^{A_2^r} \\ R^{A_2^r} \\ \vdots \\ P^{A_n^r} \\ Q^{A_n^r} \\ R^{A_n^r} \end{bmatrix}}_{P_r} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2. 1. Ecuațiile de echilibru a nodurilor

Două unități consecutive, r și $r+1$, au n noduri comune: A_1^r, A_2^r,..., A_n^r. Pentru fiecare nod se pot scrie 3 ecuații de proiecție $\sum X=0$, $\sum Y=0$, $\sum Z=0$. Se obțin $3n$ ecuații. Se notează cu λ, μ, ν cosinușii directiori ai barelor. Forțele axiale se consideră pozitive cînd sînt de întindere. Pentru nodul A_1, de exemplu:

$$\sum X=0=-\lambda_2^r f_{r2}-\lambda_4^r f_{r4}-\lambda_m^r f_{rm}+\lambda_1^{r+1} f_{r+1,1}+\lambda_2^{r+1} f_{r+1,2}+\lambda_3^{r+1} f_{r+1,3}+$$
$$+\lambda_{r,1}^* f_{r,1}^*+\lambda_{r,n}^* f_{r,n}^*+\sum \lambda_{r,n+h}^* f_{r,n+h}^*+P^{A_1^r},$$

unde $1 \leqslant h \leqslant g$, sub semnul $\sum$ intervenind doar barele ce concură în nodul A_1^r. În același mod se scriu $\sum Y=0$ $\sum Z=0$ precum și ecuațiile de echilibru pentru nodurile A_2^r, A_3^r,..., A_n^r. Toate aceste $3n$ ecuații pot fi scrise sub forma matricială (M) sau

$$C_{f.st.}\, F_r + C_{f.dr.}\, F_{r+1} + C_f^*\, F_r^* + P_r = 0. \tag{1}$$

Se observă că numerotînd barele după nodurile din stînga unității (în A_1^{r-1} concură barele *1, 2, 3,* în A_2^{r-1} concură barele *4, 5, 6,...* în A_n^{r-1} concură barele $m-2$, $m-1$, m) matricea $C_{f.dr.}$ devine diagonal-celulară, lucru extrem de util la inversarea ei.

Înmulțind la stînga ecuția (1) prin $C_{f.dr.}^{-1}$ se poate determina F_{r+1} funcție de F_r, P_r și F_r^*:

$$C_{f.dr.}^{-1}\, C_{f.st.}\, F_r + C_{f.dr.}^{-1}\, C_{f.dr.}\, F_{r+1} + C_{f.dr.}^{-1}\, C_f^* F_r^* + C_{f.dr.}^{-1}\, P_r = 0, \tag{2}$$

$$F_{r+1} = -C_{f\,dr.}^{-1}\, C_{f.st.}\, F_r - C_{f.dr.}^{-1}\, C_f^* F_r^* - C_{f.dr.}^{-1}\, P_r. \tag{3}$$

$C_{f.dr.}$ este diagonal-celulară, deci inversa ei se determină ușor prin simpla inversare a celor n submatrici de ordinul 3×3 de pe diagonala principală.

2. 2. Ecuațiile de compatibilitate a deformațiilor axiale ale barelor cu deplasările nodurilor

Cu ajutorul acestei ecuații se urmărește obținerea unei legături între D_{r+1} și D_r după cum prin ecuațiile de echilibru s-a obținut o legătură între F_{r+1} și F_r.

Deformația axială Δl a fiecărei bare ij este dată de deplasările nodurilor i și j și nu și de deplasările altor noduri. Se obține cîte o ecuație pentru fiecare din cele $m=3n$ bare. Aceste ecuații se pot scrie sub formă matricială:

$$\begin{bmatrix} \Delta l_1 \\ \Delta l_2 \\ \Delta l_3 \\ \Delta l_4 \\ \Delta l_5 \\ \Delta l_6 \\ \vdots \\ \Delta l_{m-2} \\ \Delta l_{m-1} \\ \Delta l_m \end{bmatrix}_{r+1} = \begin{bmatrix} -\lambda_1^{r+1} & -\mu_1^{r+1} & -\nu_1^{r+1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_2^{r+1} & -\mu_2^{r+1} & -\nu_2^{r+1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_3^{r+1} & -\mu_3^{r+1} & -\nu_3^{r+1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_4^{r+1} & -\mu_4^{r+1} & -\nu_4^{r+1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_5^{r+1} & -\mu_5^{r+1} & -\nu_5^{r+1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_6^{r+1} & -\mu_6^{r+1} & -\nu_6^{r+1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda_{m-2}^{r+1} & -\mu_{m-2}^{r+1} & -\nu_{m-2}^{r+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda_{m-1}^{r+1} & -\mu_{m-1}^{r+1} & -\nu_{m-1}^{r+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda_m^{r+1} & -\mu_m^{r+1} & -\nu_m^{r+1} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_1^{r+1} & \mu_1^{r+1} & \nu_1^{r+1} \\ \lambda_2^{r+1} & \mu_2^{r+1} & \nu_2^{r+1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3^{r+1} & \mu_3^{r+1} & \nu_3^{r+1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_4^{r+1} & \mu_4^{r+1} & \nu_4^{r+1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_5^{r+1} & \mu_5^{r+1} & \nu_5^{r+1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{m-1}^{r+1} & \mu_{m-1}^{r+1} & \nu_{m-1}^{r+1} \\ \lambda_m^{r+1} & \mu_m^{r+1} & \nu_m^{r+1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{A_1^r} \\ v^{A_1^r} \\ w^{A_1^r} \\ \vdots \\ u^{A_n^r} \\ v^{A_n^r} \\ w^{A_n^r} \\ u^{A_1^{r+1}} \\ v^{A_1^{r+1}} \\ w^{A_1^{r+1}} \\ \vdots \\ u^{A_n^{r+1}} \\ v^{A_n^{r+1}} \\ w^{A_n^{r+1}} \end{bmatrix}.$$

sau

$$\Delta_{r+1} = C_{d.st.} D_r + C_{d.dr.} D_{r+1}. \tag{4}$$

Înmulţind la stînga cu $C_{d.dr.}$ se obţine:

$$C_{d.dr.}^{-1} \Delta_{r+1} = C_{d.dr.}^{-1} C_{d.st.} D_r + D_{r+1}, \tag{5}$$

de unde rezultă:

$$D_{r+1} = - C_{d.dr.}^{-1} C_{d.st.} D_r + C_{d.dr.}^{-1} \Delta_{r+1}. \tag{6}$$

$C_{d.dr.}$ este de ordinul $3n \times 3n$. Pentru a se inversa mai uşor, se schimbă liniile ei în aşa fel ca să se obţină o matrice diagonal-celulară, care se notează cu $\bar{C}_{d.dr.}$. Fiecare linie corespunzînd unei bare, se va ordona matricea după nodurile din dreapta unităţii: întîi cele 3 bare care concură

în A_1^{r+1} și anume $f_{r+1,m}$ $f_{r+1,2}$ și $f_{r+1,4}$, apoi cele 3 bare care concură în A_2^{r+1}: $f_{r+1,3}$, $f_{r+1,5}$, $f_{r+1,7}$, iar la urmă cele trei bare care concură în A_n^{r+1}: $f_{r+1,m-3}$, $f_{r+1,m-1}$ și $f_{r+1,1}$:

$$\bar{C}_{d.dr.} = \begin{vmatrix} \lambda_m^{r+1} & \mu_m^{r+1} & \nu_m^{r+1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_2^{r+1} & \mu_2^{r+1} & \nu_2^{r+1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_4^{r+1} & \mu_4^{r+1} & \nu_4^{r+1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3^{r+1} & \mu_3^{r+1} & \nu_3^{r+1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_5^{r+1} & \mu_5^{r+1} & \nu_5^{r+1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_7^{r+1} & \mu_7^{r+1} & \nu_7^{r+1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{m-3}^{r+1} & \mu_{m-3}^{r+1} & \nu_{m-3}^{r+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{m-1}^{r+1} & \mu_{m-1}^{r+1} & \nu_{m-1}^{r+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_1^{r+1} & \mu_1^{r+1} & \nu_1^{r+1} \end{vmatrix}.$$

În acest mod va fi necesar de inversat doar submatrici de ordinul 3×3, obținînd pe această cale $\bar{C}_{d.dr.}^{-1}$. Coloanele matricii $\bar{C}_{d.dr.}^{-1}$ diferă față de cele ale matricii $C_{d.dr.}^{-1}$ în același mod în care diferă liniile matricii $\bar{C}_{d.dr.}$ față de cele ale matricii $C_{d.dr.}$.

Determinarea matricii de transfer

Pentru a stabili o legătură între F_{r+1} și D_{r+1} pe de o parte și F_r și D_r pe de altă parte trebuie să se elimine F_r^* din ecuația (3) și Δ_{r+1} din ecuația (6).

Pe baza legii lui Hooke:

$$F_r^* = K_r^* \Delta_r^*, \tag{7}$$

unde $K_r^* = \text{diag.}\ (EA_{ij}/l_{ij})$ pentru barele hiperstatice, E—modulul de elasticitate, A_{ij}—aria secțiunii transversale a barei ij, iar l_{ij}— lungimea sa.

Deformațiile axiale Δ_r^* ale barelor hiperstatice se datorează deplasării nodurilor unității r:

$$\begin{vmatrix} \Delta l_1^* \\ \Delta l_2^* \\ \vdots \\ \Delta l_{n+g}^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda_{r,1}^* & -\mu_{r,1}^* & -\nu_{r,1}^* & \lambda_{r,1}^* & \mu_{r,1}^* & \nu_{r,1}^* & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_{r,2}^* & -\mu_{r,2}^* & -\nu_{r,2}^* & \lambda_{r,2}^* & \mu_{r,2}^* & \nu_{r,2}^* & 0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u^{A_1^r} \\ v^{A_1^r} \\ w^{A_1^r} \\ \vdots \\ w^{A_n^r} \end{vmatrix},$$

sau

(8) $$\Delta_r^* = G D_r .$$

Din (7) şi (8) rezultă:

(9) $$F_r^* = K_r^* G D_r .$$

Ecuaţia (3) devine:

(10) $$F_{r+1} = - C_{f,\mathrm{dr.}}^{-1} C_{f.\mathrm{st.}} F_r - C_{f.\mathrm{dr.}}^{-1} C_f^* K_r^* G D_r - C_{f.\mathrm{dr.}}^{-1} P_r .$$

Conform legii lui Hooke:

$$\begin{vmatrix} \Delta l_1 \\ \Delta l_2 \\ \vdots \\ \Delta l_m \end{vmatrix}_{r+1} \equiv \begin{vmatrix} \frac{l_1}{EA_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{l_2}{EA_2} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{l_m}{EA_m} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{vmatrix}_{r+1}$$

sau

(11) $$\Delta_{r+1} = K_{r+1}^{-1} F_{r+1} .$$

Substituind Δ_{r+1} în (6), se obţine:

(12) $$D_{r+1} = - C_{d.\mathrm{dr.}}^{-1} C_{d.\mathrm{st.}} D_r + C_{d.\mathrm{dr.}}^{-1} K_{r+1}^{-1} F_{r+1} .$$

Dacă se înlocuieşte F_{r+1} din ecuaţia (10) în (12) rezultă:

(13) $$\begin{cases} D_{r+1} = - C_{d.\mathrm{dr.}}^{-1} C_{d.\mathrm{st.}} D_r - C_{d.\mathrm{dr.}}^{-1} K_{r+1}^{-1} C_{f.\mathrm{dr.}}^{-1} C_{f.\mathrm{st.}} F_r - \\ \quad - C_{d.\mathrm{dr.}}^{-1} K_{r+1}^{-1} C_{f.\mathrm{dr.}}^{-1} C_f^* K_r^* G D_r - C_{d.\mathrm{dr.}}^{-1} K_{r+1}^{-1} C_{f.\mathrm{dr.}}^{-1} P_r . \\ D_{r+1} = - C_{d.\mathrm{dr.}}^{-1} K_{r+1}^{-1} C_{f.\mathrm{dr.}}^{-1} C_{f.\mathrm{st.}} F_r - (C_{d.\mathrm{dr.}}^{-1} C_{d.\mathrm{st.}} + \\ \quad + C_{d.\mathrm{dr.}}^{-1} K_{r+1}^{-1} C_{f.\mathrm{dr.}}^{-1} C_f^* K_r^* G) D_r - C_{d.\mathrm{dr.}}^{-1} K_{r+1}^{-1} C_{f.\mathrm{dr.}}^{-1} P_r . \end{cases}$$

Ecuaţiile (10) şi (13), care exprimă transferul forţelor F_r şi al deplasărilor D_r, se pot scrie sub forma:

$$\begin{bmatrix} F_{r+1} \\ D_{r+1} \end{bmatrix} =$$

(14) $$= \begin{bmatrix} - C_{f.\mathrm{dr.}}^{-1} C_{f.\mathrm{st.}} & - C_{f.\mathrm{dr.}}^{-1} C_f^* K_r^* G \\ - C_{d.\mathrm{dr.}}^{-1} K_{r+1}^{-1} C_{f.\mathrm{dr.}}^{-1} C_{f.\mathrm{st.}} & - C_{d.\mathrm{dr.}}^{-1} C_{d.\mathrm{st.}} - C_{d.\mathrm{dr.}}^{-1} K_{r+1}^{-1} C_{f.\mathrm{dr.}}^{-1} C_f^* K_r^* G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_r \\ D_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} - C_{f.\mathrm{dr.}}^{-1} \\ - C_{d.\mathrm{dr.}}^{-1} K_{r+1}^{-1} C_{f.\mathrm{dr.}}^{-1} \end{bmatrix} P_r .$$

Din ultimul termen al ecuației (14) rezultă un vector-coloană al forțelor și deplasărilor unității $r+1$ date de încărcarea P_r:

$$\begin{bmatrix} -C_{f.\mathrm{dr.}}^{-1} \\ -C_{d.\mathrm{dr.}}^{-1} K_{r+1}^{-1} C_{f.\mathrm{dr.}}^{-1} \end{bmatrix} P_r = \begin{Bmatrix} \mathfrak{F} \\ \mathfrak{D} \end{Bmatrix} = \{\mathfrak{R}\}.$$

Ecuația (14) devine:

$$\begin{bmatrix} F_{r+1} \\ D_{r+1} \\ 1 \end{bmatrix} = \tag{15}$$

$$= \begin{bmatrix} -C_{f.\mathrm{dr.}}^{-1} C_{f.\mathrm{st.}} & -C_{f.\mathrm{dr.}}^{-1} C_f^* K_r^* G & \mathfrak{F} \\ -C_{d.\mathrm{dr.}}^{-1} K_{r+1}^{-1} C_{f.\mathrm{dr.}}^{-1} C_{f.\mathrm{st.}} & -C_{d.\mathrm{dr.}}^{-1} C_{d.\mathrm{st.}} - C_{d.\mathrm{dr.}}^{-1} K_{r+1}^{-1} C_{f.\mathrm{dr.}}^{-1} C_f^* K_r' G & \mathfrak{D} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_r \\ D_r \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Este necesar să se introducă 1 la vectorul de stare Z_r pentru a înmulți coloana $\{\mathfrak{R}\}$ din încărcare. Concomitent este necesar să se introducă identitatea $1 \equiv 1$. Ecuația (15) se mai poate scrie:

$$\begin{Bmatrix} Z \\ 1 \end{Bmatrix}_{r+1} = \begin{bmatrix} \tau & \mathfrak{R} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_r^{r+1} \begin{Bmatrix} Z \\ 1 \end{Bmatrix}_r. \tag{16}$$

Vectorul de stare extins $\begin{Bmatrix} Z \\ 1 \end{Bmatrix}_{r+1}$ este legat de $\begin{Bmatrix} Z \\ 1 \end{Bmatrix}_r$ prin matricea de transfer $[\bar{\tau}]_r^{r+1} = \begin{bmatrix} \tau & \mathfrak{R} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_r^{r+1}$. Așadar

$$\bar{Z}_{r+1} = [\bar{\tau}]_r^{r+1} \bar{Z}_r. \tag{17}$$

Odată determinate matricile de transfer se poate scrie vectorul de stare al oricărei unități funcție de necunoscutele din origine:

$$\bar{Z}_r = [\bar{\tau}]_{r-1}^r [\bar{\tau}]_{r-2}^{r-1} \cdots [\bar{\tau}]_1^2 [\bar{\tau}]_0^1 \bar{Z}_0 \text{ sau } \bar{Z}_r = [\bar{\tau}]_0^r \bar{Z}_0,$$

$$\begin{Bmatrix} Z \\ 1 \end{Bmatrix}_r = \begin{bmatrix} \tau & \mathfrak{R} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_0^r \begin{Bmatrix} Z \\ 1 \end{Bmatrix}_0. \tag{18}$$

În cele de mai sus s-a considerat ca pînă la unitatea r structura nu prezintă legături cu exteriorul. Fie i prima unitate cu reazeme. În acest caz vectorul încărcărilor P_i se scindează într-un vector al forțelor exterioare $\bar{P}_i$ și altul al reacțiunilor (necunoscute) X_i:

$$P_i = \begin{Bmatrix} \bar{P}_i \\ X_i \end{Bmatrix}.$$

Se compartimentează în mod corespunzător matricea care-l exprimă pe $\mathcal{R}$ funcţie de P_i:

$$\{\mathcal{R}\} = \begin{bmatrix} -C_{f.dr.}^{-1} \\ -C_{d.dr.}^{-1} K_{r+1}^{-1} C_{f.dr.}^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{P}_i \\ X_i \end{Bmatrix} = [U_P \; U_X] \begin{Bmatrix} \bar{P}_i \\ X_i \end{Bmatrix}.$$

Ecuaţia (16) devine:

$$\begin{Bmatrix} Z \\ 1 \end{Bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} \tau & U_P \bar{P}_i + U_X X_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_i^{i+1} \begin{Bmatrix} Z \\ 1 \end{Bmatrix}_i.$$

Fie k numărul reacţiunilor $\{X\}_i$. În vectorul $\begin{Bmatrix} Z \\ 1 \end{Bmatrix}_i$ k componente-deplasări vor fi nule ceea ce permite scrierea a k ecuaţii, respectiv eliminarea a k necunoscute din vectorul de stare al unităţii zero:

$$\begin{Bmatrix} Z \\ 1 \end{Bmatrix}_i = \begin{matrix} 2m-k \\ k \\ 1 \end{matrix} \begin{Bmatrix} h \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{matrix} 2m-k \\ k \\ 1 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} m-k & k & 1 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} A_m & A_k & \mathcal{R}_a \\ B_m & B_k & \mathcal{R}_b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} m-k \\ k \\ 1 \end{matrix} \begin{Bmatrix} m \\ k \\ 1 \end{Bmatrix}_0.$$

Cele k ecuaţii sînt:

$$B_m m_0 + B_k K_0 + \mathcal{R}_b = 0,$$

de unde

$$B_k K_0 = -B_m m_0 - \mathcal{R}_b$$

şi

$$K_0 = -B_k^{-1}(B_m m_0 + \mathcal{R}_b);$$

$$\begin{Bmatrix} Z \\ 1 \end{Bmatrix}_i = \begin{Bmatrix} k \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_m & A_k & \mathcal{R}_a \\ B_m & B_k & \mathcal{R}_b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_0 \\ -B_k^{-1}(B_m m_0 + \mathcal{R}_b) \\ 1 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} A_m - A_k B_k^{-1} & 0 & \mathcal{R}_a - A_k B_k^{-1} \mathcal{R}_b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se exprimă vectorul $\begin{Bmatrix} Z \\ 1 \end{Bmatrix}_{i+1}$ funcţie de $\begin{Bmatrix} Z \\ 1 \end{Bmatrix}_i$:

$$\begin{Bmatrix} Z \\ 1 \end{Bmatrix}_{i+1} \begin{bmatrix} \tau & U_p \bar{P}_i + U_x X_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_i^{i+1} \begin{Bmatrix} Z \\ 1 \end{Bmatrix}_i = \begin{matrix} 2m \\ 1 \end{matrix} \begin{bmatrix} \tau & U_p \bar{P}_i + U_x X_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} A_m - A_k B_k^{-1} B_m & 0 & \mathcal{R}_a - A_k B_k^{-1} \mathcal{R}_b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} =$$

$$= 2m \begin{matrix} 1 \end{matrix} \left[\begin{matrix} 2m-k & k & 1 \\ \tau_1 & \tau_2 & U_p \bar{P}_i + U_x X_i \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right]_i^{i+1} \times$$

$$\times \begin{matrix} 2m-k \\ k \\ 1 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} (A_m - A_k B_k^{-1} B_m) m_0 + \Re_a - A_k B_k^{-1} \Re_b \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right\} =$$

$$= \begin{matrix} 2m \\ 1 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \tau_1 [(A_m - A_k B_k^{-1} B_m) m_0 + \Re_a - A_k B_k^{-1} \Re_b] + \tau_2 . 0 + U_p \bar{P}_i + U_x X_i \\ 1 \end{matrix} \right\} =$$

$$= \begin{matrix} 2m \\ 1 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \tau_1 (A_m - A_k B_k^{-1} B_m) m_0 + U_x X_i + \tau_1 (\Re_a - A_k B_k^{-1} \Re_b) + U_p \bar{P}_i \\ 1 \end{matrix} \right\} =$$

$$= \begin{bmatrix} \tau_1 (A_m - A_k B_k^{-1} B_m) & U_x & \tau_1 (\Re_a - A_k B_k^{-1} \Re_b) + U_p \bar{P}_i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_0 \\ X_i \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

Astfel s-au substituit k din cele m necunoscute ale unității zero, prin reacțiunile X_i, în final avînd de rezolvat un sistem cu numai m necunoscute.

Procedeul rămîne valabil și pentru rezemări elastice — deplasările în acest caz fiind proporționale cu reacțiunile corespunzătoare.

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de statică

BIBLIOGRAFIE

1. Pestel E. C., Leckie F. A., *Matrix Methods in Elasto-mechanics.* Mc. Graw-Hill Book Co., Inc., N. Y., 1963.
2. Tanimoto Bennosuke, *Operational Method for Pin-Jointed Trusses.* J. of the Structural Division, ASCE, 1966, **92**, *ST3*, Proc. Paper 4 851.
3. Gatewood B. F., Ohanian N., *Tri-Diagonal Matrix Method for Complex Structures.* J. of the Structural Division, ASCE, 1965, **91**, *ST2*, Proc. Paper 4291.

ANALYSIS OF SPACE PIN-JOINTED STRUCTURES BY TRANSFER MATRIX

(Summary)

The space computation — in direct form of formulation of force or displacement method — leads to a large system of simultaneous equations.

In the procedure proposed herein, the space structure is divided in „units" which are characterized by a „state vector" Z_r which includes the „force" and „displacement matrix" of the unit r.

Matrix equation (14) permits the transfer of Z_r to the unit $r+1$, so that the stresses of all members of the structure and the displacements of all joints can be expressed in terms of the state vector of unit zero, whose components may be determined from the boundary conditions.

The use of this procedure reduces considerably the order of the matrix which must be inverted, and in this manner it is possible to solve space pin-jointed structures by small computers.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

C. D.624.1

ÉTAT DE TENSIONS D'UN TERRAIN DE FONDATION À ANISOTROPIE TRANSVERSALE, DANS LE CAS DU PROBLÈME PLAN

PAR

AL. EFTIMIE

Communication présentée dans la session scientifique de l'Institut Polytechnique de Jassy, 28–30 septembre 1967

1. Introduction

Un milieu élastique homogène ayant une anisotropie transversale dépend de cinq constantes élastiques, dont deux sont des modules d'élasticité : E_V — module d'élasticité en direction verticale, E_H — module d'élasticité en direction horizontale, et trois, des valeurs pour les coefficients de Poisson: ν_1 — effet de la déformation horizontale sur la déformation horizontale, ν_2 — effet de la déformation horizontale sur la déformation verticale, ν_3 — effet de la déformation verticale sur la déformation horizontale.

Les équations physiques se présentent sous la forme :

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E_H}(\sigma_x - \nu_1\sigma_y) - \frac{\nu_3}{E_V}\sigma_z, \qquad \varepsilon_y = \frac{1}{E_H}(\sigma_y - \nu_1\sigma_x) - \frac{\nu_3}{E_V}\sigma_z, \qquad \varepsilon_z = \frac{1}{E_V}\sigma_z - \frac{\nu_2}{E_H}(\sigma_x + \sigma_y);$$

$$\tau_{zx} = G_1\gamma_{zx} = \frac{E_V\nu_2}{(\nu_2 + \nu_3 + 2\nu_2\nu_3)}\gamma_{zx}, \qquad \tau_{zy} = G_2\gamma_{zy} = \frac{E_V\nu_2}{(\nu_2 + \nu_3 + 2\nu_2\nu_3)}\gamma_{zy},$$

$$\tau_{xy} = G_3\gamma_{xy} = \frac{nEV}{2(1+\nu_1)}\gamma_{xy}.$$

Les cinq constantes élastiques sont reliées par les relations :

$$n = \frac{E_H}{Ev} = \frac{\nu_2}{\nu_3}, \qquad G_3 = \frac{E_H}{2(1+\nu_1)}, \qquad G_1 = G_2 = \frac{E_V\nu_2}{\nu_2 + \nu_3 + 2\nu_2\nu_3}.$$

Dans ce qui suit, on considère $E_V = E$, $E_H = nE$ et $\nu_3 = \nu_2/n$, n étant la mesure du degré d'anisotropie.

2. Demi-espace élastique homogène transversal anisotrope, chargé à la surface le long de l'axe x, avec une charge uniformément répartie (fig. 1)

Étant donné l'état plan de déformation, de la condition $\varepsilon_x = 0$ il en résulte

$$\sigma_x = \nu_1 \sigma_y + \frac{E_H}{E_V} \nu_3 \sigma_z .$$

Compte tenu de ce résultat et de la relation d'interdépendence entre les cinq constantes élatiques, les équations physiques et la condition de compatibilité

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial z \, \partial \varphi}$$

prennent la forme :

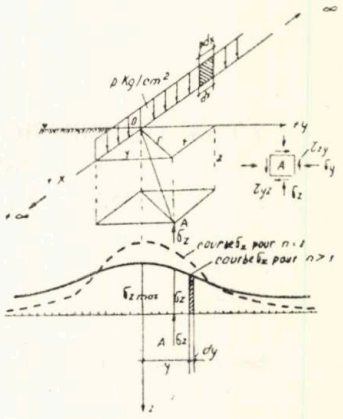


Fig. 1

$$\varepsilon_y = \frac{1}{nE}[\sigma_y(1 - \nu_1^2) - \nu_2(1 + \nu_1)\sigma_z],$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{nE}[\sigma_z(n - \nu_2^2) - \nu_2(1 + \nu_1)\sigma_y],$$

$$\gamma_{zy} = \frac{1}{nE}(1 + n + 2\nu_2)\tau_{yz},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}[\sigma_y(1 - \nu_1^2) - \nu_2 \sigma_y(1 + \nu_1)] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}[\sigma_z(n - \nu_2^2) - \nu_2 \sigma_y(1 + \nu_1)] =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial z \, \partial y}(1 + n + 2\nu_2)\tau_{zy}.$$

À l'aide des équations d'équilibre :

$$\text{(1 a)} \qquad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0, \qquad \text{(1 b)} \quad \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0,$$

l'équation de compatibilité peut être écrite seulement comme fonction des contraintes normales :

$$\text{(1c)} \qquad \frac{\partial^2}{\partial z^2}[\sigma_y(1 - \nu_1^2) - \nu_2 \sigma_z(1 + \nu_1)] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}[\sigma_z(n - \nu_2^2) - \nu_2 \sigma_y(1 + \nu_1)] =$$

$$= -\frac{1}{2}(1 + n + 2\nu_2)\left(\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z_2} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right).$$

En remplaçant $n = 1$ et $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu$, on retrouve les équations physiques et la condition de compatibilité pour le cas de l'état plan de déformation dans le demi-espace élastique homogène et isotrope.

Dans ce qui suit nous ne considérons pas l'effet des forces massiques.

On trouvera premièrement la contrainte σ_z par le procédé employé par Melan [2] pour ce problème, dans le cas du demi-espace élastique homogène et isotrope. Il a employé les mêmes symboles et raisonnements que ceux utilisés par Boussinesq dans cas de la charge concentrée.

Ainsi, en remplaçant la charge concentrée P par la charge élémentaire $p\,dx$, la contrainte σ_z par la contrainte élémentaire $d\sigma_z$ et le rayon r par $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, dans la formule de la contrainte σ_z pour le demi-espace élastique homogène et anisotrope transversal sous la forme donnée par Barden [1], on obtient:

$$\sigma_z = \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma_z = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p}{2\pi} \cdot \frac{z}{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}} \left[\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2/\alpha)^{3/2}} - \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2/\beta)^{3/2}} \right] dx,$$

où les coefficients α et β sont définis [8] par les relations:

$$\text{(2a)} \qquad \alpha + \beta = \frac{1 + n - 2\nu_1 \nu_2}{n - \nu_2^2}, \qquad \text{(2b)} \qquad \alpha\beta = \frac{1 - \nu_1^2}{n - \nu_2^2}.$$

L'integrale met en évidence le fait que la contrainte normale σ_z dans un point A, du plan yOz, est egale à la somme des contraintes élémentaires $d\sigma_z$ produites par les forces élémentaires ponctuelles $p\,dx$.

En effectuant les calculs, on obtient:

$$\text{(3a)} \qquad \sigma_z = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{p}{\alpha\beta} (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}) \frac{z^3}{y^4 + y^2 z^2 (1/\alpha + 1/\beta) + z^4/\alpha\beta}.$$

Compte tenu de (3a), il en résulte des équations (1a) et (1b):

$$\text{(3b)} \qquad \tau_{zy} = \frac{p}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}{\alpha\beta} \cdot \frac{z^2 y}{y^4 + (1/\alpha + 1/\beta) z^2 y^2 + z^4/\alpha\beta},$$

$$\text{(3c)} \qquad \sigma_y = \frac{p}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}{\alpha\beta} \cdot \frac{z y^2}{y^4 + (1/\alpha + 1/\beta) z^2 y^2 + z^4/\alpha\beta}.$$

On peut vérifier que les fonctions trouvées ci-dessus satisfont l'équation de compatibilité et les conditions de contour. Ainsi, pour $z = 0$, il en résulte $\sigma_z = p_n(y) = 0$, exceptant les points qui se trouvent sur l'axe x et $\tau_{zy} = p_t(y) = 0$. Pour $z = \infty$ toutes les contraintes deviennent nulles.

Les mêmes expresions ont été obtenues pour les fonctions τ_{zy} et σ_y en procédant tout comme pour σ_z.

Dans le cas particulier ou $n = 1$ et $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu$, les expressions des contraintes données par (3a)...(3c) deviennent :

$$\sigma_z = \frac{2p}{\pi} \cdot \frac{z^3}{(z^2 + y^2)^2}, \quad \tau_{zy} = \frac{2p}{\pi} \cdot \frac{yz^2}{(z^2 + y^2)^2}, \quad \sigma_y = \frac{2p}{\pi} \cdot \frac{y^2 z}{(z^2 + y^2)^2},$$

c'est-à-dire, justement les solutions de F l a m a n d.

Si dans (3a) l'on pose $y = 0$, on obtient pour la contrainte maximum la formule :

$$\sigma_{z\max} = \frac{p}{\pi z} (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}). \tag{4}$$

Pour donner des exemples numériques, ne possédant point des valeurs pratiqués pour les coefficients de Poisson, admettons, pour le moment, que $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, ainsi que :

$$\alpha + \beta = 1 + \frac{1 - \nu^2}{n - \nu^2} \quad \text{et} \quad \alpha\beta = \frac{1 - \nu^2}{n - \nu^2};$$

il en résulte que $\alpha = 1$ pour toutes les valeurs de n et ν. Ce résultat simplifie d'une manière sensible les calculs, et, en admettant pour ν les mêmes valeurs que pour les sols isotropes, on constate que les valeurs des coefficients α et β sont peu affectées par cette approximation. En outre, les valeurs possibles des coefficients de Poisson étant réduites (sous 0,4), si l'on analyse la structure des formules (2 a) et (2 b) on constate que la valeur du degré d'amisotropie, n, exerce une influence appréciable sur les valeurs des coefficients α et β.

Tableau 1

ν \ n	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3
0,2	2,448	2,00	1,810	1,700	1,624	1,569
0,3	2,490	2,000	1,804	1,691	1,611	1,558
0,4	2,59	2,000	1,789	1,680	1,604	1,550
z	15,90	12,73	11,49	10,77	10,58	9,92

En appliquant la formule (4) pour des diverses valeurs du degré d'anisotropie n pratiquement possibles et en choisissant la valeur 0,3 pour le coefficient de Poisson (sable à la limite supérieure, argile sableuse à valeur moyenne), ou 0,4 (argile), on a obtenu pour $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ les valeurs présentées dans le tableau 1. Ces valeurs prouvent que la contrainte σ_z baisse pour $n > 1$ et qu'elle augmente pour $n < 1$ par rapport au terrain isotrope.

Si l'on tient compte aussi du fait que la relation $2\int_0^\infty \sigma_z \, dy = p$ est vérifiée, il en résulte que pour $n < 1$ il existe une plus grande concentration de la contrainte σ_z par rapport au milieu isotrope, tandis que pour $n > 1$ une plus grande dispersion latérale.

La variation de la contrainte σ_z sur un plan horizontal a donc l'aspect indiqué dans la fig. 2.

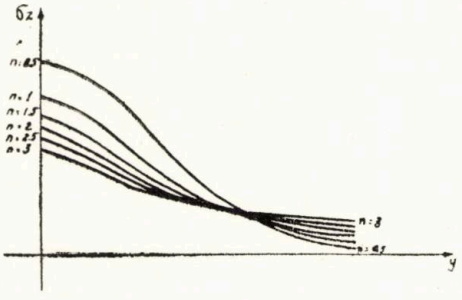


Fig. 2

On y observe encore que la variation du coefficient de Poisson exerce une influence négligeable sur la valeur de la contrainte σ_z.

Si l'on considère $p = 100$ t/m et $\nu = 0{,}4$, l'isobare $\sigma_z = 0{,}5$ kg/cm^2 se trouvera, par rapport à la valeur de n, au point $z = p\,(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})/0{,}5\,\pi$, ayant une valeur inscrite dans le tableau 1.

On remarque que pour $n = 3$, tant la tension σ_z que la profondeur de la zone active, baisse environ de 20...22 % par rapport au milieu isotrope.

3. Surface en forme de bande, avec une charge uniformément distribuée

Un cas fréquent dans les problèmes de fondation est celui d'une fondation ayant une longueur sensiblement plus grande que la largeur, qui transmet au terrain une charge uniformément distribuée (fig. 3).

Pour trouver dans ce cas, la distribution des tensions, on fait appel au même raisonnement que dans le cas du milieu isotrope. Ainsi, dans les formules (3 a)...(3 c) on remplace la charge p par la charge élémentaire $p.1.dy$ et compte tenu (conformément à la fig. 3) que $z = R\cos\gamma_1$, $y = z\,\mathrm{tg}\,\gamma$ et $dy = (z/\cos^2\gamma)\,d\gamma = R\cos^{-1}\gamma\,d\gamma$, il en résulte :

$$\sigma_z = \frac{p}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{\alpha\beta} \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{1}{\cos^2\gamma} \cdot \frac{d\gamma}{\operatorname{tg}^4\gamma + (1/\alpha + 1/\beta)\operatorname{tg}^2\gamma + 1/\alpha\beta} =$$

(4 a)
$$= \frac{p}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}} \left\{ \sqrt{\beta} \left[\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\beta}\operatorname{tg}\gamma_2\right) \mp \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\beta}\operatorname{tg}\gamma_1\right) \right] - \right.$$
$$\left. - \sqrt{\alpha} \left[\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\alpha}\operatorname{tg}\gamma_2\right) \mp \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\alpha}\operatorname{tg}\gamma_1\right) \right] \right\},$$

$$\tau_{zy} = \frac{p}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{\alpha\beta} \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{\sin\gamma\cos\gamma}{\sin^4\gamma + (1/\alpha + 1/\beta)\sin^2\gamma\cos^2\gamma + (1/\alpha\beta)\cos^4\gamma} d\gamma =$$

(4 b)
$$= \frac{p}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}} \left(\ln \frac{\operatorname{tg}^2\gamma_2 + 1/\beta}{\operatorname{tg}^2\gamma_2 + 1/\alpha} - \ln \frac{\operatorname{tg}^2\gamma_1 + 1/\beta}{\operatorname{tg}^2\gamma_1 + 1/\alpha} \right),$$

$$\sigma_y = \frac{p}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{\alpha\beta} \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{\sin^2\gamma}{\sin^4\gamma + (1/\alpha + 1/\beta)\sin^2\gamma\cos^2\gamma + (1/\alpha\beta)\cos^4\gamma} d\gamma =$$

(4 c)
$$= \frac{p}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}\left(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}\right)} \left\{ \sqrt{\beta} \left[\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\alpha}\operatorname{tg}\gamma_2\right) \mp \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\alpha}\operatorname{tg}\gamma_1\right) \right] - \right.$$
$$\left. - \sqrt{\alpha} \left[\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\beta}\operatorname{tg}\gamma_2\right) \mp \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\beta}\operatorname{tg}\gamma_1\right) \right] \right\}.$$

Le signe minus y intervenant dans les formules (4 a) et (4 c) indique les points qui ne se trouvent pas sous la surface chargée, tandis que le signe plus indique les points situés sous cette surface.

Les formules établies sont valables pour toutes les valeurs possibles de α et β, sauf le cas $\alpha = \beta = 1$, ou l'on applique les formules connues pour le milieu isotrope.

Les mêmes expressions pour les contraintes τ_{zy} et σ_y peuvent être obtenues à partir des équations d'équilibre (1 a) et (1 b) si l'on tient compte de l'expression de la contrainte σ_z donnée par la relation (4 a).

La variation verticale de la contrainte σ_z est située entre p pour $z = 0$ et zéro pour $z = \infty$.

Dans le cas ou $p = 2$ t/m^2, $n = 1$ et $n = 3$, avec $\nu = 0{,}3$ et $0{,}4$, pour une largeur $2b = 1$ m, on a obtenu pour la contrainte σ_z, dans des différents points au niveau $z = 1$ m, les valeurs inscrites dans le tableau 2.

Pour préciser la position des points on a considéré l'origine du système des axes au milieu de la largeur de la bande.

On constate aussi qu'en ce cas l'anisotropie détermine une plus grande dispersion latérale de la contrainte σ_z par rapport au cas de l'isotropie et que la différence entre la tension maximum du cas $n = 1$ et $n = 3$, est

d'environ 20 % pour les données considérées dans notre exemple. La variation de la valeur du coefficient de Poisson exerce une influence négligeable sur la valeur de la contrainte σ_z. La relation d'équivalence $2\int_0^\infty \sigma_z \, dy = 2bp$ étant satisfaite, et si l'on tient compte des observations déjà faites, on constate que la distribution de la contrainte σ_z sur un plan horizontal au niveau z a l'aspect présenté dans la fig. 3.

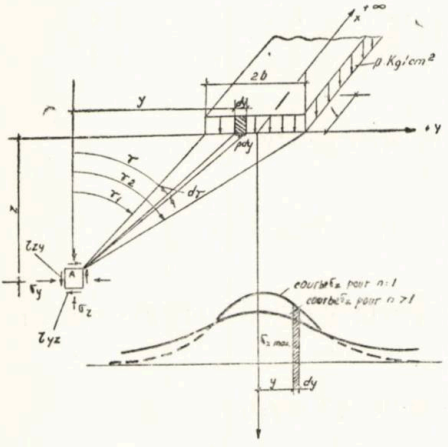


Fig. 3

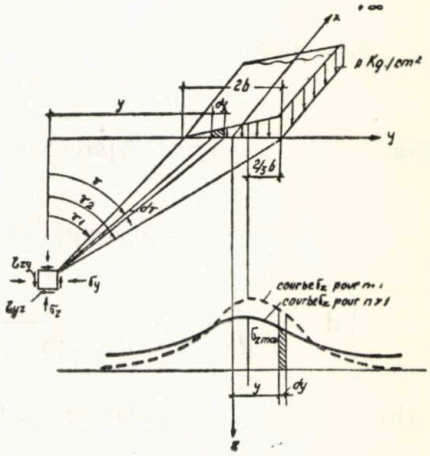


Fig. 4

Tableau 2

Point / n, ν	$y=-1$ $z=1$	$y=-0,5$ $z=1$	$y=0$ $z=1$	$y=0,5$ $z=1$	$y=1,0$ $z=1$
$n=1$	3,80	0,820	1,100	0,820	0,380
$n=3$ $\nu=0,3$	0,415	0,710	0,904	0,707	0,415
$n=3$ $\nu=0,4$	0,412	0,705	0,894	0,705	0,412

4. Surface en forme de bande, avec une charge à variation transversale linéaire

Examinons aussi le cas où la pression transmise au terrain de fondation varie d'une façon linéaire à partir de zéro jusqu'à une valeur p sur une largeur $2b$ de la fondation (fig. 4).

Pour trouver les tensions, comme dans le cas précedent on remplace, dans les formules (3a)...(3c), établies pour le cas de la charge uniformément distribuée le long de la ligne $y = 0$, $y = z\,\mathrm{tg}\gamma$, $\mathrm{d}y = z\cos^{-2}\gamma\,\mathrm{d}\gamma$ et la force p par la force élémentaire

$$\mathrm{d}p = p_y\,\mathrm{d}y = \frac{p\,(y - z\,\mathrm{tg}\,\gamma_1)}{2b}\,\mathrm{d}y = \frac{pz^2\,(\mathrm{tg}\,\gamma - \mathrm{tg}\,\gamma_1)}{2b\cos^2\gamma}\,\mathrm{d}\gamma\,;$$

il en résulte :

$$\sigma_z = \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \mathrm{d}\sigma_z = \frac{1}{2b}\cdot\frac{p}{\pi}\,z\,(\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha})\left(\frac{1}{2}\ln\frac{\mathrm{tg}^2\gamma_2 + 1/\beta}{\mathrm{tg}^2\gamma_2 + 1/\alpha}\cdot\frac{\mathrm{tg}^2\gamma_1 + 1/\alpha}{\mathrm{tg}^2\gamma_1 + 1/\beta} -\right.$$

$$(5a)\qquad -\,\mathrm{tg}\gamma_1\{\sqrt{\beta}\,[\mathrm{arctg}\,(\sqrt{\beta}\,\mathrm{tg}\,\gamma_2) \mp \mathrm{arctg}\,(\sqrt{\beta}\,\mathrm{tg}\,\gamma)] -$$

$$\left. -\,\sqrt{\alpha}\,[\mathrm{arctg}(\sqrt{\alpha}\,\mathrm{tg}\,\gamma_2) \mp \mathrm{arctg}\,(\sqrt{\alpha}\,\mathrm{tg}\,\gamma_1)]\}\right),$$

$$\tau_{yz} = \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \mathrm{d}\tau_{yz} = \frac{1}{2b}\cdot\frac{p}{\pi}\cdot\frac{z}{\sqrt{\alpha\beta}\,(\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha})}\left\{\sqrt{\beta}\,[\mathrm{arctg}\,(\sqrt{\alpha}\,\mathrm{tg}\gamma_2) \mp \mathrm{arctg}\,(\sqrt{\alpha}\,\mathrm{tg}\gamma_1)] -\right.$$

$$(5b)\qquad -\,\sqrt{\alpha}\,[\mathrm{arctg}\,(\sqrt{\beta}\,\mathrm{tg}\gamma_2) \mp \mathrm{arctg}\,(\sqrt{\beta}\,\mathrm{tg}\gamma_1)] \mp$$

$$\left.\mp\frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\gamma_1\,\sqrt{\alpha\beta}\ln\left(\frac{\mathrm{tg}^2\gamma_2 + 1/\beta}{\mathrm{tg}^2\gamma_2 + 1/\alpha}\cdot\frac{\mathrm{tg}^2\gamma_1 + 1/\alpha}{\mathrm{tg}^2\gamma_1 + 1/\beta}\right)\right\},$$

$$\sigma_y = \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \mathrm{d}\sigma_y = \frac{1}{2b}\cdot\frac{p}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}{\alpha\beta}\,z\left(\frac{1}{4}\ln\frac{\mathrm{tg}^4\gamma_2 + (1/\alpha + 1/\beta)\,\mathrm{tg}^2\gamma_2 + 1/\alpha\beta}{\mathrm{tg}^4\gamma_1 + (1/\alpha + 1/\beta)\,\mathrm{tg}^2\gamma_1 + 1/\alpha\beta} -\right.$$

$$(5c)\qquad -\frac{1}{4}\cdot\frac{\beta + \alpha}{\beta - \alpha}\ln\frac{\mathrm{tg}^2\gamma_2 + 1/\beta}{\mathrm{tg}^2\gamma_2 + 1/\alpha}\cdot\frac{\mathrm{tg}^2\gamma_1 + 1/\alpha}{\mathrm{tg}^2\gamma_1 + 1/\beta} - \mathrm{tg}\gamma_1\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\beta - \alpha}\left\{\sqrt{\beta}\,[\mathrm{arctg}\,(\sqrt{\alpha}\,\mathrm{tg}\gamma_2) \mp\right.$$

$$\left.\left. \mp\,\mathrm{arctg}\,(\sqrt{\alpha}\,\mathrm{tg}\gamma_1) - \sqrt{\alpha}\,[\mathrm{arctg}\,(\sqrt{\beta}\,\mathrm{tg}\gamma_2) \mp \mathrm{arctg}\,(\sqrt{\beta}\,\mathrm{tg}\gamma_1)]\right\}\right).$$

La variation de σ_z sur la verticale est comprise entre la valeur p_y pour $z = 0$ et zéro pour $z = \infty$.

Si l'on tient compte de l'expression de la contrainte (5a) et en intégrant les équations de l'équilibre statique, on trouve les mêmes expressions pour les contraintes τ_{zy} et σ_y, que celles trouvées ci-dessus.

En considérant $p = 5$ kg/cm^2, $n = 1$ et puis $n = 3$ avec $\nu = 0{,}3$ et 0,4, on a obtenu pour la contrainte σ_z dans des différents points au niveau $z = 1$ m, les valeurs du tableau 3.

Tableau 3

Point / n, ν	$y=-1{,}0$ $z=1$	$y=-0{,}5$ $z=1$	$y=0{,}0$ $z=1$	$y=0{,}5$ $z=1$	$y=1{,}0$ $z=1$	$x=1{,}5$ $z=1$	$y=2{,}0$ $z=1{,}0$
$n=1$	0,125	0,305	0,795	1,375	1,205	0,645	0,225
$n=3$ $\nu=0{,}3$	0,322	0,396	0,764	1,120	0,988	0,605	0,293
$n=3$ $\nu=0{,}4$	0,313	0,392	0,762	1,080	0,881	0,597	0,280

Pour préciser la position des points, l'origine du système d'axes a été considérée à l'extremité gauche de la largeur de la bande.

En examinant le tableau et en tenant compte aussi du fait que la relation $\int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_z \, dy = pb$ est satisfaite, il en résulte que toutes les observations concernant la répartition des tensions, dans les cas étudiés ci-dessus, restent valables aussi pour ce cas. Donc l'aspect de la variation de la tension σ_z sur le plan horizontal est celui présenté dans la fig. 4.

5. Conclusions

Étant donné qu'on a constaté, par voie expérimentale, que dans certains dépôts naturels d'argile surconsolidée, ou de sols loessoïdes, se manifeste une anisotropie transversale caracterisée par $1 < n < 3$, conformément aux relations établies ci-dessus, il en résulte que ces sols possèdent une plus grande capacité de dispersion de la charge que celle montrée par Boussinesq-Flamand.

Cette cause, qui n'en est pas la seule, contribue au fait que les tassements prévus par voie théorique d'après le modèle Boussinesq-Flamand sont sensiblement plus grands que les tassements observés.

Il en résulte que le demi-espace élastique homogène et isotrope transversal peut être considéré comme un modèle mathématique amélioré pour l'étude de l'état des tensions et des déformations dans certains depôts naturels des sols, et donc, pour l'évaluation théorique des tassements.

Quoique les expressions des tensions, établies ci-dessus, dépendent des coefficients de Poisson, l'influence de leurs valeurs et donc de leurs variations, est très réduite par rapport à l'influence de la variation du degré d'anisotropie n sur la grandeur des tensions.

En tenant compte, aussi, du fait que les valeurs des coefficients de Poisson sont douteuses du point de vue pratique, l'aproximation $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ paraît être acceptable.

Institut Polytechnique de Jassy,
Chaire de Statique

BIBLIOGRAPHIE

1. Barden L., *Stresses and Displacements in a Cross-anisotropic Soil.* Geotechnique, 1963, **13**, *3*, pp. 198-210.
2. Jumikis A. R., *Mechanics of Soils.* Van Nostrand Publishing Company, New Jersey, 1963.
3. Лехницкий С. Г., *Теория упругости анизотропного тела.* Гостехиздат, М.-Л., 1950.
4. Maior N., Păunescu M., *Geotehnică şi Fundaţii.* EDP, Buc., 1967.
5. Lehr H., *Fundaţii.* Vol. I, ESAC, Buc., 1954.
6. Stănculescu I., *Curs de geotehnică şi fundaţii.* EDP, Buc., 1960.
7. Cernătescu A., Silion T., *Curs de geotehnică.* EDP, Buc., 1963.
8. Eftimie A., *Contributions à l'étude des efforts et des déplacements dans les terrains des fondations.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1968, **XIV (XVIII)**, *1-2*, pp. 541–550.

STAREA DE TENSIUNI A UNUI TEREN DE FUNDAŢIE CU ANIZOTROPIE TRANSVERSĂ, ÎN CAZUL PROBLEMEI PLANE

(Rezumat)

Pornind de la soluţia lui Michell referitoare la starea de tensiuni într-un semispaţiu transversal anizotrop, încărcat cu o forţă verticală concentrată, se stabilesc expresiile tensiunilor în cazul problemei de deformaţie plană.

Astfel, se studiază starea de tensiuni în teren în cazul fundaţiilor elastice în formă de fîşie.

Analiza soluţiilor şi exemplificările numerice duc la concluzia că anizotropia, caracterizată de raportul $n = E_H/E_V$, duce la dispersia sau concentrarea tensiunilor (după cum $n \gtrless 1$) în comparaţie cu soluţia lui Boussinesq-Flamand. Valorile coeficientului lui Poisson exercită o influenţă neglijabilă asupra fenomenului în comparaţie cu influenţa exercitată de n.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

D. C. 624; 550.3

SOME FACTORS DETERMINING THE EARTHQUAKE RESPONSE OF FEW-STORY BUILDINGS

BY

DANIEL DIACONU, I. CIONGRADI, MARCEL IŢICOVICI
and C. LUPAŞCU

Paper presented at the Scientific Session of the Polytechnic Institute of Jassy, September the 28—30 st, 1967

The estimation of the stresses and strains resulting from seismic action in structures requires a most exact knowledge of the dynamic properties of the buildings — natural period of vibration, percentage of critical damping, mode shape — as well as variation with various factors.

In the case of few-story typical actual structures (large pannels, honney-comb systems, frames with masonry filling or brickwork), some research work regarding statistical determination of dynamic characteristics were carried out by the INCERC Section of Jassy, in collaboration with Civil Engineering Department of the Polytechnic Institute of Jassy.

At the same time, the comparative influence of the various parameters (foundation medium, foundation system excitation level etc.) on the dynamic characteristics of the building has been investigated.

It was established [1]...[3] that, generally ,the value of the natural period of vibration is considerably influenced by the characteristics of foundation soil, i.e. for the same system of foundation and type of structure (founded on alluvionar soil, loessoidal, sandy-clay-dust, brown clay with calcarous seams soil) that value decreases with about 28% (Table 1).

It was also established [1]...[3] that the variation of building stiffness, especially the change of ground floor stiffness, involves essential changes concerning of the value of the natural period and basical seismic force.

At the same time, it was shown that under rather strong actions upon the building, as compared with low energetic level ones (amplitudes varying from 1μ to 0 2 mm), the natural period is not modified [1] ... [3].

The values of critical damping vary acording to the nature of the material (steel, concrete, brickwork), and the system of construction adopted. (The mean values determined experimentally on various types of buildings, are presented in Table 2).

The most important factor establishing quantitatively the seismic response, was considered to be the period of vibration. Therefore the parameters which mostly

influence the value of the natural period i.e. foundation medium and variation of mass-stiffness ratio along the height of structure, will also influence the seismic response.

Table 1

Cross-mean Period Variation with respect of Soil Type

Foundation soil type	Type of building locality	Cross (sec)	
		Mean T_1	Percentage %
Alluvial (silty clay and silty sand)	Great pannels (Level ground+ +4 stories). Design ISCAS 4117-Jassy	0.303	100
Loessoidal	Great pannels (Level ground + +4 stories). Design ISCAS 4117-Bacău	0.272	−10
Sandy-clay dust	Great pannels (Level ground+ +4 stories). Design ISCAS 4117-Bacău	0.223	−26
Brown clay with calcarous veins	Great pannels (Level ground+ +4 stories). Design ISCAS 4117-Bacău	0.217	−28

Table 2

Experimental Values of Critical Damping Percentage

Type of building	Mean ν %
Great pannels with ground level + 4 stories (design 4117)	9.70
Great pannels with ground level + 4 stories (design 1013)	9.66
Ground level + 4 storied building of hole-brick masonry	15.2
Semi-basement ground level and two-storied building of normal-brick masonry	17.0

The present paper is an approach to a series of problems relative to the change of seismic response (especially the basic shear and natural periods) in terms of foundation medium and mass-rigidity ratio along the height of the structure.

Since it is difficult to obtain experimental data by direct testing of actual structures, an analogous electric model of the structures was adopted to study the influence of the above mentioned parameters, thus facilitating operations with the various magnitudes characterisic to seismical response. The values obtained by actual structure testings will supply check data.

The analogous diagram achieved for studyind multistory structures subjected to earthquakes, is based on the following simplifying assumptions regarding the mechanical model :

a) The natural periods and mode shapes of the structure are determined along a certain direction, by the vibrations of all its supporting members (columns, shear walls, curtain walls etc.), along the same direction.

b) The building is single vibrating system composed of individual structural members even if they are made of different structural materials (metal, reinforced concrete, masonry etc.).

c) The equivalent mechanical system adopted is an cantilever beam rigidly „planted" in at base — if influence of the foundation medium is not taken into account — and elastically „planted" in, if this influence is to considered.

d) The equivalent system masses are taken as concentrated loads at each floor level.

e) The floors are taken as nondeflecting relative to plane, undergoing translations only, in the case of a stiff foundation medium, and all-over rotations and translations when the building is founded on a soft ground.

f) The floors are considered as linked only by struts (columns, the weight of which is negligible as compared to thet of the floors).

g) The horizontal deflection taken into acount in the calculus of stiffness K_i may also include the bending effects of columns along one story and the shear effects in the case of shear-walls.

The influence of the whole structure rotation in the foundation ground may be considered in this case as a corresponding change of the horizontal deflection at each level (the influence of girder flexibility may also be introduced in this way).

The adoption of this equivalent mechanic system implies minimal errors in structures having 5...10 and even 15 levels. (The analogical computer achieved is capable of modelling buildings up to 15 stories, still heaving availabilities for extension).

The analogy is clearly stated [4] by writing down the equilibrium equations of mechanical on electrical models respectively (Figs. 1 and 2).

The equation characteristic for level K motion is:

$$m_k \ddot{y}_k + \varepsilon_k (\dot{y}'_k - \dot{y}'_{k-1}) + \varepsilon_{k+1} (\dot{y}'_k - \dot{y}'_{k+1}) + K_k (y'_k - y'_{k-1}) +$$
$$+ K_{k+1} (y'_k - y'_{k+1}) + \varepsilon'_k [v(t) + \dot{y}_k] + m_k a(t) = 0.$$

The equation of the electrical model, given in terms of current quantities for the same level, is:

$$L_k \ddot{q}_k + R_k (\dot{q}_k - \dot{q}_{k+1}) + R_{k+1} (\dot{q}_k - \dot{q}_{k+1}) + \frac{1}{C_k} (q_k - q_{k-1}) +$$
$$+ \frac{1}{C_{k+1}} (q_k - q_{k+1}) + R'_k [Q(t) + \dot{q}_k] + L_k \ddot{Q}(t) = 0.$$

In these systems the damping was introduced as on equivalent over-all value realised as a constant for all the modes of vibration ($\nu = 0.05$ for steel structures, $\nu = 0.10$ for large pannel structures, $\nu = 0.12$ for monoblock reinforced concrete and $\nu = 0.15 \ldots 0.17$ for brickwork structures).

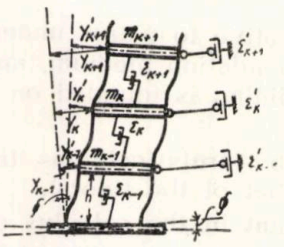


Fig. 1

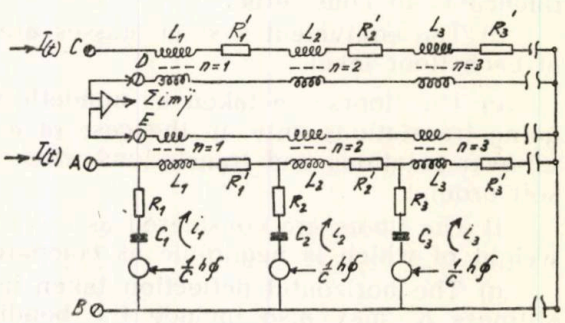


Fig. 2

The most important magnitudes influencing the seismic response of a multistory structure are obtained by measuring the electrical quantities analogous to the mechanical model.

Thus, the natural frequencies and mode of vibration are established from the resonance curves while damping is determined from the width of the resonance curves at a disagrement of 10% with resonance.

It was shown [4] that the value of displacement along the first level is obtained by measuring the voltage at the terminals of capacitors corresponding to that level, multiplied by the capacity of the capacitor. The other displacements are obtaind by vectorial addition (by means of a convenient summation meter) of the voltages measured

at the terminals of the capacitor of analogous circuits up to the level considered.

In order to determine the basic shear, the vectorial sum of voltages at the terminals of the inductances (L) should be performed. But the inductances (L) are crossed, besides the current proper to the circuit, by the scheme supply, as well. Consequently, there are several methods for determining the basic shear: a) by compensation of voltage drop corresponding to diagram supply; b) by direct measuring of voltage value at terminals of first level capacitor multiplied by the corresponding values of capacity and stiffness.

Instead of model analogy [5], the analogy where voltages are proportional to the forces, and the currents to velocities, we used in the present case, so that diagram 2 might be built on the same positive members as the rotationless, foundation diagram.

By using this analogous diagram, the influence of mass-stiffness ratio along the height of building, upon the seismic response of ground floor + 4 stories was studied, in the following variants:

a) Constant mass at each level and constant stiffness along the height of structure but uniformly differentiated according to types of structure, and variable stiffness along the height of structure (Table 3).

Table 3

K — variable, m = const.

The stiffness distribution on different stories										
	Story 1	K	K	$0.2K$	$0.1K$	$0.5\,K$	$0.167K$	K	$0.5K$	$0.1K$
	Story 2	K	K	K	K	$0.225K$	$0.143K$	K	$0.5K$	$0.1K$
	Story 3	$0.2K$	$0.1K$	K	K	$0.167K$	$0.125K$	K	$0.5K$	$0.1K$
	Story 4	K	K	K	K	$0.125K$	$0.111K$	K	$0.5K$	$0.1K$
	Story 5	K	K	K	K	$0.1\,K$	$0.1K$	K	$0.5K$	$0.1K$
T sec	Mode I	0.480	0.632	0.552	0.738	0.658	0.890	0.350	0.783	1
	Mode II	0.126	0.135	0.200	0.218	0.250	0.300	0.114	0.258	0.324
	Mode III	0.057	0.056	0.135	0.137	0.128	0.180	0.074	0.155	0.198
S	Mode I	2.220	1.285	2.620	1.620	1.500	1.140	4.050	1.590	1
	Mode II	0.300	0.356	0.048	0.023	0.179	0.114	0.120	0.114	0.069
	Mode III	0.035	0.036	0.021	0.012	0.075	0.043	0.056	0.037	0.029

b) Constant stiffness along the height of structure and variable mass (Table 4).

c) Variable stiffness and mass along the height of structure (Table 5).

Table 4

m — variable, K = const.

The mass distribution on different stories	Story 1	m	m	m	$2m$	m	m	m	m	$2m$	m
	Story 2	$2m$	$2m$	$2m$	$2m$	m	m	m	$2m$	m	m
	Story 3	m	$2m$	$2m$	$1.5m$	m	m	$2m$	m	m	m
	Story 4	$2m$	$2m$	$2m$	m	m	$2m$	m	m	m	m
	Story 5	m	m	$2m$	m	$2m$	m	m	m	m	m
T sec	Mode *I*	1.105	1.225	1.345	1.125	1.180	1.130	1.105	1.040	1.020	1
	Mode *II*	0.312	0.314	0.357	0.348	0.360	0.329	0.351	0.370	0.370	0.324
	Mode *III*	0.173	0.176	0.274	0.207	0.221	0.188	0.239	0.171	0.245	0.198
S	Mode *I*	1.390	1.530	1.420	1.390	0.945	1.180	1.210	1.150	1.120	1
	Mode *II*	0.078	0.093	0.059	0.177	0.155	0.107	0.053	0.100	0.109	0.069
	Mode *III*	0.036	0.037	0.060	0.037	0.052	0.032	0.082	0.032	0.052	0.029

Tabelul 5

m — variable, K — variable

		K	m	K	m	K	m
The mass and stiffnes distribution of different stories	Story 1	$0,5K$	$2m$	$0,167K$	$2m$	$0.1K$	m
	Story 2	$0,25K$	$2m$	$0,143K$	$2m$	$0.1K$	m
	Story 3	$0,167K$	$1,5m$	$0,125K$	$1,5m$	$0.1K$	m
	Story 4	$0,125K$	m	$0,111K$	m	$0.1K$	m
	Story 5	$0,1K$	m	$0,1K$	m	$0.1K$	m
T sec	Mode *I*	0.712		0.842		1.0	
	Mode *II*	0.320		0.353		0.324	
	Mode *III*	0.157		0.169		0.198	
S	Mode *I*	2.0		1.620		1.0	
	Mode *II*	0.279		0.202		0.069	
	Mode *III*	0.277		0.186		0.029	

For all variants, the structure was considered rigidly „planted" in the ground.

Considering the masses uniformly distributed along the height and the stiffness as variable along the structure as a whole — or along its height (Table 3) — we note that for structures of uniform stiffness varying from $0.1\,K$ (flexible structures) to $1\,K$ (stiff structures) the

periods of first mode (T_I) decrease to 0.350, while the values of basic elastic force increase 4.05 times. The increase rate of the basic elastic force is much grater than decrease rate of the natural period, under increasing stiffness conditions. Thus we are justified in declaring that in the case of few-story structures, the optimum stiffness is the medium stiffness of the diafragm-frame type (for an uniform stiffness of $0.5K$, T_I decreases to 0.763, the basic elastic force increasing only 1.59 times).

Linear decrease of stiffness along the height leads to a 40% decrease of T_I and to 1.50 times increase of basic elastic force. From this point of view, structures having a linear stiffness variation along the height in the range $0.5 \ldots 0.1\ K$, are similar to structures of uniform mean stiffness along a $0.5\ K$ height.

A change in the stiffness of the ground level or of any current level is likely to effect seriously the natural period and basic elastic force. Thus, for a drop of $0.1\ K$ in the stiffness of ground level and $0.2\ K$ in the stiffness of the upper part compared to a similarly proportional drop in the stiffness of a current level, it is found that, through periods are shorter for the intermediate flexible levels, the basic elastic force is lower (about 12 ... 20% of the basic elastic force in the case of a flexible ground floor structure). In this case, it seems highly preferable to adopt an intermediate elastic level structure, able to decrease about 4 times the basic elastic force, thus eliminating concurrent high stress concentrations at the base of elastic ground-level structures.

The higher modes weight with variation of structure stiffness is negligible as compared to the first mode, both regarding the period and basic elastic force.

At the same time it is found that periods, as well as basic elastic forces of the higher modes, are less sensible to large stiffness variations.

Taking the stiffness as constant and the masses as variable (in the ranges practically allowable — Table 4), we find that if the mass of a level is doubled along its height, the natural period T_I increases continuously, the maximum value being 1.18 times when the mass of last level is displaced. But the maximum value of basic elastic force is obtained when doubling the mass on the IIIrd level (1.21 times).

When doubling the masses of leevels II, III, IV and V in various combinations the periods of first mode increase, the maximum value being 1.345 times greater than in the case of an uniform distribution of mass m, for the distribution m, $2m$, $2m$, $2m$, m.

The value of the basic elastic force is obtained at its maximum in the case of m, $2m$, $2m$, $2m$, m distribution (1.53 times) and minimum in the case of the m, m, m, m, $2m$ distribution (0.945 times).

At the same time, the influence of the higher modes is negligible if compared to first mode.

The simultaneous variation of stiffness and masses along the height of building (Table 5) brings about no essential changes in the data established previously, e.g., a rational distribution of masses and especially of stiffness along the building may lead to an optimum design of structure strenght under seismic action, satisfying also the so called functional conditions.

It was found besides that in the case of few-story structures, for acceptable stiffness and mass distributions along the height, the influence of the higher modes is negligible as compared to the first mode (Table 5).

One of the basic factors controlling the seismic response of structures subjected to earthquakes, is the foundation soil. And the smaller the deflections proper to the structure, the greater this influence, when compared to the displacements due to foundation soil deflections (the case of few-story buidings with concrete diaphragms, brickwork etc.).

A comparison between building deflectibility and that of foundation soil can be achieved by computing total displacement (Δ) under a unit force applied to the upper part of the building [6]:

$$\Delta = \delta_T + \delta_M + \delta_x + \delta_\varphi = H\sum_i \frac{k}{GA_i} + H^3 \sum_i \frac{1}{EI_i} + \frac{1}{K_x} + \frac{H^2}{K_\varphi},$$

where: δ_T is the displacement due to shear, A_i — plane area of cross-section of a structural member, G — corresponding transversal modulus of elasticity, K — shape factor of cross section, δ_M — displacement due to bending moment, I_i — plane inertia moment of cross section of structural member, E — longitudinal modulus of elasticity, α — a factor acounting for the joints, δ_x — sliding displacement of the foundation (K_x) — the sliding soil stiffness in terms of uniform elastic sliding factor, (C_x), of uniform elastic compressibility factor, (C_z), and of geometrical dimensions of foundation bed and side areas), δ_φ — structural displacement due to foundation rotation (K_φ — angular stiffness of foundation soil depending on C_x, on nonuniform compressibility factor (C_{px}), on uniform elastic sliding factor (C_φ), and of geometrical characteristics — inertia moment foundation bed and side areas of foundation).

In the case of a building foundation of usual depth, the side surfaces influence on rocking and sliding stiffness may be neglected. Thus $K_x = C_x A_f$ and $K_\varphi = C_\varphi I_f$ where: A is the foundation bed area and I_f is the geometrical inertia moment of the foundation bed area in relation to an axis passing through the centre of gravity of the foundation area at straight angles to vibration plane.

From various theoretical studies [6] it results also for stiff structures that the value of sliding displacement along the foundation soil are small, about one tenth of the displacement due to rotation of foundation in the ground.

For a system of a single degree of dynamic freedom (neglecting damping, considered as unit weight, the period (T), of vibration will be equal to about $0.2\sqrt{1/K}$, where K represent stiffness of structure.

The influence of rocking in foundation soil will be taken into acocunt by adding to displacement of $1/K$, the displacements resulted from the rotations:

$$\varphi = \frac{M_f}{K_\varphi} = \frac{1 \cdot h}{K_\varphi}, \quad y = \frac{1}{K} + \frac{h^2}{K_\varphi},$$

when h is height of the structure under consideration.

Thus, the structural period, taking into account the foundation ground rocking (T_φ), will be:

$$T_\varphi \approx 0.2 \sqrt{\frac{1}{K} + \frac{h^2}{K_\varphi}} \cdot$$

From the ratio of the two period of vibration, it follows:

$$T_\varphi = T \sqrt{1 + \frac{Kh^2}{K_\varphi}} \cdot$$

The resulting parameter $A = Kh^2/K_\varphi$, which includes the influence of building rocking on foundation soil is nondimensional. This form is quite convenient for the corresponding analogical diagram.

For systems with more than one degree of freedom (also neglecting the damping), the exact relation giving the higher modes as well as the approximate relations including the influence due to foundation rotation, may be established for the fundamental mode only.

For instance, in the case of a system with three degrees of freedom, the secular equation of pulsation is:

$$m_1 m_2 m_3 \omega^6 (\delta_{11} \delta_{23}^2 + \delta_{22} \delta_{12}^2 + \delta_{33} \delta_{13}^2 - \delta_{11} \delta_{22} \delta_{33} - 2\delta_{12} \delta_{13} \delta_{23}) +$$
$$+ \omega^4 [m_1 m_2 (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2) + m_1 m_3 (\delta_{11} \delta_{33} - \delta_{13}^2) +$$
$$+ m_2 m_3 (\delta_{22} \delta_{33} - \delta_{23}^2)] - \omega^2 (m_1 \delta_{11} + m_2 \delta_{22} + m_3 \delta_{33}) + 1 = 0.$$

The values of displacements without/with foundation rotations are given in Fig. 3.

The secular equation of frequencies without foundation rotation, considering as equal the masses, stiffnesses and the level heights, is:

$$\frac{m^3}{K^3} \omega^6 - 5 \frac{m^2}{K^2} \omega^4 + 6 \frac{m}{K} \omega^2 - 1 = 0,$$

while the secular equation of frequencies taking into account the foundation rotation, is:

$$\frac{m^3}{K^3}\omega_\varphi^6(1+3A)-\frac{5m^2}{K^2}\omega_\varphi^4\left(1+\frac{14}{5}A\right)+\frac{6m}{K}\omega_\varphi^2\left(1+\frac{7}{3}A\right)-1=0.$$

Using Rayleigh's relation, $\omega_I^2=g\sum_k m_k y_k/\sum_k m_k y_k^2$ with the data of Fig. 4, it results that:

a) in the case of structure rigidly „planted" in foundation soil:

$$\omega_I^2=\frac{K}{m}\cdot\frac{14}{70};$$

b) in the case when the rocking of foundation in the ground is taken into account:

$$\omega_\varphi=\frac{K}{m}\cdot\frac{14+36A}{70+372A+504A^2}.$$

The equation of analogous electric pulses — neglecting damping — set for the analogical diagram in Fig. 2, is:

$$L^3C^3\omega_\varphi^6(1+3A)-5L^2C^2\omega_\varphi^4\left(1+\frac{14}{5}A\right)+6LC\omega_\varphi^2\left(1+\frac{7}{3}A\right)-1=0.$$

Obviously, the above mentioned relation is analogous to the relation set for the mechanical system (three-degree system), where

$$A=\frac{1}{C}h.$$

The nondimensional parameter by which the foundation soil influence was introduced, takes into account the stiffness (K) and the level height (h), the geometrical characteristics of the foundation (I_f) as well as the soil properties, by means of a factor of elastic nonuniform compressibility of the soil (C_φ).

Thus, the „structure accomodation" (A) could be stated as:

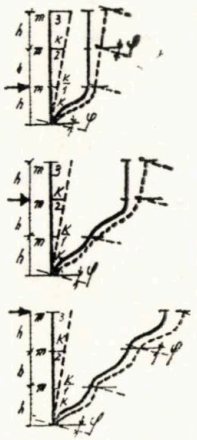
$$A=\frac{Kh^2}{K_\varphi},$$

where $K_\varphi=C_\varphi I_f$.

One can see that three independent factors occur in this parameter, refering to the elasto-geometrical characteristics of the structure, foundation and to the nature of foundation soil.

For the few-story structures, the values of the level heights and stiffness were taken as constant. When these magnitudes vary between rather narrow limits, a mean value may be worked with.

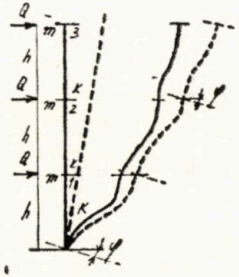
The building-foundation system was taken into account by means of the inertial moment of foundation bed, namely I_{brutto}, in the case



δ_{ik}	Without rotation	With foundation rotation
δ_{31}	$\frac{1}{K}$	$\frac{1}{K}+3\frac{h^2}{K_\varphi}$
δ_{21}	$\frac{1}{K}$	$\frac{1}{K}+2\frac{h^2}{K_\varphi}$
δ_{11}	$\frac{1}{K}$	$\frac{1}{K}+\frac{h^2}{K_\varphi}$
δ_{32}	$\frac{2}{K}$	$\frac{2}{K}+6\frac{h^2}{K_\varphi}$
δ_{22}	$\frac{2}{K}$	$\frac{2}{K}+4\frac{h^2}{K_\varphi}$
δ_{12}	$\frac{1}{K}$	$\frac{1}{K}+2\frac{h^2}{K_\varphi}$
δ_{33}	$\frac{3}{K}$	$\frac{3}{K}+9\frac{h^2}{K_\varphi}$
δ_{23}	$\frac{2}{K}$	$\frac{2}{K}+6\frac{h^2}{K_\varphi}$
δ_{13}	$\frac{1}{K}$	$\frac{1}{K}+3\frac{h^2}{K_\varphi}$

$$\varphi=\frac{M_f}{K_\varphi};\ \delta_{\varphi_i}=\varphi\sum_1 h_i$$

Fig. 3



y_i	Without rotation	With foundation rotation
y_3	$\frac{6}{K}Q$	$Q\left(\frac{6}{K}+18\frac{h^2}{K_\varphi}\right)$
y_2	$\frac{5}{K}Q$	$Q\left(\frac{5}{K}+12\frac{h^2}{K_\varphi}\right)$
y_1	$\frac{3}{K}Q$	$Q\left(\frac{3}{K}+6\frac{h^2}{K_\varphi}\right)$

$$Q=mg \qquad \varphi=Q\,\frac{1h+2h+3h}{K_\varphi}=6h\frac{Q}{K_\varphi}$$

$$y_i=\varphi\sum_1^i h_i$$

Fig. 4

of a general foundation plate or a dense foundation girder network, and I_{netto} in the case of a continuous or insulated widely spaced foundation plates.

The values of the elastic non-uniform compressibility soil factor were adopted in terms of soil strenght characteristic, from the data given in [6].

Thus, the maximal and minimal values of the „accomodation" factor (A) have been determined for various structural systems, and these values are given (Table 6).

Table 6

Maximal and Minimal Values of the Accomodation Factor

Type of structure	Values of A	A	
		I_{brutto}	I_{netto}
Great pannels of reinforced concrete : levelground + 4 stories. Design 4117.	minimal	0.53	0.72
	maximal	1.93	2.60
Great pannels of vibrated masonry, 14 cm thick : levelground + 4 stories. Design 4117.	minimal	0.13	0.18
	maximal	0.46	0.62
Great pannels of ceramic blocks with vertical holes : levelground + 4 stories by functional distribution. Design 1013.	minimal	0.32	0.48
	maximal	0.10	1.70
Normal brick masnery: levelground + + 4 stories; typical section C. 222 — — C. 001	minimal	0.17	0.26
	maximal	0.60	0.90
Reinforced concrete frames with filling masonry: levelground + 4 stories.	minimal	0.05	0.11
	maximal	0.16	0.40

The accomodation factor value is seen to vary from 2.6 for high-stiff buildings (reinforced concrete diaphragms) founded on a soft ground, to 0.05 for flexible structures (reinforced concrete frames with brickwork walls) founded on „hard" ground.

Taking various values for the „accomodation" factor, and using the analogous electric diagram in Fig. 2, the pulse ratio variations ω/ω_φ was obtained in terms of the number of levels considering the building as rocking or no inside foundation soil.

The numerical data are presented in Table 7 and graphically by the curves in Fig. 5.

It may observed that for accomodation factor (A) varying from 0.01 to 2.5, the pulse ratio (ω/ω_φ) increases from about 2% in the four or five story buildings, to 180% for one story and to 35% for five story buildings.

Keeping in mind that this substantial change of the period of vibration in terms of various values of the accomodation factor, it was attempted to point out also the variation of the ratio of basic elastic forces, occuring in a building with/without accomodation, subjected to an actual seismic action.

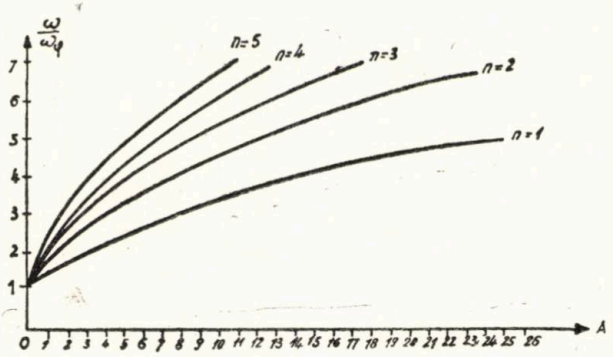


Fig. 5

Table 7

Pulse Ratio Variation

A	ω/ω_φ				
	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
0.01	—	—	—	1.019	1.020
0.05	—	—	1.065	1.085	1.05
0.1	1.050	1.090	1.130	1.165	1.200
0.2	1.096	1.175	1.243	1.310	1.370
0.5	1.225	1.398	1.542	1.675	1.800
1	1.41	1.705	1.940	2.154	2.345
2	1.73	2.20	2.56	2.880	3.16
5	2.45	3.26	3.87	4.39	4.84
7	2.83	3.80	4.54	5.16	5.70
10	3.32	4.49	5.40	6.12	—
25	5.10	7.00	8.40	—	—

The natural period of vibration of the building model with/without accomodation, may be achieved in two ways, namely :

a) Considering the accomodate building of period T, and the building with a variation of accomodation of period $T_\varphi = T$. (In other words, the actual frequency with/without accomodation was taken equal to an experimentally measured value of 3 Hz, for large pannel five-story buildings).

b) Considering the building without accomodation of period T, and with variation of accomodation, of period $T_\varphi \gg T$ (therefore, in the case of non accomodation, the frequency is taken as equal to 7.2 Hz, and considering the accomodation variation, the frequency is 3 Hz, for the same large pannel five-story buildings).

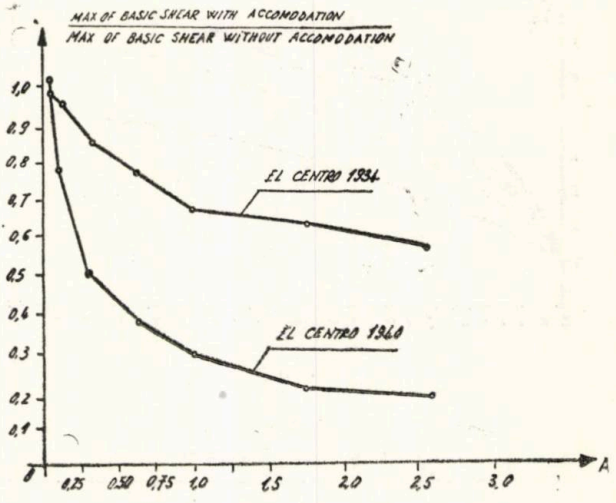


Fig. 6

In the first case of modelling ($T_\varphi = T$, with the effect of accomodation), it was obtained the variation of the basic elastic force ratio shown in Fig. 6, for two actual recorded earthquakes — El Centro N-S 1934 and El Centro N-S 1940. (These two earthquakes were used since we have no records of two Romanian strong earthquakes, which to satisfy the desired condition, i.e, the same epicentrum and recording station and the same acceleration of 0.25 g).

Diagram in Fig. 6 shows that the decrease of the basic elastic force, for the same value of the accomodation factor is different, depending on earthquake shape. For instance, for $A=1$ the decrease of the basic elastic force is 33% for the El Centro 1934 earthquake and 70% for El Centro 1940 earthquake.

This difference is also observed that decrease with decrease of accomodation factor values below unity and keep approximatelly constant when the values of A are greater than unity.

It seems therefore obvious that decrease of basic elastic force is quite insufficient, if the foundation medium is considered as influen-

cing only the period of vibration, since this decrease is greatly affected by the shape of earthquake as well.

Besides, the time-variation of basic elastic force was observed to have an oscillation feature similar to that obtained for a system without foundation rocking and of longer period.

The values of the higher mode frequencies are strongly affected by the presence of the foundation accomodation e.g. at the same time as A increases, the frequency interval also increases, especially between first and second mode.

Considering the second case of modelling ($T_\varphi = 1/3$ sec, with the variation of A and $T = 1/7$ sec, for a five-story building), a variation of 10 ... 15% of the ratio of basic elastic force with accomodation to basic elastic force without accomodation was obtained (this modelling is unreal because the building has accomodation all the time).

It follows then, from these experimental data, that the decrease of the basic elastic force, resulted only from the increase of the natural period of vibration, must be achieved very continously, since the shapes of earthquakes and implicity — their frequency spectre (even when they have the same epicentrum) — may vary, decreasing and some time, increasing.

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Structure Statics
and Strength of Materials
and
INCERC, Section of Jassy

REFERENCES

1. Şesan A., Diaconu D., *Cercetări experimentale privind calculul seismic al construcţiilor din panouri mari.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1962, **VIII (XII)**, *1—2*, pp. 379—382.
2. Şesan A., Groper M., Diaconu D., Ciongradi I., *Determinarea perioadelor proprii ale construcţiilor din panouri mari.* Bul. şt. Inst. constr. Buc., 1963, *10*.
3. Şesan A., Ciongradi I., Diaconu D., Strat L., *Experimental Determination of Natural Periods and Damping, in Buildings.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1964, **X (XIV)**, *3—4*, pp. 337—344.
4. *** *Modele şi scheme analogice pentru studiul seismic al structurilor.* Referat INCERC, poz. plan IV—41, oct. 1965; referat INCERC, poz. plan 90 b, oct. 1966.
5. Meritt R. G., Housner G. V., *Effect of Foundation Compliance on Earthquake Stresses in Multistory Buildings.* Bull. of Seism. Soc. of America, October, 1954.
6. Korcinski N. et alc., *Bazele proiectării clădirilor în regiuni seismice.* Ed. Tehn., Buc., 1964.

ASUPRA UNOR FACTORI CARE DETERMINĂ RĂSPUNSUL SEISMIC AL UNOR CLĂDIRI CU MAI MULTE ETAJE

(Rezumat)

Se studiază influența exercitată de distribuția maselor și rigidităților pe înălțimea structurii, asupra caracteristicilor dinamice și a răspunsului seismic în cazul clădirilor cu puține nivele solicitate de cutremure puternice.

Rezultatele prezentate în lucrare au fost obținute fie prin încercarea structurii reale, fie prin modelare analogică la un calculator.

Se cercetează, în special, variația perioadelor proprii de vibrație și a forțelor tăietoare de bază. O atenție deosebită este acordată influenței pe care o exercită terenul de fundație atît asupra perioadelor cît și asupra forțelor seismice totale de la baza construcției.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

C. D. 624.1

SETTLEMENT OF STRUCTURES IN THE CITY OF JASSY, ROMANIA

BY

AUREL CERNĂTESCU, TUDOR SILION, VICTOR CIUBOTARU, MARIA CIJEVSCHI, PAUL RĂILEANU and RADU APOSTOLESCU

Paper presented at the Scientific Session of the Polytechnic Institute of Jassy, September the 28—30 st, 1967

Between the years 1962 and 1965 four cases of settlements of reinforced concrete structures of eleven storeys high (B_1, B_2, H_1, H_2) in the valley of the Bahlui river were studied.

In this area of the city, we find quaternary deposits with a thickness variable between 10...12 m deep. The underlaying rock is a terthiary (Sarmatian) marly clay.

An extensive soil investigation was done for these buildings. A number of four boreholes of 8 in dia. were put down until the underlaying rock, on the site of every building. From these boreholes were took many undisturbed samples. Extensive laboratory tests were carried out on theses samples.

The results of the laboratory test of every site are shown in the Tables 1...4 which show the variation of moisture content, liquid limit, plastic limit, compressibility, shear strength, grain size, void ratio. Also in the Fig. 1..4 are shown the soil profiles and the ground water level.

The foundations of the buildings consist of rafts designed to decrease differential settlement and the pression on the ground. They were founded 2.5 m below the ground surface, on a clayel layer, which overlies a sand layer of a variable thickness between 0.50 and 6.00 m. The pressure on clay layer under the foundation was 1.50 kg/cm^2. The bearing capacity of the clay layer was computed with T e r z a g h i's [3] formula.

Table 1

Building B_1

F_1					F_2					F_3				
Soil type	E_{13}	I_c	n	level	Soil type	E_{13}	I_c	n	level	Soil type	E_{13}	I_c	n	level
Silty clay	36 67	0.65 0.84	52 49	1.20	Fat clay	40 56	0.82 0.85	50 51	2.30	Silty clay	24 59	0.72 0.61	51 45	1.90
Fine sand	40 1.25	—	41	5.50	Clayey silt	105 95	0.82 0.79	44 40	4.00	Fine sand	—	—	—	5.50
Marly clay	77	0.94	39	10.10 11.00	Sand	—	—	—	6.50	Marly clay	83	0.97	38	11.00 12.0
					Marly clay	78	0.94	37	11.60 10.50					

Table 2

Building B_2

F_1					F_2					F_3					F_4				
Soil type	E_{13}	I_c	n	level	Soil type	E_{13}	I_c	n	level	Soil type	E_{13}	I_c	n	level	Soil type	E_{13}	I_c	n	level
Fat clay	30 68	0.74 0.82	54 49	1.60	Fat clay	45 71	0.85 0.82	47 57	0.40	Fat clay	47 42	0.83 0.72	50 45	1.20	Fat clay	—	0.89 0.83	—	1.80
Silty clay	74	0.91	40	5.50	Clayey silt	83 100	0.77 0.95	46 43	5.50	Silty clay	28 20	0.72	55	5.30	Silty clay	—	—	—	4.00
Sand	—	—	—	7.00	Sand	—	—	—	8.70	Sand	—	—	—	7.50	Sand	—	—	—	7.50
Marly clay	—	0.98	41	9.20 11.00	Marly clay	71	0.94	43	9.20 10.00	Marly clay	—	0.94	42 48	8.70 10.00	Marly clay	—	—	—	10.30 12.00

Table 3

Building H_2

F_1					F_3					F_2					F_4				
Soil type	E_{13}	I_c	n	level	Soil type	E_{13}	I_c	n	level	Soil type	E_{13}	I_c	n	level	Soil type	E_{13}	I_c	n	level
Fat clay	69 96	0.80 0.83	44 46	8.20	Fat clay	80 74	0.74 0.82	53 52	6.00	Fat clay	65 90	0.81 0.82	47 53	5.20	Fat clay	54 83	0.71 0.80	54 46	7.50
					Clayey silt	—	—	—	9.50	Clay	80	—	—	7.00					
Clayey silt	—	—	—	10.70	Sand	—	—	—	12.80	Sand	—	—	—	10.60	Clayey silt	154	0.62	45	9.20
Sand	—	—	—	11.20	Gravel	—	—	—	14.00	Gravel	—	—	—	11.20	Sand	—	—	—	12.70
Marly clay	—	—	43		Marly clay	—	—	39		Marly clay	—	—	39		Marly clay	—	0.77	40	—

Table 4

Building H_1

F_4					F_3					F_2					F_1				
Soil type	E_{13}	I_c	n	level	Soil type	E_{13}	I_c	n	level	Soil type	E_{13}	I_c	n	level	Soil type	E_{13}	I_c	n	level
Clay	59 74	0.80 0.77	52 48	6.60	Clay	63 125	0.79 0.85	52 49	6.80	Clay	60 72	0.79 0.89	51 47	7.70	Clay	46 80	0.94 0.96	53 51	7.70
Sand	—	—	—	11.40	Silty clay	—	—	—	7.00	Silty clay	67	0.60	43	8.90	Sandy silt	67	—	—	9.30
					Sand	—	—	—	11.45	Sand	—	—	—	13.00	Sand	—	—	—	13.50
Marly clay	105	0.94	37		Marly clay	74	0.94	40		Marly clay	105	0.93	38		Marly clay	133	0.94	37	

In order to measure the settlements 6 until 8 bench marks were installed at a depth of 12 and 2 m, and 12 settlements bolts were inserted in each building.

The final settlement for each corner and of the center of the raft was computed using the equation :

$$s = \int m_v \Delta\sigma \, dz,$$

where : m_v is the compressibility factor as measured in the oedometer test, $\Delta\sigma$ — the increase of vertical stress at the level z to be considered.

The value $\Delta\sigma$ was calculated on the basis of Boussinesq's stress distribution. The total height of the bed responsible for the settlements is equal with the thickness of the quaternary deposits.

Because the raft foundation and the structure were very stiff. settlements computed for an infinite flexible raft were corrected using the folowing relation :

$$d = \frac{2f_m - f_1 - f_2}{3},$$

where : d is the correction of the calculated settlement, f_m — settlement for an infinite flexible raft in its middle, f_1, f_2 — settlements in the corners of the same raft. In the fig. 5, 6, the observed settlements are shown. We can apply here the onedimensional consolidation theory because the ratio of the sides of the raft is smaller than 3 and the tickness of the compressible layer smaller than the half of the raftside.

The settlements confirm that the stiffness of the raft and of the structure in cooperation are very high (they are all on a long side of the building in a straight line).

The calculated settlements were smaller than the allovable settlement for such structures (20 cm in Romania).

The settlements were regularly measured for each storey since the beginning of construction and later on after 4 and 6 months.

From Tables 5 and 6 we can see that ratio between computed and measured settlements was 1.15...1.72.

Figures 7...10 show the time-settlements curves of the greatest settlement for each building.

In order to limit the primary and secondary consolidation Terzaghi's formula was used for the onedimensional problem

$$s_t = s_f (1 - e^{-\lambda t}),$$

mhere : s_t is the settlement at the time t, s_f — the final settlement, λ — consolidation factor, t — time.

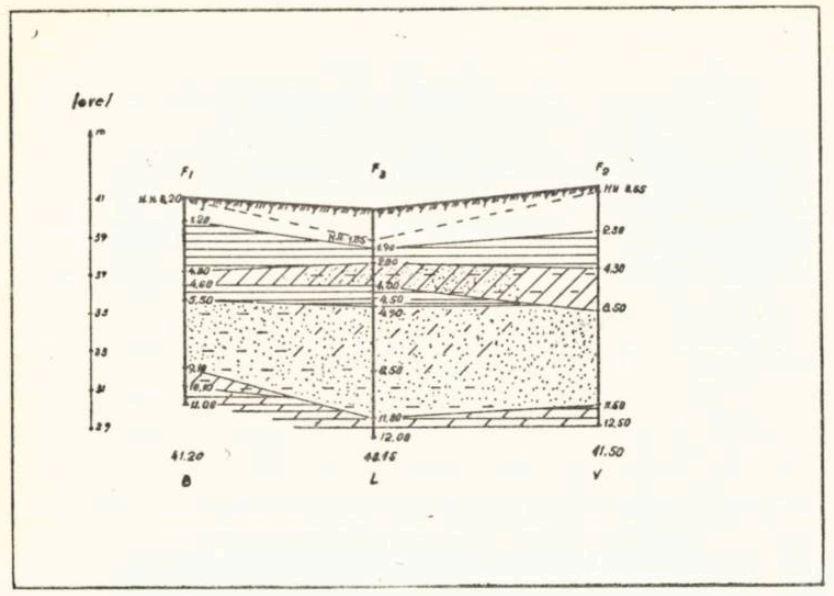


Fig. 1. – Building B_1.

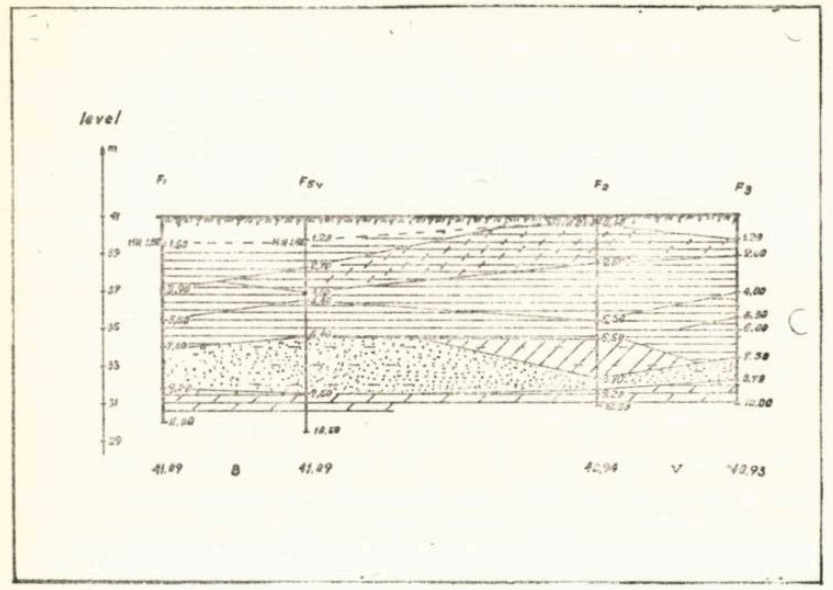


Fig. 2. – Building B_2.

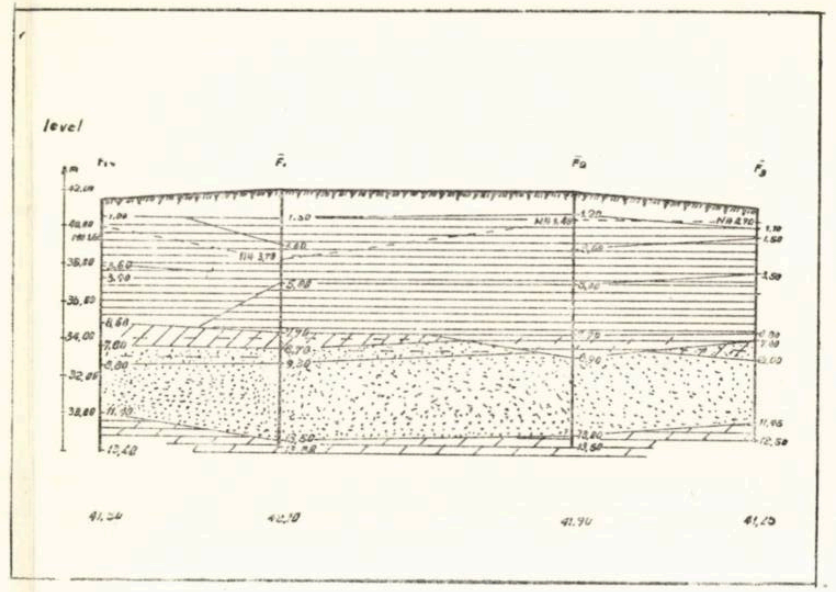


Fig. 3. – Building H_1.

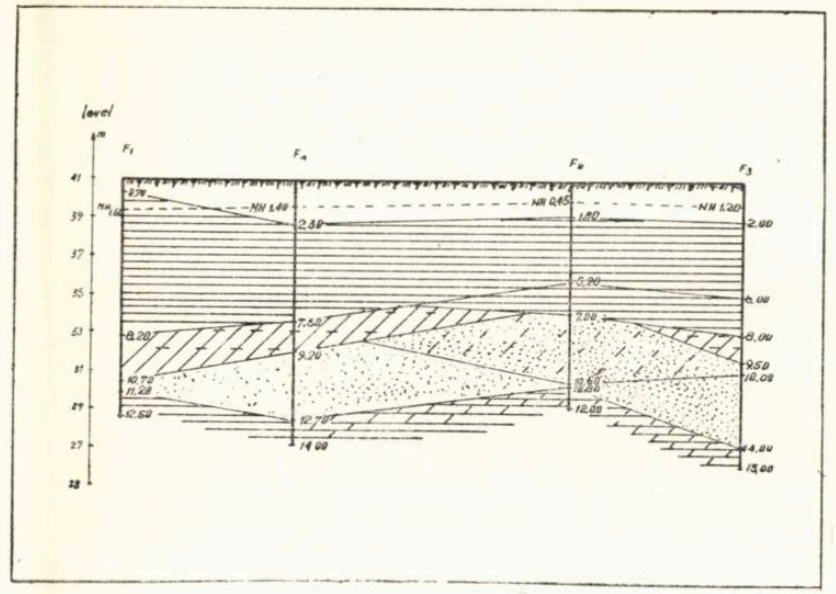


Fig. 4. – Building H_2.

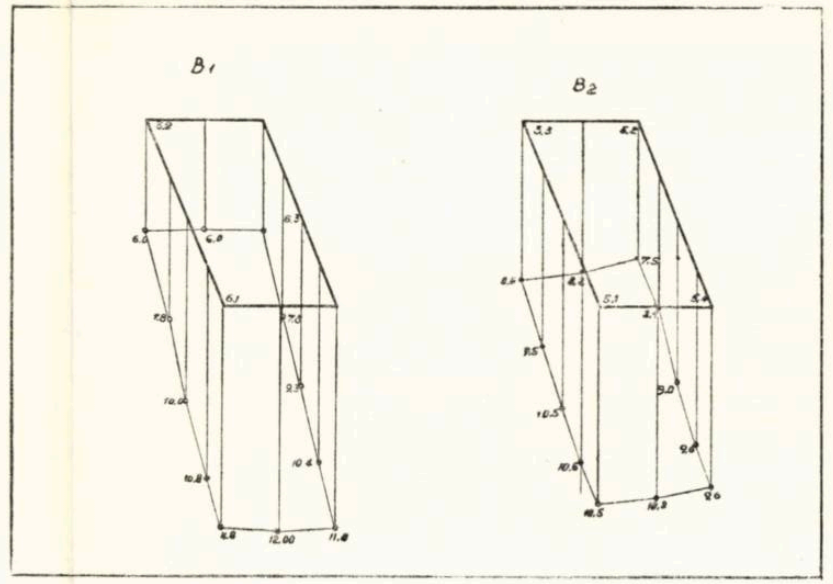


Fig. 5. – Measured settlements in cm.

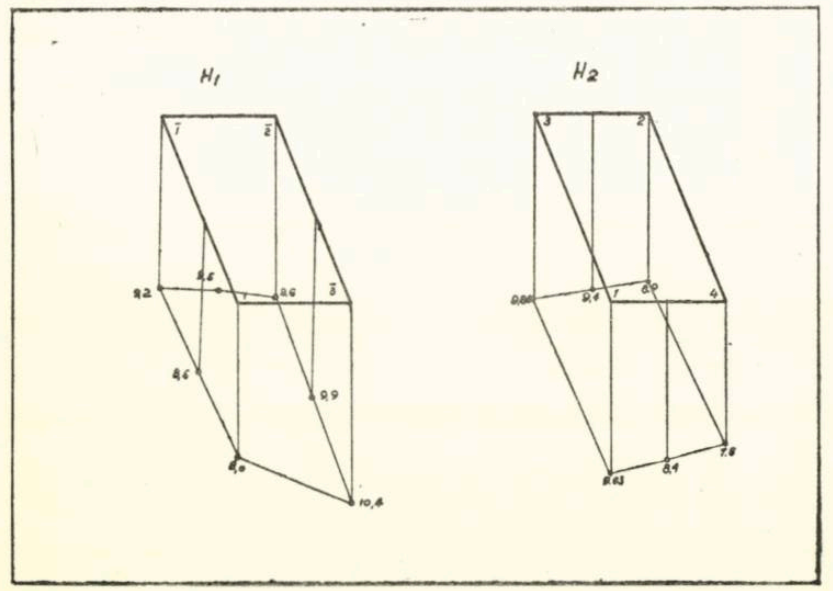


Fig. 6. – Measured settlements in cm.

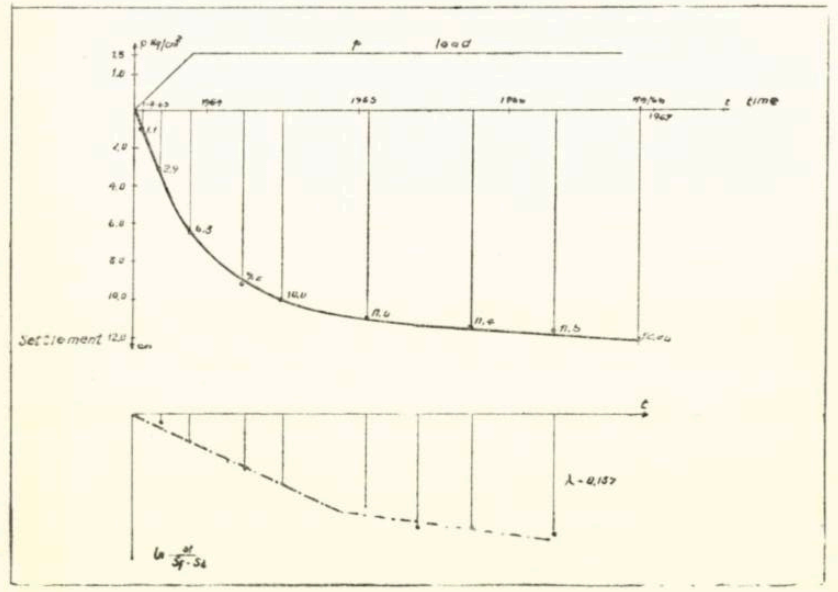


Fig. 7. – Building B_1.

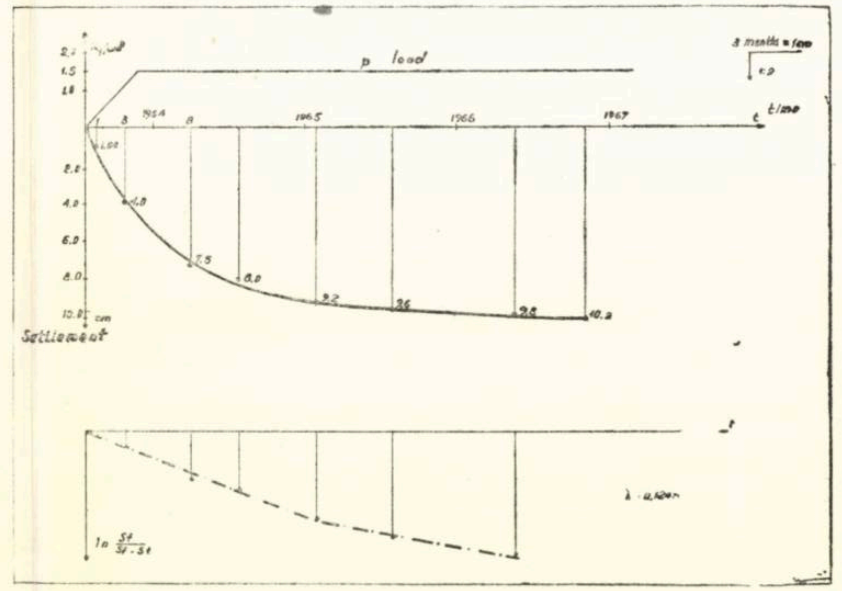


Fig. 8. – Building B_2.

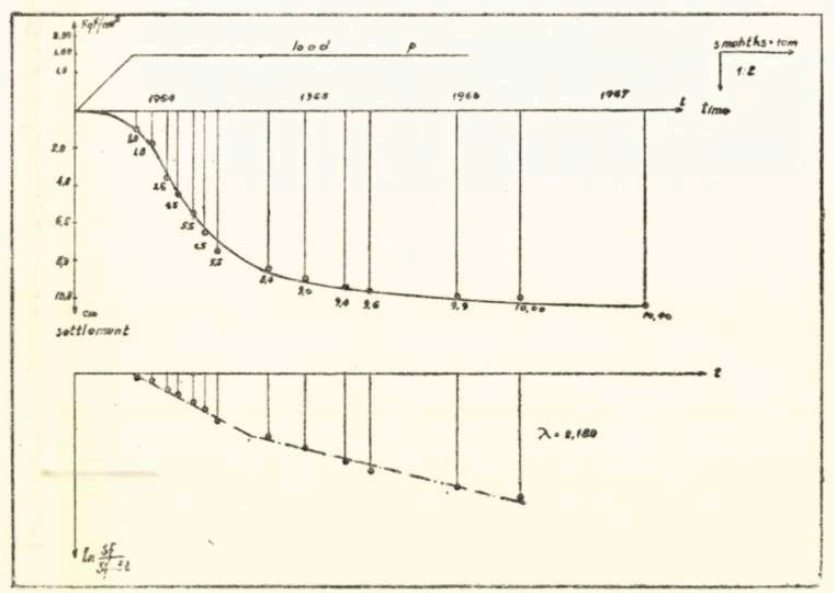


Fig. 9. – Building H_1.

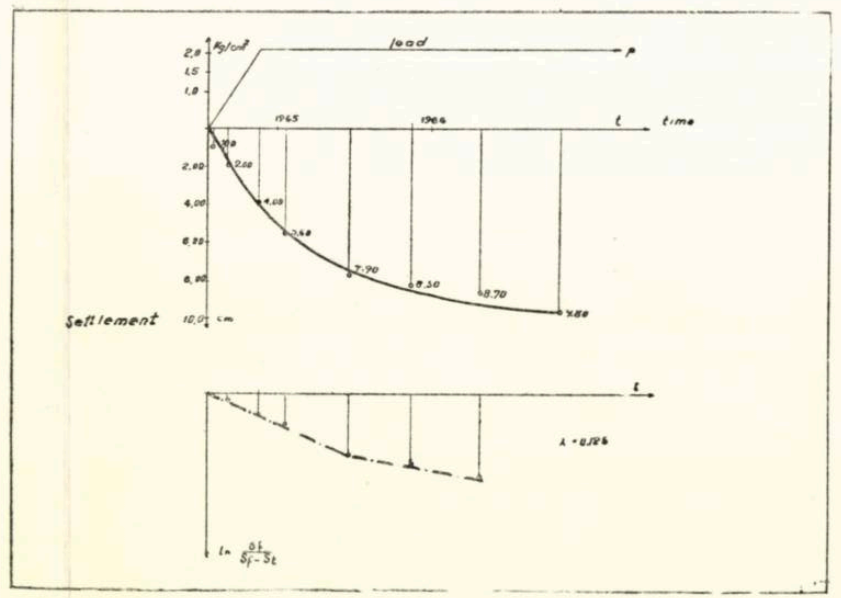


Fig. 10. – Building H_2.

Fig. 10. — Building H_2.

Fig. 9. — Building H_1.

Fig. 12. — Measured settlements in cm.

Fig. 11. — Building H_2.

Fig. 8. — Building B_2.

Fig. 7. — Building B_1.

Fig. 6. — Measured settlements in cm.

Fig. 5. — Building B_2.

Fig. 4. — Building B_1.

Table 5

Building	B_1				B_2				H_1				H_2			
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
Computed settlement cm	14.7	13.6	13.37	—	15.3	9.5	14.7	13.9	10.4	11.3	14.0	12.0	10.8	12.4	12.3	12.7
Measured settlement cm	11.8	6.60	9.30	—	10.2	7.5	8.6	9.6	8.00	9.2	9.6	10.4	9.00	8.9	9.8	7.5
Settlement ratio	1.24	2.27	1.26	—	1.45	1.21	1.72	1.45	1.30	1.22	1.46	1.15	1.20	1.40	1.25	1.70

Table 6

Building	B_1				B_2				H_1				H_2			
	1–2	2–3	3–4	4–1	1–3	3–2	2–4	4–1	1–1	1–2	2–3	3–1	1–3	3–2	2–4	4–1
Deflection	$\frac{1}{1\,220}$	$\frac{0}{1\,000}$	$\frac{1}{5\,400}$	$\frac{1}{3\,700}$	$\frac{1}{1\,420}$	$\frac{1}{4\,900}$	$\frac{1}{3\,000}$	$\frac{1}{4\,900}$	—	$\frac{1}{7\,600}$	$\frac{1}{10\,500}$	—	—	$\frac{1}{14\,800}$	—	$\frac{1}{7\,400}$

$$f = \frac{2\,s_m - s_1 - s_2}{2\,l}$$

After Terzaghi's formula the ratio between the settlement at the time t and the final settlement is

$$\frac{s_t}{s_f} = \left(1 - \frac{8}{\pi^2} e^{-\pi^2 ct/4H^2}\right).$$

This relation can also be written

$$\frac{s_f - s_t}{s_f} = e^{-\lambda t} \quad \text{or} \quad \ln \frac{s_f - s_t}{s_f} = -\lambda t.$$

A plot with $\ln[(s_f - s_t)/s_f]$ versus λt represents a straight line if the consolidation factor remains constant. The slope of the straight line is

$$\lambda = \frac{1}{t} \ln \frac{s_f}{s_f - s_t}$$

and represents the consolidation factor.

The studied settlements show that the consolidation factor is not constant; but with some approximation we can substitute the curved line with two straight lines of which one may represent the primary and the second the secondary consolidation.

The value of λ is between 0.125 and 0.180 months^{-1} and the consolidation time about 12 months.

The soil profiles of each site confirm the measured and computed settlements. (Where the sand layer is thicker the rate of the settlement is greater).

Conclusions

1. The computed settlements are commonly greater than the measured ones, because of the assumption made on.

2. One must be very careful in the selection of the method of settlement computation since it must concord with the peculiarities of the building and the soil profile.

3. The stiffness of the foundation which acts in cooperation with the structure has a very great influence on the settlement distribution.

4. The duration of the settlement measurements must be greater than the time spent for the primary consolidation.

5. The semilogarithmic plot may give the limitation between primary and secondary consolidation. The obtained results in our case confirm fairly well the theoretical deductions from soil mechanics.

Polytechnic Institute of Jassy,
Department of Geotechnics
and Foundations

REFERENCES

1. Terzaghi K., Fröhlich O. K., *Théorie des tassements des couches argileuses.* Paris.
2. Taylor D. W., *Foundamentals of Soil Mechanics.* 1948.
3. Terzaghi K., *Theoretical Soil Mechanics.* 1943.
4. Terzaghi K., Peck R. B., *Soil Mechanics in Engineering Practice.* 1948.

TASAREA UNOR CONSTRUCŢII ÎN ORAŞUL IAŞI, ROMÂNIA

(Rezumat)

Din analiza diagramelor de tasare a patru clădiri înalte fundate în şesul aluvial al rîului Bahlui, s-a constatat pentru cazurile studiate că tasările calculate depăşesc de 1,15...1,72 ori tasările măsurate precum şi că există o bună concordanţă între durata fenomenului de consolidare şi natura straturilor ce alcătuiesc terenul de fundaţie.

Folosind reprezentarea semilogaritmică se poate evidenţia variaţia în timp a factorului de consolidare.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Clădirea B_1.
Fig. 2. — Clădirea B_2.
Fig. 3. — Clădirea H_1.
Fig. 4. — Clădirea H_2.
Fig. 5. — Tasările măsurate în cm.
Fig. 6. — Tasările măsurate în cm.
Fig. 7. — Clădirea B_1.
Fig. 8. — Clădirea B_2.
Fig. 9. — Clădirea H_1.
Fig. 10. — Clădirea H_2.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

D. C. 624 : 536

ELECTRIC ANALOGUE STUDY REGARDING THE DAMPING AND PHASE DIFFERENCE OF THE THERMICAL OSCILLATIONS IN THE BUILDING OUTER WALLS

BY

VIRGIL FOCŞA

Paper presented at the Scientific Session of the Polytechnic Institute of Jassy, September the 28—30 st, 1967

1. General Considerations

The mass decreasing of the structural outside walls made either of large pannels or of several-monolithe-layers concrete, renders quite actual the knowledge of the characteristics and behaviour of the structural members in non-stationary regime.

The thermical characteristics analyse of the new type of walls considered only by the point of view of the resistance to the linear transmission of heat is proved inadequate. The thermic sensibility of the buildings which have a reduced mass in the structural walls to the temperature variations owing to the central heating interruptions or to the daily temperature variations of the outer air, in winter and summer conditions, points out the importance and necessity of knowing the damping and phase difference characteristics of the thermical oscillations of the walls.

2. Analitically Determined Damping and Phase Difference of the Thermical Oscillations in the Walls

According to A. M. Sklover [1] the thermic inertia of the wall may be expressed by the ratio of temperature amplitude of the outer air A_{τ_e} and of the inner wall surface temperature A_{τ_i} following the relation :

$$\nu = \frac{A_{\tau_e}}{A_{\tau_i}}. \tag{1}$$

According to Fr. Eichler [2], the minimum values of the thermical oscillation damping by the walls must be within the range 10 to 15.

According to Sklover, the effective value of the thermical damping of a several-layers wall, may be computed by the relation:

$$\nu = 0{,}9\, e^{x} \frac{S_1 + \alpha_i}{S_1 + U_1} \cdot \frac{S_2 + U_1}{S_2 + U_2} \cdots \frac{S_n + S_{n-1}}{S_n + U_n} \cdot \frac{\alpha_e + U_n}{\alpha_e}, \tag{2}$$

where: e^x — exponential function of which value depends on the inertia characteristic ΣD, and $x = \frac{1}{2} \Sigma D$; ΣD — inertia characteristic of the several-layers wall determined by the relation:

$$\Sigma D = \sum_{k=1}^{n} R_k S_k; \tag{3}$$

R_k — thermical resistance of a constituent stratum of the wall [m² h °C/kcal]; S_k — thermical assimilation factor of a constituent stratum of the wall, in 24 hours, computed by the relation:

$$S_k = 0.51 \sqrt{\lambda_k \rho_k c_k}; \tag{4}$$

$\alpha_i = 7.0$ kcal/m² h °C and $\alpha_e = 20$ kcal/m² h °C — the heat superficial exchange coefficient on the inner and outer areas of the structural member; $U_1, \ldots, U_n$ — expressions presented in [1] in terms of the location of the layer in the wall and the values ΣD, following the relation:

$$U_n = \frac{R_n S_n^2 + \alpha_e}{1 + R_n \alpha_e}. \tag{5}$$

The second index which characterises the thermical behaviour of the structural membres, in nonstationary regime, is the phase difference of the thermical oscillations, considered in hours, which characterises the delay of cooling during the winter or of heating during the summer, which can take place both on the inner or on the outer areas of the structural members.

The phase difference η of thermic oscillations for the several layers structures may be analitically computed by the formula:

$$\eta = \frac{1}{15} \left(40{,}5 \sum_{k=1}^{n} D_k - \operatorname{arc\,tg} \frac{\alpha_i}{\alpha_i + U_i \sqrt{2}} + \operatorname{arctg} \frac{\alpha_e}{U_e + \alpha_e \sqrt{2}} \right). \tag{6}$$

According to Eichler the allowable values of the phase differences can be ranged between 6 and 10.

The computed values of the thermic oscillation damping and phase difference are presented in the Table 1, based on the relations (2) and (6), by which it would result that all the types of walls presently used in Romania satisfy the values proposed by Eichler, as for the damping and phase difference. This situation is refuted by the behaviour of the exploited buildings.

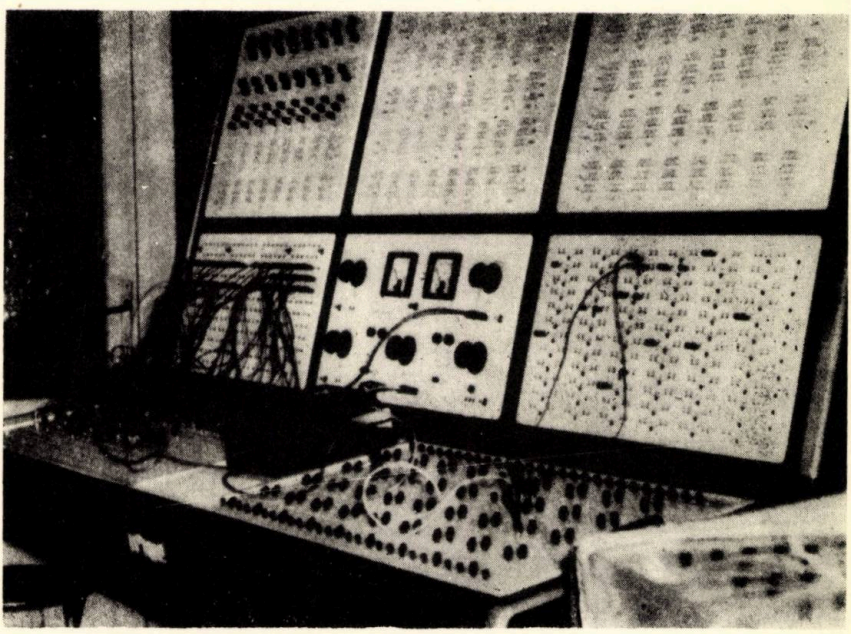


Fig. 1. — Analogical equipment with resistors and capacitors.

3. Electric Analogy Method for a Non-stationary Regime

For the study of the thermic characteristics in the walls being in a stationary regime one realised some analogical devices with electric resistors and capacitors (Fig. 1), which allow the representation of the thermic fields and of the boundary conditions and the determination of the unknown temperature functions, $t(x, y, z)$, by measuring the electric potential and the flow intensities.

For the analogical representation of the differential equations in a variable regime, one starts from a differential equation identity of the thermic and electric field:

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \dfrac{\partial t}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \dfrac{\partial t}{\partial y}\right)+\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \dfrac{\partial t}{\partial z}\right)=c\rho\dfrac{\partial t}{\partial T}, \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{r_x}\cdot\dfrac{\partial V}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{r_y}\cdot\dfrac{\partial V}{\partial y}\right)+\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{1}{r_z}\cdot\dfrac{\partial V}{\partial z}\right)=c_e\dfrac{\partial V}{\partial T_e}, \end{cases}$$

where: t — temperature function, λ — heat conductivity coefficient, c — specific heat coefficient, ρ — specific apparent weight of the building materials, T — thermic time, T_e — electrical time, R_x, R_y, R_z — the electric resistances of the electric network, homologous to the thermic network for the finite difference computation on the x, y, z directions, c_e — capacitor capacity, V — potential difference in the considered network node, x, y, z — spatial co-ordinates.

In order to represent, analogically, the finite difference equations in a model having electric resistors and capacitors one takes into account the Kirchhoff's relation (fig. 2):

$$(8)\qquad \sum_{i=1}^{n}\frac{V_i - V_0}{r_{0i}} = I_0,$$

where:

$$(9)\qquad I_0 = c_e\frac{\partial V}{\partial T_e}.$$

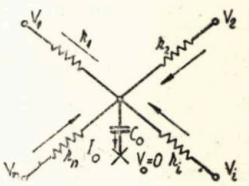


Fig. 2. — Node in an electric network with resistors and capacitors.

By means of these relations some electric schemas were established in order to pass from the thermic computation expressions having finite differences, to analogue schemas in which the electric magnitudes comply with similar relations and boundary conditions corresponding to the studied thermic range.

Having in view the roughly sinusoidal variation both of the outer and inner air, and of the structural members (fig. 3), one checked the values of the damping and phase difference of the thermic oscillations of a wall made of usual standard 37.5 cm brickwork, by means of the

finite difference and electric analogy computation, and one obtained the damping values of 28.8 by finite difference and 21.6 by electric analogy and the phase difference values of 10.8 by finite difference and 10.0 by electric analogy.

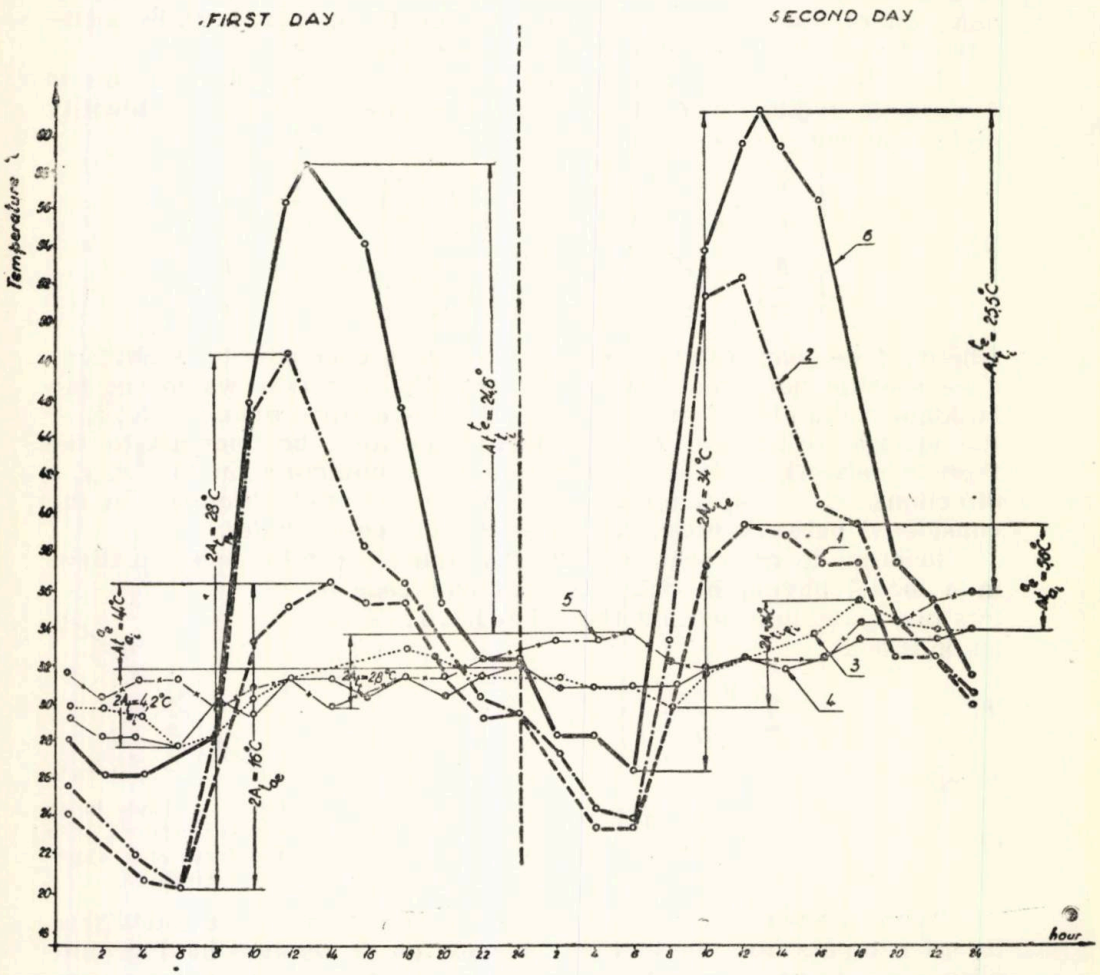


Fig. 3. — Temperature variation of the inner and outer air and of the structural members in a three-layers great pannel building, designed by ISCAS, in summer conditions: *1* — curve of outer temperature variation of the inner air, *2* — curve of outer surface temperature variation of the outer walls, *3* — curve of inner surface temperature variation of the outer walls, *4* — curve of inner air temperature variation, *5* — curve of inner surface temperature variation of the flat-roof, *6* — curve of the temperature variation on the flat-roof outer surface.

In these computations one also took into account the thermic damping capacity of the inner walls and of the floors. The rather small differences between the damping and phase difference values obtained by finite difference and electric analogy render evident the analogue method accouracy which was extended to the thermic study in non-stationary regime of the main types of walls used in Romania.

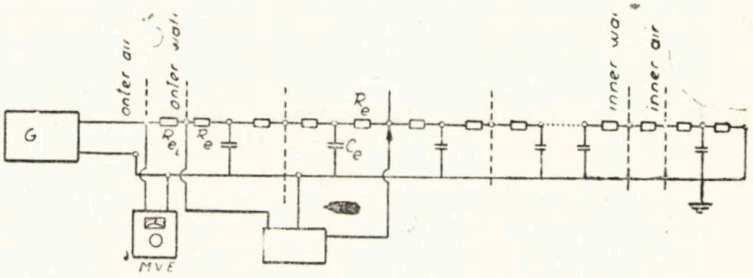


Fig. 4. — Equipment schema of the electric analogue model: R — resistor, C — capacitor, GF — frequency oscilator, MVE — electronic milivoltmeter, OC — catodic oscillograph.

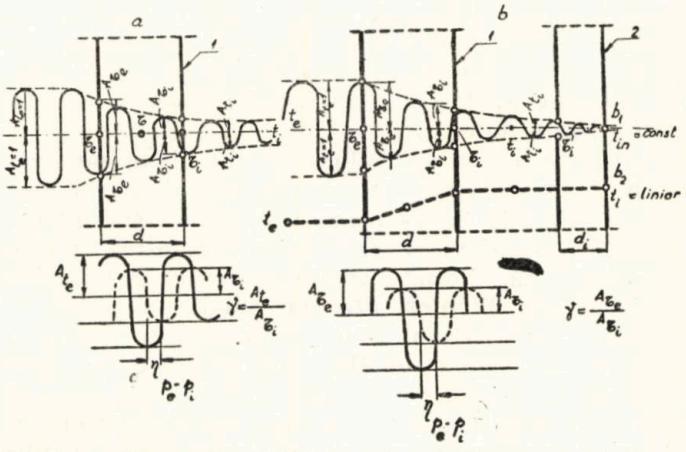


Fig. 5. — Termical oscillations phase difference and damping: a — according to Sklover, b — adopted in this study; 1 — outer wall, 2 — equivalent wall, b_1 — initial temperature, constant in the wall, b_2 — initial temperature, liniar in the wall, t_{in} — initial temperature.

Fig. 4 presents the schema of the electric analogue model equipment used in the thermic characteristics study of the walls in a non-stationary regime. Fig. 5 presents, schematically, the Sklover's hypothesis regarding the damping of the thermic oscillations, in the outer walls, under the influence both of their thermic resistance and of their mass,

and the hypothesis adopted by ourselves. including the capacity of the thermic damping of the inner structural members. The thermic damping coefficient was defined as a ratio of the variation amplitudes of both the outer area and inner area temperature of the outer walls ($\nu = A_{\tau_e}/A_{\tau_i}$) On the oscilloscope screen mounted in the modelling equipment. one obtained by direct measuring the damping and phase difference of the thermic oscillations (fig. 6). The thermic oscillation damping could also be obtained in an exact manner by measuring the potential fallings in the ultimate sections of the wall.

4. Damping and Phase Difference Values in Walls and their Interpretation

In the Table 1, the damping and phase difference of the thermic oscillation in the walls are presented and computed by Sklover's and by the electric analogy method [3], in comparison with the admissible values recomanded by Eichler for the main types of walls.

It has been found that the thermic damping values, computed by Sklover, are higher compared with those determined by electric analogy.

The thermic damping values computed by Sklover are overestimated because — as in the case of the wall of one and a half brick wide (37.5 cm) — the damping value of 34 is much different from the 21.6 value realised by the electric analogy and from 20.8 computed by means of the finite difference.

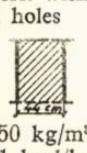
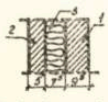
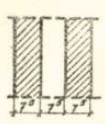
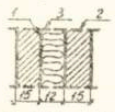
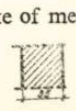
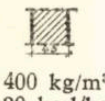
According to the effective values of the damping, computed by Sklover and to the admissible values prescribed by Eichler it would result that types of walls lately used in Romania should be available, of the thermical point of view, fact that is refuted in practice.

Hence it results that the admissible values of the thermic damping of 10...15, proposed by Eichler, are too small, in terms of the wall making, of their destination and orientation. Having in view the coresponding behaviour, in the thermic comfort aspect of the brickwork wall on full-brick of 37.5 cm thick, in the most general climatic conditions in our country we propose the minimum value of 20 for the thermic damping of the walls. On the basis of this proposal, an increase of the thermic resistance at the three seals walls (great prestressed pannels or monolithe concrete) is necessary corresponding to a 9.5 cm thick mineral cotton in order to obtain the thermic equivalence with the standard wall.

As to the thermic osciilation phase difference of the walls the Sklover's computed values resulted between 7.3 and 16, compared with 6.0 till 14 computed by electric analogy. The phase difference values determined by electric analogy are rather less compered with the Sklover's analitically computed values. Having in view the admissible values, from 6 to 10, recommanded by Eichler, we consider

Table 1

Comparative Values of Damping and Phase Difference for the Types of Walls in R. S. Romania

Nr. crt.	Structure of the wall	Thermic resistance R_0 m² h °C/kcal	Characteristics of thermic inertia D	Thermic damping ν			Phase difference η (hours)		
				Values prescribed by Eichler	Values computed by Sklover	Values determined by electric analogy	Values prescribed by Eichler	Values computed by Sklover	Values determined by electric analogy
1	Usual brickwork $\rho = 1800$ kg/m³ c 0.21 kcal/kg °C $\lambda = 0.70$ kcal/m h °C	0.710	5.9	10...15 (by their mating, destination and orientation)	$\nu_{a_e - p_i}$ 77	$\nu_{p_e - p_i}$ 45	6...10 (by orientation)	$\eta_{a_e - p_i}$ 16	$\eta_{p_e - p_i}$ 14
2	Usual brickwork	0.570	4.75		34	$\frac{21.6}{20.8*}$ * by finite difference		12.3	$\frac{10}{10.8*}$ * by finite difference
3	1 brickwork	0.357	2.96		10	6.2		7.4	6.1
4	Brickwork with 30% vertical holes  $\rho = 1350$ kg/m³ $c = 0.21$ kcal/kg °C $\lambda = 0.70$ kcal/m h° C	0.880	5.33		54	67.5		13.3	13.2
5	Brickwork with 30% vertical holes	0.600	3.64		16.5	15.5		8.7	8.8
6	Reinforced concrete and mineral cotton (nonsymmetrical structure)  *1,2* – Reinforced concrete $\rho = 2600$ kg/m³ $c = 0.20$ kcal/kg °C $\lambda = 1.75$ kcal/m h °C *3* – mineral cotton $\rho = 300$ kg/m³ $c = 0.20$ kcal/kg °C $\lambda = 0.075$ kcal/m h °C	1.089	2.42		24.7	16.0		7.3	6.5
7	Reinforced concrete of mineral cotton (symmetry of structure) 	1.086	2.57		29.2	13		7.5	6.5
8	Reinforced concrete and isolation of lightweight concrete (granulite)  *1,2* – Reinforced concrete *3* – Lightweight concrete (granulite) $\rho = 800$ kg/m³ $c = 0.21$ kcal/kg °C $\lambda = 0.25$ kcal/m h °C	0.594	3.43		32.9	17		10.7	8.4
9	Pannels of ceramic blocks $\rho = 1250$ kg/m³ $c = 0.21$ kcal/kg °C $\lambda = 0.41$ kcal/m h °C	0.794	4.16		25	12		10	7.8
10	Concrete of mean weight $\rho = 1100$ kg/m³ $c = 0.20$ kcal/kg °C $\lambda = 0.32$ kcal/m h °C	0.940	3.84		22.3	13		8.7	6.0
11	Concrete of mean weight  $\rho = 1200$ kg/m³ $c = 0.20$ kcal/kg °C $\lambda = 0.40$ kcal/m h °C	0.880	4.40		29.6	17		10.5	6.6
12	Reinforced  $\rho = 1400$ kg/m³ $c = 0.20$ kcal/kg °C $\lambda = 0.50$ kcal/m h °C	0.900	5.45		63	27		13.7	9.6

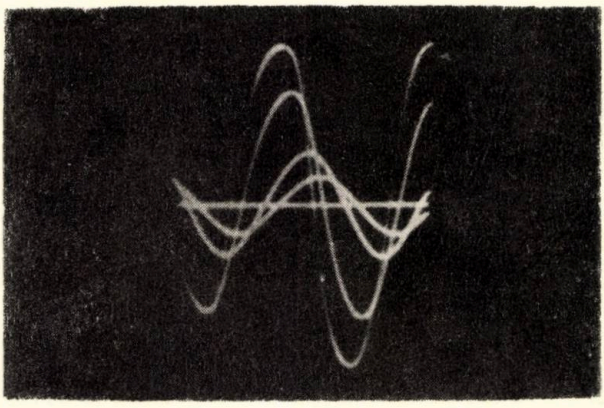


Fig. 6. — Damping and phase difference determination by photographing the electric oscillations for different cross-sections of a structural member.

that the value of the thermic oscillation phase difference of the outer walls must not descend under 10, in Romania's climat. The basical types of walls used in Romania satisfy this condition.

We underline that the electric analogue method allows the thermic solution optimisation of the walls by an available alteration of the thermic resistance ,in the electric model, (fig. 7), until the admitted values for damping and phase difference are obtained. In this case the thickness of isolation (d_{iz}), is variable in the thermic model which determines the variation of the R_2 resistance and of the C_2 electric

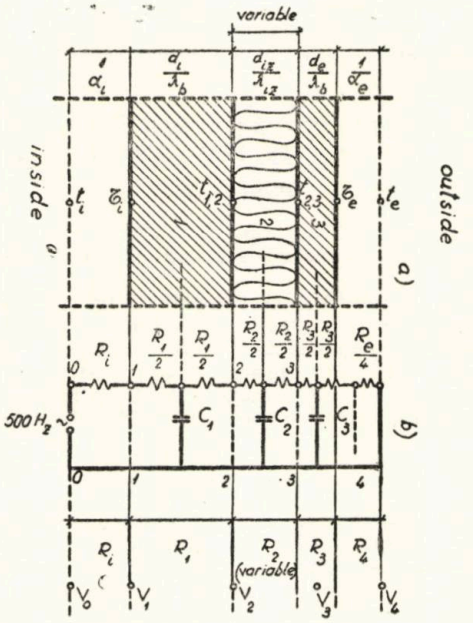


Fig. 7. — Optimising of the flat-roof solution considered by the aspect of the thermical oscillations phase difference and damping: *a* — thermical model, *b* — electrical model; d_{iz}, R_e and C_z are variable quantities.

capacity, in the electric model. Varying the thermic resistances and the electric analogue elements, a corresponding variation of the temperatures t_1 and t_2 and of the voltages (tensions) V_1 and V_3 results till the limits of the predicted values of the thermic damping. Corresponding to the thermic and electric variation it occures also a variation of the thermic oscillation phase difference which may be

directly read on the oscilloscope screen. Thus, the utilisation of the analogue electric equipments and devices becomes particularly useful for the thermotechnical optimisation and design of the structures.

Polytechnic Institute, Jassy,
Departament of Civil Engineering

REFERENCES

1. Eichler Fr., *Praktische Wärmelehre im Hochbau.* Verlag für Bauwesen, 1964, Berlin.
2. Скловер А. М., Василиев Б. Ф., Ушкоб А. А., *Основы строительной теплотехники жилых и общественных зданий.* ГИЛСА, М., 1964.
3. Focșa V., *Rezistența termică, amortizarea și defazajul oscilațiilor termice ale pereților, determinate prin analogie electrică.* Doctoral Dissertation, 1966.

AMORTIZAREA ȘI DEFAZAJUL OSCILAȚIILOR TERMICE ALE PEREȚILOR EXTERIORI, DETERMINATE PRIN ANALOGIE ELECTRICĂ

(Rezumat)

Se analizează amortizarea și defazajul oscilațiilor termice ale pereților, pe baza analogiei electrice, în regim nestaționar, folosind dispozitive analogice cu rezistoare și condensatoare.

Se compară valorile amortizării și defazajului obținute prin metoda analogiei electrice cu cele calculate prin metoda diferențelor finite și după indicațiile lui Sklover și valorile normate, prescrise de Eichler. Considerîndu-se ca etalon valorile amortizării și defazajului oscilațiilor termice pontru peretele din zidărie de cărămidă plină de 37,5 cm grosime, se propun valorile minime admisibile ale amortizării la 20 și ale defazajului la 10, pentru condițiile climatice din R. S. România.

Explicația figurilor

Fig. 1. — Instalație analogică cu rezistoare și condensatoare.

Fig. 2. — Nod într-o rețea electrică cu rezistoare și condensatoare.

Fig. 3. — Variația temperaturii aerului interior și exterior și al elementelor de construcție la o clădire cu structură din panouri mari proiect ISCAS în 3 straturi, în condiții de vară: *1* — curba variației temperaturii aerului exterior, 2 — curba variației temperaturii suprafeței exterioare a pereților exteriori, *3* — curba variației temperaturii suprafeței interioare a pereților exteriori, *4* — curba variației temperaturii aerului interior, *5* — curba variației temperaturii suprafeței interioare a terasei, *6* — curba variației temperaturii suprafeței exterioare a terasei.

Fig. 4. — Schema instalației modelului analogic electric: R_e — rezistor, C_e — condensator, *GF* — generator de frecvență, *MVE* — milivoltmetru electronic, *OC* — oscilograf catodic.

Fig. 5. — Amortizarea și defazajul oscilațiilor termice: *a* — după Sklover, *b* — adoptată în acest studiu; *1* — perete exterior, 2 — perete echivalent, b_1 — temperatura inițială, constantă în perete, b_2 — temperatura inițială, liniară în perete, t_{in} — temperatura inițială.

Fig. 6. — Determinarea amortizării și defazajului prin fotografierea oscilațiilor electrice pentru diferite secțiuni ale elementului de construcție.

Fig. 7. — Optimizarea soluțiilor de terasă sub aspectul amortizării și defazajului oscilațiilor termice: *a* — modelul termic, *b* — modelul electric; d_{iz}, R_e și C_z sînt elemente variabile.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

D. C. 691.328.2

SOME POSSIBILITIES TO USE THE INSTALLATIONS OF DYNAMICAL CHARACTERISTICS RECORDING OF THE SPECIMENS, IN THE STUDY OF THE INBEDDED-IN-CONCRETE STEEL BAR BOND

BY

CHIMON CAPATU, ANATOLIE MIHUL, DANIEL DIACONU
and AUREL CUCIUREANU

Paper presented at the Scientific Sesion of the Polytechnic Institute of Jassy, September the 28—30 st, 1967

It is well known that the steel bar bond is mainly realised both by a processus of normal and by a tangential bond. In the processus of the tangential bond the special role is acted by the concrete clenching in the reinforcement irregularities as well as the friction between the concrete and the reinforcement.

In the pull-out tests all these phenomena are perceived by means of measurements of the bar displacement into the concrete, at the loaded end and at the unloaded end, and by means of the „tangential bond stress versus the bar displacement" of the „barstress versus the bor-displacement" curve plotting.

The perception of the mentioned phenomena may be carried out much merely and of a greater precision regarding the limits and the possibilities of interpretation, using the recording of the dynamic characteristics change of the specimen during the pull-out processus, as a consequence of the dynamical rigidity variation to the bending of the specimen that is considered a cantilever.

In the Department of Reinforced Concrete and that of Structure Statics of the Polytechnic Institute of Jassy, an experimental equipment able to pull-out the bars of concrete prisms was developed, of which details may be seen in Fig. 1; parallelly, another equipment was working, able to catch and record the dynamical characteristics change during the bar pull-out processus, composed of electromagnetic catchers, remanence-oscilloscops, and a recorder camera for the experimental processes. The entire device is presented in Fig. 2.

The investigations were made in steps in terms of the following *constant* considered parameters: a) the curing and conserving conditions of specimens, b) manner of casting the specimens, c) manner of compactising the specimens ,d) cross area of the specimens, e) the steel bar quality, f) the bar area shape, g) supplementary helicoidal reinforcement of the specimens, and the following *variable* factors: a) the diameter of the steel bars, b) the bond length of bars (the parameter *l/d)*, c) the concrete quality.

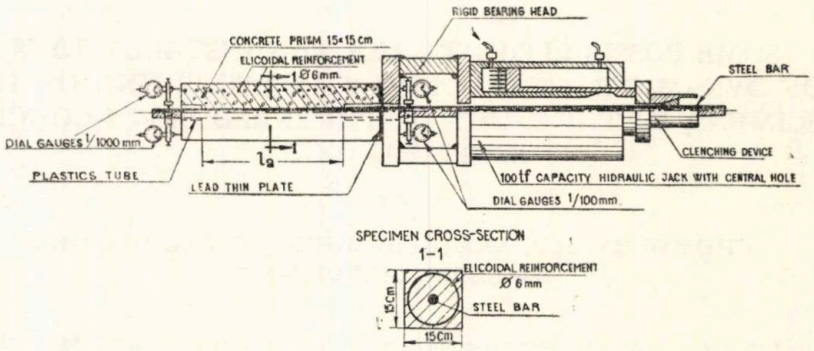


Fig. 1

A good agreement was found between the carried out measurements on the specimens, by small intensity pulsus, and the recorded measurements from mechanical tests, with the difference that the degree of accuracy in perceiving the particular bond phenomena and dividing limits is greatly increased.

Concurently, the velocity of measurement selection considerably increases, offering the possibility to judge the phenomena continuous during the entire test.

The mechanically realised registration and the dynamical characteristics variation of the specimens allowed to state the limits of dependences: a) $\Delta - \sigma_a$ (unloaded bar end displacement versus the bar axial stress), b) $\Delta - f$ (unloaded bar end displacement versus the frequency), c) $\Delta - \nu$ (unloaded bar end displacement versus the energy absorbtion factor, obtained from the logarithmic decrement of the damping).

In Fig. 3 the mean results obtained from one of the sets of the tested specimens are presented.

The following phenomena may be clearly observed:

a) The frequency *(f)* greatly increases to a sliding deformation of about 5 μ of the unloaded bar-end, and the critical damping ratio (ν) in this interval mentains itself with a fairly small change, sugges-

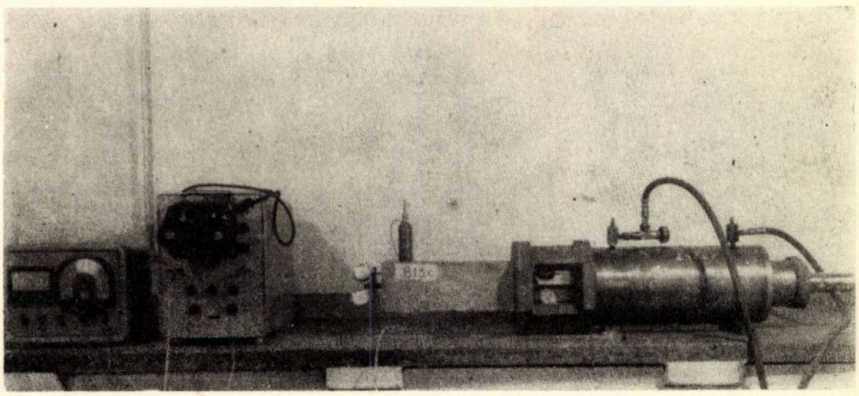


Fig. 2

ting the fact that the degree of the specimen fixation — which was considered as a cantillever — increases.

b) From the sliding deformation of 5 μ to one of the 10 μ, value, generally considered, in present, as the beginning of the bar restained sliding into the concrete, the frequency decreases and the ratio of the critical damping increases.

c) The bar slides in a continous manner to 80 μ, ν continuously increases and the frequency remains relatively constant.

d) From the slide of 80 μ at the unloaded end — this phase corresponding to the beginning of the bar dislocation (unrestrained sliding) from the concrete prism — ν increases (the energy dissipation into the specimen sensibly increases), and the frequency (*f*) greatly decreases.

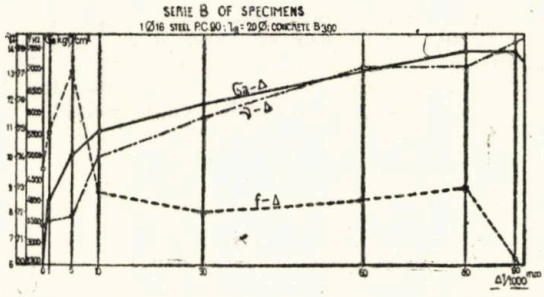


Fig. 3

It may be stated that the beginning moment of the sliding and that of the dislocation is more exactly obtained from the dynamical characteristics interpretation in comparison with the classical methods, since the dynamical characteristics include the initial structural changes and the velocity of the strain transmission into the specimen body.

In Figs. 4...7 some characteristic records carried out during the tests are presented (Fig. 4 showing a registration at the beginning of the test, Fig. 5 a registration immediately before the beginning of the bar displacement, Fig. 6 a registration after beginning of the bar displacement and Fig. 7 a registration at the test end).

A high frequency of the first mode of oscillation is observed, and that fact requires a routine for the experimental data to be worked out.

The studies will be forward carried on.

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Reinforced Concrete,
Department of Structure Statics

POSIBILITĂȚI DE UTILIZARE ALE INSTALAȚIILOR DE ÎNREGISTRARE A CARACTERISTICILOR DINAMICE ALE EPRUVETELOR, LA STUDIUL ADERENȚEI BARELOR DE OȚEL ÎNGLOBATE ÎN BETON

(Rezumat)

În probele de smulgere a barelor de oțel din prisme de beton toate fenomenele specifice ale aderenței sînt sesizate în general prin măsurători pe cale mecanică ale deplasării barei în beton la capătul încărcat și cel neîncărcat. În lucrare se dovedește că sesizarea fenomenelor menționate se poate face cu mult mai simplu și cu un grad de precizie mult mărit în ce privește limitele și posibilitățile de interpretare, utilizînd înregistrarea modificării caracteristicilor dinamice ale epruvetelor în timpul procesului de smulgere, ca urmare a variației rigidității dinamice la încovoiere a epruvetei considerate drept grindă în consolă.

Experimentările s-au efectuat pe etape, cu funcționarea în paralel atît a unor dispozitive de smulgere a barelor din beton, oferind posibilitatea de a efectua măsurători de deplasare a barei cu microcomparatoare (fig. 1), cît și a unor dispozitive de înregistrare a modificării caracteristicilor dinamice ale epruvetei la impulsuri de mică intensitate, în timpul procesului de smulgere (oscilograf cu remanență prevăzut cu aparat de filmare, captor electromagnetic, dispozitiv de determinare a frecvenței). Ansamblul instalației este prezentat în fig. 2. În fig 3 se prezintă curbele obținute la una din seriile de epruvete încercate; fig. 4, 5, 6 și 7 prezintă înregistrări caracteristice în timpul proceselor experimentale.

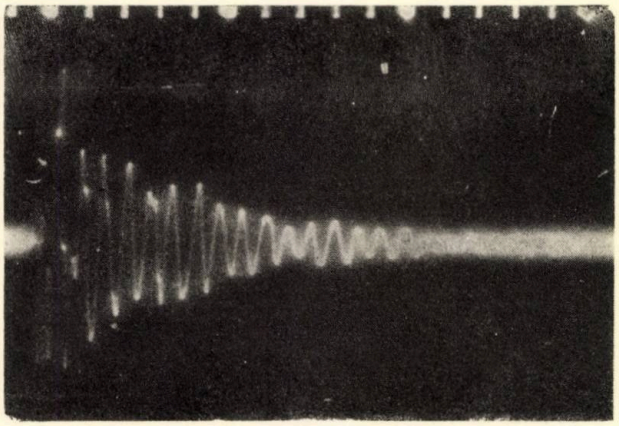


Fig. 4

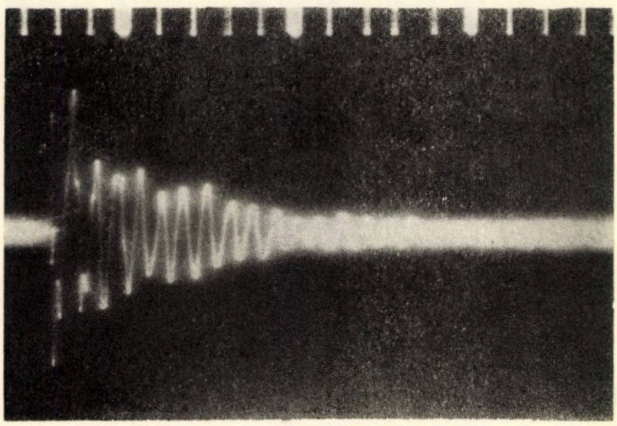


Fig. 5

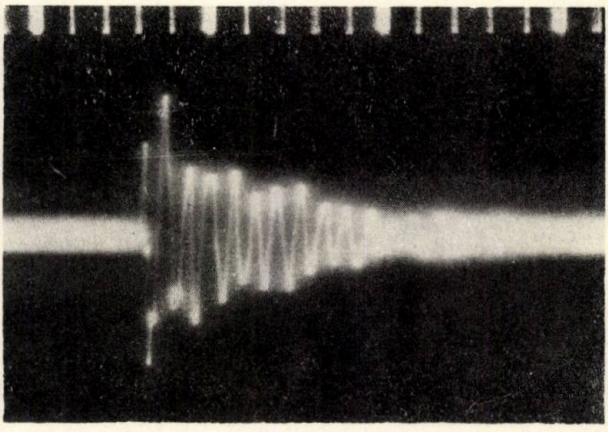


Fig. 6

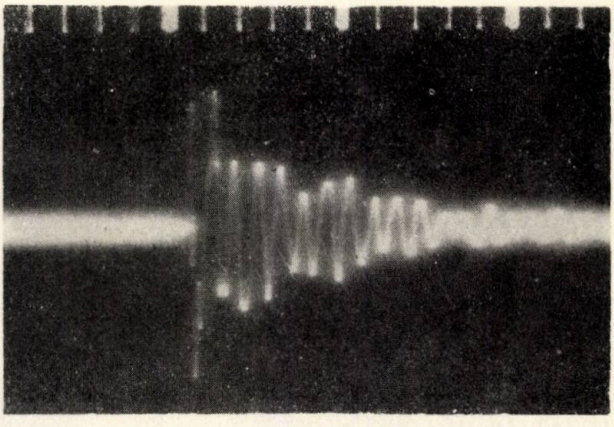


Fig. 7

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

C. D. 338.062

LE CHOIX DES PROCESSUS DE TRANSPORT ET DE MONTAGE DES ÉLÉMENTS PRÉFABRIQUÉS BASÉ SUR L'EMPLOI DES MÉTHODES MATHÉMATIQUES

PAR

EUGEN FLOREA et LIVIU GROLL

Communication présentée dans la session scientifique de l'Institut Polytechnique de Jassy, 28—30 septembre 1967

Pour une meilleure organisation de la production, du transport et de l'assemblage des éléments préfabriqués, on doit choisir des procédés technologiques avancés dont l'un d'eux est le montage direct des moyens de transport qui permet la réduction des termes de construction et une meilleure utilisation des grues ; on suppose que la fourniture complète et rythmique des éléments préfabriqués, en suivant un graphique de montage, en est la condition essentielle.

L'introduction du procédé du montage direct des moyens de transport présente encore d'autres avantages dont nous rappelons : la réduction de l'aire du chantier par l'élimination des dépôts des éléments préfabriqués, l'amélioration de la qualité des ouvrages par la diminution des possibilités de détérioration pendant les transbordages, etc.

Mais l'application de ce procédé, d'une manière empirique et intuitive, n'a pas donné le résultat escompté.

C'est pour ce motif que nous nous sommes proposés de présenter une méthode d'appréciation comparative entre les deux procédés de montage : le montage avec dépôts intermédiaires à l'objet et le montage direct des moyens de transport, en vue de trouver la variante optimale conformément à un critérium établi en préalable ; ce critérium est justement le prix du montage d'un produit préfabriqué.

Le prix, dans le cas du montage de l'élément en utilisant le dépôt intermédiaire est donné par :

$$P_1 = (a + b)\, t_d + c t_m, \tag{1}$$

où a — le loyer de l'outillage de transport utilisé pour la décharge des éléments, [lei/heure], b — le loyer pour la grue du dépôt qui exécute la décharge, [lei/heure], c — le loyer pour la grue de montage, [lei/heure], t_d — la durée de la décharge des éléments, [heures], t_m — la durée du montage d'un seul élément préfabriqué, [heures].

En employant le montage direct des moyens de transport, la grue du dépôt n'est plus nécessaire et la durée de la décharge en est la même que celle du montage.

Dans ce cas le prix de montage d'un seul élement préfabriqué sera :

$$P_2 = at_m + ct_m . \tag{2}$$

Le montage avec dépôt intermédiaire sera plus efficient si $P_1 < P_2$:

$$(a + b)\, t_d + ct_m < at_m + ct_m$$

d'où il en résulte

$$\frac{a + b}{a} < \frac{t_m}{t_d} . \tag{3}$$

Par contre, le procédé du montage direct, sera plus efficient si $P_1 > P_2$.

On choisit les outillages de transport en fonction du poids et des dimensions des éléments préfabriqués, de la distance et du prix de transport.

Le principal indicateur est le prix de transport qui est une fonction de la productivité propre pour chaque outillage de transport.

On peut déduire cette productivité par la relation :

$$P_S = qnTc_t c_q , \tag{4}$$

où : q — la capacité de chargement, [tf], n — le nombre des cycles par heure, T — la durée d'utilisation, [h], c_t — le coefficient d'utilisation d'un groupement d'outillages, c_q — le coefficient d'utilisation de la capacité de chargement.

Pour déterminer le nombre des cycles on employe la formule :

$$n = \frac{60}{t_c} \tag{5}$$

et pour le nombre des unités d'outillage de transport la relation :

$$N = \frac{t_c}{T_m} , \tag{6}$$

où T_m — la durée du montage des éléments préfabriqués transportés par une seule unité de transport.

La relation (6) résulte si l'on impose la condition d'un montage continu des éléments préfabriqués et par conséquant une utilisation maximale de la grue de montage.

Dans notre cas, en appliquant le procédé du montage direct des moyens de transport et l'organisation des transports avec des traïlers remorqués par des tracteurs de telle manière que les tracteurs ne stationnent pas ni au chargement ni au déchargement et que les traïlers se trouvent, par exemple, au déchargement avec la grue de montage, en train de parcourir le tracé et au chargement dans la fabrique des éléments préfabriqués ou au dépôt central — la durée d'un seul cycle sera différente pour les tracteurs et pour les traïlers.

Ainsi pour les tracteurs on aura :

$$t_{c1} = \frac{2L}{V} + 2t_s, \tag{7}$$

où : L — la distance à parcourir, V — la vitesse moyenne de transport, t_s — la durée du chargement des traïlers,

Pour les traïlers la durée d'un cycle sera :

$$t_{c2} = T_i + \frac{2L}{V} + t_s + T_m, \tag{8}$$

où : T_i — la durée du chargement du traïler.

En remplaçant dans la relation (6) t_c par t_{c1} et t_{c2} successivement, on peut déterminer le nombre nécessaire de tracteurs et de traïlers.

Ainsi le nombre nécessaire de tracteurs sera déterminé par la relation :

$$N = \frac{2}{T_m}\left(\frac{L}{V} + t_s\right). \tag{9}$$

On peut déterminer la quantité d'éléments préfabriqués Q qui peut être montée par un groupement d'outillages à l'aide de la relation :

$$Q = NnpT, \tag{10}$$

où : n — le nombre des cycles de transport par heure, p — la quantité d'éléments préfabriqués transportés durant un cycle.

Le prix du transport d'une tone de préfabriqués lors du montage directe des moyens de transport est déterminé par :

$$C = \frac{c_1}{P_s} + \frac{c_2}{W}, \tag{11}$$

où : c_1 — le prix d'une unité de transport du groupement, P_s — la productivité du groupement des moyens de transport, c_2 — le prix des travaux préliminaires qui ne sont pas inclus dans le prix d'une unité de transport du groupement, W — le volume total des transports, [t].

Dans le cas d'un montage avec dépôt à l'objet, on doit ajouter au prix d'une unité de transport encore les dépenses des déchargements des éléments préfabriqués dans les dépôts.

Dans certains cas on peut utiliser un procédé combiné (mixte) lorsque les éléments préfabriqués de série de grandes dimensions sont montés directement, en les déchargeant des moyens de transport, tandis que les éléments préfabriqués de petites dimensions et les exemplaires uniques sont apportés au dépôts d'objet dans le rayon d'action de la grue de montage, d'où ils sont livrés à nécessité. Tous ces éléments peuvent être transportés à l'objet seulement pendant la période où la grue n'est pas utilisée aux travaux de montage.

Dans le graphique horaire il faut prévoir aussi les temps consommés par l'attente des agrégats ainsi que par la révision et l'entretien de la grue.

Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire d'Organisation et de Planification,
Chaire de Béton armé

ALEGEREA PROCESELOR DE TRANSPORT ŞI MONTAJ ALE ELEMENTELOR PREFABRICATE DE CONSTRUCŢII

(Rezumat)

Se prezintă alegerea, pe o bază ştiinţifică, a proceselor de transport şi montaj ale prefabricatelor, direct din mijloacele de transport sau cu depozit intermediar la obiect.

Se dau relaţiile de calcul pentru necesarul de mijloace de tracţiune şi de remorci, în condiţiile utilizării maxime a macaralelor de montaj.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

. C. 691.5

STATE OF CRACKING AND ELONGATION OF FERROCEMENT UNDER AXIAL TENSILE LOAD (I)

BY

RYSZARD WALKUS

1. Introduction

Ferrocement, a new constructional material, can be applied to such structures as storage bins and reservoirs for liquids, in certain wall elements, hull and more over to erecting shell constructions. Following actual development of utilization there is considerable progress in scientific research in order to determine strain and stress properties of ferrocement.

In contrary to many experiments carried out on reinforced concrete elements there are a few tests done in the field of ferrocement. Up to now the majority of scientific and experimental works concerning ferrocement has been done in USRR where simultaneously on the large scale the experimental structures of ferrocement are accomplished.

Among works of investigators who have been engaged in problem of ferrocement the works of the following should be mentioned: Ciskreli's [6], [7], Borovski's and Nogin's [5], Hajdukov's and Maliavski's [8] as well as Krassovski's and Potchtovik's [11].

The investigations of ferrocement concern determination of real properties of its ingredients (i.e. of sand aggregate concrete, of expended metal reinforcements [4], [13], [17]) as well as determination of service conditions for structures and members made of ferrocement [1], [2], [19].

The behaviour of ferrocement under tension has been considered as the most controversial problem. Small thickness of ferrocement elements i.e. within the limits 1.5...3.0 cm and high percentage of reinforcement in cross-section in form of mesh reinforcement made of mild wires, causes the difficulty to determine the moment of occuring the first crack, the maximum rate of concrete elongation prior to the moment of disturbance of concrete structure, the relationship between cracks and system of reinforcement as well as to determine the limit between elastic and non-elastic strains.

It has been, however, found in many tests of ferrocement [8], [21], [3], [12] the delay in cracking and gradual (and not rapid) decreasing of bearing capacity of tensioned element but the phase of ferrocement behaviour prior to the moment of cracking with crack width 20...100 microns i.e. visible cracks is still considerably unknown. Therefore, as the moment of occuring the first crack the most often [9], [10], [20] the moment of the occuring the first visible crack has been taken. Because an assumption that the ultimate elongation of ferrocement has the same value as a normal concrete, i.e. $\varepsilon_{rs}=100.10^{-6}...200.10^{-6}$ is also very controversial, it seems to be indispensable to carry out the research works in order

to determine the moment of cracking, the system cracks and their influence upon the elongation of ferrocement.

Generally speaking the behaviour of ferrocement subjected to axial tension can be determined by two factors:

a) state of cracking, i.e. the influence of percentage and dispersion of reinforcement upon the moment of cracking as well as upon the width and number of cracks;

b) elongation of element, i.e. the character of $\sigma-\varepsilon$ relation at the given state of cracking.

The above mentioned problems have been the part of research works carried out by the author on the strength properties of ferrocement [18] in the Department of Reinforced Concrete Building at the Polytechnic Institute in Lódz in 1962—1965.

2. Programm of Tests

While undertaking the experimental work the author intended to explain the following problems:

1. Recognition of cracks morphology in ferrocement members with various percentage, dispersion and distribution of reinforcement subjected to axial tension.

2. Determination of the influence of percentage and dispersion of reinforcement upon the moment of cracking as well as upon the width and number of cracks.

3. Determination of the limits of transition stage between the elastic and the plastic phase in behaviour of element.

4. Determination of the maximum elongation of ferrocement elements subjected to axial tension and on this basis an estimation of the permissible value of elongation and of stresses within the limits of particular working phases.

The results of measurements of strains in concrete elements subjected to axial tensile load, as it is known, depend on many factors and specially on the shape and dimensions of specimens, the way of applying the forces, the testing methods and the apparatus used.

The kind of the ferrocement specimens in the author's tests has been dictated on the one hand by the tendency to the best introduction of the elements used in practice and on the other hand due to possibilities of testing at laboratory conditions by means of devices being in possesion. The shape and dimensions of the specimen has been shown in Fig. 1. The total length of specimen amounted 700 mm (the length was adjusted to existing press), the nominal width — 100 mm, thickness — 25 mm and maximum length of measurement line — 300 mm.

The adopted way of application of load is given in § **4** and the methods of testing and measurement apparatus — in §§ **5** and **6** of this paper.

The specimens have been divided into 6 series depending on the rate of dispersion and kind of reinforcement being used. One serie consists of three concrete mixes containing 6 specimens each. The

characteristics of reinforcement used in specimens is given in Table 1. As it is seen from the Table 1, for the comparison, the specimens without reinforcement and the reinforced concrete specimens with percentage of reinforcement μ varying negliglible from the value μ for the ferrocement specimens with 9 meshes have been also tested. The total number of tested specimens amounted 108.

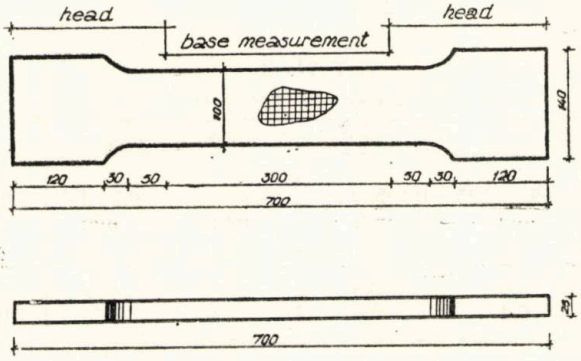


Fig. 1. — Shape and dimensions of specimens.

The program of testing provided two basic stages:
1. Observation of system of cracks,
2. Measurement of width of cracks, their number and elongation.

Table 1

Characteristics of Specimens of Reinforcement

Nr. of serie	Nr. of mix	Kind of reinforcement	Nominal diameter of wires mm	Size of mesh mm	Percentage of reinforcement P %	Index of dispersion α cm^{-1}	Coefficient of specific surface K_x cm^{-1}
IN_n	n	0 no reinforcement	—	—	—	—	—
where	where	$\varnothing-2$ $\varnothing 4{,}5+1\varnothing 3$	—	—	1.52	3.80	0.15
$N=$	$n-$	2 nets	0.8	10×10	0.54	6.75	0.27
A, D	1, 2	5 nets	0.8	10×10	0.94	11.75	0.45
E, F	3	7 nets	0.8	10×10	1.26	15.71	0.63
G, H		9 nets	0.8	10×10	1.62	20 03	0.81

Index of dispersion of steel $\alpha = \frac{P}{d}$ (d — diameter of reinforcement)

Index of specific surface $K_x = \frac{\Sigma U}{F_b} = \frac{1}{25}\alpha$,

where: U — surface of contact between steel and concrete per unit of length,
F_b — cross section of concrete.

3. Characteristics of Material Used

3.1. Aggregate, Cement, Water

For preparing specimens the washed bank run sand from Mekka mixed with granite aggregate has been used. Next the fractions above 4 mm has been removed as being useless. The grading of the aggregate used is given in Table 2.

Table 2

Grading of Aggregate

Kind of aggregate	Composition of aggregate per cent by weight					
	0.05...0.125 mm	0.125...0.25 mm	0.25...0.5 mm	0.5...1.0 mm	1.0...2.0 mm	2.0...4.0 mm
Sand	3.0	16.5	20.4	44.6	12.7	2.8
Granite gravel	0.4	0.8	1.4	2.4	10.8	84.2

The concrete mixes have been made of portland cement from „Przyjazn" cement plant. The quality of cement was equal to 350 kG/sq cm, according to Polish Standard (PN-B-3 001). The real compressive strength of cement after 28 days was equal to 364 kG/sq cm and bending strength to 66.1 kG/sq cm at the same time.

The water was taken from municipal water lines. The temperature of water varied within the limits 14°...17° centigrade.

3.2. Concrete mix

Specimens were prepared at production hall of Precast Concrete Elements Factory at spring 1963. The mixes designed strength 500 kG/sq cm after 28 days and with water-cement ratio $w/c=0.276$ were prepared in Zafama mixer of 400 l capacity. Mix proportion was as follows:

granit	927 kg/per cubic meter of green concrete,
sand	327 kg/per cubic meter of green concrete,
cement	786 kg/per cubic meter of green concrete,
water	216 kg/per cubic meter of green concrete.

Specimens were cast in the steel moulds with movable sides and next vibrated on vibrating table with 2 800 cycles per min. Each specimen was vibrated about 3 min. Simultaneously specimens without reinforcement as well as cylinders of 16 cm diameter were prepared in order to determine the authoritative strength of concrete. Speci-

mens were remoulded after 24 hours and kept for 7 days in moisture conditions. During next period of curing the specimens were stored at laboratory and no special treatment was provided.

Table 3

Compression Strength of Concrete (kG/sqcm)

No of mix	Serie					
	IA	*ID*	*IE*	*IF*	*IG*	*IH*
1	510	600	450	425	450	470
2	540	500	470	460	475	470
3	500	470	520	475	470	500

In Table 3 the compressive strength of concrete of particular mixes is given.

3.3. Reinforcement

Nets and metal laths being produced in Poland only in the limited scope can be used as the reinforcement for ferrocement. From the metal nets of general application classified in Polish Standard PN-53/M-02053 only the metal laths and nets used as the reinforcement of glass, of course in some limited range — can be considered.

The most popular metal laths known as Rabitz's laths are not classified by standard. The author decided, however, to use in the tests this kind of net because of its universality at the market in this country and due to its utility in tests. The net used was of the following characteristics: mesh size — 10 mm, wire diameter — 0.8 mm, width of the net — 1 000 mm, weight — 0.95 kg per 1 sq m.

To determine the values of particular parameters of such reinforcement it was indispensable to use the statistical methods. These tests, however, concern the peculiar problem and they are subject of the other author's publications [14], [15], [16]. In this paper only resulting values of these parameters of net reinforcement should be presented as far as they concern the tests on cracking and elongation of ferrocement.

Thus, for the single wires of diameter 0.8 mm taken off the net of 10 mm mesh size the obtained results were as follows: a) concerning the diameter d: average value $d_{av} = 0.774$ mm, standard deviation $s = 0.0112$, coefficient of variation $z = 1.58\%$, limits of deviation $+1.25\%...—6.25\%$ (permissible deviation according to Polish Standard PN-57/M-80026 — $\pm 3.75\%$); b) concerning the yield point Q_r; average value — $Q_{r\,av} = 38.80$ kG/sq mm, standard deviation —

$s = 2.94$, coefficient of variation $z = 7.72\%$, minimum value $Q^g_{r\min} = 29.26$ kG/sq mm (for probability p corresponding to $3s$), minimum value $Q^g_{r\min} = 1.46\ Q_{r\min}$ (according to Polish Standard PN-61/H-84020); c) concerning the tensile strength R_r of wire: average value $R_{r\,av} = 42.44$ kG/sq mm, standard deviation $s = 2.60$, coefficient of variation $z = 5.17\%$, minimum value $R^g_{r\min} = 34.34$ kG/sq mm (for probability corresponding to $3s$); d) concerning the modulus of elasticity of wire E: minimum value $E_{\min} = 1.75.10^6$ kG/sq cm, average value $E_{av} = 1.90.10^6$ kG/sq cm maximum value $E_{\max} = 2.16.10^6$ kG/sq cm, with 3 cycles of loading and relief (the loading was applied up to 0,9 $R_{r\,av}$).

The results obtained after testing strips of net containing each about 20 wires as follows:

a) the average tensile strength of the net

$$R_{r\text{ of net}} = 34.6 \ldots 42.5 \text{ kG/sq mm};$$

b) the average relation

$$\frac{R_{r\text{ of net}}}{R_{r\text{ of wire}}} = 0.903.$$

After introducing suitable coefficients the ultimate value of parameters of the net reinforcement were as follows:

c) the tensile strength $R_r = 46$ kG/sq mm; d) the yield point $Q_{rs} = 38{,}5$ kG/sq mm; c) the modulus of elasticity $E = 1{,}8 \times 10^6$ kG/sq mm.

4. Transmission of Forces from the Machine on Specimen

All specimens were tested on the universal testing machine (Fig. 2) at Laboratory of the Department of Reinforced Concrete Building at the Polytechnic Institute of Lódz.

During the tests special attention has been drawn into axial application of the tensile force. Grips of 5 mm in diameter made of extra fine steel and drown in the heads of specimens were prepared for the first tests but it was found that they were useless because the first investigations shown the eccentricity of the forces applied, slipping in gripping jaws of the testing machine and premature destruction of heads. As the result of improvement the two grips have been made (Fig. 3) containing: one part connected with the machine, the other — with the specimen and the elastic endless steel rope. The part of grip placed in tensile strength machine consists of carrying steel block and of roll bearing connected articulatly with the carrying block. The second part is connected with the specimen by clamping with screws. The friction forces can be transmitted either by the circular disk (s. Fig. 3) or by steel strip. In this case the circular disk is placed outside of the strip. The rope connecting both elements is

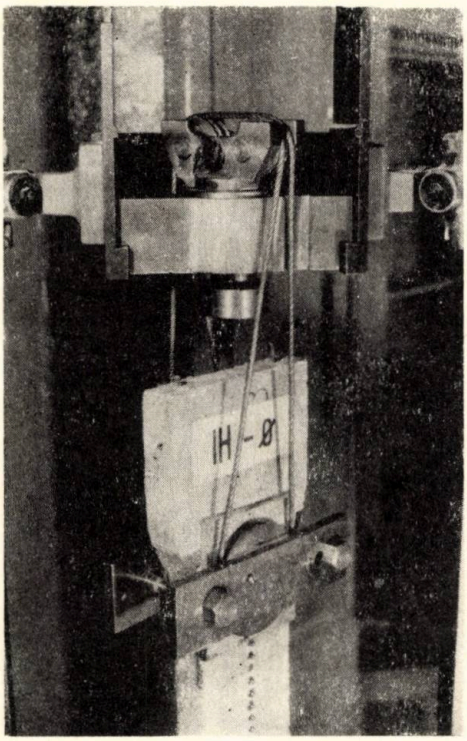


Fig. 2. — Upper grip connecting specimen with machine.

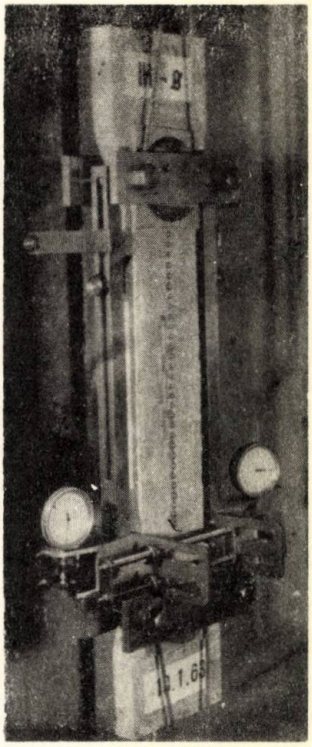


Fig. 3. — Ferrocement specimen fixed in testing machine.

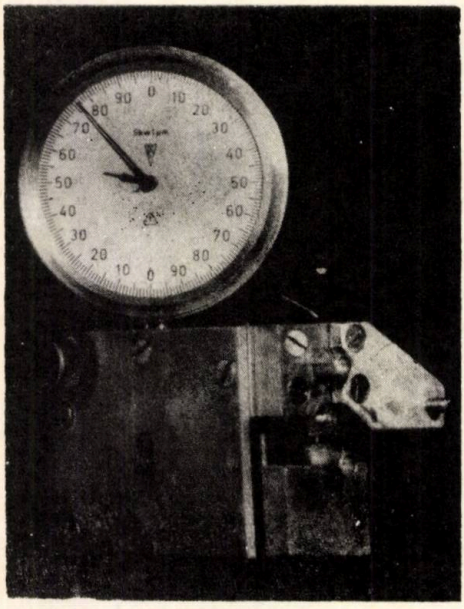


Fig. 4. — Extensometer for recording cracks and for measurement of their width.

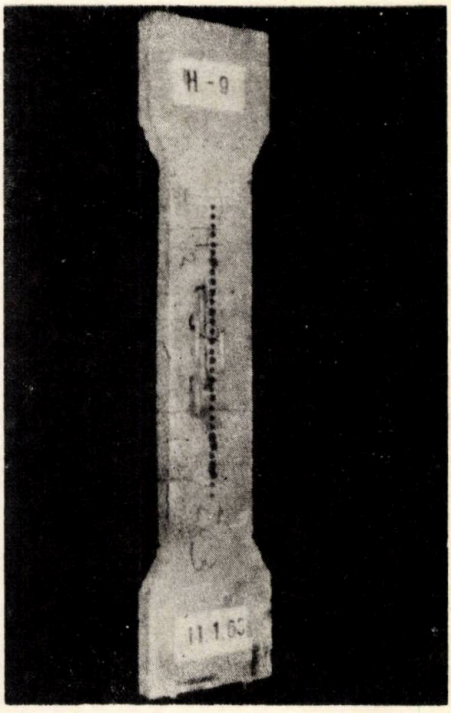


Fig. 5. — Location of steel balls fixing measurement lines for extensometer.

supported on the top, on the roll bearing. Compensation of the forces in the ropes is caused by shifting the ropes due to turning of the rollers. At the bottom the rope can be shifted (with slip) in the unmovable circular disk i.e. in the case when the clamp is transmitted on the specimen by disk, or the shift of the rope is caused by rotation of the disk (i.e. in the case when the clamp is transmitted by the steel strip).

The clamp is transmitted on the specimen through the plates made of soft board.

5. Measurement and Recording Methods of the first Crack, of the Width of Cracks and of their Number

The occurance of the crack has been recorded by the extensometer of small measurement line [1]) (Fig. 4). The technique of measurement with extensometer required to glue steel balls of 3 mm diameter in interval of 10 mm at the prior chosen points of the specimen. The measurement line of the extensometer has been equal to 20 mm and was corresponding to the duble interval between steel balls fixed on the total measurement length of the specimen (i.e. 300 mm) (Fig. 5). The measurements were taken displacing the extensometer every 10 mm. The magnitude of deformation of measurement section within two balls (i.e. 20 mm) has been recorded by the dial gauge with scale 1 : 1 000 mm built in the girder system of extensometer.

The girder system of extensometer created the transmission with relation between branches as 1 : 100, thus, the one gradation of the dial gauge corresponded to deformation as 1 : 100 000 and this with measurement line equal to 20 mm gave for the one gradation

$$\varepsilon = \frac{1}{1\,000} \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{20} = 0.5 \times 10^{-6}.$$

The point of this measurement concerned determination of changes in length of measurement section of the specimen being equal to 10 mm.

Taking, for instance, the unit standard elongation $\varepsilon_r = 100 \times 10^{-6}$, the maximum strain of the given measurement section up to cracking will be equal to 1 micron (i.e. within the limits of measurement error of the apparatus). From the practical point of view the elongations of this rate can be neglected. When the value ε_r is exceeded then will occur plastic yield or cracking of concrete. The width of cracks is usually of few or a dozen microns. The rapid lift in recording of

[1]) The extensometer (symbol T_z-20) has been designed and constructed by Stanisław Bała, M. Sc. and Lucjan Malinowski, M. Sc., with cooperation of the author.

dial gauges of extensometer indicates the occurance of crack and the difference between particular records of the same base indicates the increase of widths of cracks.

To record the control measurements of the width of cracks the microscop (Fig. 6) equipped with the special ocular with gradation has been used. The smallest gradation on the scale of the ocular indicated the value of 10 microns.

To look for cracks and to watch their progress the various kind of reading glasses magnifying from 5 to 32 times were used.

6. Method of Measurement of Elongation

It is well known that elongation of concrete elements depends on many factors. The preliminary state of the specimen and character of its inner microcracks considerable influence on the magnitude of the tensile strength (R_r) determining the share of concrete in the total strength of element against cracking as well as on the magnitude of ε determining the degree of utilization of the reinforcement for the given elongation. The microcracks depend on unequal distribution of temperature and moisture in concrete as well as on deformation properties of hardened cement paste and aggregate. The presence of microcracks either in unloading state or during loading as well as other heterogeneities cause an unequal distribution of stresses and strains in cross sections. These microcracks, occuring in places of stress concentration determine the final elongation of the element.

The results of measurements of elongation of ferrocement depend, to a high degree, on the taken measurement section. On the short measurement section, in case when it is the weakest cross section (i. e. the place of plastic yield) the results of measurement will show a maximum rate of elongation. However in neighbor sections the elastic elongation might be even not used more over the elongation between two microcracks might be reduced to zero or even being of negative value. The elongation of the ferrocement element determined on the short measurement section will be called as the local elongation.

In the case when the measurement of elongation is taken on the long section (i.e. 300 mm) the result depends on the number of points with the increased elongation it means on the local elongations. The elongation determined in such manner will be called as the average elongation. Of course, in the phase of elasticity the average and local elongations are the same.

To measure the local elongations electric resistance strain gauges with 30 mm base (symbol T_0- 30) were used. This kind of measurement technique, as it is known, is based on the conformity of strains

of the specimen and of the electric resistance gauge. The change of resistance rate of the gauge depends on the rise of the length of resistor (wire)

$$R = f(\Delta l). \tag{1}$$

Thus, for the preliminary rate of the resistance of the gauge R_c and the increase of its resistance ΔR at any time of test the following simple relation should be determined :

$$R_n = R_c \pm \Delta R. \tag{2}$$

For the established constant value $R_c/R_0 = \text{const.}$ the readings according to formula (2) depend only on ΔR.

If, however, during applying the load crack occur under the electric resistance gauge then due to local strains an additional narrowing of the wire will be under the crack. Any crack causes an additional resistances (the rise of resistance Δr) in each wire of electric resistance gauge, thus at the moment of formation of cracks the formula (2) shall be as follows :

$$R_n = R_c \pm \Delta R \pm n\Delta r, \tag{3}$$

where : R_n — resistance at any time of test, R_c — preliminary resistance of the gauge, ΔR — increase of uniform resistance, n — number of resistance wires in the gauge, Δr — increase of local resistance (i.e. under the crack in each wire of the gauge).

So, we have here the effect of various resistance of gauges depending on the number of wires.

The measurements of the elongations with the electric resistance gauges give satisfactory results only in case of elastic strains. Starting at the moment of plastic yield in section we are able to determine neither the limit elongation of concrete occuring prior to failure of structure nor the limits between the nonelastic strains and cracking. In this range of elongations the electric resistance gauges indicate the local elongations with error due to narrowing of wires of the gauge. Therefore the results measurements of the local elongation with the electric resistance gauges have been recognized, in the relating tests, as being authoritative only in the range of elastic phase.

To measure the average elongation the extensometer (symbol T_x-300) (Fig. 7) have been applied with measurement line equal to 300 mm. The measurement after exceeding the elastic strains concerned the average elongation including the microcracks. The extensometer gave the possibilities to measure the unit strains of the following order :

$$\varepsilon = \frac{1}{1\,000} \cdot \frac{1}{100} = 3{,}33 \times 10^{-6}.$$

7. Observation of System of Cracks

First of all the evidence of existing cracks on unloaded specimens have been done. Three series of specimens *IA*, *ID* and *IE* have been exactly checked by microscope on the fourth day after casting and all of them shows the minimum of shrinkage cracks.

It has been stated that any element made either of concrete or reinforced concrete or ferrocement before being loaded has several cracks. There are invisible with eye, small cracks in hardened cement paste. The cracks are chaoticly situated on the surface of specimens. The length of the crack is almost always limited by the first grain of aggregate being on the line of the crack.

The first observation of cracking under loading has been started with preliminary load equal to dead weight of specimen including the weight of grips and of extensometer. Next the loading was increasing gradually every 100 kG. Each grade of load was applied for 3 min. The observation of cracks has been carried macroscopically and with reading glass magnifying 5 times. At the final phase of test the pictures of cracking elements have been taken.

In Fig. 8 it is shown the picture of cracking of tested specimens made of concrete, of reinforced concrete and of ferrocement with 9 nets.

In concrete specimens the cracks occur just before the concrete reaches the ultimate tensile strength. Usually, it is one crack occuring in the section of failure (Fig. 8 a).

In elements being reinforced with bars the number of cracks is higher (Fig. 8 b) and the specimen of ferrocement with coefficient of specific surface K_x equal to 0.81 cm^{-1} (i.e. $\alpha = 20.03$ cm^{-1}) and with very similar percentage of reinforcement compared with this made of reinforced concrete (s. Table 1) has been cracked much more (Fig. 8 c). As the coefficient K_x decreases the system of cracks becomes similar to this in reinforced concrete specimens (Fig. 9).

To explain the influence of system of steel on the distribution of cracks, besides of specimens given in Table 1, the elements of the same shape but reinforced with lath of 10 mm mesh made of 1.0 mm wires have been made. The coefficient of specific surface K was equal to 1.052 cm^{-1} (i.e. $\alpha = 23.55$ cm^{-1}). In one serie of specimens wires of weft of the lath were placed under the angle of 45° to the axis of the specimen.

In the specimen subjected to the axial tension the observed cracks have been under the angle of 45° and they were in accordance with wires of weft of the first nets under the surface (Fig. 10).

The placement of the net with wires of weft under the angle of 45° on the one side of the specimen and on the other side — under the angle of 90°, caused the occurance of cracks on the respective surfaces according to direction of placed wires of weft (Fig. 11).

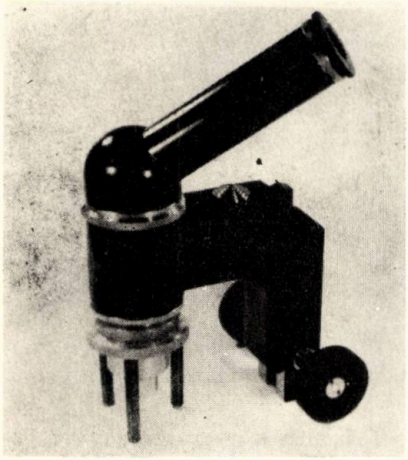


Fig. 6. — Microscop for width of cracks measurement equipped with ocular.

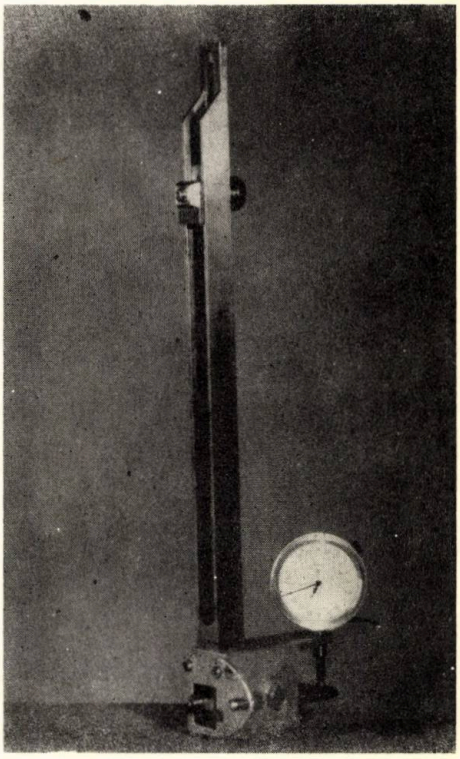
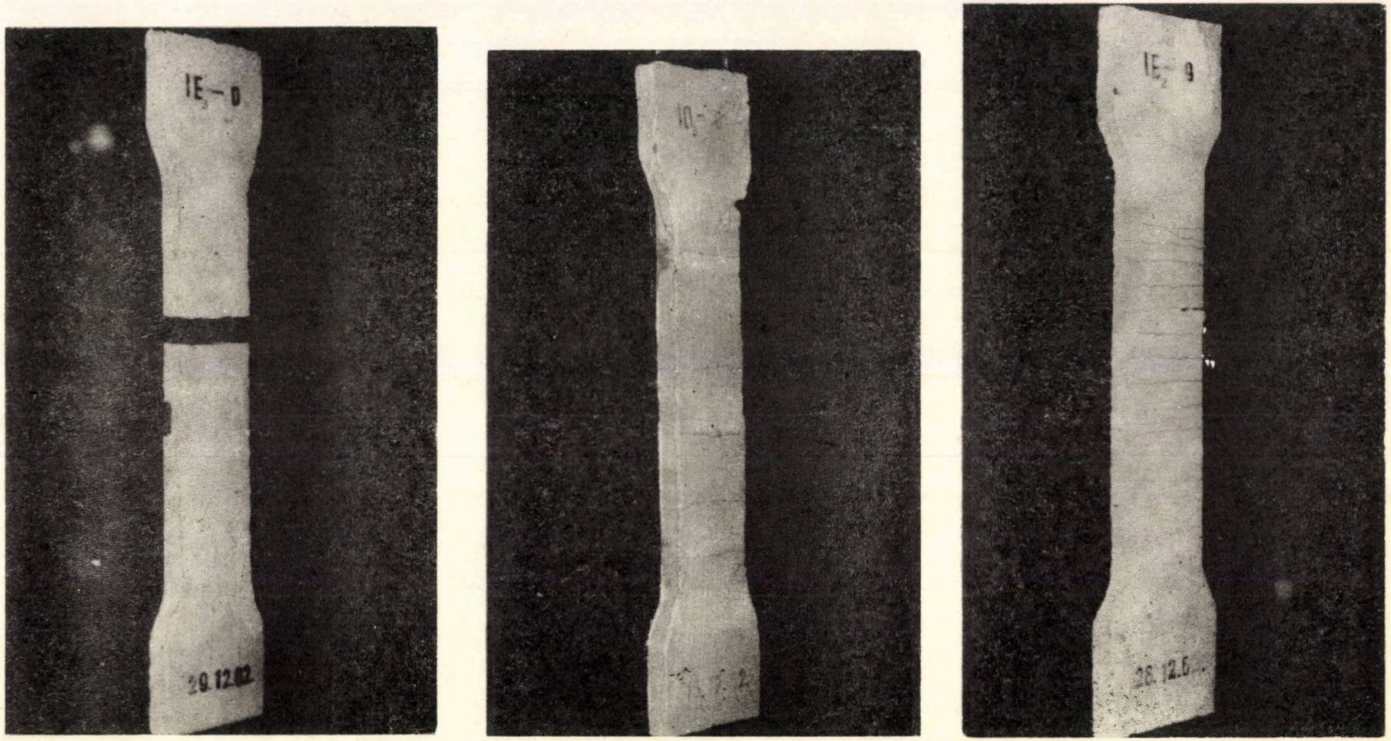
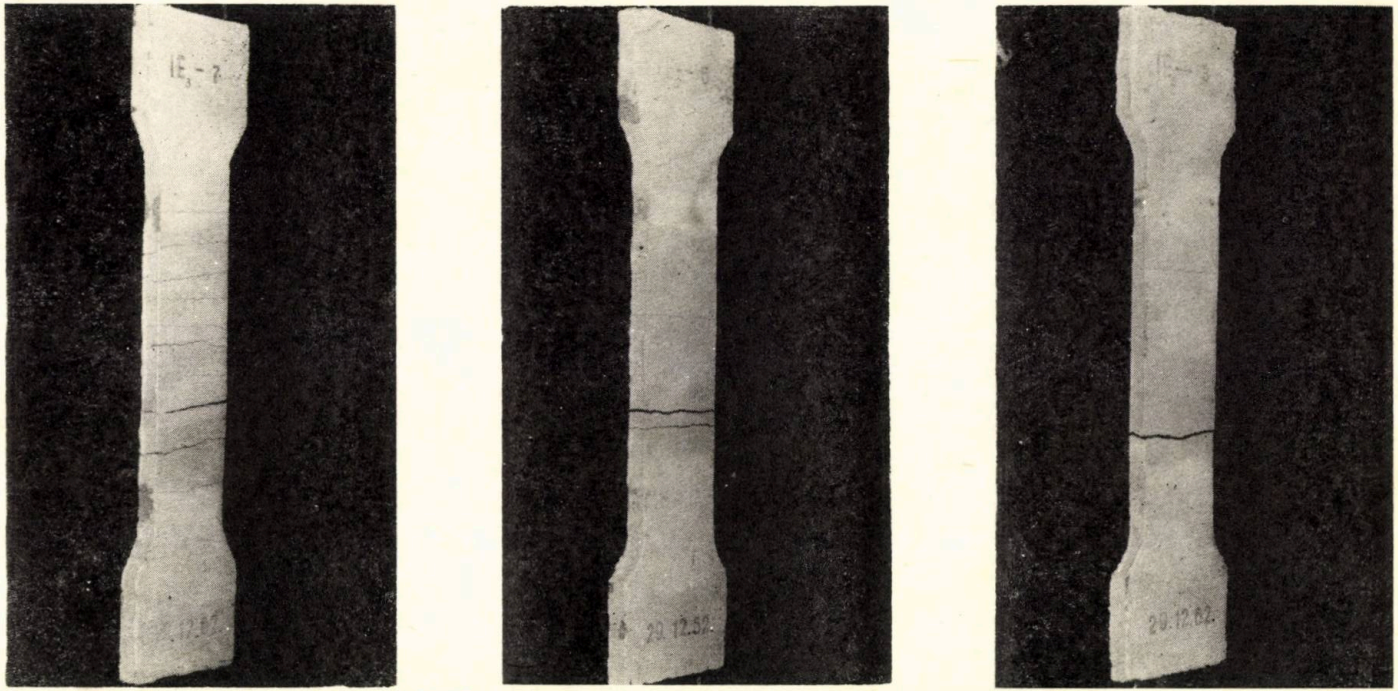


Fig. 7. — Extensometers for average elongations measurement (made according to the author's idea).



a *b* *c*

Fig. 8. — System of cracks on tested specimens: *a* — specimen without reinforcement after the failure, *b* — reinforced concrete specimen, *c* — ferrocement specimen ($K_x = 0.31$ cm^{-1})



a *b* *c*

Fig. 9. — System of cracks on tested specimens reinforced with mesh: *a* — $K_x = 0.63$ cm^{-1}, *b* — $K_x = 0.45$ cm^{-1}, *c* — $K_x = 0{,}27$ cm^{-1}.

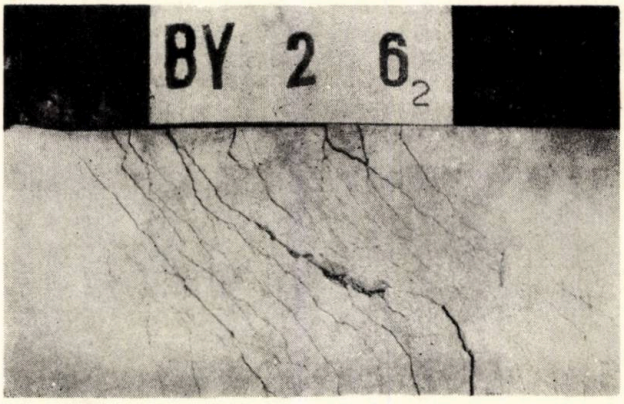
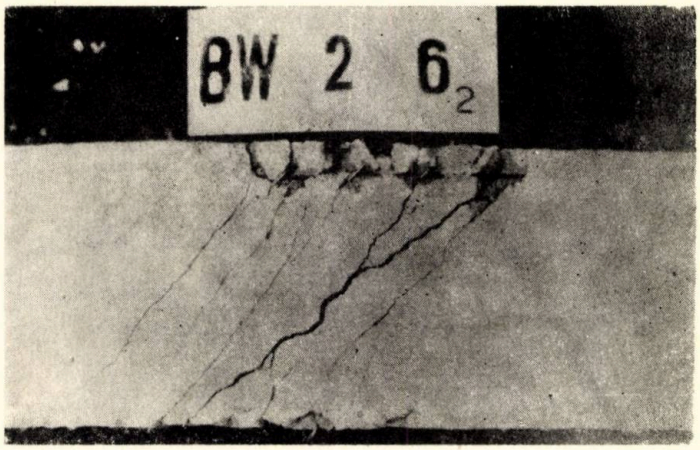
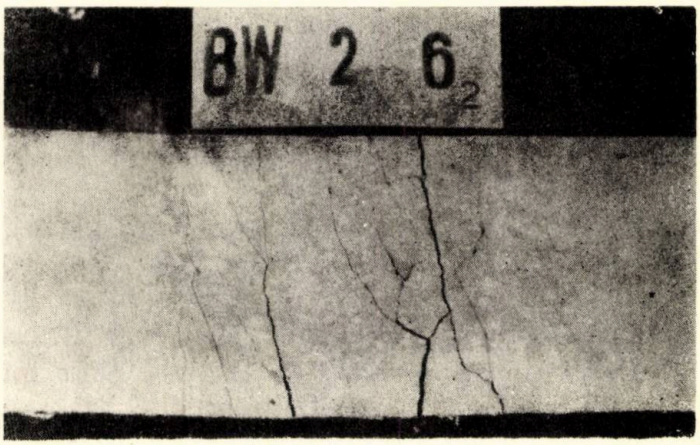


Fig. 10. — System of cracks on specimen reinforced with mesh which wires of weft were placed under $\measuredangle$ 45° to the axis of specimen.



a



b

Fig. 11. — System of cracks on specimen reinforced with mesh placed with wires of weft on one side under $\measuredangle$ 45° and on the other side under $\measuredangle$ 90° to the axis of specimen: *a* — surface on the side where the mesh is placed with wires of weft under $\measuredangle$ 45°; *b* — surface on the side where the mesh is placed with wires of weft under $\measuredangle$ 90°.

Besides of this, it has been observed that in the case of considerable high coefficient of steel dispersion (i.e. for $\alpha \geqslant 30$ cm^{-1} and $K_x \geqslant 0.81$ cm^{-1}) the cracks occur regularly in intervals not exceeding the double length of mesh.

Polytehnic Insittut of Lódz,
Poland

REFERENCES

1. * * * *Армоцемент и армоцементные конструкции.* Госстройиздкт, М., 1962.
2. * * * *Армоцементные конструкции в жилищном промышленном и сельскохозяйственном строительство.* Госстройиздат, М., 1963.
3. Балавадзе В. К., *Влияние армирования на свойства растянутого бетона.* Бетон и железобетон, 1959, *10.*
4. Базенов Ю. М., *Высокопрочный малозернистый бетон для армоцементных конструкции.* Госстройиздат, М., 1963.
5. Боровский Н. В., Ночин С. И., *Исследование процессов трещинообразования в армоцементе.* Бетон и железобетон, 1961, *9.*
6. Чискрели Г. Д., *К расчету и сечения армоцементных конструкции.* Бетон и железобетон, 1962, *5.*
7. — *О растяжимость армированных бетонов.* Бетон и железобетон, 1963, *3.*
8. Хайдуков Г. К., Малавский В. Д., *О работе армоцемента на растяжение.* Бетон и железобетон, 1961, *12.*
9. — *Методика и результаты исследования перещинообразования в армоцементе при растяжение. Армоцементные конструкции в жилищном промышленном сельскохозяйственном строительство.* Госстройиздат, М., 1963.
10. Илларионова Л. Ф., *Экспериментальные исследования армоцементных образцов на растяжение. Армоцементные конструкции.* Госстройиздат, М., 1963.
11. Красновский Р. О., Поштовик Г. Е., *О механизме деформирования растянутого бетона.* Бетон и железобетон, 1962, *3.*
12. * * * *Методика лабораторных исследовании деформации прочность бетона арматуры и железобетонных конструкции.* Госстройиздат, М., 1962.
13. Родов Г. С., Свойскин В. М., *Арматура для армоцементных конструкции.* Бетон и железобетон, 1963, *6.*
14. Walkus R., *Niektóre zagadnienia siatek jako zbrojenia rozproszonego siatkobetanu.* Przeglad Budowlany i Budownictwo Mieszkaniowe, 1963, *11.*
15. — *O charakterystyce zbrojenia siatkobetonu.* The IX Scientific Conference of Science PZITB Committee and Engineering Committee of Polish Academy of Science, Papers and Communications, Gliwice, 1963.
16. — *Zbrojenie siatkobetonu. Siatki krajowe.* Biuletyn Techniczny BPBP, 1964, 5.
17. — *Siatki tkane jako szczególny przypadek zbrojenia rozproszonego.* Inzynieria i Budownictwo, 1964, 5.
18. — *Analiza struktury i wlasnosci wytrzymalosciowych siatkobetonu.* Dissertation, Lódz, 1965.
19. — *Siatkobetonowa powloka o rozpietosci 15 m jako przekrycie magazynu.* Inzynieria i Budownictwo, 1967, *6.*
20. — *Wydluzalnosc siatkobetonu w swietle dotychczasowych badan.* Inzynieria i Budownictwo, 1964, *11.*
21. Воронко Е. А., *Исследование деформативности трещиностойкости и упругих свойств армоцемента.* Бетон и железобетон, 1958, *8.*

STAREA DE FISURARE ŞI ALUNGIREA FEROCIMENTULUI LA ÎNCĂRCĂRI AXIALE DE ÎNTINDERE (I)

(Rezumat)

Se expun o serie de cercetări experimentale referitoare la determinarea proprietăţilor ferocimentului şi a componenţilor săi (agregat, plasă de armătură). S-a cercetat comportarea ferocimentului la întindere, momentul de apariţie a primelor fisuri, raportul între fisuri şi sistemul de armare ş. a. S-a studiat comportarea ferocimentului supus la un efort axial de întindere, sub influenţa a doi factori: starea de fisurare şi alungirea elementului (relaţia $\sigma-\varepsilon$ la un stadiu dat de fisurare). Se propune o metodă adecvată de măsurare a alungirii probelor.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Forma şi dimensiunile probelor.
Fig. 2. — Dispozitivul de prindere superioară a probei de maşină.
Fig. 3. — Probă de ferociment fixată în maşina de încercat.
Fig. 4. — Extensometru pentru înregistrarea fisurilor şi pentru măsurarea lăţimii lor.
Fig. 5. — Amplasarea bilelor de oţel care fixează liniile de măsură ale extensometrului.
Fig. 6. — Microscop cu ocular pentru măsurarea lăţimii fisurilor.
Fig. 7. — Extensometru pentru măsurarea elongaţiilor medii (bazat pe o idee a autorului).
Fig. 8. — Sistem de fisuri pe probele încercate: *a* — proba fără armătură după rupere, *b* — probă de beton armat, *c* — probă din ferociment ($K_x = 0{,}81\ \text{cm}^{-1}$).
Fig. 9. — Sistem de fisuri pe probele încercate, armate cu plasă: *a* — $K_x = 0{,}63\ \text{cm}^{-1}$, *b* $K_x = 0{,}45\ \text{cm}^{-1}$, *c* — $K_x = 0{,}27\ \text{cm}^{-1}$.
Fig. 10. — Sistem de fisuri pe proba armată cu plasă la care firele de ţesături au fost dispuse la 45° faţă de axa probei.
Fig. 11. — Sistem de fisuri pe proba armată cu plasă având firele dispuse pe o parte la 45° şi pe cealaltă parte la 90° faţă de axa probei: *a* — suprafaţa părţii pe care plasa este dispusă cu firele de ţesătură la 45°, *b* — suprafaţa părţii pe care plasa este dispusă cu firele de ţesătură la 90°.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

C. D. 691 234

CIMENTS À LAITIER ACTIVÉ

PAR

I. TEOREANU et A. ŢANDREU

1. L'utilisation des laitiers permet l'extension de la base de matières premières pour l'obtention de liants à bon marché, par la valorification d'un déchet industriel. Il est d'une importance particulière, du point de vue économique, de produire des ciments de marque correspondante dans lesquels la proportion du laitier soit augmentée autant que possible. Dans notre pays, on obtient à présent des ciments de haut fourneau avec un maximum de 70% de laitier ; dans le cas d'un ciment à 70% de laitier — conformément au standard en vigueur — la résistance du ciment à la compression — durci pendant 28 jours dans des conditions normales — est d'environ 300 kgf/cm^2.

On sait que les laitiers possèdent des propriétés hidrauliques latentes et c'est pourquoi leur processus de durcissement doit être activé. Pour l'activation des laitiers on utilise depuis longtemps le chaux, le clinker de ciment Portland, le sulfate de calcium (hydraté ou anhydre). Les derniers temps on a préconisé l'utilisation, comme activants, de la chlorure de calcium et du silicate de sodium (seuls ou associés avec un des additifs activants, mentionnés plus haut) [1]...[7]. Les recherches effectuées récemment [1]...[3] ont mis en évidence le fait que l'effet activant dépend essentiellement — en fonction de la nature de l'additif utilisé pour l'activation — du sous-système de l'équilibre thermique auquel appartient le laitier soumis au durcissement, de la présence dans le système de certaines phases vitreuses et cristallines.

2. En se basant sur des études effectuées antérieurement par l'un des auteurs [1]...[3], dans le présent travail on a cherché l'obtention de ciments ayant un contenu accru de laitier, de marques correspondantes aux ciments Portland usuels. On a débuté dans ce but avec des laitiers de Hunedoara dont la composition est présentée dans le tableau 1.

Selon leur composition en oxydes principaux (CaO, SiO_2, Al_2O_3, MgO) les laitiers utilisés sont du type mélilitique (correspondant aux sous systèmes d'équilibre thermique qui comprennent comme phases principales de cristallisation mélilite et silicates de calcium). Dans l'ouvrage [1] il a été soulignée l'obtention de certains bons résultats dans l'activation mixte des laitiers de cette catégorie avec du clinker

Tableau 1

Laitier	Composition %								
	SiO_2	Al_2O_3	CaO	MgO	Fe_2O_3	MnO	Soufre	Insoluble	Autres composants
I	35,51	8,98	49,28	4,05	0,19	0,19	0,97	0,31	0,52
II	37,27	7,80	48,18	4,30	0,24	0,20	0,73	0,25	1,03
III	35,57	8,50	42,10	8,80	0,64	0,46	1,27	0,33	2,33
IV	35,67	8,10	46,34	6,25	0,24	0,33	1,30	0,23	1,54

et de la chlorure de calcium ou avec du clinker et du gypse et en certains cas dans l'activation seulement avec de la chlorure de calcium. En tenant compte des résultats mentionés, ont été préparés des liants de laitier de Hunedoara, en utilisant comme activants du clinker, du gypse et de la chlorure de calcium dans les mélanges présentés dans le tableau 2.

Tableau 2

Nr. d'ordre du liant	Laitier %	Activants %		
		Clinker	Gypse	Chlorure de calcium
1	85	15	—	—
2	70	30	—	—
3	95	—	5	—
4	98	—	—	2
5	80	15	5	—
6	83	15	—	2
7	70	25	5	—
8	70	18	28	2
9	93	—	5	2

Sur les laitiers ainsi activés, ont été effectués des essais de résistance mécanique, de prise et de constance de volume, les résultats obtenus étant présentés dans le tableau 3.

Pour l'obtention d'informations supplémentaires, qui puissent aider à l'explication des effets d'activation constatés, ont été effectués aussi des déterminations de résistivité électrique sur des suspensions de liants préparées dans les conditions indiquées dans l'ouvrage [8], ainsi que des déterminations de résistance plastique (conformément aux indications données dans [4], [9]).

3. Les données expérimentales obtenues mettent en évidence une bonne activation, surtout dans le cas de l'utilisation du clinker en proportion de 30% ou du clinker et de la chlorure de calcium (15% clinker et 2% chlorure de calcium ou 28% clinker et 2% chlorure de calcium).

Particulièrement importants sont les résultats obtenus — dans tous les cas — avec l'utilisation d'un mélange activant de 15% clinker et 2% chlorure de calcium (calculé au mélange total de liant) ; on peut donc obtenir — ainsi comme nous avons proposé — des liants à un contenu élevé en laitier.

L'activation mixte des laitiers avec du clinker et de la chlorure de calcium met en valeur de manière corrélative, leur capacité d'accélération du processus de durcissement. Des données existentes il résulte une influence accentuée exercée sur toutes les phases du procéssus : dissolution, hydratation, formation de la structure de durcissement.

Les laitiers sont des liants dont la solubilité en eau est faible, ce qui explique, en bonne mesure, leur faible vitesse (parfois négligeable) de durcissement. L'emploi, comme activant, des additifs de clinker ou de clinker et chlorure de calcium — comme on peut voir dans la fig.1 — exerce une influence importante sur la vitesse de dissolution des laitiers. La diminution de la résistivité électrique des suspensions, dans le cas de l'addition des activants, ne peut pas être expliquée seulement par la simple présence de ces dernières. Si les activants utilisés n'exerceraient aucune influence sur le processus, alors toutes les suspensions devraient être caractérisées par des valeurs de la résistivité électrique proches de celles des suspensions d'activants, et variant dans le même sens. En fonction de la nature du laitier, des situations différentes ont lieu. L'existence des valeurs de la résistivité électrique supérieures à celles obtenues par les suspensions d'activants correspondantes (v. les courbes *i* et *j* — fig. 1) peut être expliquée par une action chimique et physique simultanée des additifs utilisés. Les activants détérminent l'augmentation de la solubilité des liants anhydres ; cela conduit à l'augmentation de la concentration ionique (surtout de Ca^{2+} et Mg^{2+}) et de ce fait à la diminution de la résistivité électrique. L'accélération de l'interaction chimique laitier-eau-activant conduit pourtant à la baisse de la concentration ionique. En fonction de la vitesse des deux phénomènes, un certain équilibre est établi dans les diverses étapes du processus, caractérisé par une valeur déterminée de la résistivité électrique (ρ).

Dans le cas des activants avec de la chlorure de calcium, le passage de celle-ci en solution détermine, en premier lieu, une intensification de la dissolution et de l'interaction avec l'eau des constituants minéralogiques du clinker ; a lieu la mise en liberté du hydroxide de calcium, ce qui détermine une accélération de la dissolution du laitier et l'interaction de celui-ci avec l'eau (dans le même sens peut actionner

Tableau 3

Liant	No. ordre du liant	Surface spécifique cm²/gf	Constance du volume		Eau à consistance normale %	Prise		Résistance mécanique kgf/cm²					
								Traction après :			Compression après :		
			anneaux mm	tourteaux		commence	finit	3 jours	7 jours	28 jours	3 jours	7 jours	28 jours
I	*1*	3 000	4	bonne	27,66	4^h45^{min}	7^h45^{min}	14,6	22,7	36,5	143	253	386
	2	2 990	3	bonne	27,33	3^h30^{min}	5^h45^{min}	17,2	26,3	38,0	182	302	480
	3	3 050	2	bonne	28,33	4^h30^{min}	8^h00^{min}	12,6	16,8	22,9	69	110	141
	4	3 005	—	—	27,33	—	—	—	5,9	20,5	—	26	207
	5	3 060	5	bonne	26,66	4^h45^{min}	7^h45^{min}	13,7	24,8	36,5	133	262	381
	6	3 045	3	bonne	26,66	3^h15^{min}	3^h45^{min}	14,7	26,2	34,7	159	329	450
II	*1*	3 027	2	bonne	30,00	5h45min	8^h15^{min}	9,1	18,7	35,9	76	151	350
	2	3 020	2	bonne	31,33	5^h15^{min}	8^h00^{min}	14,0	21,7	31,6	135	210	437
	3	3 010	2	bonne	27,33	4^h00^{min}	5^h45^{min}	11,2	13,5	17,4	50	54	106
	4	3 020	—	—	27,33	—	—	—	9,7	20,4	—	98	315
	5	3 000	3	bonne	28,33	4h00min	6h15min	7,2	20,5	34,0	46	198	287
	6	3 000	3	bonne	26,33	3^h30^{min}	4^h30^{min}	14,7	26,2	34,7	150	320	420
Étalon *1**)		3 060	2	bonne	28,33	2^h30^{min}	3^h45^{min}	29,5	30,5	33,2	412	485	550
III	*1*	3 330	0	bonne	31,00	9h00min	11h45min	11,1	19,7	29,7	80	190	280
	2	3 300	0	bonne	31,60	7^h30^{min}	10^h30^{min}	14,0	27,1	30,3	125	205	351
	3	3 270	0	bonne	25,30	5^h30^{min}	7^h15^{min}	12,8	17,5	21,0	110	123	145
	4	3 280	0	bonne	25,60	5^h30^{min}	8^h00^{min}	10,8	23,9	32,5	112	215	285
	5	3 290	0	bonne	26,60	2^h15^{min}	4^h45^{min}	20,4	27,5	30,1	172	282	400
	6	3 260	0	bonne	25,30	4^h30^{min}	6^h15^{min}	13,5	27,8	36,7	140	250	400
	7	3 130	0	bonne	27,30	2^h15^{min}	4^h30^{min}	19,2	23,0	29,9	190	320	412
	8	3 220	0	bonne	24,60	2^h30^{min}	3^h45^{min}	17,4	22,8	31,0	122	135	300
IV	*1*	3 180	0	bonne	30,00	5h45min	7h15min	13,1	22,3	30,2	141	250	395
	2	3 240	0	bonne	30,00	4^h15^{min}	6^h00^{min}	16,3	25,0	34,9	145	315	422
	3	3 300	0	bonne	26,00	5^h00^{min}	6^h30^{min}	14,1	21,3	22,0	115	175	185
	4	3 120	0	bonne	27,60	7^h00^{min}	11^h00^{min}	10,5	23,0	30,6	127	220	317
	5	3 300	0	bonne	27,60	2^h45^{min}	5^h45^{min}	21,0	29,3	31,5	270	358	412
	6	3 300	0	bonne	27,30	6^h30^{min}	7^h30^{min}	15,2	27	30,9	165	262	352
	7	3 300	0	bonne	29,00	1^h30^{min}	2^h30^{min}	19,2	23,6	29,6	300	390	410
	8	3 300	0	bonne	25,00	3^h15^{min}	6^h00^{min}	17,1	24,6	30,1	170	228	337
Étalon *2**)			2	bonne	30,60	4^h30^{min}	6^h30^{min}	29,2	33,1	33,8	432	482	535

*) L'eprouvette étalon a été confectionnée sur base de clinker utilisé à l'activation des laitiers *I* et *II* et l'éprouvette étalon *2* sur base de clinker utilisé à l'activation des laitiers *III* et *IV*.

aussi directement la chlorure de calcium) ayant lieu en même temps une liaison progressive du hydroxide de calcium par la hydratation du laitier.

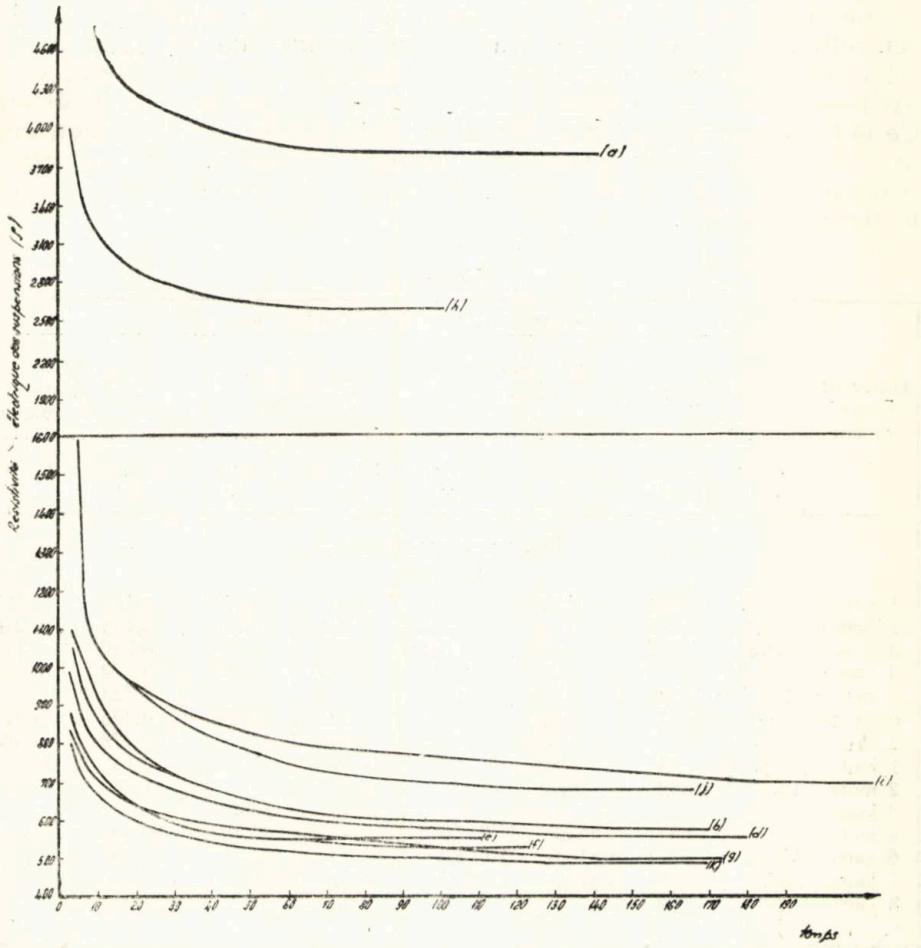


Fig. 1. — *a* — Laitier *II* sans additif (0,5 g à 100 ml eau distillée) ; *b* — clinker (0,150 g à 100 ml eau distillée) ; *c* — clinker (0,075 g) et chlorure de calcium (0,010 g) à 100 ml eau distillée ; *d* — clinker (0,140 g) et chlorure de calcium (0,010 g) à 100 ml eau distillée ; *e* — laitier *III* avec 30% clinker (0,5 g mélange à 100 ml eau distillée) ; *f* — laitier *III* avec 15% clinker et 2% chlorure de calcium (0,5 g mélange à 100 ml eau distillée) ; *g* — laitier *III* avec 28% clinker et 2% chlorure de calcium (0,5 g mélange à 100 ml eau distillée) ; *h* — laitier *IV* (0,5 g à 100 ml eau distillée) ; *i* — laitier *IV* avec 30% clinker (0,5 g mélange à 100 ml eau distillée) ; *j* — laitier *IV* avec 15% clinker et 2% chlorure de calcium (0,5 g mélange à 100 ml eau distillée) ; *k* — laitier *IV* avec 28% clinker et 2% chlorure de calcium (0,5 g mélange à 100 ml eau distillée).

Par la hydratation, les laitiers mettent en liberté une petite quantité de hydroxide de calcium, insuffisante pour assurer une concentration de la solution correspondante aux limites de stabilité des hydrosilicates et des hydroaluminates et par conséquent de cristallisation de ceux-ci dans la solution. L'augmentation de la concentration des iones de Ca^{2+}, conséquence de la présence des activants, assure les conditions de formation des hydrosilicates et des hydroaluminates de calcium, ainsi que de la structure de résistance. Ce fait est mis en évidence — surtout dans le cas de l'activation mixte avec du clinker 28% et de la chlorure de calcium 2% — par les résultats obtenus relatifs aux résistances plastiques (tableau 4) et le temps de prise.

Tableau 4

Durée de durcissement	Nature et quantité de l'additif activant							
	30% clinker		28% clinker 2% chlorure de calcium		25% clinker 5% gypse		15% clinker 2% chlorure de calcium	
	Laitier *III*	Laitier *IV*	Laitier *III*	Laitier *IV*	Laitier *III*	Laitier *IV*	Laitier *III*	Laitier *IV*
	Résistance plastique R_p kgf/cm²							
1 heure	0,363	0,344	0,225	0,356	0,102	0,214	0,102	0,163
2 heures	0,421	0,697	0,350	0,412	0,196	0,314	0,165	0,219
3 heures	0,020	1,696	0,440	0,518	0,323	0,384	0,216	0,323
4 heures	2,210	2,680	0,467	0,680	0,413	0,434	0,272	0,420
5 heures	2,915	2,820	0,510	0,785	—	0,522	0,323	—
6 heures	—	3,07	0,520	0,995	0,532	0,884	0,425	0,477
7 heures	3,07	—	0,600	1,510	1,508	—	0,473	0,534
1 jour	3,87	4,85	6,800	7,075	7,07	7,75	2,15	4,85
2 jours	10,21	13,32	10,74	—	27,20	—	11,32	7,74
3 jours	18,15	—	—	56,50	50,40	50,40	—	—
4 jours	—	40,84	653,0	653,0	—	96,50	50,30	50,30
6 jours	56,52	—	1 814,0	1 814,0	96,50	96,50	50,30	50,30
7 jours	56,52	72,60	1 814,0	1 814,0	96,50	96,50	—	—
8 jours	—	72,60	—	—	—	—	—	—

En comparant les résistances plastiques obtenues sur des épreuves activées avec 30% clinker avec celles établies sur des épreuves activées avec 28% clinker et 2% chlorure de calcium et 25% clinker et 5% gypse, on constante que la présence du gypse et surtout de la chlorure de calcium, quoique initialement elle détermine un ralentissement de la formation de la structure de résistance, pendant une période prolongée elle conduit à une intensification évidente de ce processus. Cette influence est expliquée surtout par l'effet de coagulation

de gels de hydrosilicates — ceux-ci étant formés après une période déterminée suivant le mélange du liant avec de l'eau.

Compte tenu des résultats présentés, de la nécessité d'obtenir des conditions correspondantes de stabilité et par conséquent de cristallisation des hydroaluminates et des hydrosilicates (du type tobermoritique), ainsi que d'une vitesse optimum de formation de la structure de résistance (caractérisée par tensions minimales, compactité et maximum de résistance), il en résulte l'existence des valeurs optimum d'additif d'électrolite (chlorure de calcium et gypse) comme activant, à coté du clinker. Cet aspect sera étudié par les auteurs dans une Note prochaine, en vue de l'établissement du mélange d'activant, qui dans les conditions d'une quantité minimum de clinker et aussi grande que possible de laitier, puisse conduire à l'obtention de résultats remarquables, surtout du point de vue des résistances mécaniques.

Reçue le 10 XII 1968

Institut de Constructions, Bucarest

BIBLIOGRAPHIE

1. Teoreanu I., Rotaru M., Rev. Mat. Constr., 1966, *608*, p. 202.
2. Teoreanu I., Georgescu M., Revue Roumaine de Chimie, 1967, *12*, p. 529.
3. — Industrie chimique Belge, 1967, **32**, nr. spécial, C. r. XXXVI-e Congrès International de Chimie Industrielle, Vol. **II**, p. 492.
4. Teoreanu I., Puri A., Baltă P., Travail sous presse.
5. Manche H., Rev. Mat. Constr., 1960, *541*, p. 277.
6. Balazs Gy., Epitöanyag, 1964, *16*, p. 414.
7. Константинов В. В., Пужанов Г. И.. Строит. матер., 1960, **6**, *8*, стр. 33.
8. Solacolu S., Baltă P., Hofman C., Revue Roumaine de Chimie, 1966, *11*, p. 481.
9. Сегалова Е. Е., Ребиндер П. А., Строит. матер., 1960, **6**, *7*, стр. 29.

CIMENTURI CU ZGURĂ ACTIVATĂ

(Rezumat)

Se examinează întărirea unor zgure de furnal înalt, folosind activarea cu clorură de calciu, ghips și clincher de ciment portland — singure sau asociate între ele. Se aduc noi informații referitoare la mecanismul procesului de întărire a zgurelor, în prezența activatorilor. Se obțin lianți cu conținut ridicat de zgură, având mărci corespunzătoare unor cimenturi portland obișnuite.

Explicația figurilor

Fig. 1. — *a* — Zgură *II* fără aditiv (0,5 g la 100 ml apă distilată); *b* — clincher (0,150 g la 100 ml apă distilată; *c* — clincher (0,075 g) și clorură de sodiu (0,010 g) la 100 ml apă distilată; *d* — clincher (0,140 g) și clorură de calciu (0,010 g) la 100 ml apă distilată; e — zgură *III* cu 30% clincher (0,5 g amestec la 100 ml apă distiapă distilată; e — zgură *III* cu 30% clincher (0,5 g amestec la 100 ml apă distilată; *f* — zgură *III* cu 15% clincher și 2% clorură de calciu (0,5 g amestec la 100 ml apă distilată); *g* — zgură *III* cu 28% clincher și 2% clorură de calciu (0,5 g amestec cu 100 ml apă distilată); *h* — zgură *IV* (0,5 cu 100 ml apă distilată); *i* — zgură *IV* cu 30% clincher (0,5 g amestec cu 100 ml apă distilată); *j* — zgură *IV* cu 15% clincher și 2% clorură de calciu (0,5 g amestec cu 100 ml apă distilată); *k* — zgură *IV* cu 28% clincher și 2% clorură de calciu (0,5 g amestec cu 100 ml apă distilată).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

C. Z. 691.3

STUDIU ÎN VEDEREA STABILIRII PARAMETRILOR OPTIMI DE OBŢINERE A BETOANELOR CU CIMENT ALUMINOS ROMÂNESC

DE

ELISABETA PĂUNEL, RADU GRIGORESCU şi V. DASCĂLU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 28—30 septembrie 1967

1. Introducere

Cimentul aluminos este capabil de performanţe mecanice pe care nici un alt ciment nu poate să le realizeze, fapt recunoscut de specialişti [1], [2], dar pentru a fi utilizat cu maximum de eficacitate la prepararea betoanelor, trebuie cunoscute şi respectate cu stricteţe o serie de condiţii; în caz contrar se ajunge la rezultate cu totul contrarii aşteptărilor [2].

În cele ce urmează se prezintă rezultatele experimentărilor efectuate asupra betoanelor cu ciment aluminos românesc (tranşa din septembrie 1966).

2. Condiţiile în care s-au realizat betoanele de probă

a) *Agregatul.* Se ştie că agregatul are un rol deosebit în realizarea betoanelor de calitate; în mod special, în cazul betoanelor cu ciment aluminos, condiţiile pe care trebuie să le îndeplinească agregatul sînt deosebit de riguroase.

În prezenta lucrare s-a folosit ca agregat balastul, fiind cel mai frecvent folosit pe şantiere, urmînd ca apoi să se experimenteze şi agregatul de concasaj, care, după cum se ştie, este mult mai indicat la betoanele cu ciment aluminos. Balastul de Doaga, cu care s-a lucrat, este în majoritate silicios şi bogat în granule de formă scurt prismatică. După spălare şi împărţire pe sorturi, a fost ameliorat granulometric pentru a se încadra în condiţiile cerute agregatului pentru $> B\,250$ (fig. 1).

Ştiind că partea fin granulară ($<0{,}5$ mm) acţionează defavorabil, atît din cauza suprafeţei specifice mari cît şi a prezenţei substanţelor nocive (Na_2SO_4 şi K_2SO_4) [1], s-au realizat probe cu nisip de granulaţie 0...7 mm în paralel cu altele în care nisipul a fost cu granulaţia 0,5...7 mm.

Controlîndu-se şi conţinutul în componenţi nocivi în nisipul de Doaga, s-au găsit: a) în nisipul nespălat; 0,97% Na_2O şi 0,77% K_2O; b) în nisipul spălat: 0,62% Na_2O_2 şi 0,58% K_2O.

[1]) Na_2SO_4 şi K_2SO_4, prin schimbul de ioni care are loc în timpul hidratării cimentului, trec în NaOH şi KOH, care apoi intră în reacţie cu $Al(OH)_3$ formînd $NaAl(OH)_4$ respectiv $KAl(OH)_4$.

b) *Dozajul în ciment şi factorul A/C* au variat după cum urmează: factorul A/C s-a ales astfel încît betonul să se poată compacta în bune condiţii prin vibrare: 0,40 la dozajul de 450 şi 350 kg ciment/m³ şi 0,60 la 235 kg ciment/m³.

c) *Condiţiile de amestecare şi de compactare* s-au menţinut aceleaşi pentru toate probele: 4...5 min amestecare în betonieră iar compactarea cuburilor s-a realizat pe masa vibrantă timp de 30...40 sec.

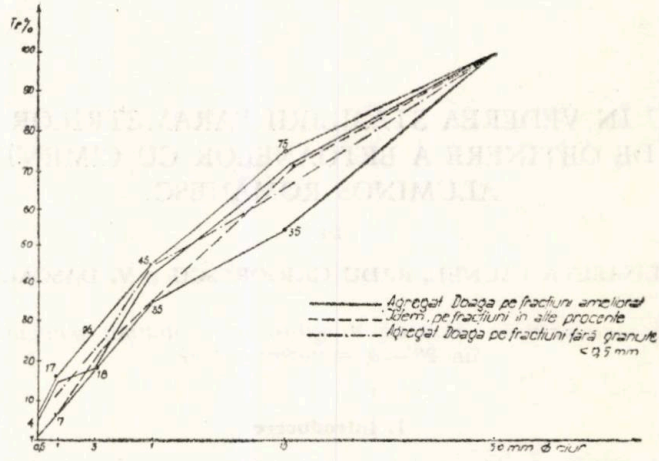


Fig. 1. — Compoziţia granulometrică a agregatului cu şi fără fracţiunea 0,5 mm, înainte şi după ameliorare.

d) *Condiţiile de păstrare a probelor.* Se ştie că cimentul aluminos dezvoltă o mare cantitate de căldură în timpul hidratării (cimentul aluminos românesc cu care s-a lucrat are căldura de hidratare de 117 cal/g la 3 zile şi de 133 cal/g la 7 zile). Ca urmare sînt necesare condiţii speciale de păstrare a probelor. O serie de probe s-au păstrat în aer liber la temperatura de 15°C iar altă serie, în condiţiile standard (STAS 1 275-62) prevăzute pentru betonul cu ciment silicios, adică în apă timp de 6 zile şi în continuare, pînă la încercare, în aer umed.

Gradul de influenţă a tuturor factorilor specificaţi mai sus s-a apreciat după variaţia rezistenţei la compresiune în timp (la 1, 2, 3, 7, 28 zile şi la 6 luni).

3. Influenţa dozajului în ciment

Literatura [1], [2] indică pentru betoanele curente, realizate cu ciment aluminos, un dozaj de 300 kg ciment/m³ beton; la betoanele pentru canalizări subterane se recomandă un dozaj de 400...450 kg/m³.

Noi am experimentat betoane cu 235 kg, 350 kg şi 450 kg ciment/m³.

Trebuie făcută observaţia că în cazul betoanelor cu ciment aluminos influenţa factorului *A/C* se face resimţită în timp mult mai accentuat decît la betoanele cu ciment silicios, ca urmare a transformărilor structurale pe care le suferă componenţii [1], [2], [4]. Cu cît factorul A/C va fi mai mic, cu atît apa pusă în libertate după transformările structurale va fi în cantitate mai mică sau chiar nulă.

Din tabelul 1 şi fig. 2 şi 3 rezultă următoarele observaţii:

a) Cu dozajul de 235 kg ciment/m³ se realizează beton *B*250, cu dozajul de 350 kg ciment/m³ (adică cu 49% mai mult ca în primul caz) se ajunge la beton marca *B* 700 iar cu dozajul de 450 kg ciment/m³ se atinge marca de beton *B* 800.

Tabelul 1

Influența dozajului de ciment asupra rezistenței la compresiune a betonului cu ciment aluminos românesc

Nr. probei	Dozaj ciment kg/m³	Dozaj ciment creșt. %	Factor A/C	Rezistența la compresiune (kgf/cm²) la: 1 zi	2 zile	creșt. %	3 zile	creșt. %	7 zile	creșt. %	28 zile	creșt. %
3 a	235		0,60	72 100 68 *M*=80	98 105 120 *M*=108	35	123 120 120 *M*=121	51,2	190 168 146 *M*=168	110	280 290 230 *M*=267	233,7
2 a	350	49	0,40	442 438 436 *M*=439 creștere 448,7 %	545 525 570 *M*=547 406,5%	24,6	600 530 640 *M*=590 387,6%	34,4	63 , 700 680 *M*=687 308,9%	56,5	700 680 750 *M*=710 165,9%	61,7
5 a	450	91,5	0,40	400 380 410 *M*=397 creștere 396,3 %	545 605 600 *M*=583 440%	46,8	670 680 650 *M*=667 451,2%	68	725 690 720 *M*=712 323,8%	79,3	810 850 830 *M*=830 210,8%	109

Prepararea în betonieră: amestecare 4..5 min; compactare pe masa vibrantă 30...40 sec.

Agregat Doaga fără sortiment < 0,5 mm; păstrare în aer liber.

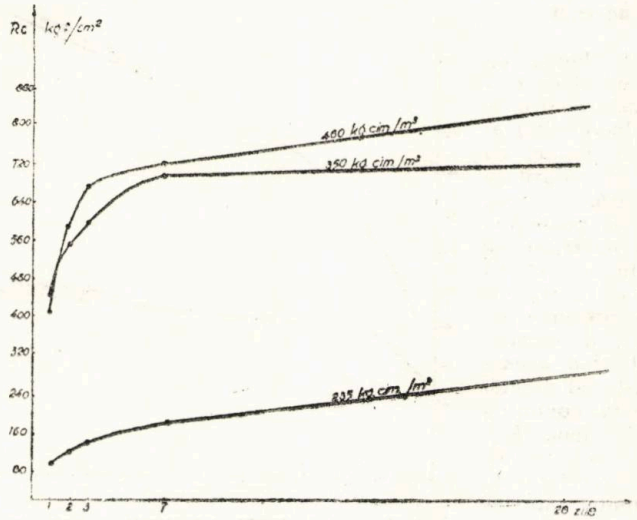


Fig 2. — Variația în timp a rezistenței la compresiune a betonului în funcție de dozajul în ciment.

b) Viteza de creştere a rezistenţei la compresiune este accentuată pînă la 3 zile (fig. 2); la dozajul de 350 kg ciment/m³ viteza de creştere a rezistenţei la compresiune este de 34,4% faţă de prima zi, la betonul cu un dozaj de 450 kg ciment/m³ creşterea este de 68%. La 7 zile şi în special la 28 zile şi apoi la 6 luni curba indică o creştere foarte lentă (fig. 2, 3, 7). Se poate spune că în mare curba aceasta păstrează alura curbei de variaţie a rezistenţei la compresiune a cimentului [4].

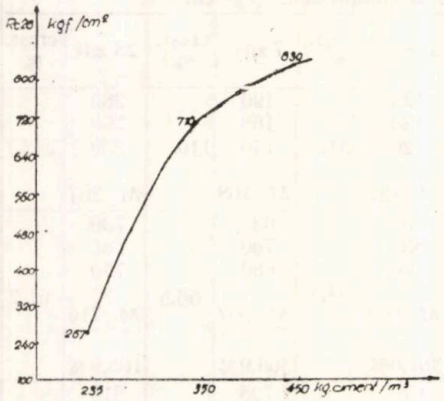


Fig. 3. — Variaţia rezistenţei la compresiune, la 28 zile, a betonului, în funcţie de dozajul în ciment.

Faptul că rezistenţa la compresiune este mereu în creştere în intervalul urmărit, permite să se considere fie că în această perioadă nu au avut loc transformări de compoziţie în defavoarea rezistenţelor mecanice (adică CA.10H n-a trecut încă în $C_3A.6H$), fie că astfel de transformări s-au produs într-o proporţie care nu influenţează rezistenţele mecanice.

c) În prima şi a doua zi rezistenţa la compresiune la betonul cu 350 kg ciment/m³ este aproximativ aceeaşi cu cea a betonului la care s-a folosit un dozaj de 450 kg ciment/m³ (curbele sînt foarte apropiate).

4. Influenţa fracţiunilor fine din agregat

Probele de beton cu 235 kg ciment/m³ şi cu factorul $A/C = 0{,}60$ (pentru a se asigura lucrabilitatea) s-au realizat în paralel cu agregat de granulozitate 0...30 mm şi 0,5...30 mm.

În fig. 4 se poate urmări influenţa exercitată de prezenţa fracţiunilor $< 0{,}5$ mm din agregat asupra rezistenţei la compresiune urmărită în timp, în comparaţie cu cazul cînd această fracţiune este eliminată.

La agregate conţinînd fracţiunile 0...30 mm, $Rc_{28} = 102$ kgf/cm² ceea ce corespunde la o creştere de 92,4% a rezistenţei faţă de prima zi. La agregate conţinînd fracţiunile 0,5... 33 mm, $Rc_{28} = 267$ kgf/cm², co-

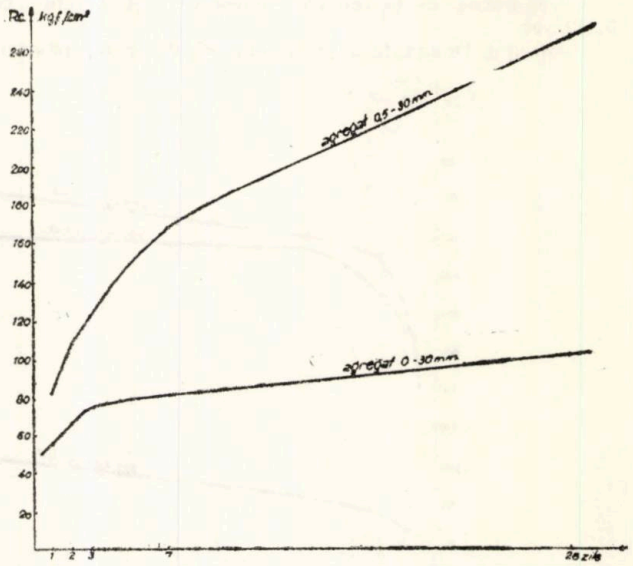


Fig. 4. — Influenţa fracţiunii sub 0,5 mm din agregat asupra rezistenţei la compresiune a betonului, urmărită în timp.

respunzînd la o creștere de 233,7% a rezistenței față de prima zi și la o creștere de 161,8% față de betonul cu agregat 0...30 mm. Rezultă că apare absolut necesară eliminarea fracțiunii $< 0{,}5$ mm.

5. Influența condițiilor de păstrare

Pentru a se cerceta măsura în care influențează mediul și temperatura din timpul hidratării, probele s-au păstrat în paralel în aer liber la 15°C și în apă tot la 15°C. Rezultatele sînt reprezentate grafic în fig. 5 și 6.

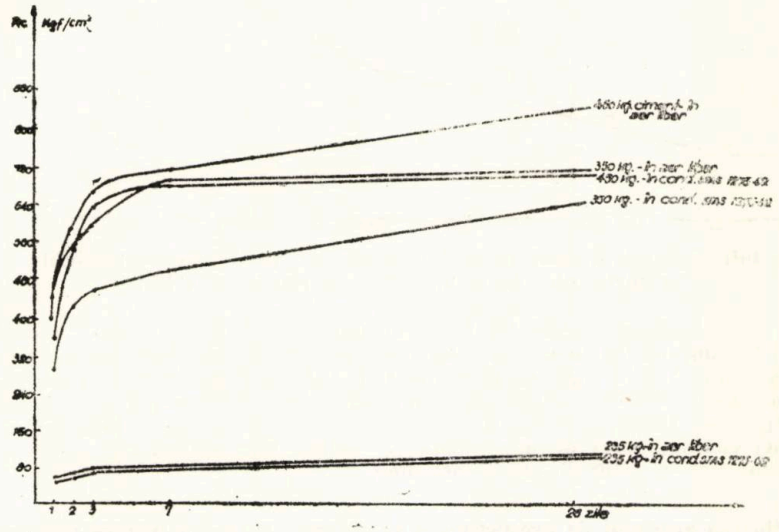


Fig. 5. — Variația în timp a rezistenței la compresiune a betonului în funcție de condițiile de păstrare.

Pentru toate dozajele experimentate probele păstrate în aer liber, la toate intervalele de timp, indică rezistențe mai mari decît cele ținute în apă. Le betonul cu dozaj de 350 kg ciment/m³ scăderea rezistenței probelor păstrate în apă este de 11,6%.

Păstrarea în aer liber permite, ca urmare a circulației curenților, realizarea unei temperaturi mai coborîte la suprafața betonului decît în cazul cînd probele se află în apă. Un alt factor negativ, în cazul păstrării probelor în apă, îl constituie faptul că apa pătrunzînd în probe în timpul hidratării cimentului are același rol ca și cînd s-ar fi lucrat cu un raport A/C mai mare.

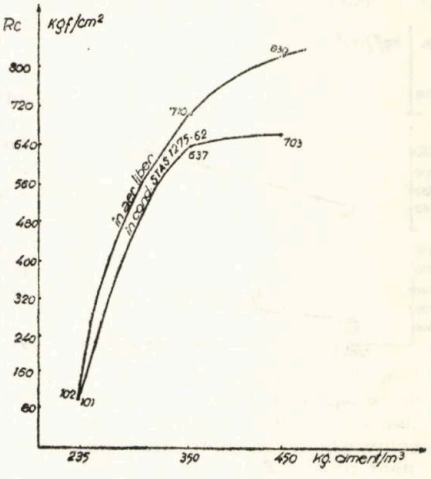


Fig. 6. — Influența condițiilor de păstrare a betonului asupra rezistenței la compresiune, la 28 zile.

6. Influența valorii ridicate a factorului *A/C* asupra variațiilor în timp a rezistenței la compresiune a betonului B 150

Probele de beton *B* 150, realizate cu ciment aluminos *A* 400 și factorul *A/C* = 0,70, s-au păstrat 28 zile în condiții prevăzute în STAS și apoi în aer. Din datele reprezentate grafic în fig. 7 rezultă că rezistența la compresiune a betonului a crescut pînă la 3 luni de la preparare (R_c la 3 luni = 341 kgf/cm² față de R_c la 1 zi = 67 kgf/cm²).

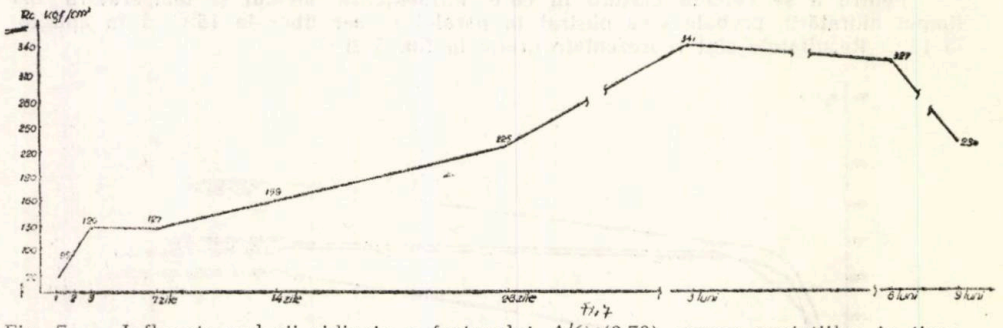


Fig. 7. — Influența valorii ridicate a factorului *A/C* (0,70) asupra variațiilor în timp a rezistenței la compresiune a betonului *B* 150.

Tendința de scădere a rezistenței la compresiune s-a constatat la 8 luni (R_c la 8 luni = 327 kgf/cm²) iar la 9 luni scăderea este bruscă (R_c la 9 luni = 230 kgf/cm²). Rezultă că între 8 și 9 luni de la prepararea betonului au avut loc transformările structurale caracteristice cimentului aluminos ($CA \cdot 10H \rightarrow C_2A \cdot 7H \rightarrow C_3A \cdot 6H +$ + $Al(OH)_3$ + aq. Valoarea ridicată a factorului *A/C* a favorizat punerea în libertate a unei cantități mari de apă (odată cu modificările structurale), care a contribuit la coborîrea rezistenței la compresiune.

7. Influența gradului de prospețime a cimentului aluminos asupra rezistenței la compresiune a betonului; rezistența în timp a acestor betoane

Se știe că în timp cimenturile păstrate în depozit își pierd din capacitatea de rezistență. În cazul cimentului aluminos românesc s-a experimentat și s-a stabilit (pentru o anumită tranșă) variația rezistenței la compresiune în funcție de gradul de prospețime a cimentului păstrat pînă la 10 luni [4]. Similar s-a procedat realizîndu-se cu cimentul cu o vechime de 6 luni betoane cu dozaje de 450 kg/m³; s-a lucrat în condiții identice ca și în cazul betoanelor cu ciment proaspăt. În fig. 8 sînt prezentate rezultatele obținute.

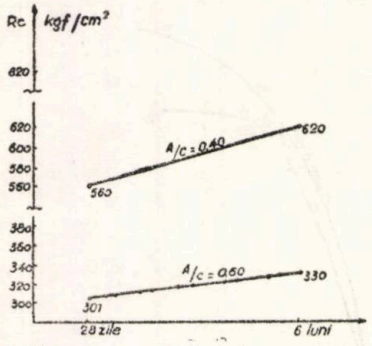


Fig. 8. — Influența gradului de prospețime a cimentului aluminos asupra rezistenței la compresiune a betonului (ciment păstrat 6 luni în depozit).

Cimentul, după 6 luni de păstrare în depozit, a permis realizarea unor betoane care au rezistența R_c la 28 zile = 560 kgf/cm²; față de rezistența R_c la 28 zile, a betoanelor realizate cu ciment proaspăt, înseamnă o pierdere de rezistență de 32%.

În timp, betoanele realizate cu ciment fabricat cu 6 luni înainte, înregistrează o creștere a rezistenței la 6 luni, față de cea la 28 zile, de 10,7% (R_c la 28 zile = 560 kgf/cm², R_c la 6 luni = 620 kgf/cm²).

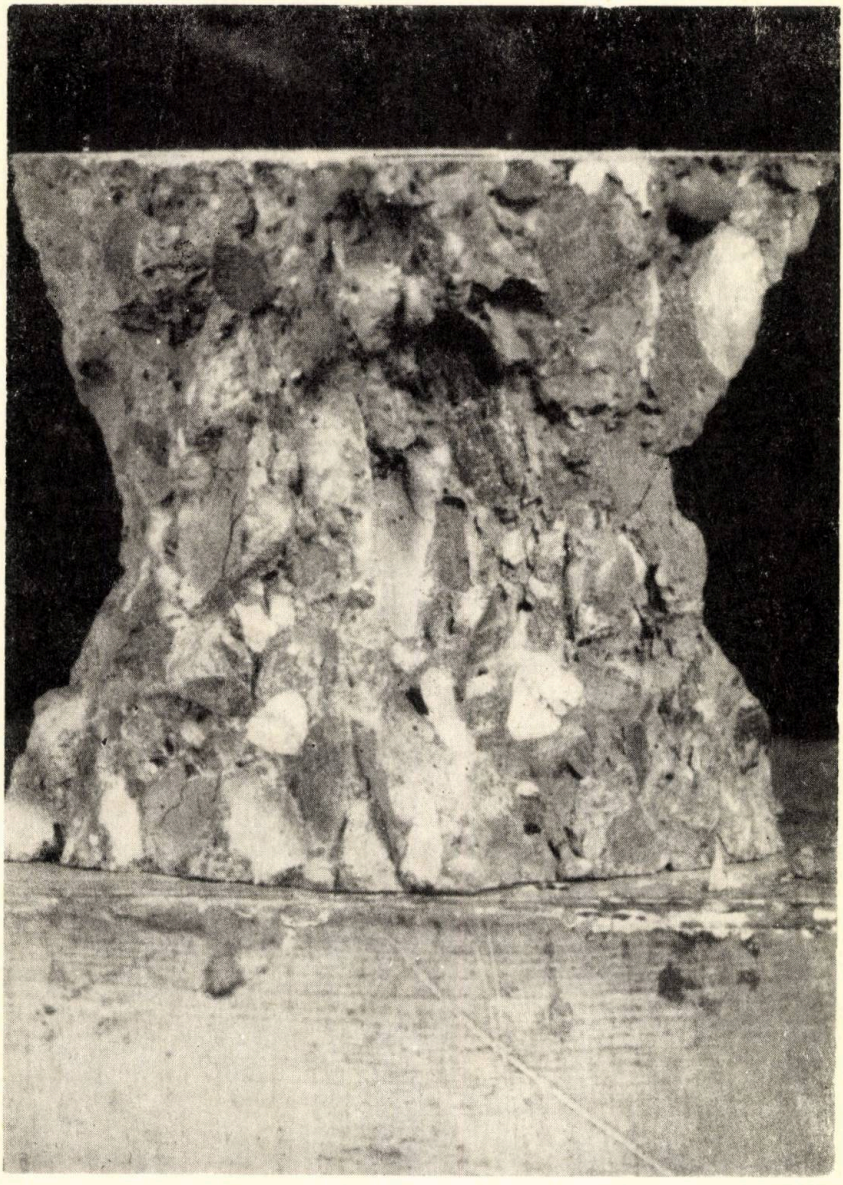


Fig. 9. — Epruvetă din beton cu ciment aluminos după încercarea la compresiune.

S-a făcut intens resimțită **influența** factorului A/C, care sporind de la 0,40 la 0,60, a produs ca urmare o scădere a rezistenței la compresiune la 28 zile de 45,2% (de la $R_c = 560$ kgf/cm^2 la $R_c = 307$ kgf/cm^2) iar probele încercate la 6 luni acuză o scădere de rezistență de 46,8% (de la R_c la 6 luni $= 620$ kgf/cm^2 la $R_c = 330$ kgf/cm^2).

8. Modul de rupere a epruvetelor

La toate cuburile încercate, ruperea s-a realizat atît prin piatra de ciment cît și prin granulele de agregat (fig. 9), ceea ce dovedește buna aderență între piatra de ciment și agregat.

9. Concluzii

1. Cu cimentul aluminos A 400 (rețeta tranșei din septembrie 1966) și cu agregat sub formă de balast (de Doaga amelioràt) se pot realiza betoane cu maximum de eficacitate a cimentului, numai în următoarele condiții:

a) Sînt necesare dozaje de 350 kg ciment/m^3 pentru a obține betoane B 700 și de 450 kg ciment/m^3 pentru betoane B 800.

b) Balastul trebuie spălat, sortat, ameliorat, pentru a corespunde agregatului pentru betoane de mărci superioare. Nu se admite fracțiunea $< 0{,}5$ mm. La betonul cu un dozaj de 235 kg ciment/m^3, îndepărtarea fracțiunii $< 0{,}5$ mm aduce o creștere a rezistenței la compresiune la 28 zile de 161,8%.

c) Factorul A/C trebuie să fie cît mai redus, atît cît să se asigure lucrabilitatea. Cu dozaje de 450 și 350 kg ciment/m^3 lucrabilitatea este asigurată la $A/C = 0{,}40$. Adoptînd un factor $A/C = 0{,}60$, față de $A/C = 0{,}40$, se produce o scădere a rezistenței la compresiune la 28 zile de 45,2%.

d) Betonul se întărește în condiții mai bune cînd se află în mediu aerian umed cu temperatura pînă la 15°C, decît în apă la aceeași temperatură (la betonul cu un dozaj de 350 kg ciment/m^3 scăderea de rezistență este de 11,6%).

e) Cimentul pentru prepararea betonului trebuie să fie proaspăt. După 6 luni de păstrare în depozit, betonul realizat cu un dozaj de 450 kg/m^3 dintr-un astfel de ciment are după 28 zile de la preparare o pierdere de rezistență de 32% față de betonul cu ciment proaspăt.

2. Viteza de creștere a rezistenței la compresiune pentru toate dozajele este accentuată în primele 3 zile și din ce în ce mai lentă pînă la 3 luni.

3. Ruperea probelor de beton are loc atît prin piatra de ciment cît și prin agregat, ceea ce dovedește buna aderență între piatra de ciment și agregat.

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de geotehnică și fundații,
Laboratorul de materiale de construcții

BIBLIOGRAFIE

1. Duriez M., *Nouveau traité de matériaux de construction.* Dunod, Paris, 1962.
2. Lafuma H., *Liants hydrauliques.* Paris, 1965.
3. Păunel El., Alexandrescu M., Iorga N., *Studiu asupra compoziției și structurii cimentului aluminos românesc.* Comunicare ses. șt., Inst. polit. Iași, 28—30 sept. 1967.
4. Vasilescu Fl., Păunel El., Sofronie El., Grigorescu R., Caraman C., *Cercetări asupra prorpietăților fizico-mecanice ale cimentului aluminos românesc.* Comunicare ses. șt., Inst. polit. Iași, 28—30 sept. 1967.

ÉTUDE POUR ÉTABLIR LES PARAMÈTRES OPTIMES EN VUE D'OBTENIR DES BÉTONS AVEC LE CIMENT ALUMINEUX ROUMAIN

(Résumé)

On présente les résultats de l'étude concernant les conditions nécessaires pour obtenir des bétons avec du ciment alumineux roumain (A400) telles que le liant soit utilisé avec une efficacité maximum.

La résistance à la compression a constitué l'indice d'appréciation de l'influence des caractéristiques de l'agrégat, du dosage (235 ; 350 ; 450 kg/m^3), du facteur A/C (0,40 ; 0,60 ; 0,70), des conditions de traitement des éprouvettes et du degré de fraicheur du ciment.

On a étudié la variation en temps de la résistence à la compression déterminée par les facteur cités ci-dessus.

Explications des figures

Fig. 1. — Composition granulométrique de l'agrégat (du gravier) avec et sans la fraction sous 0,5 mm, avant et après l'amelioration.

Fig. 2. — Variation en fonction du temps de la résistence à la compression du béton préparé avec de différents dosages de ciment.

Fig. 3. — Variation de la résistance à la compression, à 28 jours, du béton préparé avec de differents dosages de ciment.

Fig. 4. — Influence de la fraction sous 0,5 mm de l'agrégat sur la résistance à la compression du béton. étudiée en fonction du temps.

Fig. 5. — Variation en fonction du temps de la résistance à la compression du béton gardé en différentes conditions.

Fig. 6. — Influence des conditions du maintient du béton sur la résistance à la compression, à 28 jours.

Fig. 7. — Influence de la valeur élevée du facteur A/C sur les variations, en fonction du temps, de la résistance à la compression du béton B 150.

Fig. 8. — Influence du degré de fraicheur du ciment alumineux sur la résistance à la compression du béton. (Le ciment a été maintenu en dépôt durant 6 mois).

Fig. 9. — Éprouvette de béton à ciment alumineux après la sollicitation à la compression.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

C. D. 621.01

RÉPARTITION DU DÉBIT LE LONG D'UN DÉVERSOIR LATÉRAL À MINCE PAROI

PAR

P. BOYER, G. CASTINEL et J. NOUGARO

1. Introduction

L'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse s'intéresse depuis plusieurs années à la question des déversoirs latéraux.

Des études relatives aux courbes de remous, énergie spécifique, débit total déversé, similitude, ont été réalisées. Les recherches actuelles s'attachent plus particulièrement à étudier la répartition du débit le long du déversoir. À ce sujet notamment, il semble important de considérer l'influence de l'inclinaison des filets. (Peu d'études ont été réalisées dans ce domaine). Ce travail a donc consisté essentiellement: a) d'une part, à étudier l'angle d'inclinaison des filets et l'influence de la valeur de cet angle sur la répartition du débit le long du seuil; b) d'autre part, à tenter l'application de nouvelles relations pour la détermination du débit total déversé, basées sur l'introduction de paramètres caractéristiques comme l'énergie spécifique E, ou le nombre de Froude F.

Toutes les expériences ont été réalisées en régime fluvial permanent.

2. Notations

On appellera:

B — largeur du canal principal,
L — longueur du déversoir,
P — hauteur de pelle du déversoir,
Q — débit total passant dans le canal principal,
Q_v — débit total évacué par le déversoir,
Q_a — débit restant à l'aval du déversoir,
ΔQ_v — débit partiel mesuré expérimentalement dans une section du déversoir,
α_{fil} — angle α, mesuré au fil de laine, du filet avec la normale au seuil,

α_{th} — angle α, déduit d'une formule théorique,

H_0 — tirant d'eau moyen au-dessus du fond du canal, en amont du déversoir,

E_0 — énergie spécifique, en amont,

E_n — énergie spécifique dans la section n,

V_n — vitesse moyenne longitudinale, calculée dans l'axe du canal, au droit de la section n,

$F_0 = V_0^2/gH_0$ — nombre de Froude, dans le canal principal, en amont du déversoir.

La plupart de ces notations sont traduites par les schémas de la fig. 1.

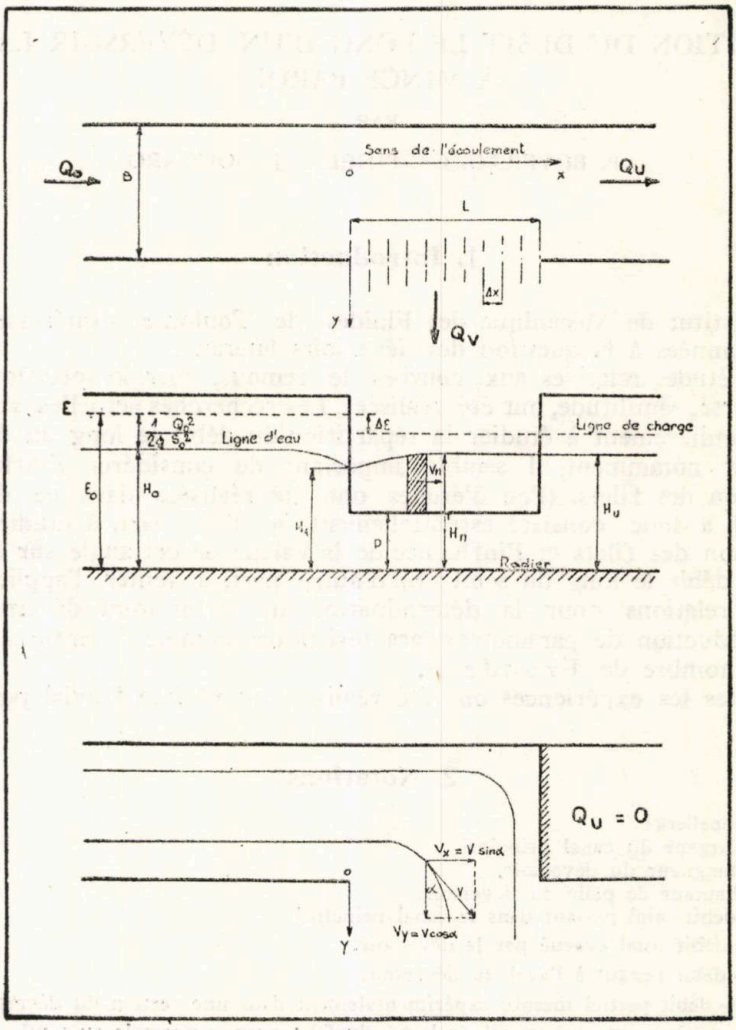


Fig. 1

3. L'installation

L'ensemble de l'installation, alimenté par une pompe, fonctionne en circuit fermé. Le débit total peut varier de 0 à 250 l/s.

Le dispositif expérimental comprend: *1* — la cuve d'alimentation, *2*—le canal principal muni d'une paroi vitrée, $L = 1{,}20$ m, $B = 0{,}60$ m, permettant la visualisation de l'écoulement, *3* — une vanne à guillotine permettant le réglage du débit restant Q_u, *4* — les déversoirs latéraux: $L = 1{,}20$ m, $P = 20$ cm et 30 cm, *5* — le canal de mesure du débit aval Q_u, situé sous

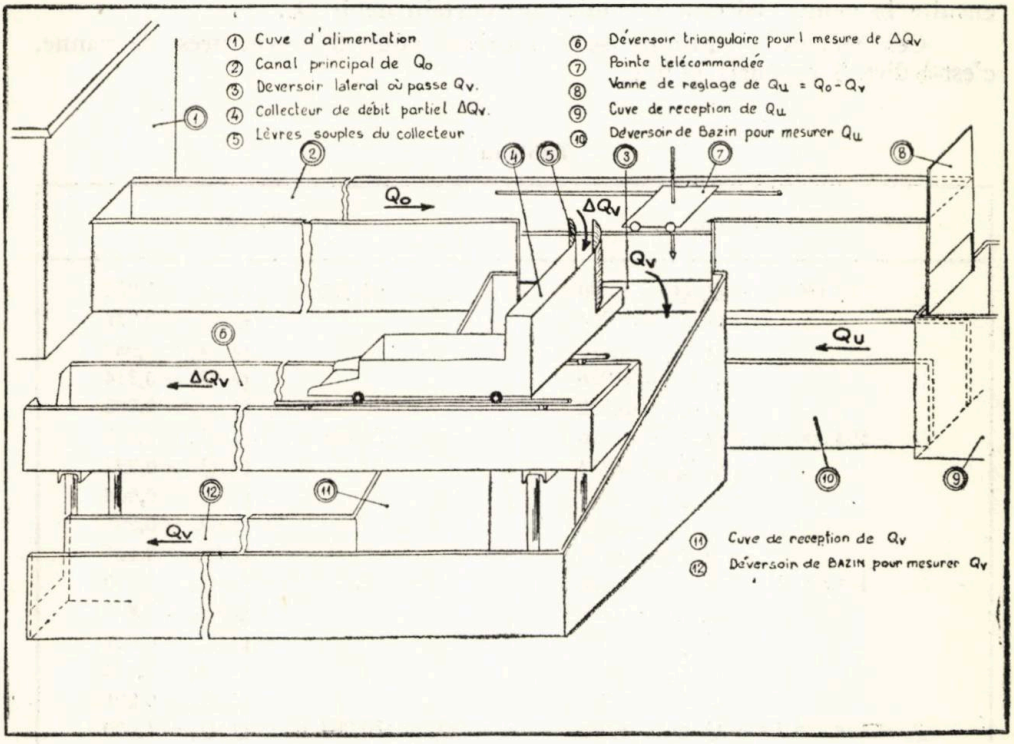


Fig. 2

le canal principal, *6* — le canal de mesure du débit déversé $Q_v - \Delta Q_v$, *7* — le canal de mesure des débits partiels ΔQ_v, *8* — un collecteur de débit partiel, mobile et orientable, formé d'une partie rigide et de deux joues souples épousant la forme et l'inclinaison des filets fluides, *9* — une pointe limnimétrique électrique, montée sur un chariot à double déplacement pouvant se mouvoir suivant les trois directions *OX*, *OY*, *OZ*, et permettant le relevé des tirants d'eau.

La fig. 2 montre un aspect général de l'installation.

4. Mode opératoire

Les essais ont été conduits de la façon suivante :

Étant donné un déversoir de caractéristiques L et P, on fixe au débit total, une valeur Q_0 ; le canal principal est fermé à l'extrémité aval du déversoir ($Q_u = 0$).

a) On relève la valeur de l'angle α dans chaque section ; b) le collecteur est déplacé et fixé successivement au droit de chaque section ; c) on définit le tirant d'eau au-dessus du seuil $H_n - P$; d) on mesure le débit partiel ΔQ_n et le débit déversé restant $Q_v - \Delta Q_n$; e) on ouvre ensuite la vanne, laissant s'écouler un certain débit Q_u.

Ces mêmes opérations sont reprises pour 5 ouvertures de vanne, c'est-à-dire 5 rapports Q_v/Q_0.

Tableau 1

$P = 20$ cm	$P = 30$ cm
$Q_0 = 75{,}480$ l/s — $Q_v/Q_0 = 1{,}000$	$Q_0 = 94{,}375$ l/s — $Q_v/Q_0 = 1{,}000$
— $Q_v/Q_0 = 0{,}794$	— $Q_v/Q_0 = 0{,}777$
— $Q_v/Q_0 = 0{,}620$	— $Q_v/Q_0 = 0{,}588$
— $Q_v/Q_0 = 0{,}386$	— $Q_v/Q_0 = 0{,}314$
— $Q_v/Q_0 = 0{,}202$	— $Q_v/Q_0 = 0{,}085$
$Q_0 = 104{,}000$ l/s — $Q_v/Q_0 = 1{,}000$	$Q_0 = 125{,}438$ l/s — $Q_v/Q_0 = 1{,}000$
— $Q_v/Q_0 = 0{,}754$	— $Q_v/Q_0 = 0{,}732$
— $Q_v/Q_0 = 0{,}578$	— $Q_v/Q_0 = 0{,}504$
— $Q_v/Q_0 = 0{,}268$	— $Q_v/Q_0 = 0{,}295$
— $Q_v/Q_0 = 0{,}131$	— $Q_v/Q_0 = 0{,}125$
$Q_0 = 114{,}89$ l/s — $Q_v/Q_0 = 1{,}000$	$Q_0 = 156{,}300$ l/s — $Q_v/Q_0 = 1{,}000$
— $Q_v/Q_0 = 0{,}786$	— $Q_v/Q_0 = 0{,}861$
— $Q_v/Q_0 = 0{,}565$	— $Q_v/Q_0 = 0{,}622$
— $Q_v/Q_0 = 0{,}379$	— $Q_v/Q_0 = 0{,}404$
— $Q_v/Q_0 = 0{,}213$	— $Q_v/Q_0 = 0{,}221$
$Q_0 = 144{,}928$ l/s — $Q_v/Q_0 = 1{,}000$	$Q_0 = 170{,}094$ l/s — $Q_v/Q_0 = 1{,}000$
— $Q_v/Q_0 = 0{,}744$	— $Q_v/Q_0 = 0{,}747$
— $Q_v/Q_0 = 0{,}567$	— $Q_v/Q_0 = 0{,}495$
— $Q_v/Q_0 = 0{,}384$	— $Q_v/Q_0 = 0{,}241$
— $Q_v/Q_0 = 0{,}192$	— $Q_v/Q_0 = 0{,}060$
$Q_0 = 182{,}784$ l/s — $Q_v/Q_0 = 1{,}000$	$Q_0 = 211{,}50$ l/s — $Q_v/Q_0 = 1{,}000$
— $Q_v/Q_0 = 0{,}845$	— $Q_v/Q_0 = 0{,}694$
— $Q_v/Q_0 = 0{,}587$	— $Q_v/Q_0 = 0{,}486$
— $Q_v/Q_0 = 0{,}360$	— $Q_v/Q_0 = 0{,}361$
— $Q_v/Q_0 = 0{,}187$	— $Q_v/Q_0 = 0{,}219$

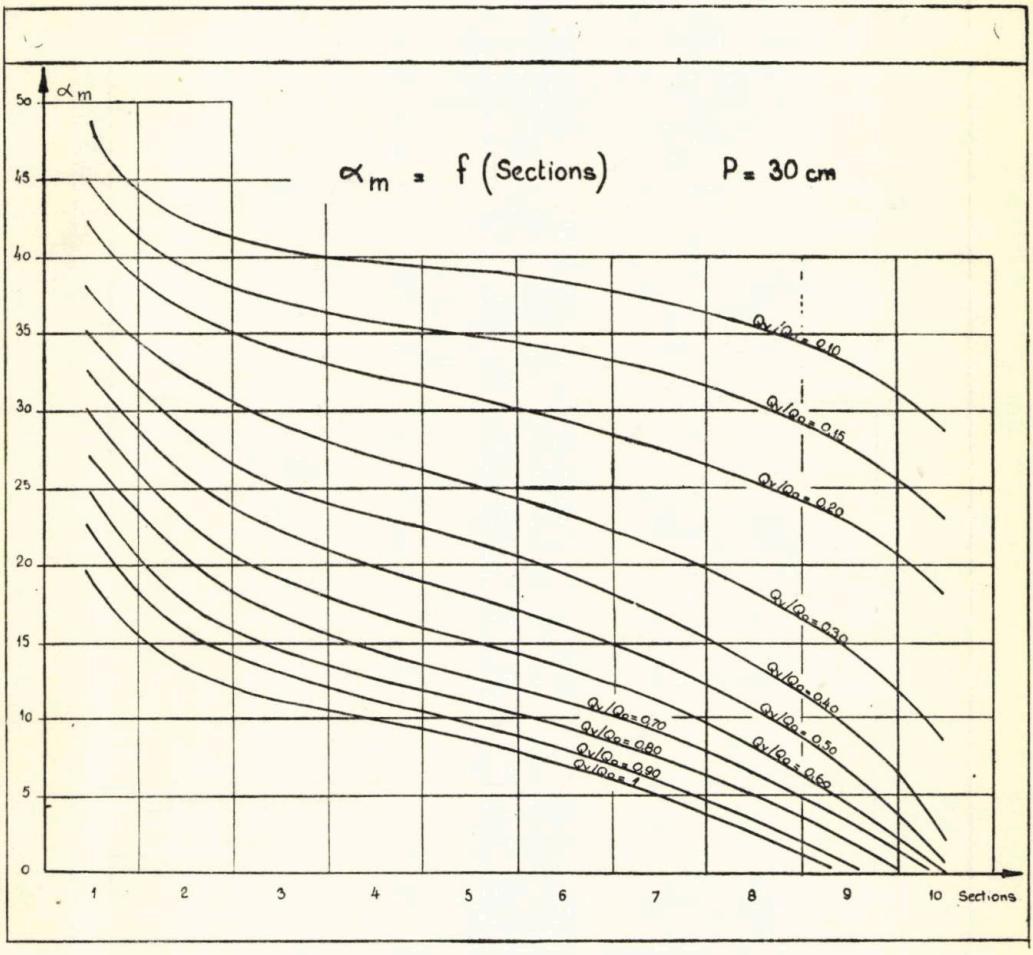

α_m
α_m = f (Sections)
P = 30 cm
Qx/Qo = 0.10
Qx/Qo = 0.15
Qx/Qo = 0.20
Qx/Qo = 0.30
Qx/Qo = 0.40
Qx/Qo = 0.50
Qx/Qo = 0.60
Qx/Qo = 0.70
Qx/Qo = 0.80
Qx/Qo = 0.90
Qx/Qo = 1
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
Sections

Fig. 3

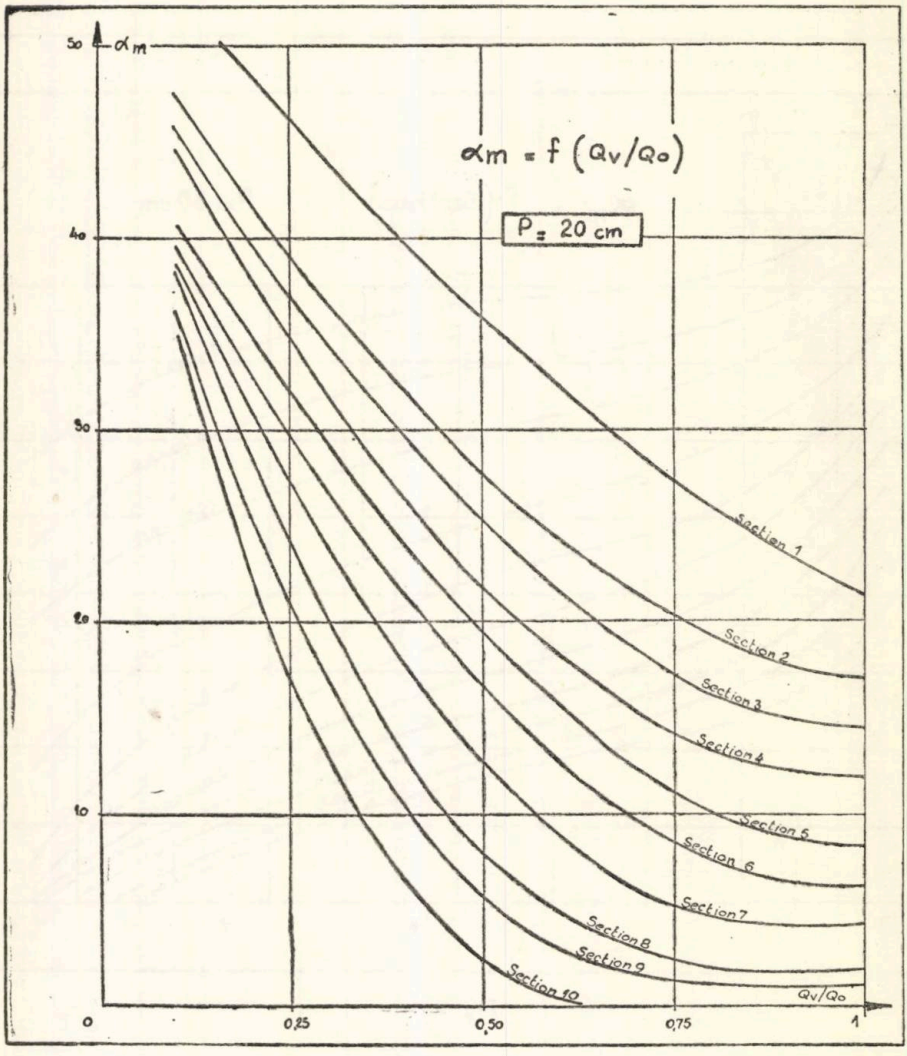

αm
αm = f (Qv/Qo)
P = 20 cm
50
40
30
20
10
0
0,25
0,50
0,75
1
Qv/Qo
Section 1
Section 2
Section 3
Section 4
Section 5
Section 6
Section 7
Section 8
Section 9
Section 10

Fig. 4

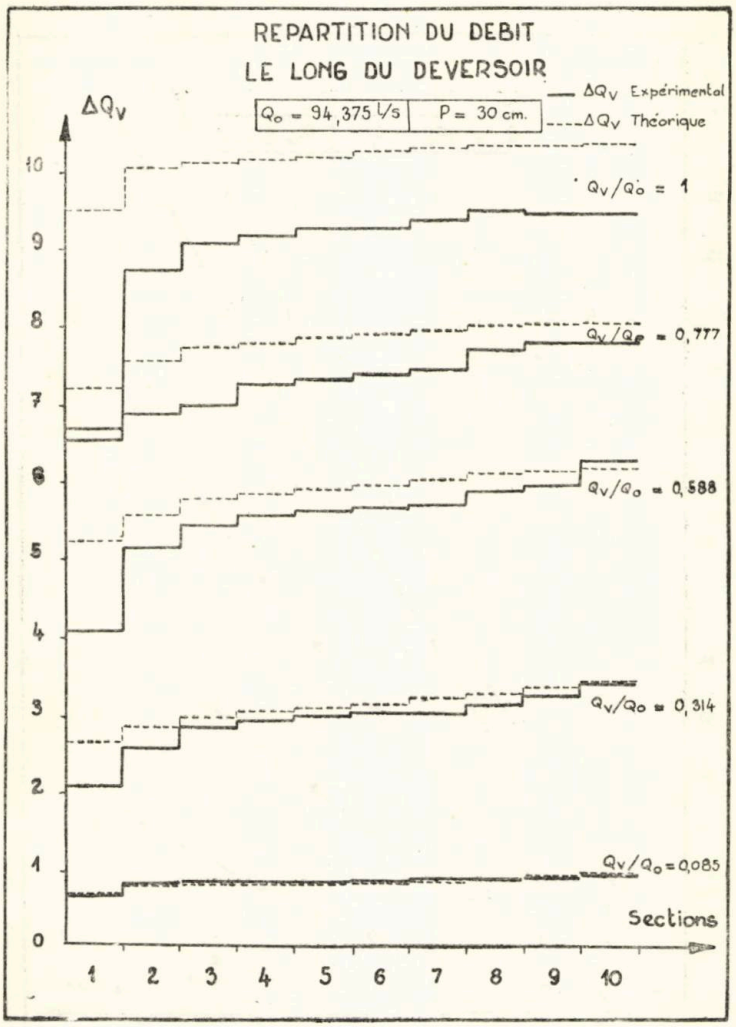

REPARTITION DU DEBIT
LE LONG DU DEVERSOIR
ΔQv Expérimental
ΔQv Théorique
Qo = 94,375 l/s
P = 30 cm.
ΔQv
Qv/Qo = 1
Qv/Qo = 0,777
Qv/Qo = 0,588
Qv/Qo = 0,314
Qv/Qo = 0,085
Sections
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

Fig. 5

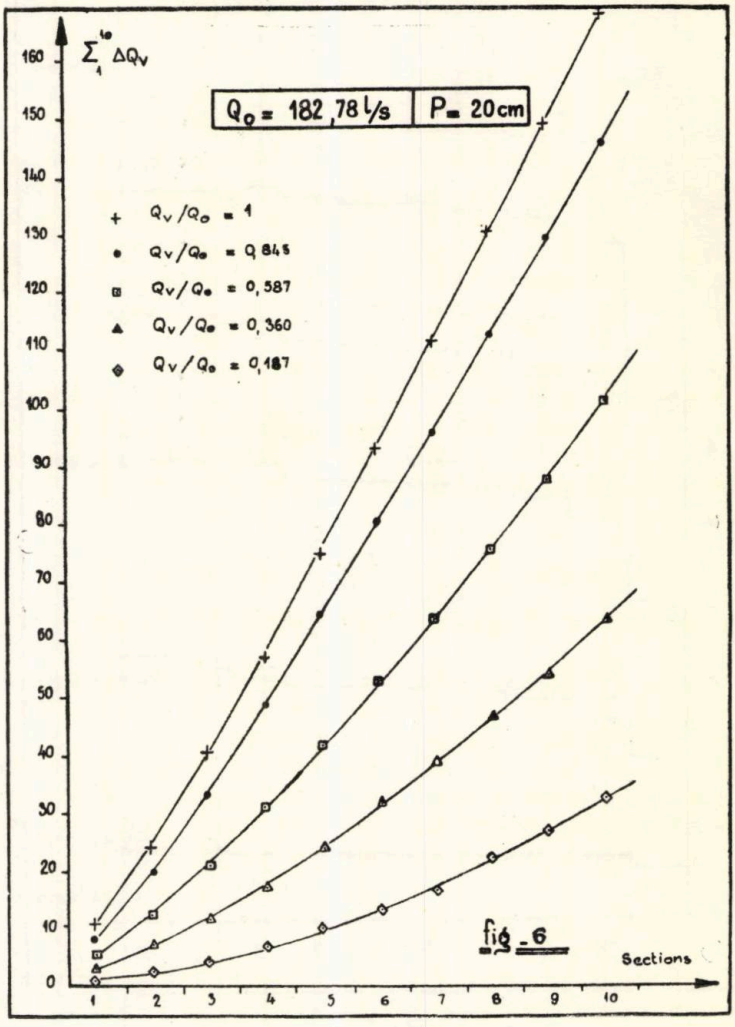

$\sum_1^{10} \Delta Q_V$
$Q_0 = 182,78$ l/s
$P = 20$ cm
$Q_V/Q_0 = 1$
$Q_V/Q_0 = 0,845$
$Q_V/Q_0 = 0,587$
$Q_V/Q_0 = 0,360$
$Q_V/Q_0 = 0,187$
fig - 6
Sections
160
150
140
130
120
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

Fig. 6

Au total donc, pour un débit donné Q_0, on considère 5 valeurs Q_u et pour une hauteur de pelle déterminée P, 5 valeurs Q_0, soit 25 cas par déversoir.

Comme deux déversoirs ($P = 20$ cm et $P = 30$ cm) ont été utilisés, on dispose par cette méthode de cinquante conditions d'écoulement différentes (voir tableau 1).

5. Résultats

5. 1. Inclinaison des filets

L'angle d'inclinaison a été mesuré par la méthode du fil de laine, à peu près au centre géométrique de la section. En effet, il varie dans les deux sens, longitudinal et vertical, et une différence parfois importante (jusqu'à 20°) a été constatée entre les inclinaisons d'un filet superficiel et d'un filet profond, près du seuil. L'exploration cm par cm d'une section médiane a permis de distinguer une variation assez régulière de l'angle qui diminue à mesure que l'on se rapproche de la crête.

Ce phénomène présente un intérêt certain car, les vitesses étant supérieures en bas, les débits des couches profondes présentent des valeurs plus fortes; or on constate jusqu'à 30 % d'augmentation du débit dans une section, en orientant le collecteur dans la direction des filets proches de la crête.

a) *Variation de l'angle α le long du déversoir*

Il est intéressant de suivre la variation de l'angle α le long du déversoir.

Les courbes présentent toutes la forme d'un S aplati, inverse par rapport à celui de la courbe de remous, avec une variation presque linéaire au milieu, et deux décrochements aux extrémités.

L'angle α diminue, en effet, d'amont en aval. La différence $\Delta\alpha$ entre les extrémités décroît avec le rapport Q_v/Q_0, tout en conservant une valeur importante (de l'ordre de 20°) même pour les très faibles valeurs de Q_v. Ceci est mis en évidence par la fig. 3.

b) *Abaques*

Pour différents Q_0, mais avec des rapports Q_v/Q_0 égaux, l'angle α_n d'une même section paraît constant. Ce résultat a conduit à tracer les courbes $\alpha_n = f(Q_v/Q_0)$ quel que soit le cas d'écoulement.

Les points expérimentaux obtenus se groupent autour d'une courbe moyenne: on en déduit un angle moyen par section.

Les 10 courbes correspondant aux 10 sections ont été tracées sur un même graphique. Pareillement on reproduit la variation $\alpha_n = f(X)$ pour des valeurs Q_v/Q_0 constantes (fig. 3 et 4).

Ces abaques permettent, à partir de la seule connaissance du rapport Q_v/Q_0, de prévoir la valeur des différentes inclinaisons le long du déversoir. De plus, elles ont montré que l'inclinaison décroît quand la hauteur de pelle croît: ceci parait logique puisque la masse d'eau retenue par le seuil produit un effet amortisseur.

c) *Calcul théorique de l'angle*

Il a paru intéressant de connaître, sans le mesurer, la valeur de l'angle α, à partir des caractéristiques d'un écoulement. Dans ce but, une formule proposée par Messieurs Coulomb, Moreau de Saint-Martin et Nougaro [22] a été appliquée. Cette relation fait intervenir uniquement l'énergie spécifique E, la hauteur de pelle P et la charge H sur le seuil:

$$\sin \alpha_{th} = K\left[\frac{(E-P)^{3/2}(E-H)^{1/2} - (E-H)^2}{(E-P)^2 - (E-H)^2}\right].$$

Cette formule répond qualitativement à certaines constatations expérimentales. Cependant, du point de vue quantitatif, un écart important est à noter entre les valeurs mesurées et celles calculées. La variation entre les valeurs extrêmes est beaucoup plus régulière et bien moins accentuée.

La nouvelle relation appelle sans doute quelques modifications, et des travaux sont en cours à ce sujet.

5. 2. Répartition du debit

Cette étude est évidemment étroitement liée à la précédente.

Les représentations des débits partiels ΔQ_v adoptées, $\Delta Q_v = f(X)$ et $\sum \Delta Q_v = f(X)$, ont montré: a) que la répartition n'est pas uniforme, b) qu'elle présente deux décrochements aux extrémités et une variation assez régulière dans les sections médianes (comme la représentation des angles).

Les irrégularités deviennent plus faibles quand le débit Q_0 ou le rapport Q_v/Q_0 diminue. Quant à la hauteur de pelle P, elle ne semble pas exercer une grande influence sur ce phénomène.

Ceci est mis en évidence sur la fig. 5.

La fig. 6 donne un aperçu de la représentation des débits partiels cumulés et confirme le fait que la répartition n'est pas uniforme: ces courbes, en effet, bien que très régulières, ne sont pas rigoureusement linéaires.

a) *Calcul des débits partiels* dQ_{th}

On a également calculé le débit déversé dQ_{th} dans une section, à partir de l'énergie E, la hauteur de pelle P, la charge H, et l'angle α, à l'aide de la relation:

$$\frac{dQ}{dX} = \int_P^H V \cos \alpha \, dZ,$$

qui donne par intégration:

$$dQ_{th} = m \cos \alpha \sqrt{2g} \, dX \, [(E - P)^{3/2} - (E - H)^{3/2}].$$

Les valeurs des débits ainsi calculés ont été portées sur les courbes $\Delta Q_v = f(X)$ afin d'établir une comparaison (fig. 5).

On remarque une répartition semblable, mais il demeure un écart assez important. Les débits calculés dépassent en moyenne ceux mesurés de 30%. La variation est plus régulière: le décrochement amont est plus atténué, le décrochement aval pratiquement inexistant.

Cette différence ne peut être attribuée au seul coefficient m pris égal à celui d'un déversoir droit:

$$m = 0{,}0120 \frac{E - P}{P} + 0{,}418,$$

(relation proposée par le Laboratoire [23]).

Il semble que certaines hypothèses faites pour établir la formule, ne puissent pas être respectées dans la réalité, d'où la divergence des résultats.

Cependant, la constance de l'énergie sur le seuil a été vérifiée. La variation d'un bout à l'autre n'excède pas 2%.

Par exemple, pour le cas $Q_0 = 211{,}50$ l/s, $P = 30$ cm, les valeurs de l'énergie dans chaque secteur sont les suivantes:

E_0	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}
53,45	53,37	52,95	52,50	52,77	52,55	52,29	52,04	51,95	51,01	52,00

Cette valeur d'énergie a été calculée par la relation:

$$E_n = H_n + \frac{Q_n^2}{2gS_n^2} = H_n + \frac{1}{2g} \cdot \frac{\left(Q_0 - \sum_1^{n-1} \Delta Q_v\right)^2}{B^2 H_n^2}.$$

5. 3. Débit total déversé

a) *Variation de Q_v en fonction de $(E - P)/P$*

Si de nombreuses relations ont été proposées à ce sujet: $Q_v = mL\sqrt{2g}\, H^{3/2}$, le choix de H s'avère fort difficile. Certains auteurs pren-

nent H_0 — hauteur à l'amont du seuil, d'autres H_u — hauteur à l'aval, d'autres encore H_m — hauteur dans une section médiane, d'autres enfin $(H_u + H_0)/2$.

Afin d'essayer une formule d'ordre plus général, on écrit l'expression de Q_v comme suit:

$$Q_v = mL\sqrt{2g}\,(E - P)^{3/2}.$$

La variation de cette quantité a été étudiée suivant les valeurs de $(E - P)/P$. Cette représentation présente l'avantage d'être semiadimensionnelle et de ne faire intervenir comme variables que P et E. Tous les points se groupent sur une courbe unique quel que soit le cas d'écoulement. Malgré l'avantage que présente au premier abord cette détermination, elle ne donne pas pleine satisfaction car les débits ainsi calculés sont toujours supérieurs aux débits réels. En effet, la relation ne tient pas compte de l'obliquité des filets et pourrait être appliquée telle quelle à un déversoir droit. Si on fait intervenir un coefficient $m' = m \cos \bar{\alpha}$ avec $\bar{\alpha} = \frac{1}{10}\sum_{1}^{10} \alpha$, les courbes théoriques se rapprochent des courbes expérimentales, mais on n'obtient plus une courbe unique: or, c'est ce fait qui constituait l'intérêt de cette représentation.

La fig. 7 montre les positions des diverses courbes.

b) *Variation de Q_v avec le nombre de Froude F_0*

Messieurs G. Krishnappa et K. Seetharamiah [20] ont élaboré une relation, basée sur l'analyse dimensionnelle pour déterminer le débit dans un canal secondaire à 90°, avec régime fluvial dans le canal principal et torrentiel dans l'autre. Ils ont déduit de leurs expériences:

$$Q_v/Q_0 = aF_0 + b,$$

a et b étant fonctions de L/B et $F_0 = V_0/\sqrt{gH_0}$.

Cette représentation a été essayée, car, bien que les conditions d'écoulement soient différentes, le cas précédent peut être considéré comme un cas limite quand la hauteur de pelle P est réduite à zero.

On a obtenu une famille de courbes légèrement incurvées vers le bas au lieu d'une courbe unique, pour différents Q_0.

La fig. 8 montre: a) que Q_v décroît quand le nombre de Froude croît, b) que la décroissance s'avère ici bien plus rapide que dans le cas du canal secondaire, c) que F_0 diminue quand la hauteur de pelle augmente, ce qui est prévisible du fait de la diminution de la vitesse.

6. Conclusion

Ces divers résultats montrent que les nouvelles théories ne permettent pas encore de prévoir de façon précise l'écoulement sur les déversoirs latéraux. Des études ultérieures doivent être poursuivies dans ce domaine, tant sur le plan théorique qu'expérimental.

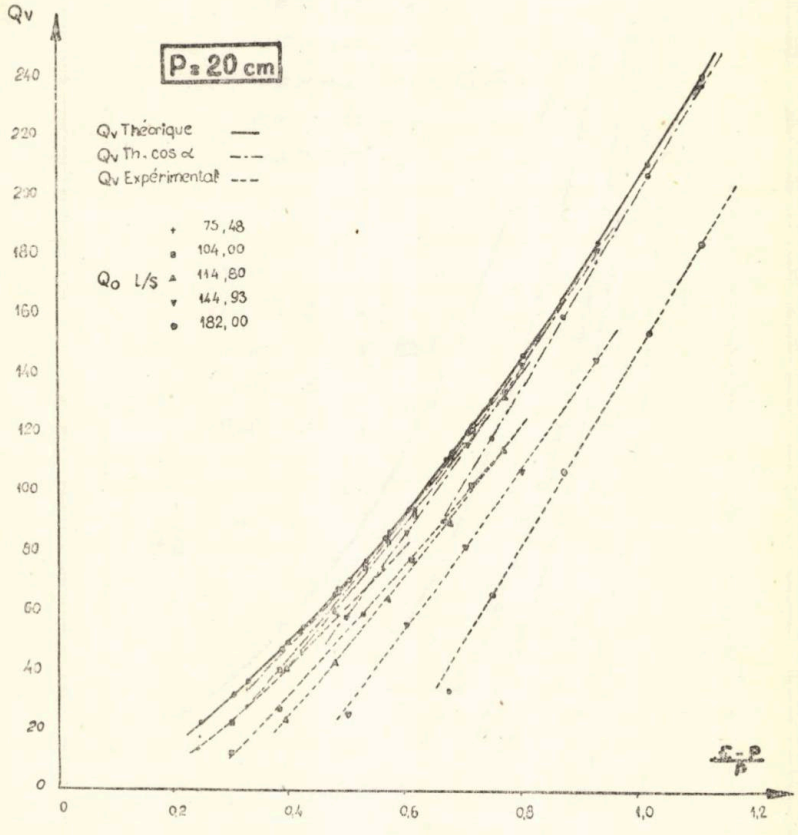

Qv
P = 20 cm
Qv Théorique
Qv Th. cos α
Qv Expérimental
Qo L/S
75,48
104,00
114,80
144,93
182,00
240
220
200
180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2

Fig. 7

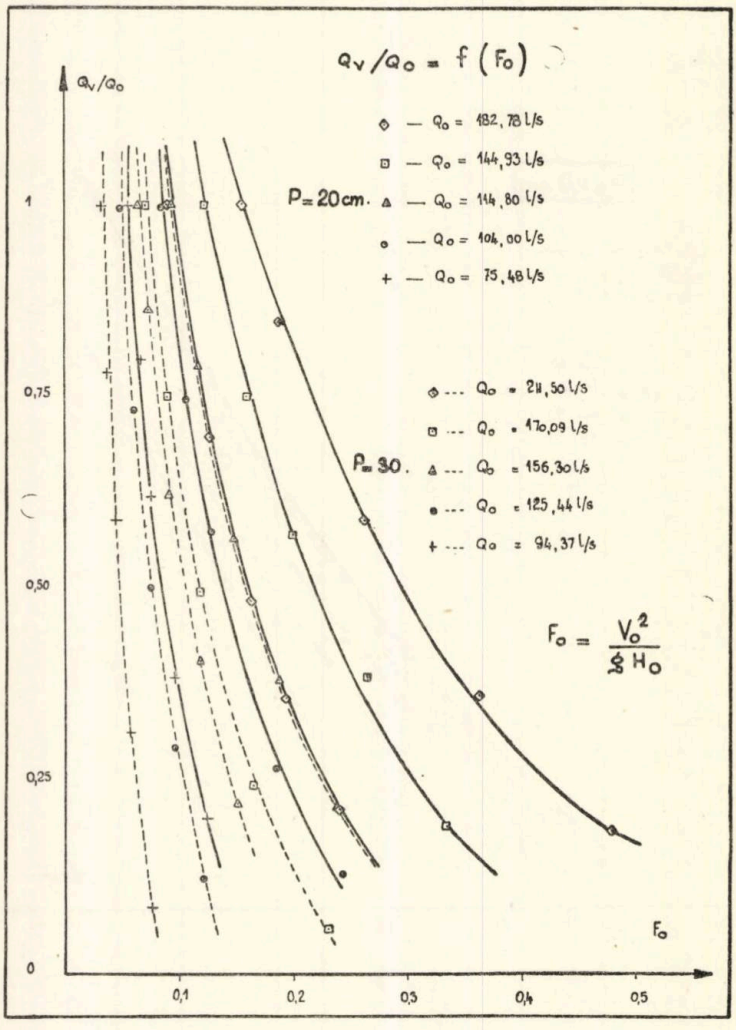

$Q_v/Q_o = f(F_o)$
Q_v/Q_o
P = 20 cm.
◇ — Q_o = 182,78 l/s
□ — Q_o = 144,93 l/s
△ — Q_o = 114,80 l/s
○ — Q_o = 104,00 l/s
+ — Q_o = 75,48 l/s
P = 30.
◇ --- Q_o = 211,50 l/s
□ --- Q_o = 170,09 l/s
△ --- Q_o = 156,30 l/s
● --- Q_o = 125,44 l/s
+ --- Q_o = 94,37 l/s
$F_o = \frac{V_o^2}{g H_o}$
F_o
1
0,75
0,50
0,25
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5

Fig. 8

Dans ce but, un vaste programme de recherches est prévu dans les laboratoires de l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse. La nécessité d'une vérification directe des hypothèses de départ a conduit à étudier la répartition des vitesses en module et en direction, avec des moyens beaucoup plus fins.

Ces expériences permettront certainement d'apporter aux relations théoriques les corrections qui s'avèrent maintenant nécessaires.

Reçue le 28 XI 1967

Institut de Mécanique des Fluides,
Toulouse, France

BIBLIOGRAPHIE

1. Favre H., *Contribution à l'étude des courants liquides.* Zurich, 1923.
2. De Marchi G., *Essais de théorie du fonctionnement d'un déversoir latéral.* Energia Elettrica, Nov., 1934, *110.*
3. Gentilini B., *Recherche expérimentale sur les déversoires latéraux.* IMF, Toulouse.
4. Citrini D., 1938, Traduction n° 30. IMF, Toulouse.
5. Dominguez J., *Déversoirs latéraux.* Ext. de Hydraulica, 1945, Electricité de France, (Trad. 471).
6. Schmidt M., *Écoulement sur les déversoirs latéraux.* Electricité de France, (Trad. 361, 1954).
7. Noseda G., *Courant permanent avec émission simultanée et déversement latéral.* Energia Elettrica, 1957, *8.*
8. Ackers P., *A Theoretical Consideration of Side Weirs as Storm Water Overflows.* Proceedings I. C. E., 1957, **6.**
9. Collinge V. K., *The Discharge Capacity of Side Weirs.* Hydraulics, **13.**
10. Frazer W., *The Behaviour of Side Weirs in Prismatic Rectangular Channels.* Hydraulics, *14.*
11. Kuntatsky J., *Contribution à l'étude de déversoirs.* Trad. Brno, 1958.
12. Vitti M., Energia Elettrica, Juillet 1959.
13. Georgescu P., Bratu Ch., Viecelli A., *Problèmes spéciaux aux déversoir. latéraux.* Padoue, Mai 1959.
14. Zhamagortsyan, *Mouvement d'une onde le long d'un déversoir latéral.* Appl, Mech. Rev., 1961, **44,** *11.*
15. Peter Y., *The Problem of Saide Spillways.* Proc. Int. Congr. Mech.
16. Dalmayrac S., *Contribution à l'étude des déversoirs latéraux.* Thèse 3 ème cycles ENSEEHT, 1961.
17. Saiz M., *Étude de la répartition du débit le long d'un déversoir latéral.* Thèse 3 ème cycle, ENSEEHT, 1962.
18. Nguyen Van Que, *Répartition du débit le long d'un seuil Creayer latéral.* Thèse 3 ème cycle, ENSEEHT, 1964.
19. Laquerbe M., *Étude du déversoir latéral à mince paroi.* Thèse 3 ème cycle, ENSEEHT, 1964.
20. Krishnappa G., Seetharamiah K., *A New Method of Predicting the Flow in a 90° Branch Channel.* La Houille Blanche, 1963, *7.*
21. Marone V., *Coefficients d'écoulement des déversoirs longitudinaux.* Energia Elettrica 1964, *1.*
22. Coulomb R., Moreau de Saint-Martin J., Nougaro J., *Étude théorique de la répartition du débit le long d'un déversoir latéral.* Genie Civil, Avril 1967.

23. Barbe A., Boyer P., Coulomb R., Moreau de Saint-Martin J., Nougaro J., *Loi hauteur-débit d'un déversoir en mince paroi fonction de la charge totale H et valable dans une large plage d'utilisation.* IMF, Toulouse.
24. Baudart P., *Étude du déversoir latéral à mince paroi.* Liège, travail de fin d'études 1965 — 1966.

REPARTIȚIA DEBITULUI DE-A LUNGUL UNUI DEVERSOR LATERAL CU PEREȚII SUBȚIRI

(Rezumat)

Se studiază unghiul de înclinare al liniei de curent a fluidului și influența acestui unghi asupra repartiției debitului în lungul pragului.

Se încearcă aplicarea unor noi relații pentru determinarea debitului total deversat, bazate pe introducerea parametrilor caracteristici — energia specifică E sau numărul lui Froude F.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

C. Z. 631.4

GENEZA UNOR FORME DE MICRORELIEF DIN ZONELE FRECVENT INUNDABILE DIN LUNCILE RÎURILOR DIN MOLDOVA ŞI EVOLUŢIA PROCESULUI DE SOLIFICARE ÎN ACESTE CONDIŢII

DE

LEONIDA GUŞTIUC şi EUGEN GHEORGHIU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 28—30 septembrie 1967

1. Introducere

În albiile majore ale rîurilor din Moldova, la cotele cele mai joase, frecvent în zona luncii centrale — unde procesele de colmatare sînt minime — sau în zonele mai largi de divagare a afluenţilor rîurilor respective, se întîlnesc suprafeţe cu forme de microrelief variat ondulate, denumite popular „coşcove" sau „covăţele" (în lunca Prutului). Acest microrelief de coşcove se mai poate întîlni în regiunile de divagare ale rîurilor mai vechi — Prut (Braţeşul de sus), Siret şi Buzău (între Latinu şi Cotul Mihalea), precum şi pe unele terase mai joase ale acestor rîuri.

Microrelieful de coşcove se întîlneşte pe suprafeţe de la cîteva zeci de ha şi poate să ajungă mai rar la 100 ha, fiind foarte bine individualizat în lunca comună a Prutului şi Jijiei şi în aval, de asemenea în lunca Jijiei (Epureni, Ţigăneşti, sud de Andrieşeni, Todireni la vărsarea Sitnei etc.), precum şi în lunca Elanului şi Bîrladului (Buhăeşti, Bîrzeşti, Brăhăşoaia, Mărăşeni, Bălteni, Munteni, Bulboaca etc.). De asemenea au fost întîlnite în lunca Buzăului, Călmăţuiului şi Rîmnicului Sărat pe suprafeţele ocupate astăzi de soluri salinizate.

Din punct de vedere morfologic, microrelieful de coşcove apare ca o suprafaţă uşor ondulată, cu microdepresiuni care sînt tocmai coşcovele, despărţite de forme pozitive de microrelief — mici coame — monticule (fig. 1).

Microdepresiunea are formă ovoidă, puţin adîncă, cu diametrul mare cuprins între 120...300 cm, mai frecvent între 200...280 cm, iar diametrul mic variază între 100...260 cm. Adîncimea coşcovei faţă de vîrful monticulului variază între 20...40 cm (fig. 2).

Forma pozitivă de microrelief — monticulul — reprezintă spaţiul cuprins între 3, 4 şi 5 coşcove sub formă de coamă, a cărui lăţime

este aproximativ egală cu o treime din distanța dintre centrele a două coșcove alăturate, adică variază între 100...150 cm, în funcție de diametrul coșcovelor luate în considerație.

În timpul perioadelor secetoase monticulul prezintă o fisurare în profunzime mult mai mare și mai frecventă decît mijlocul coșcovei.

Dimensiunile acestor forme de microrelief — coșcovă și monticul — sînt ceva mai mari în zonele de divagare ale rîurilor mai vechi (Prut — zona Folteşti etc.). În lunca Dunării și Delta Dunării nu au fost întîlnite.

Suprafețele ocupate de aceste forme de microrelief sînt aproape plane, avînd frecvent o pantă generală sub 1%, fiind folosite ca pășuni, fînețe și terenuri arabile. În unele cazuri, cînd panta terenului este mai mare, se constată în mijlocul acestor suprafețe prezența unui prival puțin adînc, însă destul de întortocheat, pe ai cărui versanți se formează la fel coșcova (fig. 3).

2. Factorii ce condiționează formarea microreliefului de coșcove

Acești factori reprezintă de fapt o parte din factorii pedogenetici, care imprimă atît geneza acestor forme de microrelief cît și evoluția solurilor ce se formează.

a) *Materialul* pe care se formează coșcovele în toate cazurile este aluvionar și mai puțin aluvio-coluvionar, avînd o textură fină — luto-argiloasă sau argilo-lutoasă (tabelele 1 și 2). Dintre mineralele argiloase, în acest material predomină probabil montmorillonitul.

Deseori, mai ales în văile rîurilor mai vechi, se întîlnește în stratificația depunerilor aluviale și un sol fosil la diverse adîncimi (frecvent între 2,20...2,60 m pentru depresiuni și 2,60...2,90 m pentru monti-

Tabelul 1

Compoziția granulometrică în profilul solului de sub coșcovă și monticul din fineață

Adîncimea cm	Coșcovă			Monticul		
	Nisip %	Praf %	Argilă %	Nisip %	Praf %	Argilă %
0... 10	4,98	28,90	66,12	4,85	28,17	66,98
20... 30	3,23	29,67	67,10	1,45	23,64	74,91
40... 50	0,60	32,50	66,90	5,22	26,71	68,07
60... 70	2,18	33,69	64,13	3,75	32,88	63,37
80... 90	0,46	34,83	64,71	3,17	33,63	63,20
100...110	1,05	25,22	73,73	1,10	24,14	74,75

Fig. 1

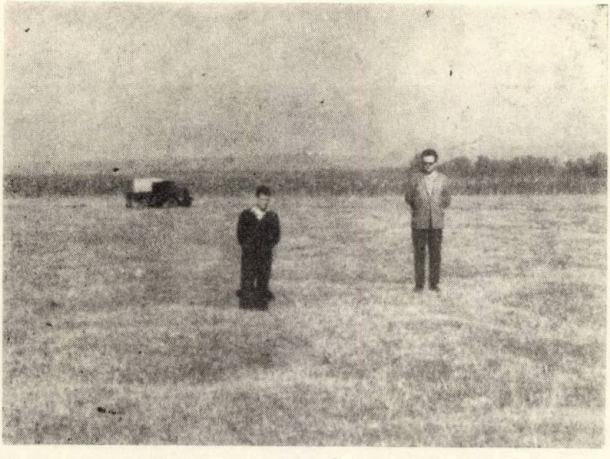


Fig. 2

Fig 3

Fig. 4

Tabelul 2

Compoziția granulometrică în profilul solului de sub coșcovă și monticul din pășune

Adîncimea cm	Coșcovă			Monticul		
	Nisip %	Praf %	Argilă %	Nisip %	Praf %	Argilă %
0... 10	0,80	33,38	65,82	7,23	48,77	44,00
20... 30	0,34	27,06	72,60	0,72	20,80	78,48
40... 50	0,18	25,47	74,35	0,62	21,96	77,42
60... 70	0,56	25,24	74,20	2,76	21,01	76,23
80... 90	0,56	15,46	83,98	0,39	23,00	76,61
100...110	2,88	14,53	82,56	2,08	36,65	61,27

cule) de grosimi cuprinse între 0,20...0,30 m cu rizomi de stuf, fără carbonați și cu o textură ceva mai fină decît straturile acoperitoare. Sub acest sol fosil urmează obișnuit o alternanță cu textura mai nisipoasă, în care cantonează apa freatică. Suprafețele limitrofe microreliefului de coșcove sînt în cea mai mare parte cu textură mai grosieră și cu drenaj intern și extern mai bun.

b) *Stratul freatic* se găsește la diverse adîncimi în funcție de vechimea și lărgimea luncii. Astfel în lunca Prutului adîncimea acestuia este în jurul a 3 m (2,90...3,15 m sub coșcove și 3,25...3,56 m sub monticule), fiind sub o ușoară presiune.

În ceea ce privește gradul de mineralizare al apei, acesta prezintă diferențe atît între coșcovă și monticul, cît și de la o suprafață la alta, fiind în acest caz în funcție de felul de folosință.

Astfel, în fînețe apa freatică sub coșcove este mult mai mineralizată decît sub monticul, menținîndu-se aceeași regulă și pe suprafețele folosite ca pășune, cu deosebirea însă că gradul de mineralizare atît în forma de microrelief negativă cît și în cea pozitivă este mult mai mare, după cum se observă din tabelul 3.

Deci în relieful de coșcove în fînețe se pot întîlni ape mijlociu sălcii, iar în islazuri, mijlociu sărate și chiar puternic sărate sub sărături.

În anumite puncte s-a urmărit variația în timp a gradului de mineralizare al apei freatice și s-a constatat că la intervale de 1...2 luni (septembrie-octombrie-noiembrie) variația este foarte mică (reziduu sec. 0,25 g/l, Cl' 0,16 g/l și SO_4'' 0,01 g/l), menținîndu-se aproape aceleași diferențe între gradul de mineralizare de sub coșcovă și monticul.

Din datele analitice obținute reiese că stratul freatic sub aceste forme de microrelief este stagnant, iar felul de folosință se răsfrînge asupra evoluției procesului de solificare spre o salinizare variată a solului.

Tabelul 3

Cantitatea de reziduu sec și conținutul în Cl' *și* SO_4'' *al apei freatice sub coșcovă și monticul din fineață și pășune*

	Fineață (Culoarea)		Pășune (Prisăcani)	
	Coșcovă	Monticul	Coșcovă	Monticul
Reziduu sec [g/l]	1,8080	1,3540	11,3000	9,1360
Cl' [g/l]	0,6307	0,4035	3,8240	3,4340
SO_4'' [g/l]	0,1615	0,1246	2,5342	1,6587

c) *Apa de suprafață* reprezintă un factor important în formarea microreliefului de coșcove, deoarece pe aceste suprafețe, cu cote mai mici, stagnează în anumite perioade, relativ scurte, din cursul anului, fie ca apă din ploile de toamnă, apă din viituri sau apă rezultată din topitul zăpezii. Datorită acestei situații solul este umed în special toamna cînd este îmbibat cu apă.

Cînd cantitatea de apă căzută pe aceste suprafețe este mai mare, coșcovele sînt umplute cu apă, iar monticulele rămîn neacoperite — situație frecventă toamna, dar mai ales primăvara după topitul zăpezii și chiar vara după fiecare ploaie mai mare.

d) *Climatul* favorizează în aceeași măsură ca și apa de suprafață formarea microreliefului de coșcove, cînd este caracterizat prin variații mari de temperatură dintre cele două anotimpuri — toamnă și iarnă, cînd terenul este saturat în apă și acoperit cu un strat subțire de zăpadă. În aceste condiții solul poate să înghețe pînă la o adîncime de 1 m. Asemenea climat este specific stepei și silvostepei din zona climatului continental temperat.

În afară de factorii principali ce determină microrelieful de coșcove, în evoluția ulterioară participă vegetația ce se fixează și însuși procesul de pedogeneză; asupra acestor aspecte se va reveni în cele ce urmează.

3. Geneza microreliefului de coșcove

Cu privire la geneza acestor forme de relief din țara noastră, Gh. Murgoci și E. Protopopescu-Pache, arată că acestea au rezultat în urma tasării solului [12]. De aceeași părere este și T. Saidel în legătură cu coșcovele de sărături din lunca Călmățuiului [12].

T. Morariu, referitor la geneza crovurilor din Banat, admite de asemenea tasarea solului [6]. După P. Coteț reiese că relieful de coșcove, denumit clastocarst, se formează printr-un proces de spălare în roci poroase de tipul loessului și marnelor [3]. N. Bucur arată că microrelieful de coșcove este un relief de evolu-

ţie strict pedosferic, ce trebuie denumit microrelief pedo-carstic şi considerat ca o grupă aparte sau ca o varietate de relief clasto-carstic [2] [1]).

Din părerile expuse de autorii amintiţi nu reiese geneza acestor forme de relief, care s-au format atît în trecut cît şi în prezent. În procesul de formare a coşcovelor trebuie deosebite două faze : a) denivelarea terenului ieşit de sub influenţa permanentă a apei de suprafaţă şi b) accentuarea procesului de formare a coşcovelor, datorită evoluţiei procesului de solificare.

Suprafeţele ocupate de relieful de coşcove reprezintă formele depresionare din luncă, ale căror cote scad spre vărsarea rîului.

Odată depresiunea trecută în fază de inundabilitate periodică este supusă îngheţului din timpul iernii, cînd în terenul respectiv se menţine o cantitate mărită de umiditate.

Se cunoaşte faptul că în procesul de îngheţ sezonier suprafaţa acestor terenuri suferă deformări în sensul apariţiei de forme nano- şi microrelief negative, care alternează cu cele pozitive. Deplasarea şi deformarea părţii superioare a terenului în procesul îngheţului este condiţionată de mărimea volumului apei din teren (cu 9%), precum şi al apei ce se deplasează către zona de îngheţ [11].

În acest caz se produc schimbări bruşte ale proprietăţilor acestor terenuri şi anume :

a) apare un număr important de legături de cimentare între particulele solide ale terenului, care se manifestă mai puternic pe măsură ce creşte umiditatea ;

b) producîndu-se o creştere a volumului terenului, atît particulele cît şi agregatele formate din acestea, după dezgheţ, nu mai revin în poziţiile lor iniţiale ;

c) în procesul de îngheţ se produce o redistribuire şi o deplasare a umidităţii în terenurile respective.

Din cercetările efectuate pînă în prezent se constată că deplasarea apei în terenurile îngheţate este condiţionată de următoarele cauze :

1° *Prezenţa forţelor osmotice*, care apar sub formă de forţe de sorbţie a soluţiei, ele depinzînd de temperatură, în raport cu care variază invers proporţional.

2° *Tensiunile* ce apar în terenuri, datorită unui îngheţ neuniform, cum ar fi în cazul prezenţei la o oarecare adîncime a unui strat cu o textură mai fină — deci mai greu permeabil. Se produce o creştere considerabilă de tensiuni, care dau naştere la presiuni sub acţiunea cărora umiditatea se deplasează în locurile cu rezistenţă mai mică.

---

[1]) Asemănător reliefului de coşcove este aşa numitul relief de „gilgai", specific solurilor negre argiloase tropicale, care apare sub forme mai puţin tipice şi pe teritoriile cu „smolniţe". Formarea acestui relief este pusă pe seama variaţiilor mari şi neuniforme de volum ale solului determinate de conţinutul ridicat al solurilor respective în argilă montmorillonitică.

Înghețul neuniform al terenului în condițiile naturale este foarte frecvent.

3° *Ascensiunea capilară* joacă un rol important însă mai mult cu caracter local.

Ca rezultat al deplasării umidității în terenul supus înghețului se formează, în afară de incluziuni de gheață separate, în porii mai mari și intercalațiuni și lentile de gheață, a căror formare determină procesul de separare a gheței [11].

De asemenea se cunoaște că în procesul de îngheț în terenuri rămîne o parte din apă neînghețată chiar la temperaturi destul de coborîte, mai ales în cazul terenurilor cu textură fină. Astfel, la o temperatură cuprinsă între —3°C...—30°C rămîne circa 35% din cantitatea de apă neînghețată.

Datorită acestui fapt și stabilitatea unor astfel de terenuri cu textură fină este mai mică, iar deformările sînt mai puternice față de terenurile cu textură mai grosieră.

Mărimea acestor deformări ale terenului și modificarea poziției unui sector oarecare din interiorul acestuia se află în strînsă dependență de compoziția granulometrică și mineralogică, situație demonstrată și experimental de către o serie de cercetători [5], [9]. Aceasta se datorește faptului că compoziția granulometrică determină proprietățile hidrice ale terenurilor.

Luînd în considerare faptul că odată cu coborîrea temperaturii energia de suprafață crește, trebuie de presupus că comprimările din interiorul terenului precum și tensiunile și deformările porțiunilor din teren ce se deshidratează în perioada de redistribuire a umidității devin mult mai mari decît tensiunile analoge, determinînd în acest mod producerea fisurării terenului mai ales la suprafață, în timpul verii.

Odată ce iau naștere aceste forme de microrelief apar treptat diferențe în ceea ce privește repartiția umidității, a căldurii, precum și a evoluției procesului de solificare.

4. Evoluția pedogenetică

Solurile ce se formează pe asemenea forme de microrelief prezintă un caracter variat de hidromorfism, cu procese de gleizare mai mult sau mai puțin accentuate, cu perioade de înmlăștinare periodică și variată ca durată.

Pe măsură ce lunca este mai bine drenată, se micșorează caracterul hidromorf, iar procesul de solificare se orientează către salinizare.

Schimbarea direcției procesului de solificare este naturală și apare sub forme variat accentuate.

Evoluția acestui proces începe chiar din primul moment de apariție a reliefului de coșcove. Primăvara, în special, sau după fiecare ploaie din timpul verii, cînd suprafața respectivă fie că se acoperă complet cu apă, fie că apa se adună numai în micile depresiuni, pri-

mele suprafeţe care încep să evaporeze cantităţi mai mari de umiditate sînt formele pozitive (monticulele). În acest mod în monticule şi sub ele are loc o depunere mai mare de săruri faţă de coşcove. Acest aspect se constată atît în microrelieful de coşcove din fineţe cît şi în cel din islaz, după cum se observă din tabelele 4 şi 5.

Tabelul 4

Conţinutul de săruri solubile şi clor în profilul solului de sub coşcovă şi monticul din fineaţă

Adîncimea cm	Coşcovă		Monticul	
	Cl' mg %	SS mg %	Cl' mg %	SS mg %
0... 10	2,254	88,87	1,529	89,58
10... 20	1,610	74,42	1,771	78,02
20... 30	1,932	58,63	4,347	63,66
30... 40	1,771	45,00	9,660	74,42
40... 50	2,656	43,97	16,663	93,73
50... 60	5,393	46,07	35,260	156,00
60... 70	11,592	74,42	46,202	193,50
70... 80	19,803	134,30	63,497	241,80
80... 90	27,280	166,80	85,410	420,60
90...100	38,720	219,80	110,124	483,70
100...110	47,236	322,50	125,499	439,70
110...120	63,595	332,60	139,104	483,70
120...130	68,747	645,00	138,621	420,60
130...140	78,729	716,60	144,095	537,50
140...150	—	—	129,605	509,20
150...160	—	—	117,852	879,50

S-au efectuat determinări în profilul solului la jumătatea pantei dintre coşcovă şi monticul şi s-au obţinut date intermediare cu privire la conţinutul în clor şi săruri solubile.

În perioadele mai umede ale anului sărurile din monticul sînt spălate în parte în fundul coşcovei, iar de aici antrenate pînă la stratul freatic. Consecinţa acestei dinamici a sărurilor solubile determină tocmai diferenţierea gradului de mineralizare a apei freatice de sub coşcove şi monticul, acolo unde stratul freatic are un caracter stagnant (tabelul 3).

Tot datorită caracterului descendent al curentului de apă, mai pronunţat în anumite perioade ale anului, se produce o diferenţiere în ceea ce priveşte conţinutul carbonaţilor în profilul solului de sub coşcovă şi de sub monticul. Astfel, în asemenea microrelief din islazuri cantitatea de carbonat de calciu în profilul solului de sub coşcovă este mai mică la suprafaţă şi se menţine mai redusă în întregul profil faţă de cel de sub monticul. În fineţe se menţine aceeaşi dife-

Tabelul 5

Conținutul de săruri solubile și clor în profilul solului de sub coșcovă și moticul din pășune

Adîncimea cm	Coșcovă		Monticul	
	Cl' mg %	SS mg %	Cl' mg %	SS mg %
0... 10	7,095	91,27	3,239	97,90
10... 20	5,090	73,29	2,468	81,30
20... 30	4,935	62,41	4,319	96,75
30... 40	5,550	62,41	8,329	110,25
40... 50	6,787	60,46	18,200	156,00
50... 60	5,550	66,06	37,020	210,30
60... 70	7,550	66,06	61,237	288,70
70... 80	14,960	85,65	79,070	387,00
80... 90	24,680	117,90	98,872	537,50
90...100	33,620	134,30	128,000	716,60
100...110	55,990	184,20	131,110	744,20
110...120	82,500	276,40	134,500	841,20
120...130	133,700	420,60	134,960	863,22
130...140	158,100	460,70	122,470	604,60
140...150	136,900	653,90	134,960	691,00
150...160	—	—	144,830	691,00

rență cantitativă între profilul de sub coșcovă și monticul, putînd în unele situații să lipsească în primii 20...30 cm în cel de sub coșcovă. În cazul fînețelor inundate mai frecvent, carbonații sînt levigați la o adîncime de 40...50 cm atît în profilul solului de sub coșcovă, cît și cel de sub monticul, însă diferența cantitativă între ele se menține evidentă (tabelele 6 și 7).

Cantitatea de humus în profilul solului este diferită atît între coșcovă și monticul, cît și între fînețe și islaz. Astfel în profilul solului de sub coșcovă este mai mare față de cea de sub monticul, iar solurile din fînețe conțin o cantitate mai mare de humus decît cele din pășuni (tabelele 6 și 7).

În legătură cu evoluția procesului de solificare în sensul accentuării procesului de salinizare trebuie de presupus că deformarea suprafeței solurilor și terenurilor sau a unor orizonturi genetice în condiții naturale identice va fi influențată și de natura cationilor schimbabili. Deformările mai mari se vor produce acolo unde cationii adsorbiți sînt caracterizați prin o energie de hidratare mai mare [10].

E. Schenk [8], analizînd procesele de îngheț ale terenurilor și formarea structurii la soluri, arată că deplasarea umidității în acestea și formarea gheței sînt determinate de energia de hidratare a componenților respectivi aflați în interacțiune.

Odată cu formarea microreliefului de coșcove se fixează treptat și vegetația, care pe măsura accentuării formelor pozitive și negative

Tabelul 6

Conținutul în humus și carbonați în profilul solului de sub coșcovă și monticul din fineț

Adîncimea cm	Coșcovă		Monticul	
	Humus %	Carbonați %	Humus %	Carbonați %
0... 10	6,85	—	5,57	—
10... 20	4,99	—	4,56	—
20... 30	2,50	—	3,90	—
30... 40	2,09	—	2,99	—
40... 50	1,92	—	2,53	—
50... 60	2,00	—	2,16	2,451
60... 70	1,90	—	1,60	3,881
70... 80	1,59	2,953	1,32	4,698
80... 90	1,40	3,051	1,45	5,005
90...100	1,35	2,756	1,21	2,758
100...110	0,92	2,756	1,22	2,550
110...120	0,77	2,165	0,74	1,123
120...130	0,89	0,738	0,76	0,572
130...140	1,38	0,443	0,99	0,612
140...150	1,02	0,275	0,80	0,878
150...160	—	—	0,78	0,469

Tabelul 7

Conținutul în humus și carbonați în profilul solului de sub coșcovă și monticul din pășune

Adîncimea cm	Coșcovă		Monticul	
	Humus %	Carbonați %	Humus %	Carbonați %
0... 10	4,99	0,310	1,86	0,698
10... 20	4,58	0,238	1,55	0,505
20... 30	4,26	0,165	1,40	0,806
30... 40	3,59	0,176	1,15	1,137
40... 50	3,15	0,186	1,20	0,878
50... 60	2,55	0,196	1,25	1,890
60... 70	2,51	0,190	0,95	2,585
70... 80	2,19	0,350	0,88	2,274
80... 90	1,89	0,258	0,92	2,429
90...100	1,57	0,180	0,76	1,275
100...110	1,36	0,217	0,68	1,499
110...120	1,27	0,304	0,67	2,171
120...130	0,95	0,208	0,61	2,585
130...140	0,91	0,208	0,58	5,221
140...150	0,52	0,289	0,57	3,412
150...160	—	—	0,59	2,585

și a diferențierii procesului de solificare, își modifică compoziția. Această vegetație de fîneață puternic înțelenită prin asociații cu *Agropyron repens, Festuca pseudovina, Poa pratensis* și cu *Cyperaceae* și *Juncacee* se diferențiază cu predominarea pe forme negative de microrelief a celei mezo- și hidrofile, iar pe cele pozitive neohalofite și halofite.

Din analiza vegetației din unele fînețe s-a constatat prezența mai frecventă a următoarelor plante în coșcovi : *Galium palustre, Ranunculus repens, Lysimachia vulgaris, Beckmannia erucaeformis, Rumex crispus, Fritillaria meleagris* ; pe monticul : *Medicago sativa, Lotus corniculatus, Poa bulbosa, Agropyron repens, Trifolium hybridum, Vicia angustifolia, Lepidium latifolium, Pedospermum canum.*

Pe islazuri unde vegetația este mai slabă și unde numărul de plante ruderale este mai mare, s-au putut deosebi ca plante mai deosebite în coșcove : *Ranunculus sardons, Trifolium repens* ; pe monticul : *Agropyron intermedium, Alopecurus pratensis, Matricaria inodora, Trigonella coerulea, Limonium gmelini, Silaus flavescens.*

Mai rar se întîlnesc în islazuri în aceste asociații *Puccinellia distans, Artemisia maritima* etc.

Din constatările făcute pe teren s-a putut conchide că înțelenirea acestor suprafețe are un rol oarecum de conservare a acestui microrelief, care altfel datorită unei puternice fisurări mai ales a monticulelor s-ar putea distruge în perioadele de secetă. Această constatare se confirmă în cazul monticulelor de pe islazuri unde vegetația dispare, fie în urma unui pășunat excesiv, fie datorită procesului de salinizare mai accentuat, cînd formele pozitive de microrelief se atenuează.

Solurile ce se formează pe aceste suprafețe de microrelief de coșcove, evoluează din mlaștini spre sol negru de fîneață, sol humicogleic (Ag—Ga—G) și sol humico-gleic levigat (Ag—GB—G) și spre lăcoviște (Ag—AG—G) și lăcoviște levigată (A(g)—BG—G) fiind variat salinizate în special sub monticul.

Toate aceste soluri, în funcție de modificarea drenajului și de folosință, evoluează către soluri mai puternic salinizate, chiar la formarea solonceacurilor de fîneață, care în unele locuri se găsesc la periferia acestui microrelief.

Suprafețele pe care apa stagnează mai puțin timp și unde deformările sînt mai puțin accentuate, sînt luate în cultură prin nivelarea efectuată de arături adînci. Prezența fostului teren de microrelief cu coșcove se poate constata numai în profilul solului, cînd se deschide un șanț mai lung, în care se observă numai variația limitei inferioare a orizontului cu humus între 60...80 cm. Diferențele din profil dintre coșcovă și monticul, privind conținutul de săruri solubile și clor dispar, menținîndu-se oarecum numai aceea a carbonaților, în funcție de timpul de cînd a fost luată în cultură suprafața respectivă.

Recoltele de grîu pe aceste suprafeţe sînt ridicate ajungînd la 3 000...3 500 kg/ha, însă deseori apa, fie din ploi, fie din viituri, împiedică dezvoltarea normală a culturilor.

5. Concluzii

Pe baza observaţiilor înregistrate în cadrul studiilor efectuate asupra solurilor aluviale din luncile rîurilor şi din Delta Dunării precum şi din datele analitice adunate şi a bibliografiei consultate, se desprind următoarele concluzii cu privire la microrelieful de coşcove:

1. Geneza acestui microrelief este legată, în special în prima fază, de evoluţia proceselor criologice din terenuri, ceea ce duce la forme de carst termic.

2. Întrucît în evoluţia acestui microrelief apare pregnant şi rolul procesului pedogenetic, considerăm că denumirea adecvată ar fi aceea de microrelief termo-pedo-carstic, fiind considerat ca o varietate de relief clasto-carstic.

3. Procesul de solificare pe aceste forme de microrelief evoluează de la solurile din seria solurilor hidromorfe, cuprinzînd tipurile genetice cu hidromorfie intensă şi cu tendinţă spre o salinizare variată, către solurile halomorfe pînă la formarea solonceacului de fineaţă.

4. Pentru o folosire mai eficientă a acestor soluri cu fertilitate potenţială ridicată, sînt necesare o serie de lucrări hidroameliorative şi anume: a) îndiguirea luncilor în cazul rîurilor mai mari pentru înlăturarea viiturilor; b) drenarea acestor suprafeţe, pentru eliminarea excesului de apă rezultată din precipitaţii; c) nivelarea terenului, care se poate efectua cu gredere în cazul denivelărilor mai mari (40 cm) deoarece grosimea orizontului cu humus permite acest lucru.

5. În cazul folosirii acestor suprafeţe ca fîneţe, prin aplicarea lucrărilor specificate, se vor putea îmbunătăţi şi din punct de vedere al compoziţiei floristice.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de geotehnică şi fundaţii

BIBLIOGRAFIE

1. Бродская А. Г., *Сжимаемость мерзлых грунтов.* Институт мерзлотоведения АН СССР, 1962.
2. Bucur N., *Microrelieful de coşcove.* An. şt. Univ. „Al. I. Cuza", Iaşi, (serie nouă), S. II, 1960, **VI**, 2.
3. Coteţ P., *Carstul şi problemele practice.* Natura, 1955, 6.
4. — *Geomorfologie.* Cap. **III**; *Manualul inginerului de mine.* Vol. **I**.
5. Dücker A., *Bodenmechanik und neuzeitliche Stassenwesen.* Dritte Folge, Berlin, 1939.
6. Morariu T., *Cîteva consideraţii geomorfologice asupra crovurilor din Banat.* Rev. geografică, P. T., 1945, **IV**.
7. Роде А. А., *Почвенная влага.* Изд. АН СССР, М., 1952.
8. Schenk E., *Die periglazialen Strukturbodenbildungen als Folgen der Hydratationsvorgänge in Boden.* Eiszeitalter und Gegenwart, 1955, B 6 Ohringen.

9. Taber S., *The Mechanics of Frost Heaving.* J. of. Geol., 1929, **XXXVII.**
10. Тютюнов И. А., *Миграция воды в грунтах.* Исследования по физике и механнике мерзлых грунтов, 1961, *IV.*
11. Цытович Н. А., *К теории равновесного состояния воды в мерзлых грунтах.* ИАН СССР, 1945, **IX**, *5—6.*
12. * * * *Rapoarte de la serviciul de agrogeologie (pedologie).* Inst. Geologic al României, București.

ГЕНЕЗИС НЕКОТОРЫХ МИКРОРЕЛЬЕФНЫХ ФОРМ ЧАСТО ЗАТОПЛЯЕМЫХ ЗОН ИЗ РЕЧНЫХ ПОИМ МОЛДАВИИ И ЭВОЛЮЦИЯ ПОЧВООБРАЗОВАТЕЛЬНННОГО ПРОЦЕССА В ЭТИХ УСЛОВИЯХ

(Резюме)

На основании проведенных обследований в поймах рек Молдавии указывается большинство местностей где распространены формы бугристого рельефа и даются размеры этих форм микрорельефа.

Анализируются факторы, которые участвуют в образовании бугристого микрорельефа — материнская порода, грунтовая вода, поверхностная вода и климат. Из представленного материала вытекает, что эти формы микрорельефа образуются почьти на ровных местах с уклоном меньше 1%, где образуются кратковременный застой воды; механическим составом грунта всегда является тяжелый суглинок или иловатая глина. Грунтовая вода овычно около 3 м и с различнои степенью минерализации как между отрицательной и положительной формой микрорельефа, так и между разным образом использования. Из тех-же аналитических данных явствует что грунтовая вода не имеет потока и образ использования влияет на процесс почвообразования с различной степенью засоления.

Благодаря застою осадочных, поводковых и талых вод, грунт остается увлажненным в особености поздней осенью. Климат степной и лесостепной, характерный умеренно континентальной климатической зоне, с большой вариацией температуры между осенью и зимой, при замерзании грунта до 1 м.

Представаяются мнения различных авторов в отношении этих форм микрорельефа а также и соотвествующие называния приуроченных до сего времени. Из анализа соотвествующего материала указывается что генезис этих форм микрорельефа не выяснен до сих пор.

Указывается что в процессе образования этого микрорельефа нужно различать две фазы: пучение грунта, вышедшего из под постоянного влиания поверхностных вод и после этого акцентуация процесса образования бугров, благодаря эволюции процесса почвообразования.

На основании данных соответствующей литературы и проведенных обследований в различных нунктах — относительно вегетации, распределения гумуса, карбонатов и растворимых солей — а также и под разным использованием этих площадей, приводится к заключению что генезис этого микрорельефа связан, в особенности в первой фазе, с эволюцией криологических процессов, ведущих к образованию форм термокарстового рельефа. Одновременно в этом процессе начинает проявлятся с различнои интенсивностию почвообразовательный процесс, которыи эволюционирует от почв гидроморфной серий, включая гинетические типы почв с интенсивным гидроморфизмом с тенденцией различной засоленности, до галоморфных почв с образованием луговых солончаков.

Благодаря взаимодействию этих двух процессов в образовании этого микрорельефа, предлагается наименовать термо-педо-карстовым микрорельефом, считающимся вариантом класто-карстового рельефа.

Для более эффективного использования почв образовавшихся на этих формах микрорельефа имеющих в большинстве случаев высокое потенциальное плодородие, рекомендуется обвадование этих поим, дренирование и нивелирование соотвествующих площадей.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

C. Z. 631.6

CERCETĂRI PRIVIND IRIGAREA PRIN ASPERSIUNE A TERENURILOR ÎN PANTĂ DIN BAZINUL HIDROGRAFIC BAHLUI

DE

VALERIU BLIDARU, ECATERINA BLIDARU, MARIA GOBJILĂ, CORNEL CISMARU, VALENTINA NĂSTASE şi FELICIA ZAVADOVSCHI

Extras din comunicarea prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 28—30 septembrie 1967

1. Introducere

Extinderea suprafeţelor irigate în Podişul Moldovenesc impune rezolvarea unor probleme dificile, dictate de specificul local al unor factori naturali, cum sînt insuficienţa surselor de apă şi faptul că mai mult de 70% din terenul agricol este situat pe pante şi platouri.

Analiza condiţiilor locale (de relief — microrelief şi panta terenului), arată că, pe o mare parte din surpafeţele care se pretează la irigaţii, în această zonă, trebuie aplicată metoda de irigaţie prin aspersiune. Folosirea acestei metode cu randament superior necesită cunoaşterea caracteristicilor, indicilor de exploatare şi a schemelor de lucru ale instalaţiilor de aspersiune, care să asigure o productivitate mărită, o uniformitate a udării cît mai bună şi menţinerea fertilităţii solului, evitîndu-se eroziunea lui printr-o alegere potrivită a intensităţii aspersiunii.

Datele pe care le oferă literatura de specialitate privitoare la indicii de exploatare ai instalaţiilor de aspersiune se referă în special la terenuri plane. În ceea ce priveşte intensitatea admisibilă a aspersiunii (intensitatea maximă care nu produce băltiri sau şiroiri la suprafaţa soiului), în literatura străină sînt date unele indicaţii mai detaliate care se pot folosi orientativ la întocmirea proiectelor de irigaţie în zonele deluroase şi de podiş din ţara noastră. Astfel, în catalogul firmei „Champion" (S.U.A.) se dau cîteva indicaţii referitoare la intensităţile admisibile ale aspersiunii, pe baza unor categorii de factori de influenţă ca: panta terenului, starea de întreţinere şi modul de lucrare a solului (tabelul 1).

Cercetările întreprinse de noi s-au orientat în două direcţii care interesează dezvoltarea aspersiunii pe versanţi, cu apă din bazine de acumulare:

1° Studierea indicilor de funcţionare (debite, presiuni, raze de acţiune, intensităţi orare) în condiţiile cînd aripa de udare este amplasată pe teren înclinat avînd panta urcătoare (fig. 1). În această situaţie, dife-

Tabelul 1

Intensitatea admisibilă a aspersiunii pe teren în pantă [3]

Solul	Intensitatea admisibilă (mm/min) pentru panta de:							
	0,0...0,05		0,05...0,08		0,08...0,12		0,12 şi mai mare	
	Cultivat	Necultiv.	Cultivat	Necultiv.	Cultivat	Necultiv.	Cultivat	Necultiv.
Nisipos	0,85	0,85	0,85	0,63	0,63	0,42	0,42	0,21
Idem cu hardpan	0,74	0,63	0,53	0,42	0,42	0,32	0,32	0,17
Lutos-nisipos	0,74	0,42	0,53	0,33	0,42	0,25	0,32	0,17
Idem cu hardpan	0,53	0,42	0,32	0,21	0,32	0,27	0,21	0,12
Lutos-argilos	0,42	0,21	0,33	0,17	0,25	0,13	0,17	0,07
Idem cu hardpan	0,25	0,12	0,21	0,11	0,14	0,06	0,12	0,04
Argilos-lutos	0,07	0,06	0,06	0,04	0,05	0,03	0,04	0,02

renţa de nivel între aspersoare se însumează cu pierderile de presiune în lungul conductei, producînd diferenţe mari între presiunile de funcţionare ale aspersoarelor de pe aria de udade şi deci, greutăţi în udarea uniformă a terenului, în realizarea normelor şi a intensităţilor de udare necesare.

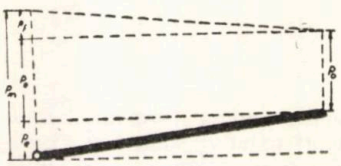


Fig. 1. — Conducta de aspersiune cu panta urcătoare.

2° Precizarea intensităţilor admisibile ale aspersiunii în cîteva situaţii de teren, cu anumite pante şi grade de acoperire cu vegetaţie.

2. Desfăşurarea experienţelor

Experienţele s-au efectuat pe versanţii bazinului de acumulare Chiriţa (oraşul Iaşi) şi ai iazului Mădîrjeşti (aparţinînd C.A.P. Bălţaţi-Paşcani), în perioada 1965—1967 (fig. 2 şi 3), folosindu-se o instalaţie de aspersiune tip IAC cu aripă de udare din conducte de tablă avînd diametrul de 100 mm.

Cercetările privind indicii funcţionali ai instalaţiei de aspersiune s-au întreprins în anul 1965 şi s-au limitat la folosirea aspersoarelor ASM [1]).

În cele două zone se întîlneşte acelaşi tip de sol: cernoziom mediu degradat cu textură luto-nisipoasă, avînd următoarele caracteristici: capacitatea de cîmp 25%, coeficientul de ofilire 13% (din greutatea solului uscat), pH=6,7.

[1]) Deşi în producţie, acest tip de aspersor tinde a fi înlocuit cu tipul ASJ-1, totuşi rezultatele cercetărilor prezintă utilitate pentru motivul că există încă numeroase gospodării ce au în dotare aceste aspersoare; de asemenea sînt foarte utile rezultatele comparative (între aspersoare).

Indicii funcţionali ai aspersoarelor şi instalaţiei de aspersiune s-au studiat pe pante naturale de 2,4%, 4,5%, 7% şi 10%. În fiecare caz s-au analizat 2 subvariante: a) funcţionarea tuturor aspersoarelor instalate pe aripă (4 bucăţi); b) funcţionarea concomitentă a cîte două aspersoare (1+3 şi apoi 2+4).

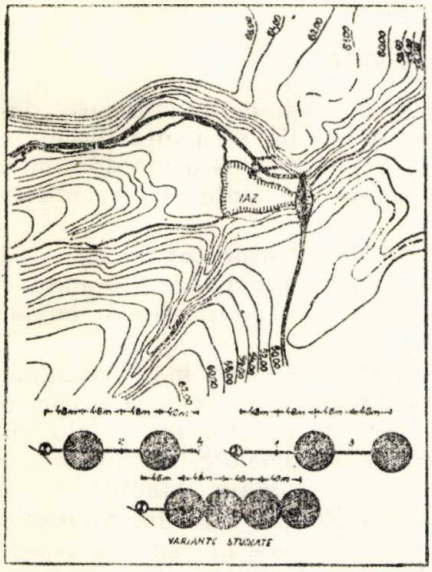


Fig. 2. — Planul de situaţie al bazinului Chirita-Iaşi.

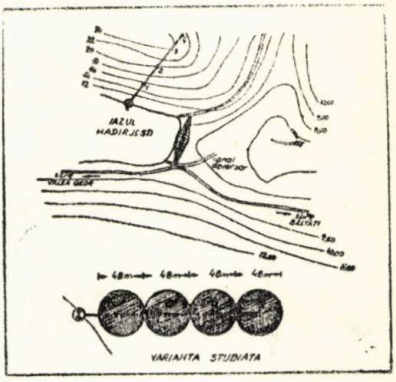


Fig. 3. — Planul de situaţie al bazinului Mădîrjeşti-Paşcani.

Pentru stabilirea intensităţilor admisibile de udare s-au făcut observaţii pe parcele experimentale cu diferite folosinţe şi pante (parcele cu porumb şi sfeclă — în primele faze de vegetaţie — şi păşune). Versanţii pe care s-au efectuat experienţele referitoare la infiltraţia apei în sol şi la intensitatea de udare au avut pantă variabilă, astfel că în lungul lor s-au putut delimita parcele experimentale cu pante cuprinse între 0 şi 12% şi chiar 19%.

Lucrările de teren au consta în măsurători de nivelment pentru stabilirea pantei terenului, instalarea pluviometrelor (în caroiaj cu $l = 5$ m), şi măsurarea presiunilor, a debitului (prin metoda volumetrică), a razelor de acţiune şi a înălţimii coloanei de apă colectate în pluviometre — pentru fiecare aspersor (fig. 4).

Pentru studiul infiltraţiei apei în sol şi pentru determinarea intensităţii admisibile de udare s-au folosit parcele cu suprafaţa de circa 6 m^2, delimitate prin fîşii de tablă încastrate în pămînt, pe care s-au făcut cronometrări ale duratei udării pînă la apariţia scurgerilor şi, pe cîteva din ele, s-a determinat în continuare debitul de scurgere (fig. 5).

Determinările referitoare la durata udării pînă la apariţia scurgerilor, în funcţie de intensitatea ploii, s-au efectuat în toate cazurile în perioade cînd umiditatea din sol a fost cuprinsă între limitele 60... 75% din capacitatea de cîmp, reducîndu-se astfel influenţa umidităţii iniţiale asupra infiltraţiei şi timpului de apariţie a scurgerilor.

3. Rezultate obţinute

Indicii funcţionali ai aspersoarelor (presiunea de funcţionare, debitul, raza şi intensitatea orară) variază în funcţie de panta terenului şi numărul de aspersoare care funcţionează simultan pe aripa de udare. Rezultatele măsurătorilor referitoare la aceste elemente sînt redate în tabelul 2.

Pierderile de presiune între primul şi ultimul aspersor de pe aripa de udare au fost întotdeauna mai mari în cazul funcţionării simultane a tuturor celor patru aspersoare, faţă de cazul cînd au funcţionat numai două (tabelul 2).

Diferenţa între presiunile de funcţionare ale celor mai distanţate aspersoare de pe aripa de udare se accentuează, cum este şi firesc, o dată cu creşterea pantei terenului. Apreciind oportunitatea folosirii unei anumite scheme de lucru prin prisma recomandărilor făcute în cadrul Comisiei Internaţionale de Irigaţii şi Drenaje, Madrid, 1960, (diferenţa de presiune între aspersoarele extreme care funcţionează simultan nu trebuie să depăşească 30% din presiunea de regim a aspersoarelor), rezultă că aripa de udare echipată cu aspersoare ASM nu poate fi folosită decît pe pante relativ reduse (pînă la circa 4,5%) şi în acest caz, cu funcţionarea simultană a numai două aspersoare. În situaţia cînd funcţionează toate aspersoarele, chiar în aceste condiţii de pantă, diferenţa de presiune depăşeşte limita maximă. Din acelaşi motiv, amplasarea aripii de udare pe *pante de 7...10% se consideră necorespunzătoare şi contraindicată.*

Proporţional cu scăderea presiunii în lungul aripii de udare, se constată şi o scădere a debitului aspersoarelor. Astfel, pe terenul cu panta de 2,4%, cînd au funcţionat aspersoarele 1+3, debitul a scăzut de la 8,83 l/s (aspersorul *1*) la 8,25 l/s (aspersorul *3*). Pe aceeaşi pantă cînd au funcţionat toate aspersoarele, variaţia debitelor a fost mai mare (de la 8,72 l/s la 7,02 l/s). În celelalte situaţii aceste diferenţe s-au accentuat.

Intensitatea medie orară (i_m) a ploii pe suprafaţa stropită de fiecare aspersor — care prezintă o deosebită importanţă pentru distribuirea corectă a apei şi care, pentru evitarea degradării solului prin eroziune, trebuie corelată cu posibilităţile de infiltraţie a apei în sol — a înregistrat în toate cazurile creşteri de la primul către ultimul aspersor (în sensul descreşterii presiunii (H_s). Acest aspect este o conse-

Tabelul 2

Rezultatele observațiilor și măsurătorilor privind indicii tehnico-funcționali ai aspersoarelor pe teren în pantă

Varianta	Aspersoare în funcțiune	*I* %	Pres. pompa m	Poziția manometrului față de aspersoare	Aspersorul *1*		Aspersorul *2*		Aspersorul *3*		Aspersorul *4*		%
					T	R	T	R	T	R	T	R	
I Chiriţa	*1+3*	2,4	48	înainte	40,751	41,000			35,976	36,500			12,45
				după	40,351	40,000			35,676	36,050			
	2+4		44	înainte			32,177	33,000			28,857	0,000	11,25
				după			31,877	32,500			28,557	29,500	
	1+2+3+4		51	înainte	40,621	41,000	31,471	32,000	26,821	27,000	24,618	25,000	40,10
				după	40,321	40,521	31,171	31,150	26,521	26,650	24,318	24,500	
II Chiriţa	*1+3*	4,5	44	înainte	40,450	41,000			33,880	34,500			17,00
				după	40,150	40,500			33,580	34,000			
	2+4		44	înainte			34,880	35,500			28,740	29,500	18,45
				după			34,580	35,000			28,440	29,000	
	1+2+3+4		50	.nainte	43,370	44,500	33,310	34,000	27,730	28,500	24,520	25,000	
				după	43,070	44,000	33,010	35,500					
III Bălţaţi	*1+3*	7	30	înainte	29,970	30,500			21,930	22,500			28
				după	29,670	30,000			21,630	22,000			
	1+3		40	înainte	39,910	41,000			31,960	32,500			20
				înainte	39,610	40,500			31,660	32,000			
IV Bălţaţi	*1+2+3+4*	10	55	înainte	46,130	47,000	34,580	35,500	26,900	27,500	21,250	22,000	54
				după	45,830	46,500	34,280	35,000	26,300	27,000	20,900	21,500	

Debitele și intensitățile medii de stropire calculate

Varianta	Aspersoare în funcțiune	*I* %	Pres. pompa m	Elemente		Aspersorul *1*		Aspersorul *2*		Aspersorul *3*		Aspersorul *4*	
						T	R	T	R	T	R	T	R
I Chiriţa	*1+3*	2,4	48	$\frac{Q}{l/s}$	J. P.	7,36	6,86	—		6,92	6,40	—	
					J. S.	1,86	1,97			1,73	1,85		
					Total	9,20	8,83			8,65	8,25		
				int. mm/min.		0,245	0,19			0,285	0,201		
	2+4		44	$\frac{Q}{l/s}$	J. P.	—		6,53	6,14	—		6,18	5,95
					J. S.			1,86	1,72			1,54	1,70
					Total			8,16	7,86			7,72	7,65
				int. mm/min				0,223	0,190			0,263	0,202
	1+2+3+4		51	$\frac{Q}{l/s}$	J. P.	7,40	6,78	6,47	6,20	5,94	5,70	5,65	5,32
					J. S.	1,85	1,94	1,62	1,81	1,48	1,72	1,41	1,70
					Total	9,25	8,72	8,09	8,01	7,42	7,40	7,06	7,02
				int. mm/min.		0,221	0,183	0,230	0,190	0,232	0,193	0,237	0,190
II Chiriţa	*1+3*	4,5	44	$\frac{Q}{l/s}$	J. P.	7,40	7,20	—		6,74	6,40	—	
					J. S.	1,85	1,88			1,68	1,75		
					Total	9,25	9,08			8,42	8,15		
				int. mm/min.		0,244	0,181			0,269	0,210		
	2+4		44	$\frac{Q}{l/s}$	J. P.	—		6,82	6,20	—		6,14	5,80
					J. S.			1,69	1,88			1,53	1,65
					Total			8,51	8,08			7,67	7,45
				int. mm/min.				0,219	0,160			0,251	0,175
	1+2+3+4		50	$\frac{Q}{l/s}$	J. P.	7,45	6,95	6,45	6,10	6,00	5,65	5,64	5,25
					J. S.	1,86	1,97	1,61	1,85	1,50	1,69	1,40	1,66
					Total	9,33	8,92	8,06	7,95	7,50	7,34	7,04	6,91
				int. mm/min.		0,210	0,169	0,221	0,171	0,225	0,177	0,235	0,182
III Bălţaţi	*1+3*	7	30	$\frac{Q}{l/s}$	J. P.	6,30	4,98	—		5,30	4,42	—	
					J. S.	1,57	1,40			1,33	1,20		
					Total	7,87	6,38			6,63	5,62		
				int. mm/min.		0,240	0,144			0,260	0,198		
	1+3		40	$\frac{Q}{l/s}$	J. P.	7,34	5,50	—		6,50	4,22	—	
					J. S.	1,83	1,46			1,63	1,32		
					Total	9,17	6,96			8,13	5,54		
				int. mm/min.		0,246	0,152			0,253	0,172		
IV Bălţaţi	*1+2+3+4*	10	55	$\frac{Q}{l/s}$	J. P.	7,95	7,20	6,82	6,20	5,95	5,40	5,20	4,50
					J. S.	1,97	1,80	1,69	1,60	1,49	1,50	1,30	1,40
					Total	9,92	9,00	8,51	7,80	7,44	6,90	6,50	5,90
				int. mm/min.		0,21	0,17	0,235	0,195	0,250	0,210	0,263	0,212

Valoarea razelor măsurate (m)

Varianta	Aspersoare în funcțiune	*I* %	Pres. pompa m	Aspersorul *1*				Aspersorul *2*				Aspersorul *3*				Aspersorul *4*			
				N	S	E	V	N	S	E	V	N	S	E	V	N	S	E	V
I Chiriţa	*1+2*	2,4	48	22	31	24	28					20	28	20	24				
	2+4		44					30	25	20,5	24					27	20	20	25,5
	1+2+3+4		51	21	32	26	20	20	25	22	25	22	26	18	23	26	21	21	24
II Chiriţa	*1+3*	4,5	44	33	23	20	21					29	19	17	19,5				
	2+4		44					28	24	27	26					25	24	23	22
	1+2+3+4		50	27	25	27	28	25	23	27	27	26	25	22	25	25	24	23	26
III Bălţaţi	*1+3*	7	30	24	21	25	27					23	20	24,5	26				
	1+3		40	29	24	25	22,5					27	22,5	23	22				
IV Bălţaţi	*1+2+3+4*	10	55	27	24	24	26	24	18	20	28	25	20	15	25	17	15	16	15,5

T—valori teoretice, J. P.—jet principal, R.—valori reale, J. S.— jet secundar, N. S. E. V.—direcțiile cardinale.

Fig. 4. — Determinarea indicilor de funcţionare ale aspersoarelor la cîmpul experimental Mădîrjeşti–Paşcani.

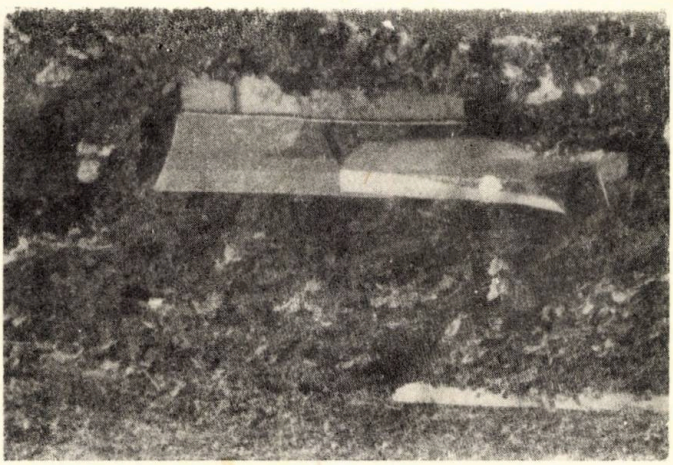


Fig. 5. — Măsurarea scurgerii de pe parcele experimentale.

cință a descreșterii suprafețelor stropite în mai mare măsură decît descreșterea debitului aspersoarelor în lungul aripii de udare. Se remarcă și faptul că intesitățile teoretice determinate cu relația $i = Q_{asp}/\pi R^2$ sînt totdeauna mai mari decît cele reale, determinate prin trasarea izohietelor pe suprafața de stropire (tabelul 2), fapt explicabil și prin pierderile de apă ce se produc de la ieșirea din aspersor pînă la căderea pe teren.

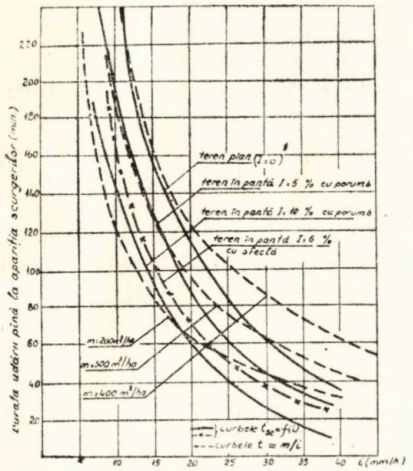


Fig. 6. — Variația timpului de apariție a scurgerii în funcție de intensitatea aspersiunii pe teren neprotejat (culturi prășitoare în prima fază) în cîmpurile experimentale Chirița și Bălțați-Pașcani.

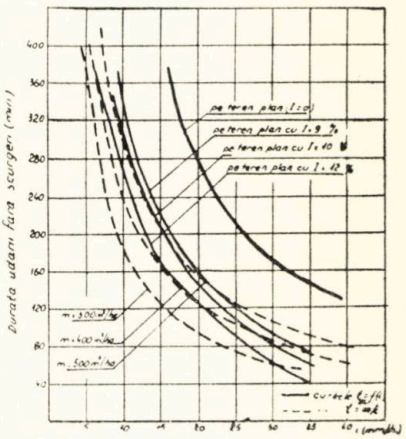


Fig. 7. — Variația timpului de apariție a scurgerii în funcție de intensitatea aspersiunii și pantă pe teren protejat (pășune), în cîmpul experimental Chirița-Iași.

Intensitățile teoretice — pe terenul cu pantă de 2,4% și funcționînd două aspersoare (2+4) — au variat între 0,223 mm/min (aspersorul 2) și 0,263 mm/min (aspersorul 4), iar la panta de 4,5% au variat de la 0,219 mm/min (aspersorul 2) la 0,251 mm/min (aspersorul 4).

Intensitățile teoretice medii orare pe suprafețele stropite, în situațiile cînd panta terenului este de 2,4 ... 4,5%, au variat între 0,21 mm/min și 0,27 mm/min, iar cele reale între 0,16 mm/min și 0,21 mm/min.

În urma prelucrării observațiilor asupra *duratei udării pînă la apariția scurgerilor*, s-au trasat curbele care reprezintă dependența acesteia de intensitatea ploii și panta terenului, pentru cele două situații caracteristice din punct de vedere al gradului de acoperire a solului pe care s-au întreprins experiențele: a) pentru culturi prășitoare în primele faze de vegetație, cînd solul este aproape neprotejat și b) pentru pășune, care oferă o bună protecție a solului. Prezentarea rezultatelor sub formă grafică este redată în fig. 6 și 7.

Din analiza rezultatelor măsurătorilor efectuate în această direcţie, rezultă că atît pe terenul în pantă cît şi pe cel plan, prin mărirea intensităţii aspersiunii se reduce sensibil timpul de udare pînă la apariţia scurgerilor ; de asemenea, se observă că la aceeaşi intensitate a ploii, timpul de udare este mai mic pe teren neacoperit (cu prăşitoare în prima fază), decît pe cel protejat (păşune). De exemplu, folosind aceeaşi intensitate, de 30 mm/h, pe un teren cu aceeaşi pantă, de 10%, durata udării fără scurgere poate ajunge în condiţii de păşune la 80 ... 90 min, pe cînd pe teren neprotejat ea este numai de circa 30 min.

În acelaşi grad de acoperire cu vegetaţie, se constată totodată o reducere a intesităţii maxime admisibile o dată cu mărirea pantei terenului (fig. 6 şi 7). Astfel, pe teren cultivat cu prăşitoare, intensitatea admisibilă pentru panta de 5% este cu circa 20% mai redusă decît cea admisă pe terenuri plane ; pe panta de 10%, procentul de reducere este de circa 40%. Pe păşune, avînd panta de 9%, reducerea intensităţii admisibile faţă de terenul plan este de circa 40%, iar pe pante de 12%, această reducere este de circa 50%. Date similare din acest punct de vedere sînt semnalate şi în lucrările unor cercetători străini [7].

Timpul necesar pentru efectuarea udării ca şi intensitatea admisibilă sînt condiţionate şi de mărimea normelor de udare (m). Pentru determinarea intensităţii admisibile funcţie de mărimea normei de udare, pe graficele din fig 6, 7 s-au reprezentat (cu linii întrerupte) şi curbele $t=m/i$ pentru norme de udare $m=200 \ldots 500$ m³/ha. Valorile corespunzătoare punctelor de intersecţie ale acestor curbe cu curbele $t=f(i)$ reprezită intensităţile maxime admisibile care sînt indicate în tabelul 3.

Tabelul 3

Valorile intensităţilor admisibile (maxime şi medii) în cîmpurile experimentale Chiriţa şi Bălţaţi-Paşcani (bazinul hidrografic Bahlui)

Norma de udare m³/ha	Intensit. admisibilă mm/oră	Culturi prăşitoare			Păşune		
		Teren plan	Teren cu pantă de		Teren plan	Teren cu pantă de	
			5%	10%		9%	12%
200	max.	>30	29	18	peste 30	peste 30	peste 30
	med.		14,5	9	peste 30	peste 30	peste 30
300	max.	28	17	—	peste 30	peste 30	30
	med.	14	8,5	—	peste 30	peste 30	15
400	max.	11	—	—	peste 30	35	20
	med.	5,5	—	—	peste 30	17	10
500	max.	—	—	—	peste 30	22	—
	med.	—	—	—	peste 30	11	—

Se ştie, însă, că distribuţia apei pe teren, chiar în cazul aspersoarelor cu o bună repartiţie a ploii în lungul razei, nu este aceeaşi pe suprafaţa udată de aripa de aspersiune, punîndu-se în evidenţă inten-

sităţi locale mari în unele zone, de unde se semnalează primele scurgeri în procesul de udare. Intensitatea maximă a ploii, pe suprafaţa stropită de aripă, depinde de caracteristicile aspersoarelor (curba de repartiţie a ploii în lungul razei) şi de distanţa de dispunere a aspersoarelor, însă, în cea mai mare măsură depinde de *viteza vîntului.*

La alegerea distanţei de aşezare a aspersoarelor se ia în consideraţie de obicei intensitatea medie pe suprafaţa stropită de aripa de aspersiune, de unde rezultă că un element important ce trebuie cunoscut în proiectare şi exploatare este valoarea admisibilă a intensităţii medii pe aripa de aspersiune, care permite udarea în bune condiţiuni la o anumită viteză a vîntului. Înregistrările efectuate cu ajutorul pluviometrelor în cadrul acestor experienţe pe teren, au arătat că la viteze ale vîntului de 2,5...5 m/s, se înregistrează intensităţi locale maxime cu valori duble şi chiar mai mari, în raport cu intensitatea medie. (În mod aproximativ, $i_{med} / i_{max\ loc} = 0{,}5$, adică intensităţile medii admisibile pe suprafaţa udată de aripa de aspersiune pot fi luate — în lipsa unor studii mai aprofundate — egale cu circa 1/2 din intensităţile maxime admisibile). Valorile intensităţilor medii admisibile sînt redate în tabelul 3 ; ele pot oferi o orientare în alegerea aspersoarelor, a schemei de amplasare şi a normelor de udare, pentru irigarea terenurilor în pantă.

4. Concluzii

Cercetările efectuate permit stabilirea unor concluzii aplicabile în special pentru irigarea terenurilor în pantă din bazinul hidrografic al rîului Bahlui :

1° Aspersoarele ASM prezintă indici funcţionali corespunzători numai pe terenuri cu panta de maximum 4,5% pe care este asigurată o protejare bună a solului faţă de acţiunea picăturilor de apă (în condiţii de păşune sau lucernă). În cazul lucernei, pentru a evita şiroirile este necesar ca imediat după cosire să se dea norme de udare mici (circa 200 m^3/ha).

2° În cazul irigării plantelor prăşitoare (porumb, sfeclă, floareasoarelui etc.) în condiţiile unor pante ale terenului de 5 ...10%, normele de udare se vor da fracţionat — în prima repriză 200...300 m^3/ha — şi folosindu-se numai aspersoare ce realizează intensităţi mici ; pentru aceste situaţii se poate indica aspersorul ASJ 1. Totuşi şi în aceste cazuri trebuie analizate atent intensităţile medii ce se realizează în schema de amplasare adoptată, precum şi regimul vînturilor.

Revenirea pe acelaşi teren cu udări la intervale scurte de timp, cu norme de circa 200 m^3/ha, sporeşte cheltuielile de exploatare pentru mutarea aripilor de udare ; acest fapt constituie unul din considerentele importante care conduc la alegerea soluţiei cu reţele de irigaţie fixă pentru irigarea terenurilor cu pantă mare, mai ales cînd terenurile sînt destinate plantaţiilor de vii şi livezi.

3° Intensitatea maximă a udării prin aspersiune este puternic influenţată de gradul de acoperire cu vegetaţie al terenului şi de aceea, pentru asigurarea unei productivităţi cît mai ridicate a instalaţiilor de udare mobile sau semimobile care se folosesc în tehnica actuală din ţara noastră, este necesar să se studieze variaţia acestui indice în raport cu condiţiile naturale din cadrul fiecărei amenajări mai importante.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de hidroamelioraţii,
Catedra de hidraulică

BIBLIOGRAFIE

1. Blidaru V., *Irigaţii-Desecări.* Iaşi, 1967.
2. Blidaru E., Blidaru V., *Contribuţii la problema îmbunătăţirii aspersoarelor cu presiune medie şi mare, folosite în irigaţii.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1967, **XIII (XVII)**, 3—4, pp. 559—572.
3. Ерхов Н. С., *Допустимая интенсивности исскуственного дождя.* Гидром. и мелиор. 1967, 5.
4. Giudici P., *Il dimensionamenti degli impianti di irrigazione a pioggia.* L'Aqua e il suolo, 1958, 5.
5. Laşiţă E., Grumeza N., *Irigaţia prin aspersiune.* Ed. Agro-Silvică, Buc., 1967.
6. Popescu C., *Contribuţii la studiul indicilor de exploatare ai instalaţiilor de irigaţie prin aspersiune IAC şi IAJ-60 S.* Teză de doctorat, 1965.
7. Sakurai S., Mitzunoe M., Yoneya A., *Efficiency of Sprinkler Irrigation at the Sloping Field.* Fourth Congress on Irrigation and Drainage. Madrid, 1960.

ÉTUDES RELATIFS À L'IRRIGATION PAR ASPERSION DES TERRAINS EN PANTE DU BASSIN HYDROGRAPHIQUE BAHLUI

(Résumé)

On établit la variation des débits des aspersoirs, la variation des intensités d'arrossage et des distances d'arrossage lorsque les pressions de la motopompe varient et lorsqu'on pratique une irrigation par aspersion en schéma montant.

On étudie aussi l'infiltration de l'eau en sol et les intensités maximum de l'aspersion pour les pâturages et pour les terrains cultivés avec binettes.

Les dates sont enregistrées et interpretées selon les observations effectuées pendant deux anées dans les conditions existentes dans les versants du plateau moldovien.

Explications des figures

Fig. 1. — Le tuyau d'aspersion en schéma montant.
Fig. 2. — Plan de situation du bassin de Chirita.
Fig. 3. — Plan de situation du bassin Mădîrjeşti-Paşcani.
Fig. 4. — Détermination des indices de fonctionnement des aspersoirs au champ experimental Mădîrjeşti-Paşcani.
Fig. 5. — Mesure de la crue sur les parcelles expérimentales.
Fig. 6. — Variation du temps d'apparition des crues en fonction de l'intensité d'aspersion et de la pente, sur terrain nonprotégé des binettes en première phase.
Fig .7. — Variation du temps d'apparition des crues en fonction de l'intensité d'aspersion et la pente, sur terrain protégé (pâturage).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

Industrie uşoară

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том XIV (XVIII), вып. 3—4, 1968

Легкая промышленность

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

Light Industry Engineering

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

D. K. 677.03

UNTERSUCHUNG VON GETRIEBEN DER WEBMASCHINE MITTELS BESCHLEUNIGUNGEN ZWEITER ORDNUNG

VON

FILIP REICHER und D. LIUŢE

Mitteilung an der wissenschaftlichen Tagung der Technischen Hochschule, Jassy, 28—30. September 1967

1. Vorwort

Die Frage der Bedeutung der Beschleunigungen zweiter Ordnung in der Bewegung von Getriebeteilen hat die Forscher in den letzten Jahrzenhnten besonders beschäftigt. M. M. Tischin konstruiert (1939) Vielecke der Beschleunigungen zweiter Ordnung, während B. E. Gorski und L. I. Kremenstein (1962) diese Frage wiederaufnehmen und die Untersuchung der Beschleunigungen zweiter Ordnung für die Bestimmung der optimalen dynamischen Parameter bei der Projektierung von Getrieben anempfehlen [1]. Dieselben Verfasser behaupten dass grosse Werte der Beschleunigungen zweiter Ordnung einen grösseren Verschleiss der Maschinenteile zur Folge haben [2]. Die Beschleunigung zweiter Ordnung habe eine intensivere Wirkung in jenen Momenten, wenn auch die Beschleunigung erster Ordnung grosse Werte annimmt. Wenn die Beschleunigung zweiter Ordnung theoretisch gegen Unendlich geht, erscheinen zusätzliche dynamische Beanspruchungen in den Getriebeteilen.

Eine Reihe von Arbeiten betreffs Beschleunigungen zweiter Ordnung verdanken wir Prof. D. Mangeron. Darunter bietet die Arbeit [3] eine wissenschaftliche Begründung des Einflusses der Beschleunigungen zweiter Ordnung. Es wird darin bewiesen das jeder Getriebeteil in seiner Bewegung periodischen Formänderungen und folglich auch inneren Spannungen unterliegt, die gleichzeitig mit den Beschleunigungen zweiter Ordnung wachsen.

In virliegender Arbeit wird der Einfluss der Besrhleunigungen zweiter Ordnung im Falle zweier Getriebe der Webmaschine in folgendem Sinne untersucht :

1° Beim *Ladenbewegungsgetriebe*. Die Veränderung und die Extremwerte der Beschleunigung zweiter Ordnung, bei Laden mit verschiedenem Verhälthis von Koppellänge zu Kurbelradius.

2° Bei *Fachbildungsvorrichtungen*. Die Veränderung der Beschleunigung zweiter Ordnung, vergleichsweise, für den Fall der Bewegung des Schaftes gemäss Kosinuskurve bzw. Sinuskurve.

2. Ladenbewegungsgetriebe

Bei der Projektierung des Ladenbewegungsgetriebes hat das Verhältnis l/r eine grosse Bedeutung (l — Koppellänge, r — Kurbalradius). In den Abb. 1 ... 5 wurde die Veränderung der Funktion a (Tangentialbeschleunigung des Ladenbolzen) und b (Beschleunigung zweiter Ordnung) für Ladenbewegungsgetriebe mit folgenden Werten des Verhältnisses l/r: 3 ; 3,5 ; 4 ; 4,5 ; 5 dargestellt. In allen Fällen ist das Ladenbewegungsgetriebe nicht geschränkt, die Tourenzahl 220 U/Min und Kurbelradius $r=6{,}5$ cm. Die uns interessierenden Funktionen sind

$$a = r\omega^2\left(\cos\alpha + \frac{r}{l}\cos 2\alpha\right) \quad \text{und} \quad b = -r\omega^3\left(\sin\alpha + \frac{2r}{l}\sin 2\alpha\right),$$

wobei : ω die Winkelgeschwindigkeit der Kurbelwelle und α der fortlaufende Winkel der Kurbelwellendrehung sind.

Aus der vergleichenden Analyse der Diagramme ergibt sich :

a) Bei den Werten $l/r<4$ hat die Funktion a vier Extremwerte, die Funktion b ebenfalls vier Extremwerte.

b) Bei den Werten $l/r \geqslant 4$ haben die Functionen a und b je zwei Extremwerte.

c) Je mehr l/r wächst, desto mehr nähert sich die Kurve a einer Kosinusoide und die Kurve b einer Sinusoide.

d) Wenn l/r wächst, verringert sich der Höchstwert der Funktion b und findet bei kleineren Werten des Argumentes α statt ; die entsprechenden Werte der Funktion a verringern sich ebenfalls (Tabelle 1).

Tabelle 1

l/r	$\alpha°$	b_{max} cm/s³	a_{max} cm/s²
3	302°59′	124 840	1 467
3,5	301°28′	115 010	1 410
4	300°	108 135	1 351
4,5	298°42′	99 452	1 244
5	297°27′	96 554	1 194

Tabelle 2

Typ der Webmaschine	l mm	r mm	l/r
ATC-8	257	75	3,43
ATC-A	262	70	3,74
A (Unirea)	265	70	3,79
ATC-B	267	65	4,11
Platt	290	56	5,18

Das letztgenannte Ergebnis hat eine grosse Bedeutung bei der Projektierung des Ladenbewegungsgetriebes. Bei den Webmaschinen von einem bestimmten Typ (z. B. schmale Webmaschinen für leichte Baumwollgewebe, oder breite Tuchwebmaschinen, usw.) ist es empfehlenswert des Verhältnis l/r so gross als möglich zu wählen, selbstverständlich im Rahmen der Werte die für den betreffenden Typ zulässig sind.

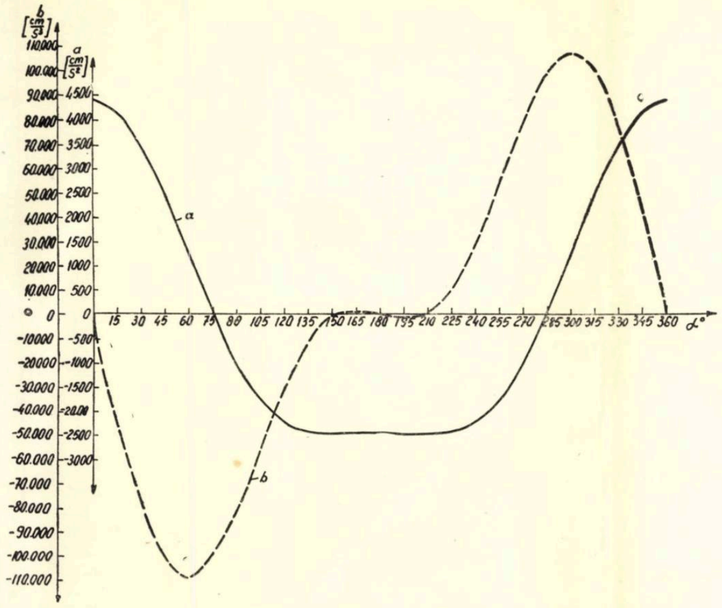
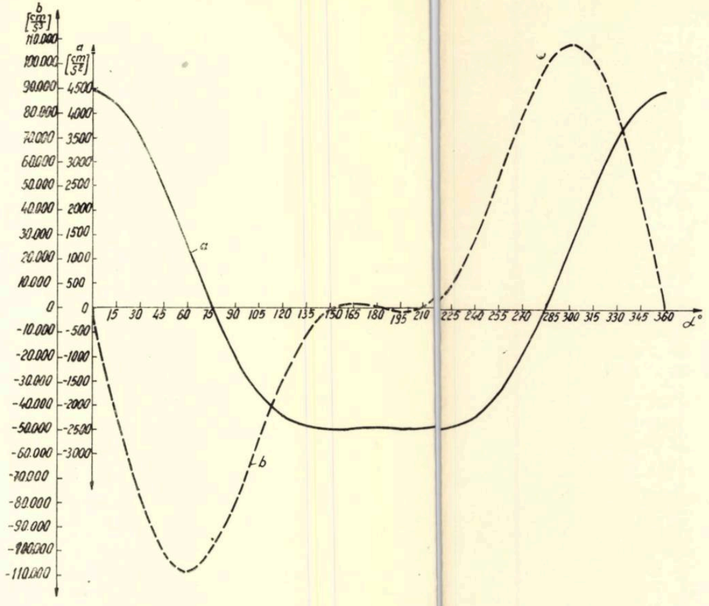


Abb. 1. — Diagramme der Beschleunigung *(a)* und Beschleunigung zweiter Ordnung *(b)* beim Ladenbewegungsgetriebe mit $l/r=3$.



Abb, 2. — Diagramme der Beschleunigung *(a)* und Beschleunigung zweiter Ordnung *(b)* beim Ladenbewegungegetriebe mit $l/r=3{,}5$.

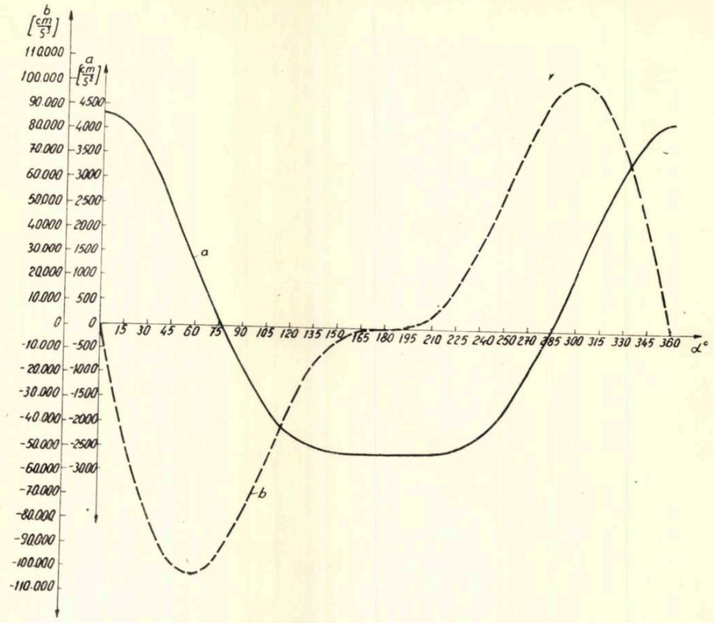


Abb. 3. — Diagramme der Beschleunigung *(a)* und Beschleunigung zweiter Ordnung *(b)* beim Ladenbewegungsgetriebe mit $l/r=4$.

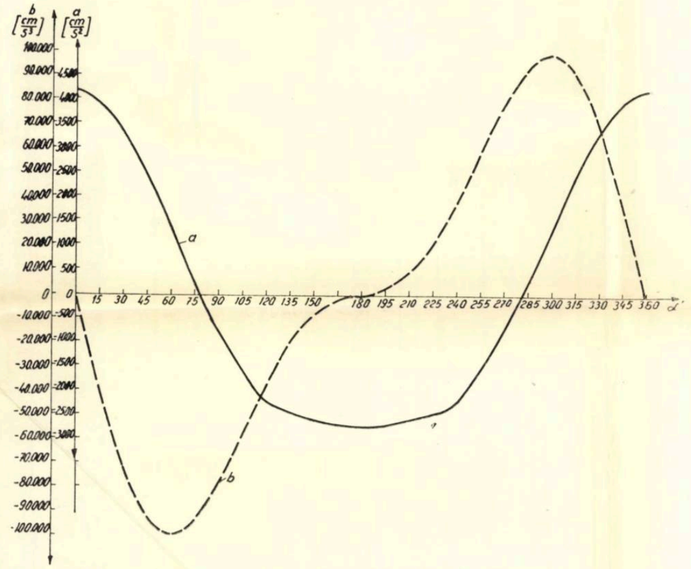


Abb. 4. — Diagramme der Beschleunigung *(a)* und Beschleunigung zweiter Ordnung *(b)* beim Ladenbewegungsgetriebe mit $l/r=4{,}5$.

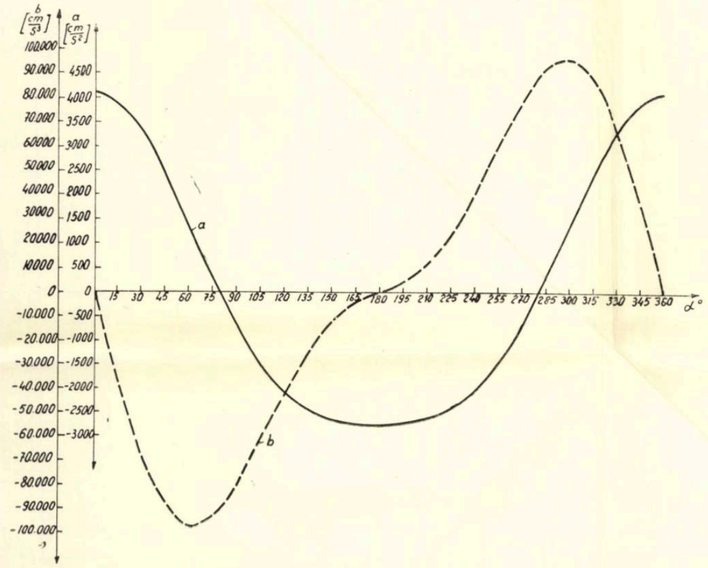


Abb. 5. — Diagramme der Beschleunigung *(a)* und Beschleunigung zweiter Ordnung *(b)* beim Ladenbewegungsgetriebe mit $l/r=5$.

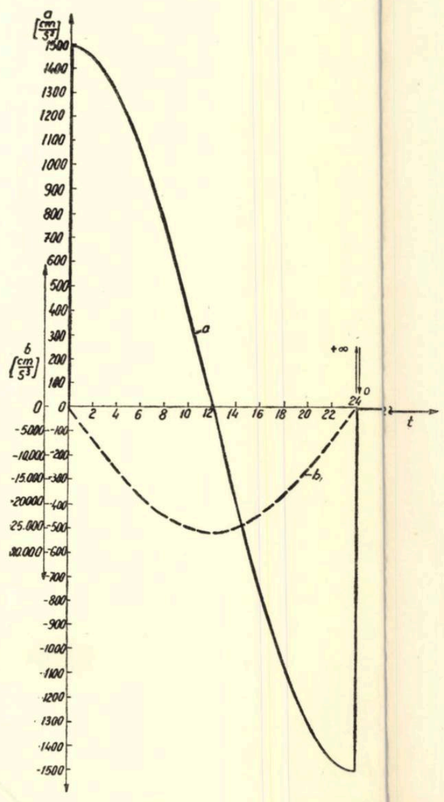


Abb. 6. — Diagramme der Beschleunigung *(a)* und Beschleunigung zweiter Ordnung *(b)* bei Schaftbewegung gemäss Kosinusgesetz.

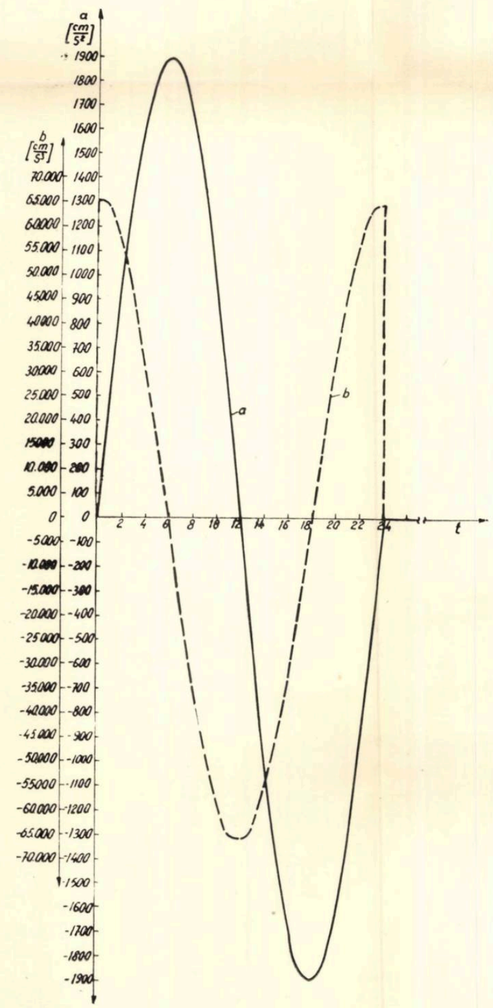


Abb. 7. — Diagramme der Beschleunigung *(a)* und Beschleunigung zweiter Ordnung *(b)* bei Schaftbewegung gemäss Sinusgesetz.

Es werden aber Maschinen gebaut, die ähnlichen Verwendungszwecken dienen und dennoch grosse Unterschiede der Werte l/r aufweisen (Tabelle 2).

Wenn man das Verhältnis l/r so gross als möglich wählt, erzielt man alle günstigen Folgen, die aus dem Vorhandensein kleiner Werte der Beschleunigungen zweiter Ordnung entspringen, so wie der kleinen Werte der Beschleunigungen erster Ordnung, in den Momenten wo die Beschleunigungen zweiter Ordnung Maximalwerte erreichen.

3. Fachbildungsvorrichtungen

Die Beschleunigungen erster und zweiter Ordnung bei einem Schaft der sich nach dem Kosinusgesetz bewegt, haben folgende Austrücke

$$a = \frac{H\pi^2}{2T^2} \cos\frac{\pi t}{T} \quad \text{und} \quad b = -\frac{H\pi^3}{2T^3} \sin\frac{\pi t}{T},$$

wobei H die Amplitude der Schaftbewegung darstellt, t die fortlaufende Zeit und T die Dauer der Aufwärtsbewegung. Bewegt sich der Schaft nach dem Sinusgesetz, so sind die entsprechenden Formeln

$$a = \frac{2\pi H}{T^2} \sin\frac{2\pi t}{T} \quad \text{und} \quad b = \frac{4\pi^2 H}{T^3} \cos\frac{2\pi t}{T}.$$

Um die Beschleunigungen bei den zwei verschiedenen Bewegungesetzen vergleichen zu können, nehmen wir folgendes Beispiel: $n=220$ U/Min — Kurbelwellendrehzahl, $H=10$ cm — Amplitude der Schaftbewegung, $\varphi=240^\circ$ — Drehung der Kurbelwelle während der Aufwärtsbewegung des Schaftes. Es folgt $T=0{,}182$ s.

Aus dem Vergleich der Diagramme in den Abb. 6 und 7 (Schaftbewegung gemäss Kosinusgesetz bzw. Sinusgesetz) ergibt sich:

a) Während der Aufwärtsbewegung des Schaftes ist der Maximalwert der Beschleunigung beim Sinusgesetz grösser als beim Kosinusgesetz (1 897 cm/s^2, bzw. 1 491 cm/s^2).

b) Der Maximalwert der Beschleunigung zweiter Ordnung ist beim Sinugesetz grösser als beim Kosinusgesetz (65 483 cm/s^3 bzw. 25 800 cm/s^3).

c) In Moment des Überganges von Bewegung zu Stillstand erscheint im Beschleunigungsdiagramm, im Falle des Kosinusgesetzes, ein Sprung von dem Werte — 1 491 cm/s^2 zum Nullwerte. Dementsprechend weist das Diagramm der Beschleuniung zweiter Ordnung einen Sprung von 0 zu $+\infty$ auf, augenblicklich gefolgt von einem Sprung zurück zum Nullwerte, Auf diese Weise gestattet die Benutzung der Beschleunigungen zweiter Ordnung die Klärung der negativen Folgen des Rucks, im Falle der Anwendung des Kosinus gesetzes.

Wird hingegen das Sinusgesetz angewandt, erscheint im Moment des Übergangs von Bewegung zu Stillstand nur ein Sprung der Beschleunigung zweiter Ordnung, von den Werte 65 483 cm/s³ zu Null, was aber keineswegs einen Ruck kennzeichnet.

4. Schlussfolgerungen

Man kann aus der obigen Analyse die Schulssfolgerung ziehen dass bei modernen Webmaschinen mit hoher Drehzahl die Anwendung des Sinusgesetzes für Fachbildungsvorrichtungen zu empfehlen ist.

Technische Hochschule, Jassy,
Lehrstuhl für Weberei

LITERATURVERZEICHNIS

1. Горский Б. Е., Кременштейн Л. И., *Проектирование и исследование машин с учетом рывков.* Технол. легкой пром., 1962, *3*, стр. 138—149.
2. — *Анализ и синтез кулачковых механизмов с учетом рывков.* Технол. лечкой пром., 1962, *6*, стр. 113—122.
3. Кожевников С. Н., Манжерон Д., *О динамическом эффекте действия ускорений высшего порядка.* Bul. Inst. polit. Iași, 1964, **X (XIV)**, *1—2*, стр. 243—252.

CERCETAREA UNOR MECANISME ALE MAȘINII DE ȚESUT CU AJUTORUL ACCELERAȚIEI DE ORDINUL II

(Rezumat)

Se cercetează variația accelerației de ordinul II la mecanismul vătalei, pentru diferite valori ale raportului lungimilor bielei și manivelei, precum și variația accelerației de ordinul II a iței, pentru cazul mișcării după legea cosinusoidală și sinusoidală.

Se trag concluzii pentru proiectarea celor două mecanisme.

Explicația figurilor

Fig. 1. — Diagrame ale accelerației *(a)* și accelerației de ordinul II *(b)* la mecanismul vatalei, cu $l/r=3$.
Fig. 2. — Diagrame ale accelerației *(a)* și accelerației de ordinul II *(b)* la mecanismul vatalei, cu $l/r=3{,}5$.
Fig. 3. — Diagrame ale accelerației *(a)* și accelerației de ordinul II *(b)* la mecanismul vatalei, cu $l/r=4$.
Fig. 4. — Diagrame ale accelerației *(a)* și accelerației de ordinul II *(b)* la mecanismul vatalei, cu $l/r=4{,}5$.
Fig. 5. — Diagrame ale accelerației *(a)* și accelerației de ordinul II *(b)* la mecanismul vatalei, cu $l/r=5$.
Fig. 6. — Diagrame ale accelerației *(a)* și accelerației de ordinul II *(b)* la mișcarea iței, după legea cosinusoidală.
Fig. 7. — Diagrame ale accelerației *(a)* și accelerației de ordinul II *(b)* la mișcarea iței, după legea sinusoidală.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

УДК 621-23

ПНЕВМАТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ТОРМОЗНЫМИ МЕХАНИЗМАМИ РУЛОНОРАЗМОТОЧНЫХ УСТРОЙСТВ

В. В. ЕВДОКИМОВ и И. И. КАПУСТИН

На оборудовании предприятий текстильной, легкой, бумажной и полиграфической промышленности, обрабатывающем рулонные материалы, получили широкое распространение тормозные механизмы, создающие натяжение ленты фабриката путем торможения оси рулона на размоточном устройстве машин.

Достоинством данных механизмов является то, что они не входят в непосредственный контакт с поверхностью рулонного материала и не повреждают его.

Однако, вследствии того, что диаметр, масса и угловая скорость рулона постоянно меняются в процессе размотки, для поддержания заданного натяжения ленты, сходящей с рулона, требуется на данных механизмах непрерывное изменение тормозного момента.

На многих действующих производственных агрегатах такое регулирование момента проводится периодически вручную или применяют весьма сложные электрические системы, использование которых во взрывоопасных производствах вообще не представляется возможным.

Возрастание рабочих скоростей оборудования, увеличение метража рулонов, заправляемых на машины предъявляют повышенные требования к управлению тормозными устройствами, с целью недопущения колебаний натяжений рулонного материала в машине сверх допустимых значений. Такие колебания натяжений связаны с рядом осложнений в работе производственных агрегатов.

Так на дублировочных каландрах сообщение разных и непостоянных натяжений тканям и пленкам приводит к их различной вытяжке, несовпадению сдваиваемых кусков тканей, возникновению внутренних напряжений в многослойном материале и т. д.

При нанесении покрытий колебание натяжения основы является одной из главных причин получения неравномерных по толщине пленок [2].

Поэтому для поддержания постоянного натяжения полотен рулонного материала требуется применение относительно простых, доступных для использования на большинстве производств текстильной и легкой промышленности систем управления тормозными механизмами.

В настоящей работе дается анализ новой пневматической системы управления тормозными устройствами; показан усовершенствованный тормоз, приспособленный для работы с приведенной системой управления. Регулирование тормозного момента ведется по результатам контроля изменяющегося диаметра рулона и фактического натяжения

ленты, выходящей с размоточного приспособления. При этом следует заметить, что диаметр (радиус) — это наиболее доступный для измерения в процессе размотки параметр рулона. Точность регулирования такой системы зависит от того, как правильно будет определен момент торможения для каждого значения радиуса рулона с учетом характеристик рулонного материала и конструкции тормозного механизма. Приводимая нами расчетная методика для определения тормозного момента учитывает эти условия, а также исходит из того, что размотка рулонов производится при неколеблющейся линейной скорости перемещения ленты, т. к. эти скорости тем или иным способом на технологическом оборудовании всегда поддерживаются в определенных пределах постоянными.

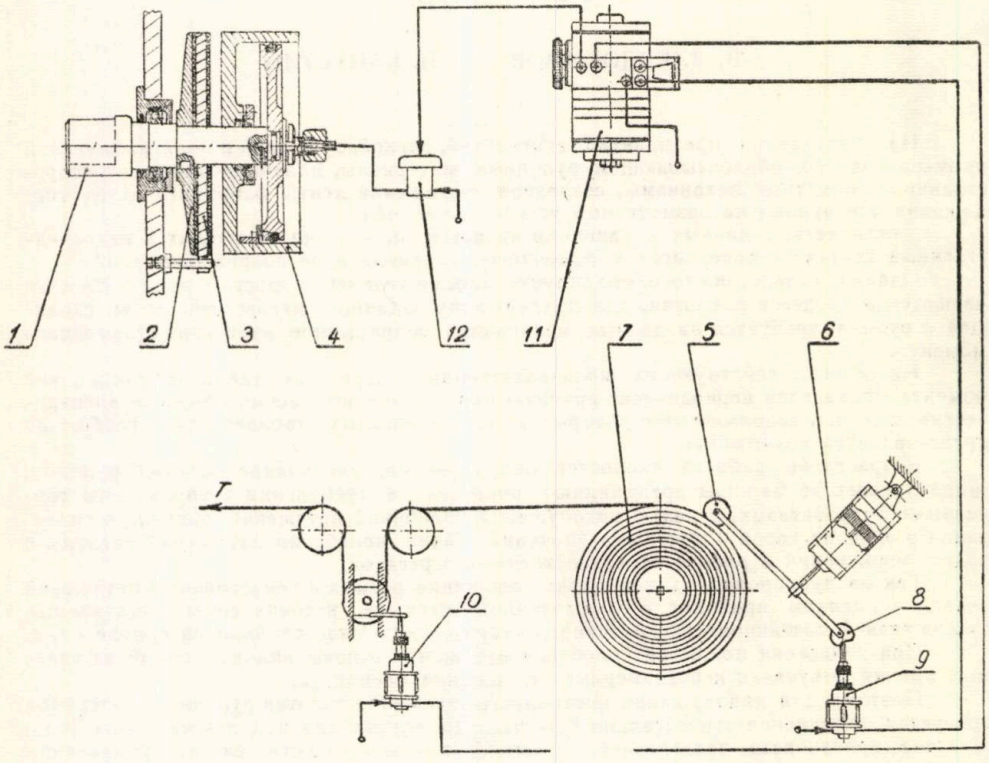


Рис. 1

Рассматриваемая система управления тормозом приведена нами на схеме по рис. 1. Тормозной механизм состоит из шпинделя *1*, соединяющегося с осью рулона, дисков *2* и *4*, установленных на шпонках и неподвижно закрепленного тормозного диска *3*. Диск *4* выполнен в

форме пневмоцилиндра; при подаче сжатого воздуха в его рабочую полость через отверстие в шпинделе *1*, все три диска сжимаются и возникает тормозной момент M_T определяемый выражением:

$$M_T = F_{\text{тр}} r_{\text{ср}}, \tag{1}$$

где: $r_{\text{ср}}$ — средний радиус тормозных дисков, $F_{\text{тр}}$ — сила трения между дисками, которая может быть принята равной:

$$F_{\text{тр}} = fQ, \tag{2}$$

f — коэффициент трения между дисками, Q — усилие пневмоцилиндра,

$$Q = pS, \tag{3}$$

p — давление воздуха в цилиндре, S — площадь поршня.

Тогда:

$$M_T = fr_{\text{ср}} Sp. \tag{4}$$

Считая в определенных пределах изменения Q:

$$fr_{\text{ср}} S = K = \text{const.}, \tag{5}$$

получим:

$$M_T = Kp. \tag{6}$$

Из уравнения (6) следует, что у данного механизма тормозной момент меняется прямо-пропорционально давлению воздуха под поршнем пневмопривода, регулируя которое можно изменять момент в заданных значениях.

Регулирование давления осуществляется следующим образом: щуп *5*, выполненный в форме рычагов с вращающимся роликом, под действием пневмопривода *6* непрерывно прижимается к разматываемому рулону. По мере изменения диаметра рулона он поворачивается, в результате чего совершает поворот кулачок *8*, изменяющий соответствующим образом давление воздуха в задатчике *9*. Фактическое натяжение контролируется датчиком обратной связи *10*. По полученным сигналам от датчиков *9* и *10* регулирующий блок *11* изменяет давление воздуха в пневмоприводе тормоза. Сигнал, поступающий от блока *11* усиливается в пневмоусилителе *12*.

Когда не требуется весьма точного регулирования и визуального контроля за натяжением ленты, система обратной связи (датчик *10*) и изодромный регулирующий блок *11* могут не применяться. В этом случае расчетная методика программы управления тормозным механизмом остается без изменения. Расчет программы управления заключается в определении соответствующего профиля кулачка *8*. Профиль кулачка *8* выполняется таким образом, чтобы момент торможения в каждый данный момент размотки рулона определялся уравнением:

(7) $$M_T = M_p + M_{\text{дин}} - M_{m.o.};$$

M_p — рабочий момент, определяемый по формуле:

(8) $$M_p = TR_j,$$

R_j — радиус рулона в данный момент его размотки, T — заданное натяжение материала, $M_{m.o.}$ — момент торможения, создаваемый силами трения в опорах размоточного механизма, при скользящих опорах:

(9) $$M_{m.o.} = \frac{\zeta d}{2}(\overline{G} + \overline{T}),$$

$\overline{G}$ — вектор силы тяжести рулона и гильзы, на которую наматывается ткань, $\overline{T}$ — вектор силы натяжения ленты, ζ — коэффициент трения в опорах, d — диаметр вала в опоре, G — вес вращающейся системы, определяется по уравнению:

(10) $$G = G_r + G_p,$$

G_r — вес гильзы, G_p — вес рулона:

(11) $$G_p = xBL,$$

x — вес 1 кв.м рулонного материала, B — ширина материала, L — метраж ткани в рулоне.

Из выражения $\delta L = \pi(R^2 - r_0^2)$ найдем:

(12) $$L = \frac{\pi}{\delta}(R_j^2 - r_0^2),$$

где: δ — толщина рулонного материала, r_0 — радиус гильзы, на которую наматывается ткань

(13) $$G_p = \frac{x\pi}{\delta} B(R_j^2 - r_0^2).$$

Из выражения (13) видно, что момент $M_{m.o.}$ будет изменяться с изменением радиуса намотки.

$M_{\text{дин}}$ — момент, возникающий от изменения массы, момента инерции рулона и его угловой скорости.

Закон изменения момента $M_{\text{дин}}$ можно определить из уравнения Лагранжа второго рода:

(14) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial E}{\partial \varphi} = P_\varphi,$$

где: P_φ — обобщенная сила (в нашем случае за P_φ принимаем $M_{\text{дин}}$), φ — обобщенная координата (угол поворота рулона), E — кинетическая энергия размоточного устройства, определяемая по формуле:

(15) $$E = \frac{1}{2} I_z \dot{\varphi}^2,$$

где: $\dot{\varphi} = \omega$ — угловая скорость рулона, I_z — момент инерции размоточной системы:

(16) $$I_z = I_{z_p} + I_{z_г},$$

где: $I_{z_г}$ — момент инерции гильзы:

(17) $$I_{z_г} \cong \frac{G_г}{2g} r_0^2,$$

I_{z_p} — момент инерции рулона

(18) $$I_{z_p} = \frac{Gp}{g} \cdot \frac{R_j^2 + r_0^2}{2} = \frac{\pi x B}{\delta g} (R_j^4 - r_0^4).$$

Вычислим производную от кинетической энергии по обобщенной скорости:

(19) $$\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}} = I_z \dot{\varphi},$$

Для выражения (16) находим производную по времени и в результате получим следующее выражение для одной части уравнения Лагранжа:

(20) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}} = I_z \ddot{\varphi} = I_z \varepsilon;$$

$\ddot{\varphi} = \varepsilon$ — угловое ускорение рулона.

Угловое ускорение определяется уравнением:

(21) $$\varepsilon = \frac{\omega_0 - \omega_j}{t},$$

где ω_0 — угловая скорость гильзы в момент полной размотки рулона.

Как уже указывалось технологические машины снабжаются устройствами, обеспечивающими постоянную линейную скорость перемещения рулонного материала, т. е. $v = \text{const}$. Тогда можем записать:

(22) $$\omega_0 = \frac{v}{r_0};$$

ω_j — угловая скорость рулона при радиусе намотки R_j:

(23) $$\omega_j = \frac{v}{R_j},$$

t — время размотки ткани:

$$t = \frac{L_j}{v},$$

L_j — количество ткани, размотанное за время t,

(25) $$L_j = \frac{\pi}{\delta}(R_j^2 - r_0^2).$$

Подставляя значения величин по формулам (22)...(25) в выражение (21) получим уравнение, выражающее зависимость углового ускорения рулона от радиуса намотки.

(26) $$\varepsilon = \frac{\delta v^2}{\pi} \cdot \frac{1}{R_{j_0} r (R_j + r_0)}.$$

Для определения выражения $\partial E/\partial\varphi$ в уравнении Лагранжа запишем формулу кинетической энергии в следующем виде, учитывая формулу

(27) $$E = \frac{\pi x B}{2\delta g}(R_j^4 - r_0^4)\dot{\varphi}^2, \quad R_j = R - \frac{\delta}{2\pi}\varphi,$$

где: R — начальный радиус размотки рулона, φ — угол поворота рулона при смотке материала с радиуса R до R_j; мы получим

(28) $$E = \frac{\pi x B}{2\delta g}\left[\left(R - \frac{\delta}{2\pi}\varphi\right)^4 - r_0^4\right]\dot{\varphi}^2.$$

Находим частную производную по φ

(29) $$\frac{\partial E}{\partial \varphi} = -\frac{xB}{g} R_j^3 \dot{\varphi}^2;$$

т. к. $\dot{\varphi} = \omega_j = v/R_j$ получим:

(30) $$\frac{\partial E}{\partial \varphi} = -\frac{xB}{g} v^2 R_j.$$

Тогда уравнение (14) можем записать в следующем виде:

(31) $$M_{\text{дин}} = I_z \varepsilon + \frac{xB}{g} v^2 R_j.$$

Уравнение (7), после подстановки полученных значений величин, получит следующее выражение:

$$M_T = TR_j + \left[\frac{\pi x B}{\delta g}(R_j^4 - r_0^4) + \frac{G_2}{2g} r_0^2\right] \frac{\delta v^2}{\pi} \cdot \frac{1}{R_j r_0 (R_j + r_0)} + \tag{32}$$
$$+ \frac{xB}{g} v^2 R_j - M_{m.o.}.$$

С помощью уравнения (32) определяются моменты торможения для ряда значений радиуса намотки, по которым строится график $M_T = f(R_j)$. Величина $M_{m.o}$ в формуле (32) определяется по формулам (9) и (13). На основе построенного графика $M_T = f(R_j)$ и характеристики „перемещение щупа — выходное давление сжатого воздуха" пневмопреобразователя (задатчика *9*) проектируется профиль кулачка *8* (рис. 1) с таким расчетом, чтобы от его воздействия в пневмоприводе тормоза давление воздуха определялось выражением:

$$P_{R_j} = \frac{M_{T_{R_j}}}{K}, \tag{33}$$

где: $M_{T_{R_j}}$ — момент торможения рулона, определенный для значения радиуса его намотки, P_{R_j} — давление воздуха в пневмоприводе в данный момент размотки рулона (при радиусе R_j), K — коэффициент определяемый по формуле (6) или экспериментально.

Поддержание в пневмоприводе тормозного механизма давления воздуха в соответствии с формулой (33) обеспечит постоянное натяжение ленты, сходящей с разматываемого рулона.

Из расчетной схемы видно, что постоянные характеристики системы, а именно K, ζ и другие в процессе эксплуатации устройства должны поддерживаться в заданных значениях.

Выводы

1. На основе проведенного анализа предложена пневматическая система управления тормозными механизмами размоточных устройств, работающая по результатам контроля радиуса рулона и фактического натяжения обрабатываемой ленты, сходящей с этого рулона.

2. Приведена усовершенствованная конструкция механизма для торможения оси разматываемых рулонов, приспособленного для управления пневматической системой.

3. Разработан графоаналитический метод расчета программы управления тормозными механизмами, обеспечивающей постоянное натяжение ленты при постоянной линейной скорости размотки рулона.

4. Получены формулы для определения момента торможения, момента инерции и углового ускорения рулона в функции его радиуса (форм. (32), (26), (18)), при постоянной линейной размотки.

Поступила 4 XII 1967 г.

Всесоюзный заочный институт текстильной и легкой промышленности, Москва, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Тюрин А. А., *Конструкция и расчет полиграфических машин.* Книга **IV**, Изд. Искусство, М., 1954.
2. Евдокимов В. В., Капустин И. И., *О точности нанесения пленочных покрытий на поверхность текстильных материалов.* Изв. Вузов „Технология легкой промышленности", 1966, *1.*
3. Куликов Б. В., *Исследование динамики рулона в ротационных печатных машинах.* Автореферат диссертации на соискание ученой степени к. т. н., 1952.
4. Езикашвили В. О., Тр. Груз. полит. ин-та, 1965, *3.*
5. Капустин И. И., Ильинский Д. Я., *Вопросы оптимального проектирования автооператоров технологических машин и линий.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1968, **XIV (XVIII)**, *1–2.*

SISTEME PNEUMATICE DE REGLARE A MECANISMELDR DE FRÎNARE A DISPOZITIVELOR DE DESFĂŞURARE DE PE RULOURI

(Rezumat)

Se propune un sistem de reglare a mecanismelor de frînare a dispozitivelor de desfăşurare de pe rulouri. Sistemul de reglare funcţionează pe baza controlului razei ruloului precum şi a tensiunii panglicii de prelucrat ce se desfăşoară de pe ruloul considerat.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

УДК 677.6

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗДУХОПРОНИЦАЕМОСТИ БЕЛЬЕВОГО ТРИКОТАЖА

Б. СЕМАК

Одним из основных требований, предъявляемых к бельевым трикотажным изделиям с точки зрения гигиеничности, является их высокая воздухо- и паропроницаемость. Это объясняется тем, что телом человека вследствие кожного дыхания выделяется много воды и газообразных продуктов, которые оказывают вредное влияние на организм человека. Интенсивность кожного дыхания, а следовательно, и скорость накопления газообразных продуктов резко возрастает с повышением температуры, т. е. в летний период. Поэтому трикотажные полотна, предназначенные для бельевых и летних изделий, должны беспрепятственно пропускать через свои поры все газообразные кожные выделения.

В настоящей работе мы задались целью дать сравнительную характеристику воздухопроницаемости бельевых двухгребеночных основовязаных полотен разного волокнистого состава, а также выяснить, какое влияние на изменение воздухопроницаемости исследуемых полотен оказывает длительная инсоляция в сочетании с повторными стирками, т. е. условия, близкие к реальному износу.

Опытные образцы полотен вязались на основовязальной машине SK-54 26 класса переплетением трико-сукно. При выработке образцов *1*, *3*, *4* и *9* в обеих гребенках (см. таблицу 1) применялись вискозные, диацетатные, капроновые и триацетатные нити; при выработке образцов *2*, *5* и *7* первая гребенка была заправлена вискозными нитями, а вторая соответственно диацетатными, капроновыми и триацетатными нитями, в образцах *6* и *8* первая гребенка заправлялась диацетатными нитями, а вторая капроновыми и триацетатными. Все образцы были отбелены перекисным способом.

Выбор исследуемых полотен объясняется тем, что диацетатные и триацетатные комплексные нити находят в последнее время все более широкое применение при производстве бельевых трикотажных изделий. При этом они применяются как в чистом виде, так и в различных сочетаниях с вискозными, капроновыми и другими нитями, а изделия с применением диацетатных и триацетатных нитей обладают меньшей

Таблица 1

Характеристика заправочных данных и некоторых физических свойств исследуемых полотен

Исследуемые показатели	Вид и толщина — применяемых нитей								
	ВШ 11,1 Т / ВШ 11,1 Т	ВШ 11,1 Т / АцШ 11,1 Т	АцШ 11,1 Т / АцШ 11,1 Т	КШ 6,67 Т / КШ 6,67 Т	ВШ 11,1 Т / КШ 6,67 Т	АцШ 11,1 Т / КШ 6,67 Т	ВШ 11,1 Т / ТрАцШ 11,1 Т	АцШ 11,1 Т / ТрАцШ 11,1 Т	ТрАцШ 11,1 Т / ТрАцШ 11,1 Т
	Обр. *1*	Обр. *2*	Обр. *3*	Обр. *4*	Обр. *5*	Обр. *6*	Обр. *7*	Обр. *8*	Об р. *9*
Масса 1 м² по отен [г] [1].	164 / 200	166 / 178	167 / 176	141 / 149	140 / 158	142 / 167	211 / 197	202 / 196	176 / 202
Толщина полотен [мм].	0,37 / 0,45	0,35 / 0,37	0,36 / 0,36	0,33 / 0,36	0,32 / 0,36	0,30 / 0,34	0,40 / 0,42	0,41 / 0,41	0,39 / 0,39
Плотность (число петель на 50 мм) по вертикали.	89 / 97	87 / 84	88 / 92	122 / 123	92 / 85	88 / 102	85 / 83	91 / 81	85 / 95
Плотность (число петель на 50 мм) по горизонтали.	65 / 72	69 / 64	69 / 77	75 / 76	66 / 73	81 / 76	84 / 81	79 / 81	70 / 72
Воздухопроницаемость [л/м² сек].	1 127 / 757	1 107 / 693	1 045 / 686	1 016 / 672	1 145 / 700	1 047 / 525	778 / 657	767 / 695	1 040 / 610
Снижение воздухопроницаемости образцами после 225 000 УДО и 9-ти стирок [%].	32,9	37,4	34,4	33,9	38,9	49,9	15,6	9,4	41,4

[1]) в числителе показаны показатели образцов полотен до инсоляции и стирок, а в знаменателе — после 225 000 УДО и 9-ти стирок.

усадкой и сминаемостью, лучше сохраняют прочность после увлажнения и замочки, являются более формоустойчивыми, меньше повреждаются под воздействием светопогоды и стирок и т. д. Производство указанных нитей по сравнению с вискозными имеет значительные экономические преимущества.

Инсоляция и промежуточные стирки исследуемых полотен производились по ранее описанной методике [1]. Продолжительность периодов инсоляции в УДО и часах, а также соответствующее количество стирок инсолируемых образцов приведенно ниже:

Периоды инсоляции	I	II	III	Всего
УДО	75 000	75 000	75 000	225 000
Часы	234	232	246	772
Количество стирок в каждом периоде	3	3	3	9

Определение воздухопроницаемости образцов производилось на приборе УПВ-1. При исследовании были избраны следующие параметры работы прибора УПВ-1: а) избыточное давление по одну сторону образца — 5 мм вод. ст.; б) площадь рабочего отверстия — 0,001 м²; в) время испытания — 50 сек; г) усилие прижима образцов к столику — 15 кг.

Отобранные обрацы полотен размером 40 × 40 см перед испытанием выдерживались в стандартных условиях в течение 24 час. На каждом образце производилось по 10 замеров воздухопроницаемости в разных местах по диагонали. Гарантийная ошибка находилась в пределах 4...8%.

Полученные результаты определения толщины, плотности и воздухопроницаемости исследуемых полотен до и после инсоляции и стирок приведены в таблице 1.

Из анализа данных таблицы следует, что под комплексным воздействием инсоляции и стирок, т. е. при моделированном износе показатели структуры и свойств исследуемых полотен претерпевают изменения, оказывающие существенное влияние не только на долговечность и внешний вид изделий, но и их пригодность с точки зрения гигиены. Поэтому при выработке новых видов полотен и прогнозировании их поведения в реальных условиях носки одежды, как показали наши исследования, недостаточно только принимать во внимание показатели, характеризующие структуру и свойства новых материалов.

В настоящей работе нами дается только сравнительная характеристика воздухопроннцаемости новых и изношенных полотен[1]) и неко-

[1]) После 3-х периодов инсоляций и 9-ти стирок исследуемые полотна в среднем понижают свою прочность и устойчивость к истиранию на 50...90%.

торых структурных показателей, существенно влияющих на нее. При этом показатель воздухопроницаемости используется в двояком смысле: как показатель, используемый для оценки гигиеничности полотен, и как показатель, характеризующий структурные изменения, происходящие в полотнах в условиях моделированного износа.

Как следует из данных таблицы, исследуемые полотна до инсоляции и стирок характеризуются высокой воздухопроницаемостью и величина ее практически не зависит от природы волокнистого состава применяемых нитей. Так, разница в показателях воздухопроницаемости образцов *1*, *3* и *9* (образцы сравнимой структуры) находится в пределах 87 г/м² сек, т. е. в пределах 5...10%.

Значительно меньшую воздухопроницаемость образцов *7* и *8* по сравнению с другими исследуемыми полотнами следует объяснить при прочих равных условиях, более высокой их плотностью и толщиной.

Замечено также, что введение в двухгребеночных вискозных и ацетатных полотнах взамен одной из вискозных или ацетатных основ капроновых комплексных нитей меньшей толщины не оказывает какого-либо заметного влияния на изменение воздухопроницаемости этих полотен. Даже полотна из чистокапроновых нитей (обр. *4*), выработанные из более тонких нитей, а следовательно, обладающие меньшей толщиной и большей плотностью сравнительно мало отличаются своей воздухопроницаемостью от других исследуемых полотен.

Далее установлено, что длительная инсоляция в сочетании с повторными стирками приводит к существенным изменениям элементов структуры исследуемых полотен, а также их воздухопроницаемости. После 3-х периодов инсоляции и 9-ти промежуточных стирок в исследуемых образцах значительно изменяется плотность, толщина, а следовательно, и масса 1 м² полотен. Величина и характер этих изменений обусловливается, с одной стороны, природой волокнистого состава образцов, а с другой, — длительностью инсоляции и количеством стирок.

Следует подчеркнуть, что вследствие изменения плотности и толщины полотен, а следовательно, с изменением количества, размеров и формы пор в этих полотнах, в результате моделированного износа происходит значительное снижение воздухопроницаемости.

Полученные данные позволяют сделать следующие общие выводы:

1. Величина воздухопроницаемости бельевых двухгребеночных трикотажных полотен не зависит от их волокнистого состава.

2. Под комплексным воздействием инсоляции и стирок происходит значительное изменение элементов структуры полотен: повышается их плотность, толщина и масса 1 м². Величина этих изменений определяется природой волокнистого состава полотен.

3. В условиях моделированного износа полотен вследствие изменения их структуры происходит значительное (до 40...50%) снижение

воздухопроницаемости полотен, что приводит к заметному снижению их гигиеничности.

4. Показатель воздухопроницаемости полотен в процессе износа изделий характеризует не только изменение их гигиенических свойств, но может быть использован для оценки изменения элементов структуры полотен в условиях износа.

5. Прогнозирование о поведении изделий из новых видов полотен в реальных условиях изнашивания должно базироваться на данных, полученных не только при исследовании новых полотен, но данных, характеризующих изменение свойств этих материалов в процессе носки.

Поступила 27 III 1968 г.

Львовский торгово-экономический институт, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Семак Б. Д., *Исследование изменений прочности платьевых тканей разного волокнистого состава.* Изв. вузов „Технология легкой промышленности", 1964, *3.*

STUDIUL PERMEABILITĂŢII FAŢĂ DE AER A TRICOTAJELOR DE LINGERIE

(Rezumat)

Se stabilesc un număr de rezultate privitoare la permeabilitatea faţă de aer a tricotaelor de lengerie.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

C. Z. 685

CONTRIBUŢII LA STUDIUL FORMĂRII SPAŢIALE A UNOR MATERIALE ELASTO-PLASTICE

DE

VOINEA COCIU, N. ROMAN şi VALERIU TIGAN

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 28—30 septembrie 1967

1. Introducere

Obţinerea detaliilor spaţiale, folosind detalii plane, prin producerea unor deformaţii plastice, reprezintă o problemă curentă a industriei produselor din piele şi înlocuitori. Caracterul şi mărimea deformaţiilor sînt legate direct de forma spaţială ce se urmăreşte să se obţină [1] şi de caracteristicile mecanice şi geometrice ale detaliilor supuse acestui proces.

În cazul materialelor rigide — talpă, carton, talpă artificială etc. —, deformaţiile care conduc la obţinerea formei spaţiale au loc în urma unui ansamblu de solicitări — încovoiere, întindere, compresiune — în matriţe metalice, a căror formă şi dimensiuni sînt apropiate de cele ale detaliului format spaţial. S-a ajuns la această soluţie ţinînd seama de faptul că materialele elasto-plastice supuse procesului de deformare spaţială prin solicitări diferite (caracter şi intensitate) ,se comportă atît plastic cît şi elastic ; o astfel de comportare fiind generală pentru materialele arătate, în practica industrială se pune problema unei corecte dimensionări a matriţelor, astfel încît, după formare, prin anularea deformaţiilor elastice, detaliul format spaţial să aibă forma şi dimensiunile necesare.

Notînd una din dimensiunile detaliului format spaţial cu D_d şi aceeaşi dimensiune a matriţei de formare cu D_m, raportul dintre cele două valori :

$$\frac{D_m}{D_d} = I_f, \tag{1}$$

poate fi considerat ca un indice de formare. Valoarea acestui indice este diferită de unitate, datorită manifestării, concomitet, atît a deformaţiilor plastice, cît şi a celor elastice, în procesul formării spaţiale.

Plecînd de la relaţia dintre deformaţiile relative în cazul unei epruvete din material elasto-plastic [2]

$$\varepsilon_t = \varepsilon_r + \varepsilon_{ei} + \varepsilon_{et}, \tag{2}$$

se pune problema unei astfel de dimensionări a matriţei, încît după anularea celor două deformaţii elastice (ε_{ei} — deformaţia elastică

instantanee şi ε_{et} — deformaţia elastică întîrziată) detaliul, avînd în procesul deformării dimensiunea D_m, să ajungă la dimensiunea D_d; aceasta este posibil dacă între cele două dimensiuni există relaţia:

$$D_m = D_d(1 - \varepsilon_e), \tag{3}$$

în care s-a notat cu ε_e suma celor două deformaţii elastice relative.

Înlocuind această mărime în relaţia (1) se obţine

$$I_f = \frac{D_d(1 - \varepsilon_e)}{D_d} = 1 - \varepsilon_e. \tag{4}$$

În cazul detaliilor spaţiale destinate producerii în serie a încălţămintei, problema obţinerii unor forme şi dimensiuni precise capătă o importanţă deosebită, dat fiind tendinţele de asamblare pe bază de detalii prefabricate, de mecanizare complexă şi de automatizare a proceselor tehnologice.

Cunoaşterea influenţei parametrilor tehnologici şi folosirea corespunzătoare a acestora contribuie la stabilirea unor indici de formare de natură să permită proiectarea judicioasă a matriţelor folosite la formarea spaţială a detaliilor rigide.

2. Metode de cercetare

Formele spaţiale întîlnite în industria produselor din piele au o mare complexitate, care nu permite asimilarea lor cu poliedrele regulate; totuşi, pe porţiuni reduse, se poate constata existenţa unor forme spaţiale ce se aseamănă cu calote sferice, cilindri, sau unghiuri diedre, de mărime diferită, fapt care permite referirea la aceste forme.

Obţinerea unor detalii spaţiale, care să aibă pe porţiuni limitate astfel de forme, este posibilă în cazul unor solicitări complexe de natură să determine alungiri, încovoieri, comprimări, îndoiri, pe porţiuni învecinate.

Proiectarea unor astfel de matriţe care să permită realizarea formelor spaţiale complexe, folosind relaţia (3), necesită cunoaşterea indicilor de formare pentru formele arătate şi o metodă de construcţie geometrică. Lucrarea de faţă are ca scop să rezolve prima parte a problemei — stabilirea indicilor de formare pentru materialele folosite curent în industrie.

Pentru aceasta, ţinînd seama de formele spaţiale întîlnite şi de tehnologia formării, s-au ales ca parametri ce pot influenţa procesul formării următorii: forma spaţială şi dimensiunile matriţei, presiunea, umiditatea materialului, natura materialului.

1° Forma şi dimensiunile matriţei: a) calotă sferică, cu diametrul cercului de bază 49 şi 66,4 mm; b) semicilindru, cu diametrul de 28, 38 şi 48 mm; c) unghi diedru cu deschiderea de 90°, 100° şi 110°; d) distanţa între cele două părţi ale matriţei 2 mm.

2° Umiditatea materialului : a) umiditatea de echilibru pentru $\varphi = 65\%$; b) umiditatea de echilibru după cufundare în apă 2 min și păstrare 24 ore în atmosferă cu $\varphi = 100\%$; c) umiditatea de echilibru după cufundare în apă 2 ore și păstrare 24 ore în atmosferă cu $\varphi = 100\%$.

3° Presiunea : s-a folosit o presă hidraulică la presiunile de 100, 200, 300 kgf/cm^2.

4° Natura materialului : talpă artificială pe bază de fibre de piele (indigenă), talpă artificială pe bază de alfaceluloză (texon), talpă poale, talpă gît.

5° Timp de presare : 30 secunde.

Măsurătorile s-au efectuat la 24 ore după scoaterea epruvetelor din matriță. Rezultatele obținute au fost comparate folosind ca dimensiuni de referință dimensiunile matriței. Pe această cale a fost posibilă calcularea indicilor de formare conform definiției date anterior.

Valorile indicilor obținuți arată o puternică dispersie, fapt care a necesitat gruparea lor, astfel încît să fie posibil să se tragă concluzii valabile.

La grupare, s-a renunțat la separarea valorilor în funcție de dimensiunile matriței și de valoarea comprimării ținînd seama de următoarele considerente :

a) indicele de formare fiind raportul a două dimensiuni, din care una de referință, este independent de valoarea absolută a celor două dimensiuni considerate, el depinzînd numai de raportul dintre ele ;

b) presiunea, ca factor tehnologic, exercită o influență relativ redusă ; ceea ce influențează, în special, procesul formării spațiale este valoarea deformației obținute în matriță ; la aceasta se asociază faptul că pe suprafața unui detaliu introdus în matrița de formare, valoarea presiunii este foarte diferită în funcție de porțiunea considerată.

Reducerea numărului de parametri tehnologici se justifică și prin gruparea rezultatelor, așa cum se arată în tabelul 1, care cuprinde un eșantion de frecvență de repartizare a indicilor de formare pentru talpa artificială indigenă, matriță sferă.

Rezultatele obținute în urma considerării parametrilor tehnologici, reținuți din cei enumerați anterior, au permis să se tragă un ansamblu de concluzii pentru fiecare material.

a) *Talpa artificială indigenă*

Produsul este fabricat de întreprinderea „Dîmbovița", București, din deșeuri de piele defibrate, folosind un liant pe bază de cauciuc natural. Regimurile de condiționare arătate anterior au condus la următoarele umidități : 11,2% ; 21,4% ; 40,1%.

Grupa valorilor indicelui de formare pe clase din 0,02 în 0,02 au permis efectuarea unui calcul statistic, ale cărui concluzii sînt cuprinse în tabelul 2. În afara mediei aritmetice s-a calculat valoarea abaterii

Tabelul 1

Frecvența de repartizare a valorilor indicelui de formare pentru talpa artificială indigenă, matriță-sferă

Umiditate %	Diametrul mm	Presiunea kgf/cm²	Clase de valori ale indicelui de formare				
			0,900...0,919	0,920...0,939	0,940...0,959	0,960...0,979	0,980...0,999
11,2	49	100	3	2			
		200		3	2		
		300	1	2	1	1	
	66,4	100		5			
		200		4	1		
		300		5			
	Total		4	21	4	1	
21,4	49	100				3	2
		200				1	4
		300					5
	66,4	100				4	1
		200				3	2
		300				3	2
	Total					14	16
40,1	49	100			1	2	2
		200				2	3
		300				1	4
	66,4	100			1	4	
		200		1	2	2	
		300		4	1		
	Total			5	5	11	9

Tabelul 2

Talpă artificială indigenă

Umiditatea U %	Felul matriței	Media aritmetică $\overline{X}$	Abaterea medie pătratică σ	Domeniul real de împrăștiere	Domeniul teoretic de împrăștiere $\overline{X} \pm 3\sigma$	Domeniul de încredere $X \pm 1{,}7\sigma$
11,2	sferă	0,930	0,0126	0,910...0,990	0,892...0,968	0,909...0,951
	cilindru	0,600	0,0960	0,450...0,790	0,312...0,888	0,437...0,763
	unghi	0,797	0,0430	0,710...0,890	0,668...0,926	0,724...0,870
21,4	sferă	0,980	0,0100	0,970...0,990	0,950...1,010	0,963...0,997
	cilindru	0,800	0,0632	0,610...0,950	0,610...0,989	0,692...0,908
	unghi	0,870	0,0398	0,790...0,950	0,751...0,987	0,803...0,937
40,1	sferă	0,966	0,0207	0,930...0,990	0,902...1,018	0,931...1,001
	cilindru	0,672	0,0582	0,530...0,970	0,498...0,846	0,573...0,771
	unghi	0,818	0,0327	0,760...0,890	0,710...0,916	0,753...0,883

pătratice medii, domeniul real de împrăștiere, domeniul teoretic pentru $\bar{X} \pm 3\sigma$ și domeniul de încredere pentru $\bar{X} \pm 1{,}7\sigma$.

Din ansamblul valorilor calculate pentru indicele de formare, ce urmează să fie folosite la proiectare, se consideră necesar să se adopte valoarea minimă a domeniului teoretic de împrăștiere obținut prin calculul statistic; aceasta asigură că, în majoritate, indicele practic de formare are valori mai mari decît valoarea adoptată, fapt care conduce la o supraformare, avantajoasă procesului tehnologic, asigurînd o așezare corectă a detaliului în ansamblul detaliilor componente.

Totuși, deoarece domeniul $\pm 3\sigma$ are o valoare mare, s-a pus problema alegerii unui domeniu de încredere care să asigure supraformarea pentru circa 95% din cazurile practice. În acest scop s-a recurs la un domeniu de $\pm 1{,}7\sigma$ care asigură, conform legii lui Gauss-Laplace, 91,08% din cazuri; adăugînd, la aceasta, jumătate din cazurile cuprinse în afara domeniului (respectiv 8,92/2) se ajunge ca 95,54% din cazuri să corespundă unei supraformări; pentru 4,46% din cazuri, la care indicele practic conduce la subformări, problema își găsește soluționarea prin intervenție suplimentară în procesul asamblării.

Datele cuprinse în tabelul 2 au permis construirea diagramelor din fig. 1 ... 4 care permit să se tragă următoarele concluzii:

1° Cel mai restrîns domeniu teoretic de împrăștiere se întîlnește în cazul matriței sferice (fig. 1); acest fapt se poate datora ansamblului de modificări: alungire, contracție, încovoiere pe direcție ra-

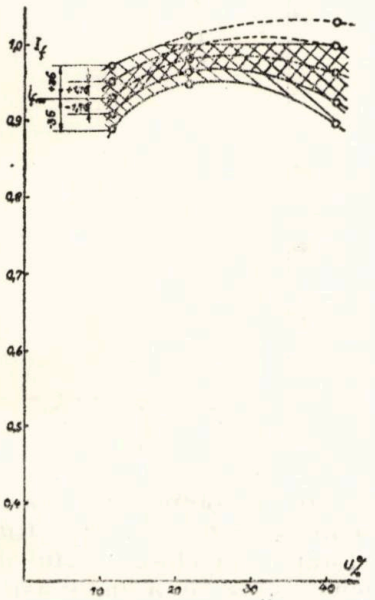


Fig. 1

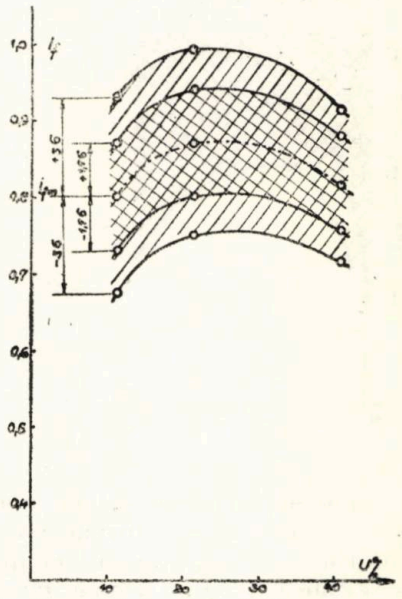


Fig. 2

dială şi pe direcţia paralelelor la cercul ecuatorial [1]; în procesul revenirii din deformare, anularea deformaţiilor se realizează într-o mai mică măsură ca în cazul celorlalte matriţe datorită unor împiedicări spaţiale în ţesutul materialului.

2° Matriţa unghi diedru arată un domeniu teoretic de împrăştiere a valorilor mai mare (fig. 2) însă inferior celui din cazul matriţei cilindrului (fig. 3); în cazul unghiului diedru principala deformare este cea de încovoiere, manifestată local, la originea unghiului; în cazul matriţei cilindru, deformarea este tot de încovoiere, însă se manifestă pe toată suprafaţa matriţei.

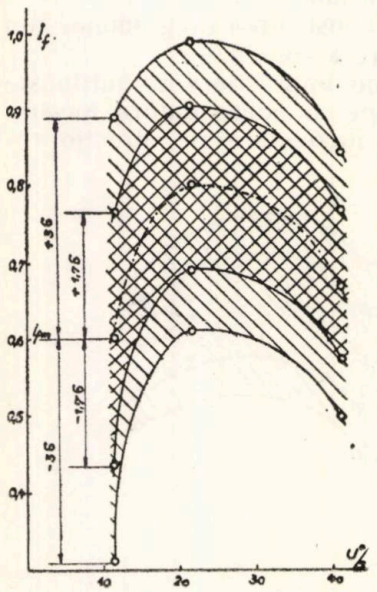


Fig. 3

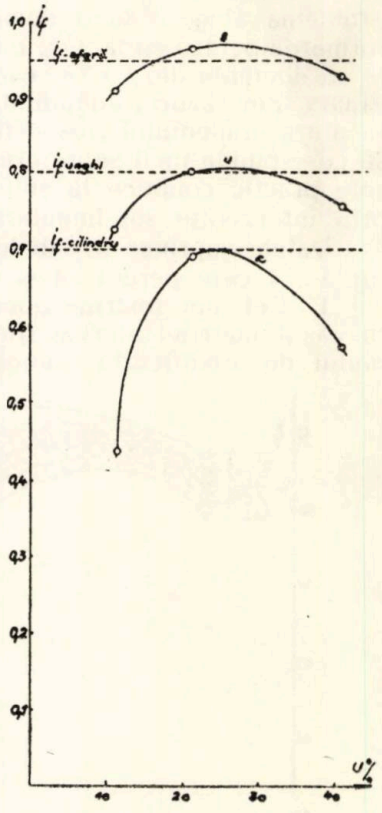


Fig. 4

3° Domeniul de umiditate pentru care se obţin cele mai mari valori ale indicelui de formare este cuprins între 21 ... 26% (fig. 4).

Valorile mai mici ale indicelui de formare în afara acestui domeniu se explică prin mărimea componentei elastice a deformaţiei în cazul umidităţii reduse şi prin existenţa timp îndelungat a umi-

dității, implicit a mobilității țesutului, fapt care permite anularea unei cote mai mari din deformația totală, în timpul celor 24 ore de la formare pînă la măsurare.

Ținînd seama de aceste rezultate pentru formarea spațială a detaliilor din talpă artificială indigenă, produsă după rețeta întreprinderii „Dîmbovița" București, se propun pentru indicele de formare următoarele valori (fig. 4) :

$$I_{fs} = 0{,}95,\ I_{fc} = 0{,}7,\ I_{fu} = 0{,}8.$$

b) *Talpă artificială pe bază de alfaceluloză* (texon)

Produsul folosit este obținut prin legarea cu un liant pe bază de cauciuc sintetic a fibrelor de alfaceluloză. La condiționare, în regimurile arătate, s-au obținut următoarele valori ale umidității : 3,9% ; 13,7% ; 42,7%.

Rezultatele obținute, grupate ca în cazul precedent, au permis calcularea valorilor din tabelul 3.

Tabelul 3

Talpă artificială pe bază de fibre alfacelulozice (texon)

Umiditatea U %	Felul matriței	Media aritmetică $\bar{X}$	Abaterea medie pătratică σ	Domeniul real de împrăștiere	Domeniul teoretic de împrăștiere $\bar{X} \pm 3\sigma$	Domeniul de încredere $\bar{X} \pm 1{,}7\sigma$
3,9	sferă	0,893	0,0218	0,850...0,930	0,828...0,958	0,856...0,930
	cilindru	0,460	0,0490	0,350...0,530	0,313...0,607	0,377...0,543
	unghi	0,754	0,0417	0,690...0,830	0,629...0,879	0,684...0,824
13,7	sferă	0,916	0,0245	0,870...0,970	0,843...0,989	0,875...0,957
	cilindru	0,520	0,0852	0,410...0,670	0,265...0,775	0,375...0,665
	unghi	0,740	0,0247	0,690...0,790	0,666...0,814	0,698...0,782
42,7	sferă	0,907	0,0412	0,850...0,950	0,784...1,030	0,837...0,977
	cilindru	0,348	0,0651	0,250...0,430	0,153...0,543	0,238...0,458
	unghi	0,755	0,0917	0,590...0,890	0,480...1,030	0,600...0,910

Analizînd rezultatele obținute pentru materialele folosite, luînd drept bază de comparație cele corespunzătoare tălpii artificiale, se desprind următoarele concluzii :

1° În cazul texonului limita inferioară a domeniului de încredere se menține la o valoare foarte scăzută. Cele mai mici domenii teoretice de împrăștiere a valorilor se întîlnesc pentru materialul cu umiditate redusă ; umezirea suplimentară nu numai că nu aduce o modificare sensibilă a indicelui ci ducînd la creșterea domeniului de împrăștiere , reduce din precizia tehnologiei de formare. Din analiza datelor

Tabelul 4

Talpă poale

Umiditatea U %	Felul matriței	Media aritmetică $\bar{X}$	Abaterea medie pătratică σ	Domeniul real de împrăștiere	Domeniul teoretic de împrăștiere $\bar{X} \pm 3\sigma$	Domeniul de încredere $\bar{X} \pm 1{,}7\sigma$
12,00	sferă	0,955	0,0137	0,910...0,990	0,914...0,996	0,932...0,978
	cilindru	0,633	0,0922	0,450...0,770	0,357...0,909	0,477...0,789
	unghi	0,784	0,0342	0,670...0,850	0,682...0,886	0,726...0,842
26,4	sferă	0,992	0,0123	0,970...1,030	0,955...1,028	0,971...1,012
	cilindru	0,818	0,0738	0,630...0,990	0,597...1,039	0,683...0,943
	unghi	0,855	0,0436	0,790...0,930	0,718...0,985	0,781...0,929
28,6	sferă	1,000	0,0101	0,970...1,030	0,970...1,030	0,983...1,017
	cilindru	0,815	0,0850	0,570...0,990	0,560...1,070	0,671...0,959
	unghi	0,820	0,0374	0,710...0,890	0,708...0,932	0,767...0,883

Tabelul 5

Talpă gît

Umiditatea U %	Felul matriței	Media aritmetică $\bar{X}$	Abaterea medie pătratică σ	Domeniul real de împrăștiere	Domeniul teoretic de împrăștiere $\bar{X} \pm 3\sigma$	Domeniul da încredere $\bar{X} \pm 1{,}7\sigma$
12,3	sferă	0,934	0,0153	0,890...1,010	0,888...0,979	0,908...0,960
	cilindru	0,674	0,0096	0,330...0,730	0,645...0,703	0,658...0,699
	unghi	0,763	0,0430	0,690...0,870	0,634...0,892	0,684...0,842
23,9	sferă	0,983	0,0092	0,950...1,010	0,956...1,010	0,968...0,998
	cilindru	0,862	0,0557	0,710...0,990	0,697...1,029	0,768...0,956
	unghi	0,846	0,0474	0,730...0,950	0,704...0,988	0,766...0,926
25,8	sferă	1,010	0,0111	0,990...1,050	0,977...1,043	0,991...1,028
	cilindru	0,874	0,0717	0,670...0,990	0,659...1,089	0,752...0,995
	unghi	0,869	0,0367	0,770...0,950	0,759...0,979	0,807...0,931

din fig. 5, care cuprinde limitele inferioare ale domeniului de încredere, se trage concluzia că texonul nu poate fi utilizat pentru obținerea detaliilor spațiale cu forme complexe.

2° În cazul tălpii poale și a tălpii gît, creșterea umidității determină creșterea limitei inferioare a domeniului de încredere, fapt care conduce la un indice de formare cu valoare ridicată, ca în fig. 6 și 7; se remarcă, de asemenea, creșterea domeniului de împrăștiere, fapt care reduce din precizia formării (tabelele 4 și 5). Acest aspect poate fi consecința lipsei de uniformitate a caracteristicilor detaliilor, provenite din diferite părți ale pielii.

3° Indicii de formare acceptați pentru talpa artificială în condițiile arătate își găsesc utilizarea pentru talpa gît și talpa poale (fig. 6 și 7) și nu pentru texon (fig. 5); prin aceasta se înțelege că pe matrița proiectată, folosind indicii arătați, pot fi formate spațial, obținîndu-se rezultate bune, atît talpa gît cît și talpa poale.

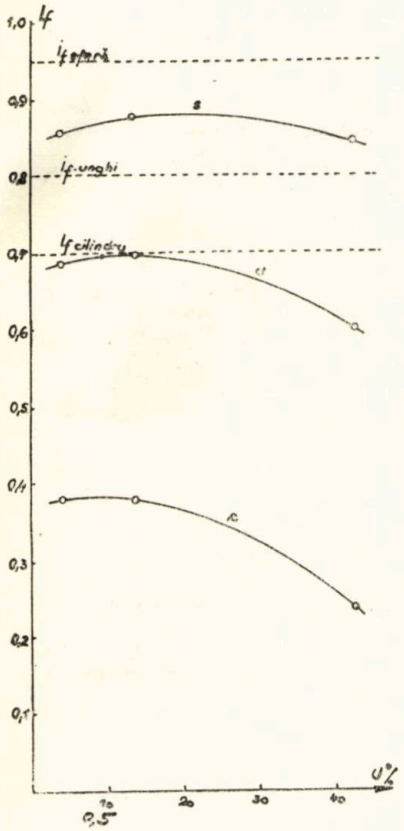


Fig. 5

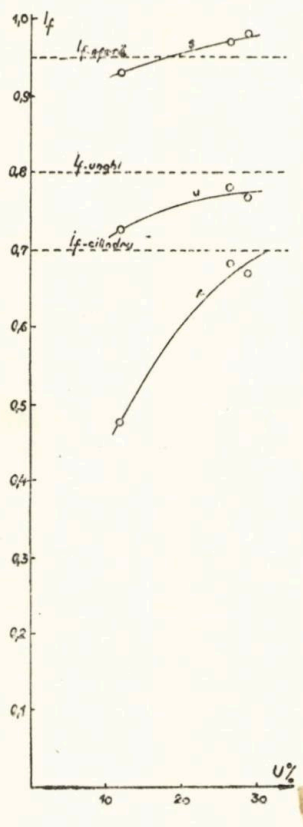


Fig. 6

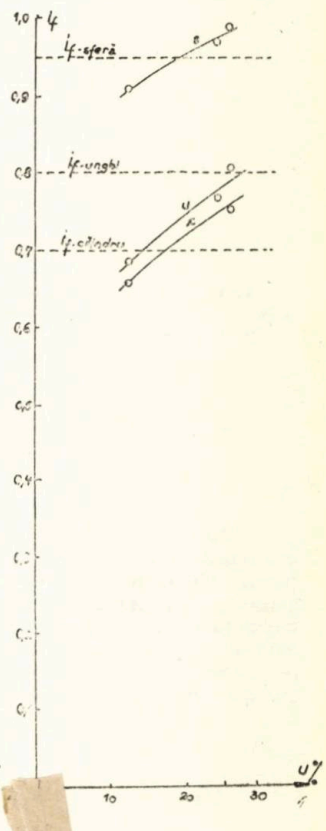


Fig. 7

4° Metoda propusă este posibilă a fi realizată [illegible] procese tehnologice care asigură următoarele umidități: a) talpă artificială indigenă — 21 ... 26%; b) talpă poale — 26 ... 30%; c) talpă gît — 22 ... 26%.

5° Aceste rezultate aparțin materialelor studiate. Pentru alte materiale, anterior utilizării unor indici de formare, la proiectare, va trebui să se recurgă la determinarea diagramelor de deformare folosind metoda de lucru verificată prin această lucrare.

Rezolvarea practică a problemei prezentînd implicații economice, se consideră util să se propună ca la proiectarea matrițelor să se

folosească indicii de formare obţinuţi experimental pentru talpa artificială tip *D*, care are în prezent utilizarea principală la obţinerea detaliilor cu forme spaţiale complexe (ştaif). Utilizarea altui material este posibilă în condiţiile în care acel material poate fi adus prin intervenţii tehnologice în situaţia de a avea indici de formare de aceeaşi valoare ca şi talpa artificială.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de confecţii din piele
şi
Institutul de cercetări cauciuc, piele
şi confecţii din mase plastice,
Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. Cociu V., Croitoru D., *Unele aspecte geometrice la formarea spaţială a feţelor în procesul de tragere pe calapod.* Ind. Uşoară, 1968, **15**, *1*, pp. 17—21.
2. **Cociu** V., *Tehnologia confecţiilor din piele.* E.D.P., Buc., 1965, pp. 241—271.

АСПЕКТЫ ОБЪЕМНОГО ФОРМОВАНИЯ НЕКОТОРЫХ ЭЛАСТО-ПЛАСТИЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ

(Резюме)

Исходя из того, что для эласто-пластичных материалов в процессе объемного формования имеют место деформации как эластичные так и пластичные, в данной работе изучается их изменение при разными условиями, с целью вычисления коэффициента формования, позволяющего проектированию матриц. В качестве материалов изучались: синтетический картон на основе кожаных волокон, то же на основе целлюлозных волокон и кожа красного дубления. Статистическая обработка полученных результатов дала возможность вычислять коэффициенты для сферы, цилиндра и диэдра, нужные при проектировании матриц.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

RECENZII РЕЦЕНЗИИ
BOOK REVIEWS COMPTES RENDUS
BUCHBESPRECHUNGEN RECENSIONI
ANALISIS DE OBRAS

1. WÖRLE H., *Lehrbuch der Mathematik für Ingenieurschulen.* Band I. *Planimetrie. Stereometrie. Arithmetik. Komplexe Zahlen. Algebra. Ebene Trigonometrie.* R. Oldenbourg Verlag, München, 1966, 376 S.

Problema elaborării unor cărți adecvate pentru facultățile de subingineri este o problemă la ordinea zilei în diferite țări înaintate. Autorul, pornind de la principiul că matematica pentru subingineri constituie și va constitui și în viitor doar o știință auxiliară, socoate util să expună în volumul recenzat și în alte trei volume ale sale din aceeași serie și cu același titlu generic de *Manual de Matematică pentru facultăți de subingineri* un *vast* număr de cunoștințe, fără a insista însă în mod deliberat asupra justificărilor teoretice ceva mai complicate. În schimb fiecare capitol se încheie cu numeroase exerciții și probleme, bine ilustrate, prevăzute cu mersul calculelor sau cel puțin cu răspunsuri. Subdiviziunile primului volum sînt: 1. Planimetrie (pp. 9-86); 2. Stereometrie (pp. 87-123); 3. Aritmetică (pp. 124-196); 4. Numere complexe (pp. 197-230); 5. Algebră (pp. 231-299); Trigonometrie plană (pp. 300-368) și Indice de materii (pp. 369—374).

Conținutul volumului II este consacrat metodelor de calcul numeric, calculului erorilor și calculului probalităților, problemelor fundamentale de algebră liniară, mecanicii liniare a vibrațiilor și trigonometriei sferice. În volumul III urmează expunerea geometriei analitice și a calculului diferențial, iar în volumul IV a calculului integral și a ecuațiilor diferențiale.

Expunerea este deosebit de clară, figurile sînt bine gîndite și bine reproduse. Rezultatele principale sînt scoase în relief, fiind tipărite cu caractere aldine. Problemele și exercițiile propuse sînt prevăzute cel puțin cu răspunsuri. Indicele de materii este îngrijit și îndeajuns de vast.

Referentul socoate utilă traducerea volumelor redactate de prof. H. Wörle. Ele vor constitui un punct de plecare pînă la apariția unor manuale pentru subingineri datorite autorilor români.

D. Mangeron

2. BRINKMANN H. B., PUPPE D., *Kategorien und Funktoren.* Lecture Notes in Mathematics, 18, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1966, XII+107 S.

Volumul recenzat face parte din seria de volume de informație ce se publică de către editura științifică Julius Springer aproape imediat după ținerea unor lecții sau seminarii speciale în domeniul Matematicii. Conținutul volumului, completat de E. Brinkmann, cuprinde un șir de lecții ținute de prof. D. Puppe în 1963 la Universitatea din Saarbrücken. Reflectînd contribuții în domeniul teoriei catego-

riilor și a functorilor ale unor somități ca H. Cartan, S. Eilenberg, R. Godement, A. Grothendieck, S. Mac Lane, ale colectivului N. Bourbaki ș.a., autorii prezintă un volum închegat, expunînd într-o sinteză riguroasă ansamblul cunoștințelor în domeniu din acea epocă. Dacă la conținutul volumului, jalonat în capitolele : 1. Logică și Teoria mulțimilor ; 2. Categorii, Dualitate, Functori, Naturalețe ; 3. Functori reprezentabili ; 4. Împlîntări și Identificări ; 5. Produse și Coproduse ; 6. Zeromorfizme ; 7. Adițiune și Coadițiune și 8. Categorii aditive, s-ar adăuga ansamblul rezultatelor, lărgit și adîncit mult în acești cinci ani de numeroase școli, în frunte cu aceea a lui Ch. Ehresmann (a se vedea în această ordine de idei șirul de lucrări publicat de acest autor și de unii din elevii săi în paginile *Buletinului Institutului politehnic din Iași*), s-ar constitui un material capabil să umple un volum de mai multe sute de pagini. Remarcăm în această ordine de idei fructuoase extinderi în jurul noțiunilor de n-categorii și n-functori.

Volumul recenzat este deosebit de util pentru însușirea materialului în acest domeniu, cunoscut acum cinci ani.

L. Ciobanu

3. GHEORGHIEV GH., MIRON R., PAPUC I. DAN, *Geometrie analitică și diferențială*. Vol. I, E.D.P., București, 1968, 454 pp.

Apariția volumului I de geometrie analitică și diferențială este un eveniment important în literatura noastră matematică, pe de o parte pentru că materialul expus a fost verificat atît din punct de vedere științific cît și didactic pe mai multe generații de studenți ai facultății ieșene de matematică, cît și datorită faptului că ea exprimă o parte din activitatea școlii de geometrie din Iași.

Cartea cuprinde două părți : geometria analitică euclidiană (15 capitole) și geometria analitică proiectivă (3 capitole).

În cadrul expunerii se pune inițial accentul pe definiția pur geometrică a noțiunilor și apoi se trece la studiul lor analitic. Procedeul este foarte util pentru cititor, înlesnindu-i lectura prin o imagine intuitivă care-i permite să sesizeze problemele practice care au condus la noțiunile și teoremele expuse, trecerea la abstract fiind naturală. Tratarea materialului primei părți este realizată cu ajutorul calculului vectorial aplicat consecvent în toată expunerea. Încă de la început se aleg notații adecvate pentru a se putea trece la expunerea calculului tensorial. Studiul conicelor și cuadricelor este făcut cu toată rigurozitatea necesară și într-un mod original ; clasificarea lor metrică se face cu ajutorul vectorilor proprii ai unei transformări liniare simetrice, acest material fiind expus complet. Se efectuează inițial studiul algebric al invarianților ortogonali ca apoi să se treacă la caracterizarea centrelor. În partea a II-a se introduce spațiul proiectiv cu 3 dimensiuni, lărgind spațiul euclidian cu elementele improprii. Geometria proiectivă a acestui spațiu e definită în două moduri diferite : axiomatic și cu ajutorul structurii coordonatelor proiective omogene ; se stabilește echivalența celor două definiții. Se introduce apoi geometria proiectivă n-dimensională, folosind coordonatele proiective omogene, ilustrînd astfel faptul că numărul finit al dimensiunilor nu implică nici o schimbare esențială a metodelor de tratare și a rezultatelor din spațiul tridimensional. Se introduc variațiile liniare ale spațiului proiectiv, transformările proiective între două spații proiective și se trece apoi la definiția grupală a geometriei proiective n-dimensionale. Lucrarea se distinge prin rigurozitate, claritate și metodă unitară de tratare a problemelor ; ea aduce un real folos pentru pregătirea studenților din universități și institute tehnice. Fără îndoială, apariția Vol. II va trezi un interes cu totul deosebit în lumea specialiștilor.

* * *

Les référents indiquent ci-dessus, en langue roumaine, nombre de détails concernant l'excellent volume de *Géométrie analytique et différentielle* par MM. Gh. Gheorghiev, R. Miron et Dan Papuc.

Șt. Ruscior, Dan Borș, R. Frangu

4. WERNER H. *Vorlesung über Approximationstheorie.* Lecture Notes in Mathematics, **14,** Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York, 1966, II+196 S.

Dată fiind dezvoltarea vertiginoasă a metodelor de calcul numeric, progresul acestei discipline matematice de actualitate deosebită fiind asigurat și de Contribuția greu de supraevaluat a mașinilor electronice de calcul (MEC), apariția la un interval de numai doi ani a unui alt volum destinat teoriei aproximației, publicat de aceeași editură, este pe deplin justificată.

Spre deosebire de cunoscutul și mult apreciatul volum al lui G. Meinardus *(Approximation von Funktionen und ihre numerische Behandlung,* Springer-Verlag, 1964), volumul recenzat aici se bazează pe numeroase rezultate noi, datorite în parte și autorului volumului, elaborate în perioada 1964—1966. Scopul principal al cărții constă în prezentarea teoriei aproximării în sensul lui Cebîșev, referitoare la funcții continui. Aproximarea polinominală și aceea prin funcții raționale se prezintă tratate laolaltă. Aceasta întrucît ambele conduc la aceleași rezultate calitative în cazul luării în considerație a funcțiilor „normale".

În imposibilitate de a intra în detalii, subliniem în cadrul aproximării în sensul lui Cebîșev expunerea deosebit de clară a problemei discretizării convergentei, a problemei lui Haar și a algoritmilor lui Remes.

În apendice se dă programarea ALGOL a problemei de aproximare rațională în sensul lui Cebîșev.

Literatura, prezentată la zi, cuprinde cel puțin 14 titluri de lucrări noi, care nu au putut fi incluse în volumul lui G. Meinardus.

A. Triandaf ,M. Bercovici

5. SAUER R., SZABÓ I. (ed.), *Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs.* Teil III. *Die Grundlehren der mathmatischen Wissenschaften in Einzeldarstellung.* Bd. **141,** Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York, 1968 XVIII+543 S.

Volumul recenzat constituie partea a III-a dintr-o lucrare vastă în 4 părți, din care a mai apărut partea I-a, părțile II și IV fiind în pregătire.

Scopul întregii lucrări este de a pune la îndemîna inginerilor angajați în cercetarea științifică aparatul matematic de care pot avea nevoie, aparat care se diversifică și completează extrem de repede și care este imposibil de a fi expus în întregime în cursurile universitare. Din această cauză, în expunere accentul cade pe prezentarea conceptelor și principalelor rezultate, iar demonstrațiile sînt în cea mai mare parte omise (cu unele importante excepții, ca de ex. demonstrarea pe mai puțin de două pagini, 343—344, a criteriului lui Korovkin și ca aplicație a teoremei de aproximare a lui Weierstrass în R^n); în schimb se insistă cînd e cazul asupra aspectelor numerice, incluzîndu-se în text rezultatele unor calcule și chiar programarea în ALGOL a diferite probleme. Firește că, în aceste condiții, utilizarea cărții nu poate fi cu adevărat folositoare decît inginerilor foarte bine formați și chiar aceștia ar avea nevoie de lecturi complimentare privitoare la partea care îi interesează și pe care le pot găsi fie în tratate mai elementare fie în monografii specializate.

Bibliografia plasată la sfîrșitul fiecărui capitol este abundentă fără a fi excesivă și, indice de modernitate, este aproape în întregime nouă, în bună parte posterioară anului 1960; cu titlul de curiozitate menționăm citarea unei lucrări neapărute încă dar indicată ca urmînd să apară în scurt timp (p. 446, titlul [27], Ch. Reinsch, *A Note on Trigonometric Interpolation*).

Vastitatea materiei, necesitatea repetării unor termene scurte pentru a îndepărta riscul ca lucrarea să fie învechită încă mai înainte de a fi difuzată și în fine competența inevitabil limitată a oricărui autor, fac ca lucrul în colectiv să fie obligator. Ca urmare fiecare capitol mare formează un tot care în general se poate citi independent de alte capitole, în schimb sînt perceptibile diferențe de stil și ici colo coordonarea este insuficientă : de ex. la pag. 19 se definește vectorul ca element al grupului unui

spațiu vectorial, iar la pag. 114 se definește obișnuitul vector din spațiul tridimensional fără ca între cele două concepte să se stabilească vre-o legătură.

Materialul din cele 4 volume este împărțit în capitole care se notează cu siglele *A,B,C, ... L,M,N.*

In partea a II-a se prezintă următoarele capitole.

F. *Algebra* (autori: F. L. Bauer și J. Stoer), pp. 1—85, cu următoarele paragrafe:

§ 1 Bazele algebrei generale (orientare axiomatică) pp. 1—30;

§ 2 Algebra liniară, (spații liniare și matrici), pp. 33—65;

§ 3 Poziția rădăcinilor și a valorilor proprii în planul complex, pp. 65—85.

G. *Geometrie und Tensorkalkül*, cu două subdiviziuni.

G. I *Geometrie* (autor R. Sauer), cu 10 paragrafe, pp. 86—166.

G. II *Tensorkalkül nebst Anwendungen* (autor: T. P. Angelitch) cu 25 paragrafe, pp. 167—231.

H. *Interpretation und genäherte Quadratur*, (autori: R. Bulirsch, H. Rutishauser), pp. 232—319, cu 7 paragrafe dintre care citățm deosebit de interesantul § 4: *Spline Interpolation*, acest tip de interpolație fiind din unele puncte de vedere mai puternic și mai natural decît interpolarea prin polinoame.

I. *Approximation von Funktionen* cu două părți.

I. 1. *Theoretische Grundlagen* (autor: G. Aumann), pp. 320—351, cu 7 paragrafe.

I. 2 *Darstellung von Funktionen in Rechenautomaten* (autori: R. Bulirsch, J. Stoer), pp. 352—445, cu 7 paragrafe; interesantă și vizibil utilă, reprezentarea funcțiilor prin fracții continue).

J. *Lineare und nichtlineare Optimierung* (autorii: H. P. Künzi), pp. 447—497, cu 10 paragrafe.

K. (Anhang) *Rechenanlagen* (autor: Kl. Samelson), pp. 498—516, cu 3 paragrafe.

Volumul se termină cu un detailat indice de chestiuni (pp. 517—534) și o listă a simbolurilor speciale.

În rezumat, partea a III-a manualului conține un material enorm, expus inteligibil și fără banalități inutile, cu o modernizare moderată în conținut, cu spirit și cu o deosebită atenție acordată proceselor efective de aproximație teoretică și numerică. În viitorul apropiat va fi bine ca volumul să fie consultat de toți aceia care vor avea de determinat conținutul cursurilor matematice de la institutele tehnice de învățămînt superior.

Prof. Al. Climescu

6. TÖLKE FR., *Praktische Funktionenlehre.* Vierter Band, Springer-Verlag, 1967.

Al patrulea volum al acestei monografii conține două capitole (respectiv al zecelea și al unsprezecelea) și tratează integralele eliptice și funcțiile complexe eliptice ale lui Jacobi.

Considerăm că lucrarea cunoscutului profesor inginer Fr. Tölke de la Politehnica din Stuttgart prezintă trei avantaje importante față de alte cărți similare și anume: o ordonare extrem de riguroasă a materialului, condiții grafice rar întîlnite (și acestea nu sînt de loc de neglijat, ținînd seama că o bună parte a lucrării constă din planșe și formule) și mai ales rezolvarea a foarte multor cazuri de integrale ce apar des în practică.

Cititorul va găsi tabele în care se dau integralele funcțiilor ds(z, k), dc(z, k), nc(z, k) etc., integralele din produsul unei funcții eliptice cu pătratul altei funcții, integrale ale unor cîturi de funcții etc.

În partea a doua a acestui volum (capitolul al XI-lea al monografiei) se dau numeroase grafice ale funcțiilor eliptice ale lui Jacobi, pentru diverse valori ale parametrului k. Astfel, se indică fie curbele n=const. sau v=const. din planul Z,

fie curbele $x = \text{const.}$ sau $y = \text{const.}$ din planul W, considerînd bine înțeles că funcția $W = W(Z, k) = n + iv$, iar variabila $z = x + iy$.

Toate reprezentările sînt magistral executate, iar alcătuirea unui astfel de manual presupune o muncă impresionantă și multă experiență.

Pentru lămurirea unor aspecte teoretice în legătură cu chestiunile tratate, cititorul poate consulta cartea *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics* scrisă de W. Magnus, F. Oberhettinger și R. P. Soni, publicată de asemenea de editura Springer în 1966.

Adr. Corduneanu

7. MÜLLER CL., *Spherical Harmonics.* Lecture Notes in Mathematics, **17,** Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1966, IV+45 pp.

Sfera de aplicații în fizică și tehnica înaltă a funcțiilor sferice, prezentate în volumele, devenite repede clasice, datorite lui E. W. Hobson *(The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics,* Cambridge University Press, 1931) sau A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger și F. Tricomi *(Higher Transcendental Functions,* McGraw-Hill, New York, vol. I, II, 1953), se lărgește pe zi ce trece. Autorul prezintă în acest volumaș subțire, din apreciata serie, inițiată recent de editura științifică Julius Springer, *Lecture Notes in Mathematics,* editată de A. Dold (Heidelberg) și B. Eckmann (Zürich), teoria armonicilor sferice regulate într-un număr oarecare de dimensiuni. Se subliniază faptul că autorul reușește să expună întreaga problematică în așa fel încît problema în trei dimensiuni să nu fie separată de aceea în două, ambele probleme fiind privite ca niște cazuri speciale ale unei structuri mai generale. Merită să fie subliniat faptul că autorul reușește să stabilească un mare număr de rezultate luînd ca bază numai simetria sferei. Deosebit de clar se expune teorema de adițiune, reprezentarea printr-o funcție generatoare și completudinea întregului sistem.

M. Bercovici, A. Triandaf

8. * * * *Theory of Thin Shells.* Ed. F. I. Niordson. IUTAM Symposium Copenhagen 1967, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1969, VIII+388 pp.

Volumul conține textul conferințelor și discuțiilor purtate în cadrul celui de al doilea simpozion consacrat teoriei pînzelor subțiri, organizat sub egida Uniunii Internaționale de Mecanică teoretică și aplicată (IUTAM). Scopul reuniunii era acel de a jalona sintetic rezultatele importante obținute în această ordine de idei în intervalul scurs după primul simpozion (1959), precum și de a stimula discuții vii între oameni de știință renumiți cu privire la problematica bazelor teoriei pînzelor subțiri și aplicațiilor practice ale acesteia. Trebuie subliniate îndeosebi contribuțiile referitoare la comportări neelastice și la teorii neliniare. 75 de experți din 15 țări au contribuit din plin la succesul simpozionului.

In imposibilitate de a da aici o analiză cît de succintă a conținutului volumului ref. se mărginește a reproduce din titlurile subiectelor discutate: F. John, *Ecuațiile perfecționate de comportare interioară a pînzelor* (pp. 1—14); E. Reissner, *Bazele teoriei liniare generalizate a pînzelor* (pp. 15—30); A. L. Goldenweizer, *Probleme referitoare la deducerea riguroasă a teoriei pînzelor elastice subțiri* (pp. 31—38); A. E. Green, P. M. Naghdi, *Pînze în lumina continuumurilor generalizate* (pp. 39—58); I. N. Vekua, *Asupra unei prezentări închegate a pînzelor elastice* (pp. 59—84); M. Sh. Mikeladze, *Țelurile și problematica privitoare la teoria tehnică a pînzelor plastice subțiri* (pp. 85—92); W. T. Koiter, *Trecere în revistă a progreselor recente în domeniul ecuațiilor de bază din teoria pînzelor,* M. Mișicu, *Teoria pînzelor subțiri cu efecte locale structurale ș.a.*

Este aproape de prisos să subliniem prezentarea excelent tradițională a volumului, interesul lui intrinsec.

D. Mangeron

9. ARZELIÈS H., *Rayonnement et dynamique du corpuscule chargé fortement accéléré*. Trav. Inst. scient. cherif., sér. Sc. phys., *10*, Gauthier-Villars, Paris, 1966, I.II+425 pp.

Încă de la sfîrșitul secolului trecut, cînd s-a început studiul mișcării electronilor, s-a observat că ecuațiile newtoniene nu mai sînt valabile pentru viteze sau accelerații mari. În timp ce problema vitezelor mari și a accelerațiilor mici a fost rezolvată în cadrul „dinamicii relativiste", cazul accelerațiilor mari a condus la apariția unui număr mare de lucrări scrise de autori cu concepții diferite.

Greutatea studiului dinamicii accelerațiilor mari rezultă, în special, din faptul că datele experimentale cantitative sînt inexistente; observațiile arată doar că există un termen de frînare. Acesta este și motivul pentru care lucrarea de față, concepută inițial ca un al treilea volum al „dinamicii relativiste", a apărut ca o monografie particulară din seria de „Studii relativiste" inițiată încă din 1955 de Arzeliès. Prima parte a acestei lucrări, *Interacțiunea electromagnetică Coulomb-Maxwell în vid*, cuprinde schematic rezultatele principale ale teoriei electromagnetice maxwelliene. Se insistă asupra problemelor de energie și de emisie, esențiale pentru subiectul propriu-zis al lucrării și se discută teoriile care propun folosirea potențialelor avansate, soluții ale ecuațiilor lui Maxwell. Partea a doua, *Dinamica punctului încărcat, puternic accelerat; ecuațiile de tip Lorentz-Abraham*, tratează dinamica accelerațiilor mari folosind ecuațiile lui Lorentz-Abraham. Două capitole din această parte se ocupă de proprietățile generale ale ecuației lui Lorentz pentru viteze relativiste, lucru foarte util pentru cititorul care dorește să studieze doar aceste ecuații. În sfîrșit, partea a treia, *Dinamica punctului încărcat, puternic accelerat; ecuațiile diferite de cele ale lui Lorentz-Abraham*, studiază ecuațiile propuse în locul formalismului Lorentz. Se expun ideile lui Dirac și ale lui Wheeler și Feynman, teoria nemaxwelliană a lui Born și Infeld, un exemplu de teorie cu timp discontinuu și alte căi posibile. Se precizează însă că nu există nici un argument consistent în favoarea uneia sau alteia din aceste variante. De remarcat este faptul că pe lîngă abundența bibliografică, lucru de altfel caracteristic lucrărilor lui Arzeliès, autorul indică problemele care pot constitui subiecte noi de cercetare.

Lucrarea este utilă atît fizicienilor care lucrează în domeniul electromagnetismului și teoriei relativității, cît și matematicienilor.

C. Ciubotariu

10. ILBERG W., *Physikalisches Praktikum für Anfänger*. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1967, 367 S.

Cet Ouvrage, publié sous la rédaction du Professeur U. Ilberg de l'Université de Leipzig, avec la collaboration de K. Kreher, M. Krötzsch et H. Schneider, représente un livre moderne de travaux pratiques de Physique, à l'usage des étudiants dans les premières années d'étude. Introduit comme manuel dans les universités et les établissements d'enseignement supérieur de la République Démocratique Allemande, son contenu a été mis en accord avec le développement actuel de la Physique. Ce but a été réalisé par l'introduction de nouveaux travaux de Physique par rapport aux anciens ouvrages (par exemple, étude des sémiconducteurs, effet Hall, expériences de Physique nucléaire, etc.), par l'utilisation d'un apareillage moderne et en partie par une nouvelle présentation du matériel. Tout en gardant les travaux classiques, qu'on ne saurait jamais éliminer d'un livre d'initiation de Physique, les expériences simples, effectuées d'habitude dans le cours secondaire, ont été laissées de côté.

L'Ouvrage contient un nombre de 87 travaux pratiques de Physique (Mécanique 24, Chaleur 17, Électricité 24, Optique et Physique atomique 22). Les 87

expériences décrites sont divisées en 26 groupes d'expériences, réunissant ensemble les expériences de même catégorie. (Ainsi le groupe intitulé *Constantes fondamentales de la Physique* contient les travaux: Charge électrique élémentaire après Millikan, Charge spécifique de l'électron, Expérience de Franck et Hertz et enfin Constante de Rydberg et constante de Planck). Chaque groupe d'expériences est précédé par un exposé théorique assez dévéloppé *(Allgemeine Grundlagen)*, servant à assurer aux étudiants les fondements nécessaires pour bien comprendre et interpréter les expériences décrites. Ensuite chaque expérience de laboratoire séparément contient une mise en thème *(Aufgabe)*, ou l'étudiant fait connaissance avec le principe de la méthode et puis une présentation du procédé expérimental *(Versuchsausführung)*. De cette manière l'étudiant trouve dans l'ouvrage toutes les informations théoriques et pratiques nécessaires pour une bonne exécution des travaux pratiques.

Dans l'introduction de l'Ouvrage, un chapitre est consacré au calcul des erreurs et à la fin du livre on trouve les tableaux de quelques constantes usuelles de la Physique. Notons encore que, se situant toujours sur la ligne de l'actualité, les Auteurs ont utilisé pour la présentation du materiel les unités du Système International d'unités (SI), légalisé déja dans un bon nombre de pays.

Un livre clair, de belle présentation et très utile pour tout laboratoire de Physique, désirant employer les moyens modernes dans la réalisation des travaux pratiques des étudiants.

C. Ruscior

11. EMELEUS H. F., SHARPE A. G. (ed.), *Advances in Inorganic Chemistry and Radiochemistry*. Vol. **6**, Acad. Press, New-York-London, 1964, 530 pp.

Cartea face parte din colecția *Advances in Inorganic Chemistry and Radiochemistry*. Conține 530 de pagini, 95 figuri. 51 tabele, 2389 de trimiteri bibliografice.

Volumul este împărțit în opt capitole. Primul capitol tratează complecșii metalelor tranzitoriale cu fosfine, arsine și stibine și este alcătuit de B. Booth de la Imperial Chemical Limited, Deystuff Division Blackley, Manchester, Anglia. După o introducere scurtă care face obiectul primului subcapitol, autorul, prin cele nouă subcapitole trece în revistă complecșii de Ti, Zr, Hf (din grupa patra), V (din grupa cincea), Cr, Mo, W (din grupa șasea), Mn, Tc, Re (din grupa șaptea), Fe, Ru, Os (din grupa opta A), Co ,Rh, Ir (din grupa opta B), Ni, Pd, Pt (din grupa opta C) și de Cu, Ag, Au (din grupa întîia B).

Al doilea capitol este semnat de C. C. Addison și N. Logan de la Department of Chemistry, The University of Nottingham, Anglia, și tratează problemele cele mai importante ale nitraților metalici anhidri. In cele 136 de pagini autorii discută metodele mai importante de preparare ale nitraților anhidri, studiază ionul nitrat din punct de vedere al structurii (dimensiuni, structura electronică, spectrul de absorbție electronică, spectrul vibrațional), nitrații metalici ionici în cele trei stări de agregare, legătura covalentă a grupei nitrat, influența covalenței asupra proprietăților nitraților metalici, descompunerea nitraților metalici, și sînt trecuți în revistă nitrații metalici pe baza tabelului periodic. Capitolul include proprietățile caracteristice ale ionilor nitrați liberi și ale nitraților ionici.

Următorul capitol abordează un domeniu relativ nou al chimiei și anume reacțiile chimice în descărcări electrice. Autorii Adli S. Kana'an și John L. Margrave de la Department of Chemistry, Rice University, Houston, Texas, scot în evidență realizările cele mai de seamă în domeniul reacțiilor chimice în plasmă examinînd în cele opt subcapitole diferite tipuri de generatoare de plasmă, precum și natura reacțiilor în descărcare, exemplificîndu-se bogat domeniul descărcării luminiscente în arc și jet de plasmă (derivați de B, P, Si, S, Ti, derivați cloruați, reacțiile oxigenului cu halogen, reacțiile compușilor organici, reacția gazelor nobile etc.). Studiul se încheie cu prezentarea numeroaselor aplicații ale descărcării electrice în chimie.

Capitolul de chimia astatinelor este semnat de A. H. W. Aten Jr., de la Institut voor Kernphysick, Onderzock, Amsterdam-Oost din Olanda. Autorul se ocupă de obținerea și dozarea izotopilor astatinelor, trecînd apoi la o caracterizare bine sistematizată a proprietăților chimice ale acestor compuși. Pe lîngă derivații anorganici ai izotopilor este examinată și prezența lor în polihalogenuri, compuși organici și biochimici. Comportarea biochimică a derivaților astatinelor, încheie acest capitol.

Paragraful intitulat *Chimia compușilor siliciului cu azot*, examinat într-un mod amănunțit de U. Wannagat de la Technische Hochschule, Graz, Austria, abordează problema obținerii și proprietățile caracteristice ale legăturii Si-N. Se discută derivații azotsilicici cu azot în stare înaltă de oxidare (—3), derivații azotsilicici în stare joasă de oxidare (+4) și derivații azotsilicici ciclici.

Capitolul dedicat *compușilor peroxidici ai metalelor tranziționale* este alcătuit de J. A. Connor și E. A. V. Ebsworth de la University Chemical Laboratory, Cambridge, Anglia. Autorii dezvoltă în cele 25 de subcapitole, laturile cele mai importante ale peroxizilor. Detectarea și evaluarea peroxizilor metalelor tranziționale prin metode fizice și chimice ocupă un loc de frunte în alcătuirea acestui capitol. În continuare sînt examinați în amănunțit diferiți peroxizi ai metalelor tranziționale (Ti, Zr, Hf, Au, Ag etc.).

Ultimele 4 subcapitole se ocupă cu descompunerea catalitică a apei oxigenate, în aplicațiile analitice ale peroxizilor metalelor tranziționale și cu transportul de oxigen.

Sinteza directă a compușilor organosilicici este capitolul semnat de J. J. Zuchermann de la Baker Laboratory, Cornell University Ithaca, New York. În acest capitol se descriu metodele de obținere a compușilor organosilicici, intermediari pentru polimerii siloxanici. Primul subcapitol se ocupă de reacția Rochow (condițiile reacțiilor, separarea produselor și tehnica reacțiilor industriale). Sînt examinate apoi aplicațiile sintezei directe la alte elemente (ca C, Be, Ge, Sn etc.), reacțiile eterilor, alcoolilor și fenolilor. Sînt prezentate de asemenea mecanismele de reacție și alte sinteze directe de obținere a compușilor organosilicici.

Ultima problemă studiată în acest volum privește *efectul Mössbauer și aplicațiile lui în chimie*, autor E. Fluch de la Anorganisches Chemisches Institut der Universität Heidelberg, Germania. După o comparație sumară în introducere a NMR-lui cu efectul Mössbauer, autorul examinează în continuare noul efect de rezonanță pe baza teoriei fluorescenței rezonante și fluorescenței rezonante nucleare.

Aplicațiile fizice și chimice constituie partea a doua a capitolului.

Volumul este însoțit de numeroase tabele și diagrame, avînd o bogată literatură recentă, care se adaugă modului ireproșabil al editării, contribuind esențial la calitatea lucrării.

Problemele abordate în *Advances in Inorganic Chemistry and Radiochemistry*, vol. 6, editată de H. F. Emeleus și A. G. Sharpe, prezintă un deosebit interes pentru cercetătorii cu preocupări în acest domeniu, oferindu-le un material de sinteză, de înaltă ținută științifică.

F. Denes

12. BRADSTREET R. B., *The Kjeldahl Method for Organic Nitrogen*. Academic Press, New York, London, 1965, 239 pp.

Cartea este o monografie a metodei Kjeldahl, pentru azotul organic, și a variantelor ei aplicate la produsele naturale și materiale organice.

Autorul cărții este R. B. Bradstreet, cercetător la firma United States Testing Co. Petroleum Division din Hoboken, New Jersey, Statele Unite.

Lucrarea este divizată în patru capitole și o anexă, cuprinzînd bibliografia generală. Primul capitol avînd titlul *Introducere în metoda Kjeldahl*, prezintă o descriere scurtă, principială, a metodei Kjeldahl, autorul trecînd în revistă perfecționarea cronologică a metodei, accentuînd asupra avantajelor și dezavantajelor

pe care le prezintă comparativ cu alte metode, precum și asupra îmbunătățirilor ce pot fi aduse.

Al doilea capitol, denumit *Digerarea Kjeldahl*, tratează probleme legate de procesul propriu-zis de distrugere a substanței organice. Se face o prezentare amplă, amănunțită, a fiecăruia dintre factorii care influențează procesul, cum ar fi: acidul, adaosul de săruri, agenții oxidanți, reductorii, perioada de fierbere după digerare, catalizatorii.

În a treia parte a cărții, cu caracter aplicativ, autorul prezintă posibilitățile de utilizare a metodei pentru fiecare din grupele mai importante de produși naturali (îngrășăminte, piele, cereale, iarbă, sol, materiale biologice, alimente, cărbune, combustibili, țiței), respectiv compuși organici (tiamine, nitroderivați, piridina și derivații ei, azot heterociclic, legături mixte cu azot). Sînt descrise și variantele submicro ale metodei.

Ultimul capitol conține descrierea *Distilării și a determinării azotului.*

Autorul îmbină în mod armonios problemele teoretice legate de chimismul procesului și de metodica de lucru prezentînd pentru fiecare caz specific modalitățile optime de efectuare a analizei.

Bibliografia atașată fiecărui capitol este completată cu o anexă denumită *Bibliografie Generală*, care constituie o culegere completă a referințelor bibliografice, orientarea cititorului în acest domeniu foarte bogat fiind mult ușurată de categorizarea datelor după natura produșilor de analizat, respectiv după factorii de bază ai procesului.

Autorul reușește ca într-un spațiu relativ redus să facă o prezentare exhaustivă a problematicii, prezentare bine fundamentată cu date bibliografice și totodată prin marele număr de rețete și metode de lucru descrise, să asigure utilitatea cărții nu numai pentru teoreticieni, ci și pentru practica curentă de laborator.

Cartea a apărut într-o prezentare îngrijită, bibliofilă, cu grafică ireproșabilă.

Benedek István

13. BALLHAUSEN C. J., GRAY H. B., *Molecular Orbital Theory*. W. A. Benjamin Inc., New-York, Amsterdam, 1964, 273 pp.

Volumul recenzat este o introducere în teoria orbitalilor moleculari ca metodă de studiu a stărilor fundamentale și excitate a moleculelor anorganice.

Prima parte cuprinde 8 capitole și se ocupă mai întîi de noțiunea de orbital atomic, cu referire la atomul de hidrogen, apoi de orbitalii moleculari pentru molecule diatomice, triatomice, tetratomice și cu mai mulți atomi în moleculă. Se tratează pe larg principiile fundamentale care stau la baza construcției și proprietăților orbitalilor moleculari. Se abordează pe o bază intuitivă proprietățile de simetrie a moleculelor în raport cu orbitalii moleculari, respectiv cu funcțiile de undă moleculare. De asemenea se prezintă metodele de calcul a energiei totale pentru complecși metalici octaedrici.

Partea a doua cuprinde probleme spre rezolvare pentru o mai bună înțelegere a formării orbitalilor moleculari și a operațiilor de simetrie moleculară, precum și o notă de 10 titluri de lucrări în acest domeniu pentru consultare.

La sfîrșitul lucrării sînt prezentate 11 referate din diverse reviste de specialitate cu privire la aplicațiile teoriei orbital moleculare.

Lucrarea se adresează în special chimiștilor anorganicieni și studenților avansați.

I. Cocîrlă

14. NOISEL CL., *Hydrogénolyse catalytique de l'α-méthylnaphtalène en régime dynamique*. Thèses présentées à la faculté des sciences de l'Université de Paris pour obtenir le titre de docteur-ingénieur, 87 pp.

Lucrarea cuprinde 7 capitole. În introducere se arată avantajele hidrogenării catalitice față de cea termică, care necesită temperatură înaltă (600°...700°C) și presiune ridicată (100 at.).

Se face apoi o prezentare a datelor din literatură privitoare la hidrodesalchilarea termică și catalitică a α-metilnaftalinei.

În capitolul III se studiază termodinamica reacțiilor de hidrogenare și hidrodesalchilare considerîndu-se energia liberă de formare ΔG_f, energia liberă de hidrodesalchilare și hidrogenare, constanta de echilibru K_p, randamentul în produse hidrogenate, reacția de izomerizare a metiltetralinelor.

În capitolul IV se descrie aparatura și modul de lucru. Se face apoi studiul reacției catalitice cu determinarea parametrilor cinetici în reacția competitivă a α- și β-metilnaftalinei.

În lucrare se folosesc mai multe metode de calcul în scopul de a verifica de fiecare dată, rezultatele obținute.

Autorul ajunge la concluzia că la o conversie slabă trebuie ținut seama nu numai de reacția de hidrogenare dar și de reacția inversă. Se calculează valoarea constantei de echilibru a reacției la diverse temperaturi, găsindu-se valori diferite de cele calculate cu ajutorul datelor din literatură. Considerîndu-se vitezele de reacție concordante ale celor două produse principale ale reacției — naftalina și metiltetralina, se obține raportul constantelor de viteză în cele două reacții considerate paralele. Se calculează de asemenea entropia și entalpia reacției de hidrogenare a metilnaftalinei la metiltetralină și a reacției de hidrogenare a naftalinei la tetralină.

În lucrare se fac unele aproximații pentru a se putea utiliza expresiile complexe ale vitezelor de reacție. Deși se utilizează diverse metode de calcul se obțin totuși valori concordante.

Lucrarea este importantă prin faptul că se realizează un studiu cantitativ al reacției de hidrogenare a α- și β-metilnaftalinei catalizată de oxidul de crom depus pe aluminiu.

* * *

The present work is an attempt to give an quantitative study of the catalytic reduction of α- and β-methylnaphtalene by means of aluminium-chromium oxide catalyst.

T. Lixandru

15. SIMIONESCU CR., VASILIU-OPREA CL., *Mecanochimia compușilor macromoleculari*. Ed. Acad. R.S.R., Buc., 1967, 343 pp.

Literatura originală de specialitate din domeniul chimiei macromoleculare, apărută în țara noastră, este la începutul afirmării ei. Editarea unei cărți, care ea însăși constituie o noutate în acest domeniu, este un eveniment demn de semnalat, eveniment care capătă o semnificație deosebită, atunci cînd mai cu seamă lucrarea apărută se referă la un nou aspect al chimiei macromoleculare tratat la un nivel ridicat, așa cum este cazul cu monografia intitulată *Mecanochimia compușilor macromoleculari*.

Domeniul mecanochimiei polimerilor este obiectul cercetărilor recente ale unor centre științifice de renume din unele țări ca: Anglia, R. D. Germană, U.R.S.S., Japonia etc., iar în ultimii ani cercetări în această direcție au fost inițiate și în țara noastră, la Institutul politehnic și la Institutul de chimie macromoleculară „P. Poni" din Iași. Acest lucru a permis autorilor să includă în această lucrare cu caracter monografic și rezultatele propriilor cercetări în acest domeniu.

Literatura de specialitate în domeniul mecanochimiei polimerilor nu cunoaște decît un număr foarte limitat de lucrări de sinteză, astfel încît inițiativa de a întocmi o asemenea monografie răspunde nu numai necesităților țării noastre, dar umple și un gol existent pe plan internațional, aducîndu-se astfel un punct de vedere original în sistematizarea și interpretarea rezultatelor obținute pînă în prezent în acest domeniu de vîrf al cercetării chimice.

Substanțiala bibliografie citată după fiecare capitol (peste 600 indicații bibliografice), dovedește pe deplin efortul depus de autori pentru a oferi o lucrare exhaustivă, adusă la zi cu cele mai noi contribuții teoretice din acest domeniu.

Definind mecanochimia ca „știința transformărilor reciproce a energiilor mecanice și chimice", autorii arată că această disciplină și-a evidențiat în primul rînd posibilitățile în domeniul cercetării produșilor macromoleculari naturali și sintetici, unde mecanochimia a găsit un fertil teren de dezvoltare, de interpretări teoretice și de aplicații interesante.

Lucrarea cuprinde două mari capitole. Mai întîi, în introducere, se face o pregătire a bazelor mecanice a distrucției chimice, a mecanismului și cineticii proceselor de distrucție mecanochimică precum și a factorilor care generează procesele de distrucție mecanochimică, arătîndu-se consecințele acestor procese asupra compușilor macromoleculari.

Volumul cel mai mare al lucrării este consacrat datelor referitoare la capitolul *Distrucția mecanochimică a compușilor macromoleculari*, întrucît acest domeniu a fost cel mai des abordat în diferite studii și prezintă posibilitățile cele mai imediate pentru practică. În limitele acestui capitol sînt prezentate: distrucția mecanochimică prin masticare la rece, cu consecințele ei asupra plastomerilor; măcinarea vibratorie a polimerilor; distrucția în timpul proceselor de obosire și de prelucrare a polimerilor precum și distrucția prin crioliză, acordîndu-se un loc important distrucției mecanochimice a polimerilor prin acțiunea ultrasunetelor.

Cel de al doilea capitol este dedicat *sintezei mecanochimice a compușilor macromoleculari*, arătîndu-se rolul diferitelor metode mecanochimice asupra proceselor de interpolimerizare în obținerea copolimerilor bloc și grefați (prin masticare la rece, măcinare vibratorie, ultrasonare etc.). Sînt prezentate de asemenea și procesele de sinteză mecanochimică inițiate la suprafețele solide prelucrate mecanic.

Autorii își încheie lucrarea subliniind importanța practică și perspectivele mecanochimiei compușilor macromoleculari.

Din această succintă trecere în revistă a conținutului lucrării se desprinde clar importanța acestui nou domeniu în plină dezvoltare, în care sînt în curs de elaborare noi concluzii teoretice și practice de deosebită importanță pentru dezvoltarea industriei polimerilor.

Lucrarea scrisă cu rigurozitate științifică, se remarcă prin claritatea stilului și prin conciziunea lui. Un bogat material ilustrativ înlesnește lectura și ajută la înțelegerea mai completă a faptelor și fenomenelor descrise.

Prin bogatul material documentar, baza teoretică a sintezei pe cale mecanochimică și indicațiile date asupra principiilor generale ale acestei noi căi de sinteză, lucrarea se adresează unui larg cerc de specialiști din domeniul produșilor macromoleculari.

M. Dima

16. GRIFF A. L., *Plastics Extrusion Technology*. Reinhold Publ. Co., New-York.

Lucrarea începe cu prezentarea construcției extruderului, părțile sale componente, sistemele de încălzire-răcire, principiul de funcționare etc.

Cel de-al doilea capitol este destinat descrierii particularităților tehnologice ale celor șapte grupe de articole ce pot fi obținute prin extrudere și anume: țevi, plăci, folii, izolații pentru cabluri, monofilamente, acoperiri-protecții, diferite profile.

Capitolele 3—9 (inclusiv) abordează detaliat tehnologiile de fabricare ale acestor articole. Astfel, în partea în care se tratează extruderea țevilor se prezintă polimerii ce pot fi prelucrați pe atari produse, aparatele ce compun o linie de fabricație, procedeele de calibrare a țevilor, controlul fabricației, finisarea etc. Amănuntit se tratează extruderul pentru obținerea plăcilor, tehnologiile speciale de fabricație a foliilor, parametrii extruderii acoperirilor de protecție și a electro izolanților. Aceste capitole sînt însoțte de trimiteri la diferite standarde care prevăd caracteristicile ce trebuie să le întrunească articolele extruse, ca și de tabele ce conțin prezentări de defecte ce pot surveni în cursul fabricației lor, ca și cauzele ce le determină.

Partea de exploatare a extruderului (cap. 10), pe lîngă unele indicații de calcul a puterii consumate de extruder la prelucrarea diferiților polimeri, furnizează date privind stabilirea productivității și a eficienței mașinii, unele considerații tehnico-economice și căile de curățire a extruderului.

În linii cu totul generale se dezvoltă, în penultimul capitol (cap. 11), teoria extruderii, menționîndu-se problemele rămase nerezolvate în acest domeniu.

Ultimul capitol (al 12-lea), trece în revistă metodele speciale de extrudere ce recurg la: extrudere rapide, extrudere verticale, extrudere fără melci, extrudere cu tobă rotitoare, extrudere pentru mașini de injecție, melci cu două canale etc.

Lucrarea este însoțită de 344 trimiteri bibliografice, de numeroase diagrame și fotografii care contribuie în măsură însemnată la adîncirea problemelor expuse, de tabele care furnizează multe date folositoare celor ce lucrează cu extrudere.

Cartea este de un real folos celor ce proiectează și construiesc instalații de extrudere, tehnicienilor și inginerilor care exploatează astfel de mașini, cercetătorilor din domeniul maselor plastice și studenților secțiilor de tehnologia compușilor macromoleculari.

D. Feldman

17. MOCANU D. R., BUGU M., GEORGESCU C., *Determinarea experimentală a eforturilor unitare*. Ed. Transporturilor și Telecomunicațiilor, Buc., 1966, 255 pp.

Autorii prezintă o lucrare de mare utilitate atît pentru construcția de mașini cît și pentru construcții în general. Problema măsurării deformațiilor elementelor de mașini și de construcții prin metode nedestructive în vederea determinării eforturilor unitare, prezintă la nivelul actual al cunoștințelor un interes deosebit; trebuie de ținut seama că în foarte multe cazuri eforturile unitare și deformațiile nu se pot calcula cu precizie din cauza complexității formelor constructive.

Metodele experimentale nedestructive permit determinarea acestor mărimi și cu aceasta permit îmbunătățirea calculului și proiectării noilor elemente de mașini și de construcții pe baze mai sigure; permit totodată și realizări pe de o parte mai durabile, pe de altă parte mai economice.

Conținutul cărții este împărțit în 9 capitole după cum urmează:

Cap. 1 tratează aspecte generale referitoare la eforturi unitare și deformații, legătura dintre ele; se insistă apoi asupra stabilirii direcțiilor de măsurare a deformațiilor. Aceste noțiuni sînt absolut necesare pentru celelalte capitole.

Cap. 2 tratează despre aparatura și metodele clasice pentru măsurarea deformațiilor și anume tensometrele mecanice, optice, pneumatice, cu coardă vibrantă și cele acustice.

Cap. 3 studiază metoda de măsurare a alungirilor cu ajutorul lacurilor casante cu exemple de aplicație a acestor lacuri.

În cap. 4 se cercetează bazele tensometriei electrice și anume: traductoare rezistive, tensoefectul, adezivi, confecționarea și verificarea mărcilor, adezivi și traductoare inductive.

Cap. 5 tratează despre aparatura necesară tensometriei electrice; se insistă asupra utilizării atît a aparaturii de utilitate curentă cît și a aparaturii existente pe plan mondial.

Cap. 6 expune tehnica măsurătorilor cu ajutorul mărcilor tensometrice; se insistă asupra înlăturării tuturor factorilor ce pot altera măsurătorile; se dau unele indicații care arată experiența îndelungată a autorilor în acest domeniu.

Cap. 7 tratează despre aparatele indicatoare construite cu ajutorul traductoarelor, aparate destinate pentru măsurarea forțelor, momentelor, presiunilor, deplasărilor și vibrațiilor.

Cap. 8 prezintă o serie de exemple de determinare a solicitărilor și eforturilor unitare la șasiul vagoanelor, la longeroanele locomotivelor, la șasiul autocamioanelor și la tablierul unui pod de cale ferată.

Cap. 9 cercetează originea, importanța și metodele de măsurare ale tensiunilor remanente.

Succesiunea capitolelor este bine aleasă iar modul de tratare este clar, concis și de nivel superior; se prezintă astfel într-un număr restrîns de pagini întregul material necesar acestor măsurători.

Cartea poate fi utilizată la aplicațiile tensometriei și în alte domenii constructive, nu numai la material rulant și construcții feroviare. Se folosește cu precădere îndelungata experiență a Institutului de cercetări în transporturi și telecomunicații și experiența și lucrările autorilor în acest domeniu care au și caracter de originalitate.

Cu această lucrare, deosebit de utilă, se completează literatura noastră tehnică; ea permite tuturor inginerilor și tehnicienilor să abordeze probleme de tensometrie care la nivelul actual sînt absolut necesare atît în domeniul construcției de mașini cît și în construcții în general.

N. Popinceanu

18. SEVERINEANU C., POPESCU P., *Organe de mașini.* Ed. did. și pedagog., Buc., 1965, 720 pp.

Cartea este un manual destinat studenților de la facultățile cu caracter mecanic. Întregul material tratat este împărțit în patru părți după cum urmează:

Partea întîia tratează capitolele: Asamblări nedemontabile (nituite, sudate, lipite), Asamblări demontabile (pene transversale, pene longitudinale), Șuruburi și buloane, Asamblări prin strîngere, Asamblări elastice.

În partea a doua se expun capitolele: Organele mișcării de rotație, Arbori și axe, Fusuri, Fenomenul de oboseală la axe și arbori, Ungerea fusurilor, Lagăre de alunecare, Lagăre cu rulmenți și Organe de legătură (cuplaje permanente, ambreiaje).

Partea a treia studiază organele transmisiilor mecanice pe capitole și anume: Transmisii prin curele (late, trapezoidale și rotunde), Transmisii prin roți de fricțiune (cilindrice, conice și variatori de viteză) și Transmisii prin roți dințate (cilindrice cu dinți drepți și înclinați, conice și angrenaje cu melc și globoid).

Partea a patra cercetează organele transformării mișcării de rotație în mișcare rectilinie alternativă și invers și anume: Mecanismul cu bielă manivelă (elemente componente, biela, manivele, arbori cotiți, capul de cruce, volantul, pistoane, segmenți, tijă de piston, presetupele).

Lucrarea tratează toate capitolele de organe de mașini care se predau la studenții facultăților cu caracter mecanic de la noi din țară (mai puțin conducte și armături).

Cartea se adresează mai întîi studenților dar poate fi utilizată și pentru studiu și proiectare în general.

Se insistă la fiecare capitol în parte asupra legăturii dintre latura teoretică și sensul fizic al problemelor, cu condițiile reale de funcționare a mașinilor și chiar cu metodele reale de fabricație a lor; este al doilea manual complet de organe de mașini apărut la noi în țară.

Din conținutul capitolelor reiese clar caracterul disciplinei organe de mașini ca disciplină de tehnică generală din care se pot face particularizări pentru disciplinile tehnice de specialitate și pentru cazurile practice concrete.

Se pot cita în acest sens spre exemplificare capitolele: șuruburi, arbori și osii, mecanismul cu bielă manivelă etc.

Modul de exprimare este clar, concis și la nivel superior; de asemenea lucrarea prezintă originalitate în sensul că introduce pe student și cercetător cu ușurință în probleme complexe de calcul al organelor de mașini; alegerea figurilor și a exemplelor din text este judicios și bine făcută.

Toate aceste calități atestă și pe această cale îndelungata experiență didactică și tehnică a autorilor.

N. Popinceanu